

## Вариант № 41054184

## 1. Задание 1 № 26657

Найдите корень уравнения  $\log_4(x+3) = \log_4(4x-15)$ .

**Решение.**

Логарифмы двух выражений равны, если сами выражения равны и при этом положительны:

$$\log_4(x+3) = \log_4(4x-15) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 4x-15 \\ 4x-15 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ 4x > 15 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: 6.

Ответ: 6

## 2. Задание 2 № 320179

Из множества натуральных чисел от 10 до 19 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

**Решение.**

Натуральных чисел от 10 до 19 включительно десять, из них на три делятся три числа: 12, 15, 18. Следовательно, искомая вероятность равна  $3:10 = 0,3$ .

Ответ: 0,3.

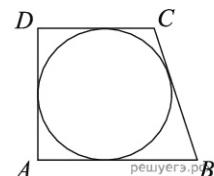
**Примечание.**

Фраза от «числа  $M$  до  $N$ » подразумевает, что и  $M$ , и  $N$  включаются в диапазон. Количество чисел в указанном диапазоне можно найти по формуле  $N - M + 1$ . Фраза «число делится на  $k$ » подразумевает, что число делится на  $k$  без остатка. Такие соглашения используются в сборниках для подготовки к экзаменам во всех задачах подобного типа.

Ответ: 0,3

## 3. Задание 3 № 27938

Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.



**Решение.**

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда  $AB + CD = BC + AD$ ,

$$r = \frac{AD}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{P}{2} - BC \right) = \frac{11 - 7}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

Ответ: 2

**4. Задание 4 № 26859**

Найдите значение выражения  $\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0,2.$

**Решение.**

Выполним преобразования:

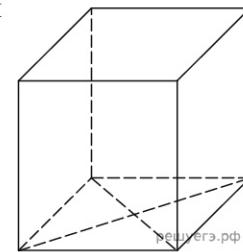
$$\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0,2 = \log_7 5 + \log_7 0,2 = \log_7 1 = 0.$$

Ответ: 0.

Ответ: 0

**5. Задание 5 № 27062**

Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, а боковое ребро призмы равно 10.



**Решение.**

Сторона ромба  $a$  выражается через его диагонали  $d_1$  и  $d_2$  формулой

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 5.$$

Найдем площадь ромба

$$S_p = \frac{1}{2} d_1 d_2 = 24.$$

Тогда площадь поверхности призмы равна

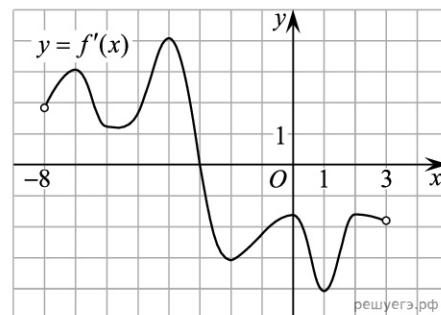
$$S = 2S_{\text{очн}} + S_{\text{бок}} = 2S_p + 4aH = 48 + 4 \cdot 5 \cdot 10 = 248.$$

Ответ: 248.

Ответ: 248

**6. Задание 6 № 27491**

На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-8; 3)$ . В какой точке отрезка  $[-3; 2]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?



**Решение.**

На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке  $-3$ .

Ответ:  $-3$ .

Ответ:  $-3$

### 7. Задание 7 № 27981

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 749 МГц. Скорость погружения батискафа вычисляется по формуле  $v = c \frac{f - f_0}{f + f_0}$ , где  $c = 1500$  м/с — скорость звука в воде,  $f_0$  — частота испускаемых импульсов,  $f$  — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 2 м/с.

**Решение.**

Задача сводится к решению уравнения  $v = 2$  м/с при известных значениях  $c = 1500$  м/с — скорости звука в воде и  $f_0 = 749$  МГц — частоты испускаемых импульсов:

$$\begin{aligned} v = 2 &\Leftrightarrow 1500 \cdot \frac{f - 749}{f + 749} = 2 \Leftrightarrow 750 \cdot \frac{f - 749}{f + 749} = 1 \Leftrightarrow 750f - 750 \cdot 749 = f + 749 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 749f = 749 \cdot 751 \Leftrightarrow f = 751 \text{ МГц.} \end{aligned}$$

Ответ: 751.

Ответ: 751

### 8. Задание 8 № 99575

Имеются два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

**Решение.**

Пусть масса первого сплава  $m_1$  кг, а масса второго —  $m_2$  кг. Тогда массовое содержание никеля в первом и втором сплавах  $0,1m_1$  и  $0,3m_2$ , соответственно. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 200, \\ 0,1m_1 + 0,3m_2 = 0,25 \cdot 200, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = 200 - m_1, \\ 0,1m_1 + 0,3(200 - m_1) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = 200 - m_1, \\ 0,2m_1 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 50, \\ m_2 = 150. \end{cases}$$

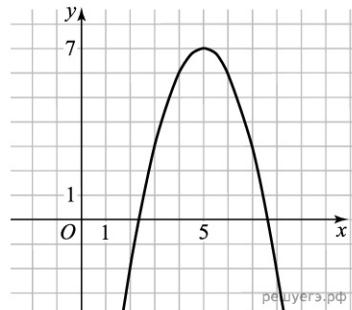
Таким образом, первый сплав легче второго на 100 килограммов.

Ответ: 100.

Ответ: 100

### 9. Задание 9 № 562283

На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где числа  $a, b$  и  $c$  — целые. Найдите значение дискриминанта уравнения  $f(x) = 0$ .



**Решение.**

По рисунку определяем, что  $f(x) = -(x - 5)^2 + 7 = -x^2 + 10x - 18$ , значит,  $a = -1, b = 10, c = -18$ .

Тогда дискриминант уравнения  $-x^2 + 10x - 18 = 0$  равен

$$D = 10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-18) = 28.$$

Ответ: 28.

Ответ: 28

**10. Задание 10 № 320206**

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

**Решение.**

Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х — хорошая, О — отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды:

$$P(XXO) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128;$$

$$P(XOO) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,128;$$

$$P(OXO) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008;$$

$$P(OOO) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,128.$$

Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(XXO) + P(XOO) + P(OXO) + P(OOO) = 0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,128 = 0,392.$$

Ответ: 0,392.

Ответ: 0,392

**11. Задание 11 № 507908**

Найдите наименьшее значение функции  $y = 7^{x^2 - 2x + 3}$ .

**Решение.**

Поскольку функция  $y = 7^x$  возрастающая, заданная функция достигает наименьшего значения в той же точке, в которой достигает наименьшего значения выражение  $x^2 - 2x + 3$ . Квадратный трехчлен  $y = ax^2 + bx + c$  с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке  $x = -\frac{b}{2a}$ , в нашем случае — в точке 1. Значение функции в этой точке равно  $y = 7^{1^2 - 2 \cdot 1 + 3} = 49$ .

Ответ: 49.

Ответ: 49

**12. Задание 12 № 501689**

а) Решите уравнение  $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$ .

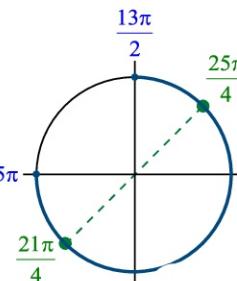
**Решение.**

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$\begin{aligned} 15^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} &= 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} \Leftrightarrow 5^{\cos x} = 3^{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку  $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$ . Получим числа:  $\frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$ .

Ответ: а)  $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; б)  $\frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$ .



### 13. Задание 13 № 515801

Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно  $\sqrt{730}$ .

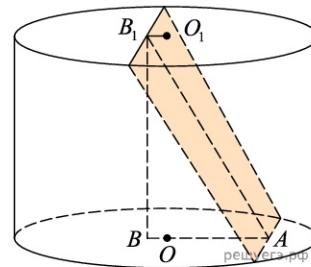
- Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.
- Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

**Решение.**

Сразу отметим, что в окружности радиуса  $R$  расстояние от центра до хорды (то есть до середины хорды) длиной  $2a$  равно  $\sqrt{R^2 - a^2}$ . Поэтому расстояния от центров оснований до хорд равны 5 и 12.

а) Пусть  $A$  и  $B_1$  — середины хорд,  $B$  — проекция  $B_1$  на другое основание цилиндра. Тогда  $AB = 12 \pm 5$ ,

$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{21^2 + (12 \pm 5)^2} = \sqrt{730}$ , поэтому следует выбирать знак  $+$ , что как раз и означает, что хорды лежат по разные стороны от центров оснований, поэтому центры лежат по разные стороны от плоскости.



б) Указанные две плоскости пересекаются по хорде, содержащей точку  $A$ , при этом  $AB$  перпендикулярна этой хорде, следовательно, и  $AB_1$  тоже. Поэтому

$$\alpha = \angle BAB_1 = \arctg \frac{BB_1}{AB} = \arctg \frac{21}{17}.$$

Ответ: б)  $\arctg \frac{21}{17}$ .

## 14. Задание 14 № 484585

Решите неравенство:  $\frac{14^{1+\lg x}}{7\lg^2(100x)\lg(0,1x)} \geq \frac{(4 \cdot 2^{\lg(10x)})^{1+\lg x}}{4\lg^2(100x)\lg(0,1x)}.$

**Решение.**

Заметим, что

$$(4 \cdot 2^{\lg(10x)})^{1+\lg x} = (4 \cdot 2^{1+\lg x})^{1+\lg x} = 4^{1+\lg x} \cdot 2^{(1+\lg x)^2} = 2^{2(1+\lg x)} \cdot 2^{(1+\lg x)^2} = 2^{1+\lg x} \cdot 2^{1+\lg x} \cdot 2^{(1+\lg x)^2} = \\ = 2^{1+\lg x} \cdot 2^{1+\lg x} \cdot 2^{\lg^2 x + 2\lg x + 1} = 2^{1+\lg x} \cdot 2^{1+\lg x + \lg^2 x + 2\lg x + 1} = 2^{1+\lg x} \cdot 2^{\lg^2 x + 3\lg x + 2}$$

Преобразуем обе части неравенства:

$$\frac{2^{1+\lg x} \cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x + 2)^2(\lg x - 1)} \geq \frac{2^{2(1+\lg x)} \cdot 2^{(1+\lg x)^2}}{4(\lg x + 2)^2(\lg x - 1)} \Leftrightarrow \frac{2^{1+\lg x} \cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x + 2)^2(\lg x - 1)} \geq \frac{2^{(1+\lg x)} \cdot 2^{\lg x^2 + 3\lg x + 2}}{4(\lg x + 2)^2(\lg x - 1)}.$$

Разделив обе части на  $2^{1+\lg x}$  и сократив левую часть на 7, а правую на 4, получим:

$$\frac{7^{\lg x}}{(\lg x + 2)^2(\lg x - 1)} \geq \frac{2^{\lg^2 x + 3\lg x}}{(\lg x + 2)^2(\lg x - 1)} \Leftrightarrow \frac{7^{\lg x} - 2^{\lg^2 x + 3\lg x}}{(\lg x + 2)^2(\lg x - 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2^{\log_2 7 \cdot \lg x} - 2^{\lg^2 x + 3\lg x}}{(\lg x + 2)^2(\lg x - 1)} \geq 0.$$

Сделаем замену:  $y = \lg x$ , тогда получим

$$\frac{2^{y \log_2 7} - 2^{y^2 + 3y}}{(y + 2)^2(y - 1)} \geq 0,$$

откуда методом рационализации, получим

$$\frac{y \cdot \log_2 7 - (y^2 + 3y)}{(y + 2)^2(y - 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y(y - (\log_2 7 - 3))}{(y + 2)^2(y - 1)} \leq 0.$$

Решим полученное рациональное неравенство:

$$\begin{cases} y < -2, \\ -2 < y \leq \log_2 7 - 3, \\ 0 \leq y < 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{100}, \\ \frac{1}{100} < x \leq 10^{\log_2 7 - 3}, \\ 1 \leq x < 10. \end{cases}$$

Ответ:  $\left(0; \frac{1}{100}\right) \cup \left(\frac{1}{100}; 10^{\log_2 7 - 3}\right] \cup [1; 10).$

## 15. Задание 15 № 512441

Баржа грузоподъемностью 134 тонны перевозит контейнеры типов А и В. Количество загруженных на баржу контейнеров типа В не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляет 2 тонны и 5 млн. руб., контейнера типа В – 5 тонн и 7 млн. руб. соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн. руб.) всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

**Решение.**

Пусть  $x$  — количество перевозимых контейнеров типа А,  $y$  — количество контейнеров типа В,  $x, y \in \mathbb{N}$ . Тогда вес контейнеров типа А составит  $2x$  т, типа В —  $5y$  т. В соответствии с

условием задачи  $2x + 5y \leq 134$ . Кроме того, должно выполняться условие:  $y \geq \frac{5}{4}x$ .

Пусть  $S$  — суммарная стоимость всех контейнеров. Тогда  $S = 5x + 7y$ . Нам предстоит исследовать функцию  $S(x, y)$  на наибольшее значение при заданных условиях.

Имеем:  $S = 5x + 7y \Leftrightarrow x = \frac{S - 7y}{5}$ , значит,

$$\begin{cases} \frac{2(S - 7y)}{5} + 5y \leq 134, \\ y \geq \frac{5(S - 7y)}{4 \cdot 5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S - 14y + 25y \leq 670, \\ 4y \geq S - 7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y \leq 670 - 2S, \\ 11y \geq S \end{cases} \Leftrightarrow \frac{S}{11} \leq y \leq \frac{670 - 2S}{11}.$$

Найдем, при каком значении  $y$  выполняется неравенство  $\frac{S}{11} \leq \frac{670 - 2S}{11}$ .

$$3S \leq 670 \Leftrightarrow S \leq 223\frac{1}{3}.$$

Поскольку  $x, y$ , а также стоимости контейнеров — числа натуральные, то  $S \in \mathbb{N}$ . Значит,  $S \leq 223$ .

Если  $S = 223$ , то  $\frac{223}{11} \leq y \leq \frac{670 - 446}{11} \Leftrightarrow 20\frac{3}{11} \leq y \leq 20\frac{4}{11}$ . Натуральных решений нет.

Если  $S = 222$ , то  $\frac{222}{11} \leq y \leq \frac{670 - 444}{11} \Leftrightarrow 20\frac{2}{11} \leq y \leq 20\frac{6}{11}$ . Натуральных решений нет.

Если  $S = 221$ , то  $\frac{221}{11} \leq y \leq \frac{670 - 442}{11} \Leftrightarrow 20\frac{1}{11} \leq y \leq 20\frac{8}{11}$ . Натуральных решений нет.

Если  $S = 220$ , то  $\frac{220}{11} \leq y \leq \frac{670 - 440}{11} \Leftrightarrow 20 \leq y \leq 20\frac{10}{11}$ . Натуральное решение:  $y = 20$ .

Вычислим значение  $x$  при  $y = 20$ .  $x = \frac{220 - 140}{5} = 16 \in \mathbb{N}$ .

Итак, искомое значение 220 млн. руб.

Ответ: 220 млн. руб.

### Приведём арифметическое решение.

Заметим, что контейнер типа  $A$  приносит 2,5млнруб. за тонну, а контейнер типа  $B$  — 1,4млнруб. за тонну, поэтому контейнеры типа  $A$  должны быть как можно больше, а контейнеры типа  $B$  как можно меньше. По условию, на каждые 4 контейнера типа  $A$  должно приходиться не менее 5 контейнеров типа  $B$ . Пусть контейнеров типа  $A$  будет  $4x$ , а контейнеров типа  $B$  —  $5x$ , их общий вес составит  $8x + 25x = 33x$  тонн. Грузоподъёмность баржи 134 тонны, поэтому наибольшее возможное целое значение  $x = 4$ .

Если  $x=4$ , то на баржу можно загрузить 16 контейнеров типа  $A$  и 20 контейнеров типа  $B$ , их стоимость составит  $80+140=220$ млнруб. При этом баржа будет недогружена на 2тонны.

Заменим два контейнера типа  $A$  одним контейнером типа  $B$ . Стоимость 14 контейнеров типа  $A$  и 21 контейнера типа  $B$  составляет  $70+147=217$ млнруб., при этом баржа недогружена на 1 тонну. Можно было бы загрузить баржу полностью, заменив ещё два контейнера типа  $A$  одним контейнером типа  $B$ , но при этом общая стоимость контейнеров снова бы снизилась на 3 млн руб. Из этого следует, что оптимально не загружать баржу полностью, а загрузить на неё 16 контейнеров типа  $A$  и 20 контейнеров типа  $B$  общей стоимостью 220млнруб.

### Примечание.

Проверять изменение стоимости при дозагрузке не полностью нагруженной баржи — обязательная часть решения. Например, если бы контейнер типа  $B$  стоил 11 млн руб., а другие данные задачи не поменялись бы, то стоимость 16 контейнеров типа  $A$  и 20 контейнеров типа  $B$  составила бы  $80+220=300$ млнруб. (недогружено 2 тонны), стоимость 14 контейнеров типа  $A$  и 21 контейнера типа  $B$  составила бы  $70+231=301$ млнруб. (недогружена 1 тонна), а стоимость 12 контейнеров типа  $A$  и 22 контейнеров типа  $B$  составила бы 302млнруб. — баржа загружена полностью, прибыль максимальна, дальнейшая замена контейнеров типа  $A$  на контейнеры типа  $B$  приводит к уменьшению прибыли.

См. так же решение задания [513295](#).

## 16. Задание 16 № 514482

В трапеции  $ABCD$  точка  $E$  — середина основания  $AD$ , точка  $M$  — середина боковой стороны  $AB$ . Отрезки  $CE$  и  $DM$  пересекаются в точке  $O$ .

- Докажите, что площади четырёхугольника  $AMOE$  и треугольника  $COD$  равны.
- Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника  $AMOE$ , если  $BC \equiv 3$ ,  $AD \equiv 4$ .

**Решение.**

а) Обозначим высоту трапеции через  $h$  (рис. 1). Тогда расстояние от точки  $M$  до прямой  $AD$  равно  $\frac{h}{2}$ . Значит,

$$S_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{AD}{2} = S_{CED}.$$

При этом

$$S_{AMD} = S_{AMOE} + S_{EOD},$$

$$S_{CED} = S_{COD} + S_{EOD},$$

поэтому  $S_{AMOE} = S_{COD}$ .

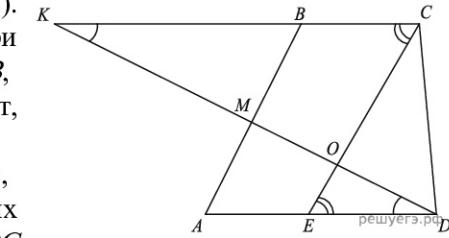
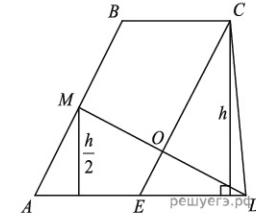
б) Пусть прямые  $BC$  и  $MD$  пересекаются в точке  $K$  (рис. 2). Тогда  $\angle KBM = \angle MAD$  как накрест лежащие при параллельных прямых  $KC$  и  $AD$  и секущей  $AB$ ,  $\angle BMK = \angle AMD$  как вертикальные,  $AM \equiv BM$ . Значит, треугольники  $AMD$  и  $BMK$  равны, откуда  $BK \equiv AD \equiv 4$ .

Углы  $KOC$  и  $DOE$  равны как вертикальные,  $\angle OED = \angle OCK$  как накрест лежащие при параллельных прямых  $KC$  и  $AD$  и секущей  $CE$ . Значит, треугольники  $KOC$

и  $DOE$  подобны по двум углам, откуда  $\frac{OE}{OC} = \frac{ED}{CK} = \frac{2}{7}$ . Следовательно,

$$S_{AMOE} = S_{COD} = \frac{7}{9} S_{CDE} = \frac{7}{9} \cdot h = \frac{2}{9} \cdot \frac{7h}{2} = \frac{2}{9} S_{ABCD}.$$

Ответ: б)  $\frac{2}{9}$ .



## 17. Задание 17 № 500004

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y-2x)(2y-x) \leq 0, \\ \sqrt{(x+a)^2 + (y-a)^2} = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

**Решение.**

Неравенство задает пару вертикальных углов на координатной плоскости  $Oxy$  (см. рисунок). Графиком уравнения является окружность радиуса  $R = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$ , центр которой — точка  $P(-a; a)$  — лежит на прямой  $y = -x$ . Поскольку оба графика симметричны относительно прямой  $y = -x$ , система будет иметь ровно два решения тогда и только тогда, когда расстояние  $PK$  от центра окружности до прямой  $y = 2x$  будет равняться радиусу  $R = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$  данной окружности. Из треугольника  $POK$  находим:

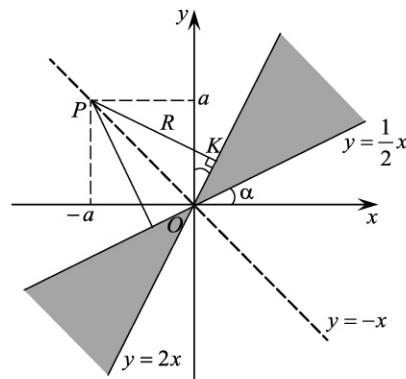
$$PK = PO \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \quad \text{где } \operatorname{tg}\alpha \text{ — угловой коэффициент}$$

прямой  $y = \frac{1}{2}x$ . Таким образом,  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , откуда

$$PK = PO \left( \sin\frac{\pi}{4} \cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4} \sin\alpha \right) = \sqrt{2a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{3|a|}{\sqrt{5}}.$$

Окончательно получаем:  $\frac{3|a|}{\sqrt{5}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$ ,  $3a = \pm(a+1)$ ,  $a = \frac{1}{2}$  или  $a = -\frac{1}{4}$ .

Ответ:  $a = \frac{1}{2}$  или  $a = -\frac{1}{4}$ .



### 18. Задание 18 № 514485

На доске написано 10 неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается сумма, округлённая до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9, а вместо 3,3 и 5 записывается 8).

а) Приведите пример 10 нецелых чисел и последовательности 9 ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел.

б) Может ли после 9 ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на 7?

в) На какое наибольшее число могут отличаться числа, записанные на доске после 9 ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?

**Решение.**

Назовём результатом число, написанное на доске после 9 ходов.

а) Если на доске написаны числа

$$0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01,$$

то при любой последовательности ходов результат равен 5 и равен сумме чисел.

б) Заметим, что за каждый ход вновь написанное число отличается от суммы стёртых не более чем на 0,5. Значит, результат будет отличаться от суммы исходных чисел не более чем на 4,5. Значит, не существует 10 чисел таких, что результат отличается от их суммы на 7.

в) Можем считать, что все числа меньше 1 и не меньше 0, поскольку целые части каждого из чисел при сложении не влияют на разницу между их суммой и её округлённым значением.

Каждое изначальное число участвует ровно в одном ходе. Если в этом ходе также участвовало целое число, не написанное на доске изначально, то назовём вкладом изначально числа в результат разность записанного после хода числа и стёртого целого числа. Если оба числа, участвовавших в ходе, были написаны на доске изначально, то назовём вкладом каждого из них в результат половину записанного после хода числа.

Заметим, что результат равен сумме вкладов изначальных чисел. С другой стороны, вклад каждого числа, меньшего 0,5, равен 0 или 0,5, а вклад каждого числа, не меньшего 0,5, равен 0,5 или 1.

Пусть  $n$  — количество чисел, не меньших 0,5.

Тогда сумма вкладов будет не меньше  $\frac{n}{2}$  и не больше  $\frac{10-n}{2} + n = \frac{n}{2} + 5$ .

То есть наибольшая разность двух различных результатов не превосходит 5.

Рассмотрим 10 чисел: два числа 0,5 и восемь чисел 0,4. Если вначале сложить два числа 0,5, а затем делать ходы с полученной единицей и числом 0,4, то результат будет равен 1. Если сделать четыре хода, попарно сложив числа 0,4, затем сложить четыре полученные единицы, а потом делать ходы с полученным числом и числом 0,5, то результат будет равен 6.

Таким образом, наибольшая возможная разность двух различных результатов равна 5.

Ответ: а) например, числа 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01 и любая последовательность ходов; б) нет; в) 5.