Вариант № 41054183

1. Задание 1 № 26665

Найдите корень уравнения: $x=\dfrac{6x-15}{x-2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение.

Область допустимых значений: $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2.$

При $x\neq 2$ домножим на знаменатель:

$$x=\frac{6x-15}{x-2}\Leftrightarrow x(x-2)=6x-15\Leftrightarrow x^2-8x+15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5; \\ x=3. \end{array}\right.$$

Больший корень равен 5.

Ответ: 5.

Ответ: 5

2. Задание 2 № 320194

В группе туристов 30 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 6 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолёта.

Решение.

На первом рейсе 6 мест, всего мест 30. Тогда вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолёта, равна:

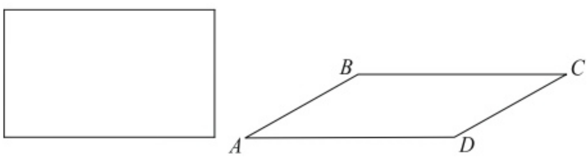
$$\frac{6}{30}=\frac{1}{5}=0,2.$$

Ответ: 0,2.

Ответ: 0,2

3. Задание 3 № 27610

Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению его сторон на синус угла между ними. Площадь прямоугольника равна произведению длины на ширину. Пусть одна сторона параллелограмма и прямоугольника равна a, а вторая равна b, а острый угол параллелограмма равен α. Тогда площадь параллелограмма равна $S_1=a\cdot b\cdot \sin\alpha$, а площадь прямоугольника равна $S_2=a\cdot b$.

По условию площадь прямоугольника вдвое больше: $S_2=2S_1$. Следовательно,

$$a\cdot b=2\cdot a\cdot b\cdot \sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha=0,5\Leftrightarrow \alpha=30^\circ.$$

Ответ: 30.

Ответ: 30

4. Задание 4 № 26788

Найдите $\dfrac{3\cos\alpha-4\sin\alpha}{2\sin\alpha-5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Решение.

Способ 1: $\operatorname{tg}\alpha=3\Leftrightarrow\sin\alpha=3\cos\alpha$. Тогда:

$$\frac{3\cos\alpha-4\sin\alpha}{2\sin\alpha-5\cos\alpha}=\frac{3\cos\alpha-12\cos\alpha}{6\cos\alpha-5\cos\alpha}=-9.$$

Способ 2: разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$. Тогда:

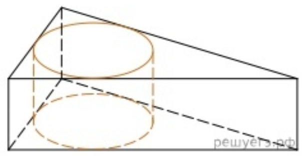
$$\frac{3\cos\alpha-4\sin\alpha}{2\sin\alpha-5\cos\alpha}=\frac{3-4tg\alpha}{2tg\alpha-5}=\frac{3-12}{6-5}=-9.$$

Ответ: −9.

Ответ: -9

5. Задание 5 № 27065

Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



Решение.

Сторона правильного треугольника a выражается через радиус r вписанной в него окружности как $a=2\sqrt{3}r$. Тогда площадь боковой поверхности призмы выражается формулой

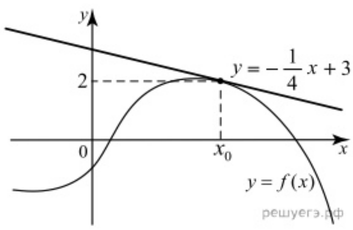
$$S=P_{\text{осн}}H=3aH=6\sqrt{3}rH=6\cdot\sqrt{3}\cdot2\cdot\sqrt{3}=6\cdot6=36.$$

Ответ: 36.

Ответ: 36

6. Задание 6 № 525703

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции $g(x)=f'(x)-f(x)+3$ в точке x_0.



Решение.

Найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

$$f'(x_0)=k=-\frac{1}{4}.$$

Тогда искомое значение

$$g(x_0)=f'(x_0)-f(x_0)+3=-\frac{1}{4}-2+3=0,75.$$

Ответ: 0,75.

Ответ: 0,75

7. Задание 7 № 317096

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель — целое число от −2 до 2.

Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R=\frac{3In+Op+2Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 30.

Решение.

Поскольку показатели максимальны, они все равны 2. Подставим значения в формулу и учтем, что рейтинг равен 30:

$$30=\frac{6+2+4}{A}\Leftrightarrow 30A=12\Leftrightarrow A=0,4.$$

Ответ:0,4.

Ответ: 0,4

8. Задание 8 № 26578

Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24км/ч, а вторую половину пути— со скоростью, на 16км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть υ км/ч — скорость первого автомобиля, тогда скорость второго автомобиля на второй половине пути равна $\upsilon+16$ км/ч. Примем расстояние между пунктами за 1. Автомобили были в пути одно и то же время, отсюда имеем:

$$\frac{1}{\upsilon}=\frac{0,5}{24}+\frac{0,5}{\upsilon+16}\Leftrightarrow\frac{1}{\upsilon}=\frac{1}{48}+\frac{1}{2(\upsilon+16)}\Leftrightarrow\frac{1}{\upsilon}=\frac{(\upsilon+16)+24}{48(\upsilon+16)}\Leftrightarrow$$

$$\underset{\upsilon>0}{\Leftrightarrow}48(\upsilon+16)=\upsilon(\upsilon+40)\Leftrightarrow\upsilon^2-8\upsilon-768=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\upsilon=32,\\ \upsilon=-24\end{array}\right.\underset{\upsilon>0}{\Leftrightarrow}\upsilon=32.$$

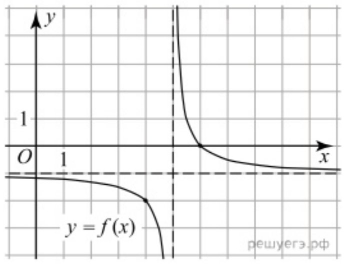
Таким образом, скорость первого автомобиля была равна 32 км/ч.

Ответ: 32.

Ответ: 32

9. Задание 9 № 564972

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{a}{x+b}+c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение x, при котором $f(x)=-1,125$.



Решение.

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=-1$, значит, $c=-1$.
График функции имеет вертикальную асимптоту $x=5$, значит, $b=-5$.
По графику $f(6)=0$, тогда

$$\frac{a}{6-5}-1=0 \Leftrightarrow a=1.$$

Таким образом, $f(x)=\dfrac{1}{x-5}-1$. Решим уравнение $f(x)=-1,125$.

$$\frac{1}{x-5}-1=-1,125 \Leftrightarrow \frac{1}{x-5}=-\frac{1}{8} \Leftrightarrow x=-3.$$

Ответ: −3.
Ответ: -3

10. Задание 10 № 320199

Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент *З.* получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что *З.* сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение.

Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, *З.* нужно сдать и русский, и математику как минимум на 70 баллов, а помимо этого еще сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Пусть A, B, C и D — это события, в которых *З.* сдает соответственно математику, русский, иностранный и обществознание не менее, чем на 70 баллов. Тогда поскольку

$$P(C+D)=P(C)+P(D)-P(C\cdot D),$$

для вероятности поступления имеем:

$$P(AB(C+D))=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C+D)=P(A)\cdot P(B)\cdot(P(C)+P(D)-P(C)\cdot P(D))$$
$$=0,6\cdot 0,8\cdot(0,7+0,5-0,7\cdot 0,5)=0,408.$$

Ответ: 0,408.

Приведем другую запись этого решения.

В силу независимости событий, вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику: 0,6·0,8·0,7=0,336, вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию: 0,6·0,8·0,5=0,24, вероятность успешно сдать экзамены и на «Лингвистику», и на «Коммерцию»: 0,6·0,8·0,7·0,5=0,168. Успешная сдача экзаменов на «Лингвистику» и на «Коммерцию» — события совместные, поэтому вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Тем самым, поступить хотя бы на одну из этих специальностей абитуриент может с вероятностью 0,336 + 0,24 − 0,168 = 0,408.

Приведём решение Алексея Столбова из Магнитогорска.

Есть три варианта поступления абитуриента хотя бы на одну специальность:

а) поступить на лингвистику при этом не поступив на коммерцию: вероятность $0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}5$;

б) поступить и на лингвистику, и на коммерцию: вероятность $0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}5$;

в) не поступить на лингвистику, при этом поступив на коммерцию: вероятность $0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5$.

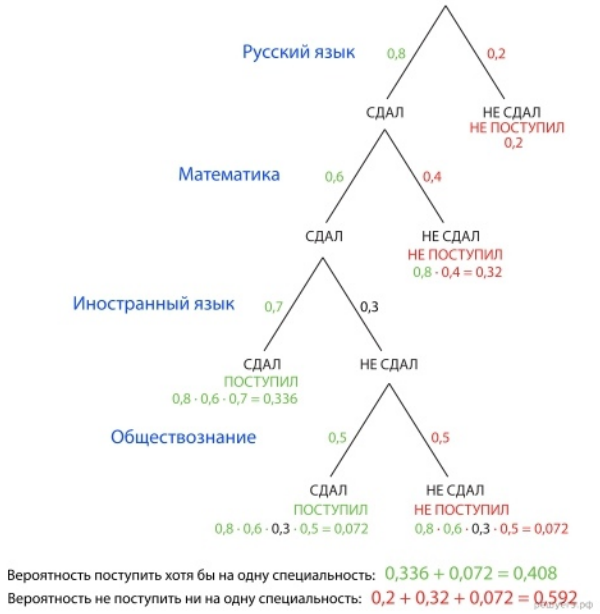
Эти события несовместные, искомая вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей:

$$0{,}6\cdot 0{,}8\cdot(0{,}35+0{,}35+0{,}15)=0{,}48\cdot 0{,}85=0{,}408.$$

Приведём решение Ирины Шраго из Санкт-Петербурга.

Для поступления З. необходимо сдать математику и русский язык хотя бы на 70 баллов, а также сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Это события независимые, причём событие «сдать хотя бы один экзамен не менее, чем на 70 баллов» противоположно событию «сдать оба предмета менее, чем на 70 баллов». Получаем, что вероятность искомого события: $0{,}6\cdot 0{,}8\cdot(1-0{,}3\cdot 0{,}5)=0{,}408$.

Приведём решение с помощью двоичного дерева.



Ответ: 0,408

11. Задание 11 № 26728

Найдите точку максимума функции $y=(x+6)^2e^{4-x}$.

Решение.

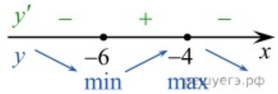
Найдем производную заданной функции:

$$y'=((x+6)^2)'e^{4-x}+((x+6)^2)(e^{4-x})'=(2(x+6))e^{4-x}-((x+6)^2)e^{4-x}=$$
$$=-(x+4)(x+6)e^{4-x}.$$

Найдем нули производной:

$$-(x+4)(x+6)e^{4-x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=-6. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=-4$.

Ответ: −4.
Ответ: -4

12. Задание 12 № 514623

а) Решите уравнение $6\log_8^2 x-5\log_8 x+1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;\ 2,5]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$(3\log_8 x-1)(2\log_8 x-1)=0.$$

Значит, $3\log_8 x=1$, откуда $x=2$, или $2\log_8 x=1$, откуда $x=2\sqrt{2}$.

б) Заметим, что $2<2,5=\sqrt{6,25}<\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Значит, указанному отрезку принадлежит корень 2.

Ответ: а) 2 и $2\sqrt{2}$; б) 2.

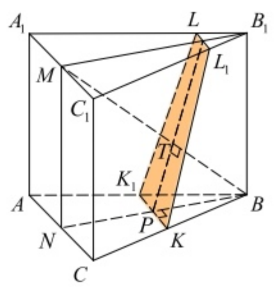
13. Задание 13 № 514561

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания 12 и высотой 3. Точка K — середина BC, точка L лежит на стороне A_1B_1 так, что B_1L=5. Точка M — середина A_1C_1. Через точки K и L проведена плоскость таким образом, что она параллельна прямой AC.

а) Докажите, что указанная выше плоскость перпендикулярна прямой MB.

б) Найдите объем пирамиды с вершиной в точке B, у которой основанием является сечение призмы плоскостью.

Решение.



а) Отметим точки L_1 и K_1 на ребрах B_1C_1 и AB соответственно так, чтобы $LL_1 \parallel A_1C_1$, $KK_1 \parallel AC$. Тогда плоскость γ это плоскость LL_1KK_1.

Очевидно $BM \perp KK_1$, поскольку проекция BM на плоскость ABC —высота треугольника ABC. Она перпендикулярна AC, а значит и KK_1. По теореме о трех перпендикулярах $BM \perp KK_1$.

Рассмотрим теперь проекцию M_1 точки M на плоскость AA_1B_1B. Поскольку проекция C_1 на эту плоскость—середина ребра A_1B_1, то $A_1M_1=\dfrac{1}{4}A_1B_1=3$. Докажем теперь, что прямая BM_1 перпендикулярна K_1L. Тогда по теореме о трех перпендикулярах окажется что $BM \perp K_1L$, а тогда и $BM \perp \gamma$.

Обозначим за O точку пересечения отрезков BM_1 и K_1L, за M_2 и L_2—проекции точек M_1 и L на прямую AB. Тогда

$$\operatorname{tg}\angle OBK_1 = \operatorname{tg}\angle M_1BM_2 = \frac{M_1M_2}{M_2B} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$
$$\operatorname{tg}\angle OK_1B = \operatorname{tg}\angle LK_1L_2 = \frac{LL_2}{L_2K_1} = \frac{3}{6-5} = 3.$$

Итак, тангенсы этих углов обратны друг другу, поэтому углы в сумме дают 90° и угол $K_1OB = 180° - 90° = 90°$, что и требовалось доказать.

б) Очевидно $LL_1 = 5$, так как B_1LL_1 — равносторонний треугольник.

$$V_{BLL_1KK_1} = V_{L_1BKK_1} + V_{LK_1BL_1} = \frac{1}{3}d(L_1, K_1BK)\cdot S_{K_1BK} + \frac{1}{6}K_1B\cdot LL_1\cdot d(K_1B, LL_1)\cdot \sin\angle(K_1B, LL_1) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 3\cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 5\cdot d(ABC, A_1B_1C_1)\cdot \sin\angle(LB_1, LL_1) = 9\sqrt{3} + 5\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{33\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{33\sqrt{3}}{2}$.

Примечание.

Для вычисления объема тетраэдра $V_{LK_1BL_1}$ использована формула $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}abc\sin\varphi$, где a и b — противоположные ребра тетраэдра, а c и φ — соответственно расстояние и угол между ними. Эта формула приведена в школьном учебнике Л.С.Атанасяна Геометрия 10−11 для самостоятельного доказательства (задача № 803).

Приведем другое решение.

а) Пусть плоскость сечения α пересекает ребро AB в точке K_1, а ребро BC - в точке L_1. Тогда $KK_1 \parallel AC$, поскольку плоскость сечения параллельна AC. Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости оснований по параллельным прямым, следовательно, $LL_1 \parallel KK_1 \parallel A_1C_1 \parallel AC$.

Проведем плоскость BB_1M, пусть она пресекает ребро AC в точке N, прямую KK_1 в точке P и прямую LL_1 в точке R.

Заметим, что MB_1 — высота правильного треугольника со стороной 12, следовательно, $MB_1 = NB = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Аналогично $BP = 3\sqrt{3}$ и $B_1R = \frac{5}{2}\sqrt{3}$.

Докажем, что $MB \perp PR$:

$$\operatorname{tg}\angle MBN = \frac{MN}{NB} = \frac{3}{6\sqrt{3}},$$
$$\operatorname{tg}\angle RPB = \frac{MN}{BP - B_1R} = \frac{3}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}, \text{ тогда}$$
$$\operatorname{tg}\angle MBN\cdot\operatorname{tg}\angle RPB = \frac{3}{6\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = 1.$$

Тогда $\angle MBN + \angle RPB = 90°$, следовательно, $BM \perp PR$.

Заметим, что $BM \perp KK_1$, поскольку ее проекция $BN \perp KK_1$. Следовательно, прямая BM перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости α, а значит, она перпендикулярна плоскости α, что и требовалось доказать.

б) Основанием пирамиды является трапеция LL_1KK_1 с высотой PR. Высотой пирамиды является отрезок BT, где T — точка пересечения BM и PR. Заметим, что $PR\cdot BT = 2S_{BPR} = BP\cdot BB_1$, тогда

$$V_{BLL_1KK_1} = \frac{1}{3}\cdot S_{LL_1KK_1}\cdot BT = \frac{1}{3}\cdot\frac{LL_1 + KK_1}{2}\cdot PR\cdot BT = \frac{1}{3}\cdot\frac{LL_1 + KK_1}{2}\cdot BP\cdot BB_1 = \frac{1}{3}\frac{6+5}{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot 3 = \frac{33\sqrt{3}}{2}.$$

14. Задание 14 № 507635

Решите неравенство $\dfrac{\log_2(2x)\cdot\log_{0,5x}2}{\log_{0,125x}8}\le 1.$

Решение.

Левая часть неравенства имеет смысл при $x>0,\ 0,5x\ne 1$ и $0,125x\ne 1,$ то есть при $x>0,\ x\ne 2$ и $x\ne 8$. При этих условиях получаем:

$$\frac{\log_2(2x)\cdot\frac{1}{\log_2(0,5x)}}{\frac{3}{\log_2(0,125x)}}\le 1\Leftrightarrow\frac{(\log_2 2+\log_2 x)(\log_2 0,125+\log_2 x)}{\log_2 0,5+\log_2 x}\le 3\Leftrightarrow\frac{(\log_2 x+1)(\log_2 x-3)}{\log_2 x-1}\le 3.$$

Сделаем замену $y=\log_2 x$, тогда

$$\frac{(y+1)(y-3)}{y-1}\le 3\Leftrightarrow\frac{y(y-5)}{y-1}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y\le 0,\\1<y\le 5.\end{array}\right.$$

Откуда $0<x\le 1$ или $2<x\le 32$. Из полученного набора нужно ещё исключить точку 8. Получаем ответ: $(0;\ 1]\cup(2;\ 8)\cup(8;\ 32]$.

Ответ: $(0;\ 1]\cup(2;\ 8)\cup(8;\ 32]$.

15. Задание 15 № 513106

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение.

Не снижая общности рассуждений, примем начальную сумму кредита за 100 руб. и будем считать, что выплаты производились 10 числа каждого месяца. Составим таблицу выплат:

Дата	14.02	14.03	14.04	14.05	14.06	14.07
Долг, руб.	105	94,5	84	73,5	63	52,5
Выплата, руб.	15	14,5	14	13,5	13	52,5
Остаток долга на день выплаты, руб.	90	80	70	60	50	0
Остаток долга на день выплаты, %	90%	80%	70%	60%	50%	0%

Тем самым, полная сумма выплат равна 15 + 14,5 +14 +13,5 +13 + 52,5 = 122,5 руб., переплата составила 22,5%.

Ответ: 22,5.

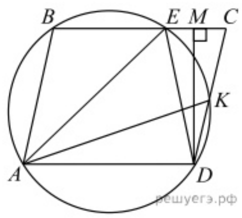
16. Задание 16 № 520940

Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает сторону CD в точках K и D.

а) Докажите, что $AE = AK$.

б) Найдите AD, если $CE = 10$, $DK = 9$ и $\cos\angle BAD = 0,2$.

Решение.



а) Заметим, что $\angle ABE = \angle ABC = \angle ADC = \angle ADK$ Значит, хорды окружности AE и AK стягивают равные дуги. Поэтому эти хорды равны.

б) Поскольку прямые BC и AD параллельны, $\angle EAD = \angle AEB$, поэтому $DE = AB = DC$.

Пусть DM — медиана равнобедренного треугольника CDE. Тогда:

$$CD = \frac{CM}{\cos\angle ECD} = \frac{CE}{2\cos\angle BAD} = 25,$$

$$CK = CD - DK = 16.$$

По свойству секущей $CK \cdot CD = CE \cdot CB$, откуда $AD = CB = \dfrac{CK \cdot CD}{CE} = 40.$

Ответ: б) 40.

17. Задание 17 № 509506

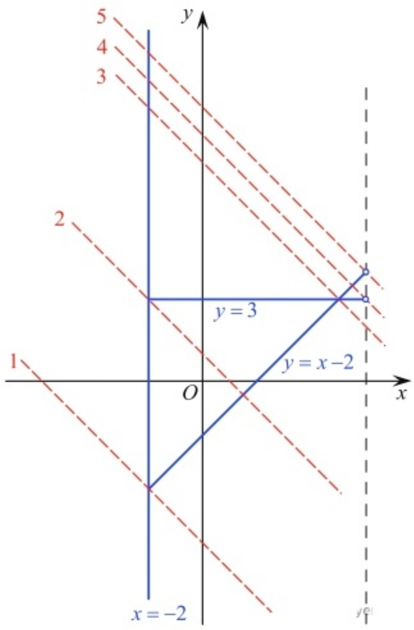
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy+3x-y-6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0, \\ x+y-a=0. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Заметим, что



$$y^2-xy+3x-y-6=0 \Leftrightarrow y^2-(x+1)y+(3x-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-2, \\ y=3. \end{array}\right.$$

Поэтому исходная система равносильна смешанной системе

$$\begin{cases} -2 \le x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ y=3, \\ y=x-2, \end{array}\right. \\ y=a-x. \end{cases}$$

Полученная смешанная система имеет ровно два решения в том и только в том случае, когда семейство прямых $y=a-x$ имеет с графиком системы

$$\begin{cases} -2 \le x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ y=3, \\ y=x-2 \end{array}\right. \end{cases}$$

ровно две общие точки. Прямые соответствующие границам этих случаев пронумерованы на рисунке числами от 1 до 5. Нетрудно видеть, что этому соответствует следующий результат: $a \in (-6;\, 1] \cup \{8\} \cup [9;\, 10)$.

Ответ: $a \in (-6;\, 1] \cup \{8\} \cup [9;\, 10)$.

18. Задание 18 № 525144

Вася и Петя решали задачи из сборника, причем каждый следующий день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий, а Петя — на две задачи больше, чем в предыдущий. В первый день каждый решил хотя бы одну задачу, а в итоге каждый решил все задачи сборника.

а) Могло ли быть в сборнике 85 задач?

б) Могло ли быть в сборнике 213 задач, если каждый из мальчиков решал их более трех дней?

в) Какое наибольшее количество дней мог решать задачи Петя, если Вася решил весь сборник за 16 дней, а количество задач в сборнике меньше 300.

Решение.

Пусть Вася в первый день решил a задач, а Петя — b задач. Вася решал задачи n дней, а Петя — m дней. Воспользуемся формулой суммы арифметической прогрессии. Получим, что за n дней Вася решил $S_n = \frac{a+a+n-1}{2} \cdot n$ задач, а Петя за m дней решил $S_m = \frac{b+b+2(m-1)}{2} \cdot m$ задач.

а) Проверим, могли ли мальчики решить 85 задач.

Для Васи: $\frac{a+a+n-1}{2} \cdot n = 85 \Leftrightarrow (2a+n-1) \cdot n = 85 \cdot 2 \Leftrightarrow (2a+n-1) \cdot n = 17 \cdot 5 \cdot 2.$ Очевидно, что это уравнение имеет решения в натуральных числах. Например, $n = 2; a = 42.$

Для Пети: $\frac{b+b+2(m-1)}{2} \cdot m = 85 \Leftrightarrow (b+m-1) \cdot m = 17 \cdot 5.$ Очевидно, что и это уравнение имеет решения в натуральных числах. Например, $m = 5; b = 13.$

Значит, в сборнике могло быть 85 задач.

б) Проверим, могло ли в сборнике быть 213 задач, если каждый из мальчиков решал их более трех дней.

Для Пети: $(b+m-1) \cdot m = 213 \Leftrightarrow (b+m-1) \cdot m = 71 \cdot 3.$ Тогда m — один из делителей числа 213. Заметим, что 71— простое число, и по условию $m > 3$. Тогда или $m = 71$, или $m = 213$. При любом из этих значений получаем $b < 0$. Значит, в сборнике не могло быть 213 задач.

в) Если в сборнике меньше 300 задач, то для числа дней, потраченных Петей, имеем: $300 > (b+m-1) \cdot m \geq (1+m-1) \cdot m = m^2$. Следовательно, $m \leq 17$.

При $m = 17$ получаем $(b+16) \cdot 17 < 300 < 18 \cdot 17$, тогда $b = 1; S = 289$. Проверим, мог ли Вася за 16 дней решить 289 задач: $\frac{2a+16-1}{2} \cdot 16 = 289 \Leftrightarrow (2a+15) \cdot 8 = 289.$ Левая часть уравнения кратна 8, а правая нет, значит, m не может равняться 17.

Рассмотрим $m = 16$. Имеем $(b+15) \cdot 16 = (2a+15) \cdot 8 \Leftrightarrow (b+15) \cdot 2 = 2a+15.$ Левая часть уравнения кратна 2, а правая нет. Значит, m не может равняться 16.

Рассмотрим $m = 15$. Имеем $(b+14) \cdot 15 = (2a+15) \cdot 8.$ Левая часть уравнения кратна 15, правая может быть кратна 15 при $a \geq 15$, но тогда $S \geq 360$. Значит, m не может равняться 15.

Рассмотрим $m = 14$. Имеем $(b+13) \cdot 14 = (2a+15) \cdot 8 \Leftrightarrow \frac{b+13}{4} = \frac{2a+15}{7}$. Это уравнение имеет решение $b = 7; a = 10$. При этом $S = (7+13) \cdot 14 = (2 \cdot 10 + 15) \cdot 8 = 280 < 300.$ Таким образом, все условия задачи выполнены.

Ответ: а) да, б) нет, в) 14.