Вариант № 41054182

1. Задание 1 № 27466

Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-4}=3$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$\sqrt[3]{x-4}=3 \Leftrightarrow x-4=27 \Leftrightarrow x=31.$$

Ответ: 31.

Ответ: 31

2. Задание 2 № 1001

На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

Решение.

Андрей выучил 60–3=57 вопросов. Поэтому вероятность того, что на экзамене ему попадется выученный вопрос равна

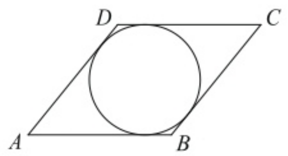
$$\frac{57}{60}=\frac{19}{20}=0,95.$$

Ответ: 0,95.

Ответ: 0,95

3. Задание 3 № 27913

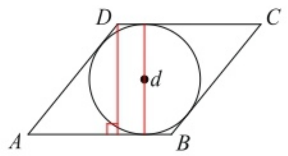
Сторона ромба равна 1, острый угол равен 30°. Найдите радиус вписанной окружности этого ромба.



Решение.

Радиус r вписанной в ромб окружности вдвое меньше его высоты d. Поэтому

$$r=\frac{d}{2}=\frac{DH}{2}=\frac{AD\sin A}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0,25.$$



Ответ: 0,25.

Ответ: 0,25

4. Задание 4 № 245172

Найдите значение выражения $\sqrt{3}-\sqrt{12}\sin^2\frac{5\pi}{12}$.

Решение.

Используем формулу косинуса двойного угла $1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$:

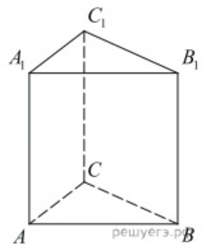
$$\sqrt{3}-\sqrt{12}\sin^2\frac{5\pi}{12}=\sqrt{3}\left(1-2\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=\sqrt{3}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}.$$

Ответ: −1,5.

Ответ: -1,5

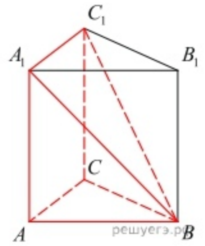
5. **Задание 5 № 245341**

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



Решение.

Искомый объём многогранника равен разности объёмов призмы $ABCA_1B_1C_1$ и пирамиды $BA_1B_1C_1$, основания и высоты которых совпадают. Поэтому

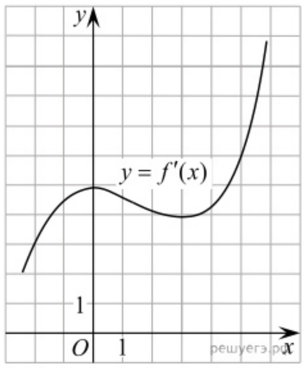


$$V_{\text{мног}} = S_{\text{пр}}h_{\text{пр}} - \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}} = 3 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 4.$$

Ответ: 4.
Ответ: 4

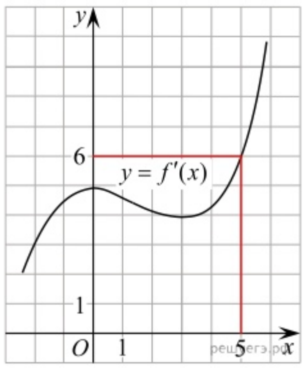
6. **Задание 6 № 515183**

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y=f(x)$ параллельна прямой $y=6x$ или совпадает с ней.



Решение.

Поскольку касательная параллельна прямой $y=6x$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 6. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Осталось найти, в какой точке x производная принимает значение 6: искомая точка $x=5$.



Ответ: 5.
Ответ: 5

7. Задание 7 № 28004

Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{\upsilon_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $\upsilon_0 = 20$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с ^{2}). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $L \geq 20$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях начальной скорости $\upsilon_0 = 20$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2:

$$\frac{20^2}{10}\sin 2\alpha \geq 20 \Leftrightarrow \sin 2\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30° + 360°n \leq 2\alpha \leq 150° + 360°n \underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow} 30° \leq 2\alpha \leq 150° \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 15° \leq \alpha \leq 75°.$$

Ответ: 15.

Ответ: 15

8. Задание 8 № 99595

Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

Решение.

Пусть υ км/ч – скорость второго пешехода, тогда скорость первого – $\upsilon + 1,5$км/ч. Пусть через t часов расстояние между пешеходами станет равным 0,3 километра. Таким образом,

$$0,3 = (\upsilon + 1,5)t - \upsilon t \Leftrightarrow 0,3 = 1,5t \Leftrightarrow t = 0,2,$$

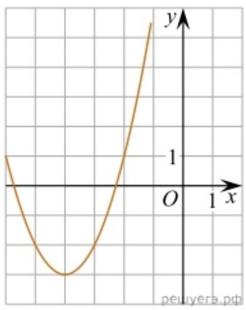
$t = 0,2$ часа или 12 минут.

Ответ: 12.

Ответ: 12

9. Задание 9 № 564646

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите $f(-12)$.



Решение.

Из рисунка видно, что вершина параболы расположена в точке $x_0 = -4$, при этом $y_0 = f(x_0) = -3$. Следовательно, $f(x) = a(x+4)^2 - 3$, заметим, что $f(-3) = -2$, откуда $a = 1$, вычислим теперь $f(-12) = (-12+4)^2 - 3 = 61$.

Ответ: 61.

Ответ: 61

10. **Задание 10 № 320177**

Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства— яйца высшей категории, а из второго хозяйства— 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение.

Пусть событие A состоит в том, что яйцо имеет высшую категорию, события B_1 и B_2 состоят в том, что яйцо произведено в первом и втором хозяйствах соответственно. Тогда события $A|B_1$ и $A|B_2$ — события, состоящие в том, что яйцо высшей категории произведено в первом и втором хозяйстве соответственно. По формуле полной вероятности, вероятность того, что будет куплено яйцо высшей категории, равна:

$$P(AB_1)+P(AB_2)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)=$$
$$=0,4\cdot P(B_1)+0,2\cdot(1-P(B_1))=0,2P(B_1)+0,2.$$

По условию эта вероятность равна 0,35, поэтому для вероятности того, что купленное яйцо произведено в первом хозяйстве имеем:

$$P(B_1)=(0,35-0,2):0,2=0,75.$$

Примечание Ивана Высоцкого.

Это решение можно записать коротко. Пусть x — искомая вероятность того, что куплено яйцо, произведенное в первом хозяйстве. Тогда $1-x$ — вероятность того, что куплено яйцо, произведенное во втором хозяйстве. По формуле полной вероятности имеем:

$$0,4x+0,2(1-x)=0,35\Leftrightarrow 0,2x=0,15\Leftrightarrow x=0,75.$$

Ответ: 0,75.

Приведем другое решение.

Пусть в первом хозяйстве агрофирма закупает x яиц, в том числе, $0,4x$ яиц высшей категории, а во втором хозяйстве — y яиц, в том числе $0,2y$ яиц высшей категории. Тем самым, всего агрофирма закупает $x+y$ яиц, в том числе $0,4x+0,2y$ яиц высшей категории. По условию, высшую категорию имеют 35% яиц, тогда:

$$\frac{0,4x+0,2y}{x+y}=0,35\Leftrightarrow 0,4x+0,2y=0,35(x+y)\Leftrightarrow 0,05x=0,15y\Leftrightarrow x=3y.$$

Следовательно, у первого хозяйства закупают в три раза больше яиц, чем у второго. Поэтому вероятность того, что купленное яйцо окажется из первого хозяйства равна

$$\frac{3y}{3y+y}=\frac{3}{4}=0,75.$$

Ответ: $0,75$

11. **Задание 11 № 26704**

Найдите наибольшее значение функции $y=16\operatorname{tg}x-16x+4\pi-5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y'=\frac{16}{\cos^2x}-16=16\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)=16\operatorname{tg}^2x.$$

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=16\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-16\cdot\frac{\pi}{4}+4\pi-5=11.$$

Ответ: 11.

Ответ: 11

12. **Задание 12 №** 485964

а) Решите уравнение $\sin x+\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Используя формулу $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$, заменим выражение в скобках на $\cos x$, получаем однородное тригонометрическое уравнение первой степени:

$$\sin x+\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=0.$$

Если $\cos x=0$, то из уравнения следует $\sin x=0$, что невозможно в силу основного тригонометрического тождества. Значит, на множестве корней уравнения $\cos x\neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$\operatorname{tg}x+1=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

б) Составим двойное неравенство: $\pi\leq-\frac{\pi}{4}+\pi k\leq\frac{5\pi}{2}$, откуда $\frac{5}{4}\leq k\leq 2\frac{3}{4}$. Следовательно, $k=2$. Поэтому на данном отрезке получаем единственный корень $-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

13. Задание 13 № 514655

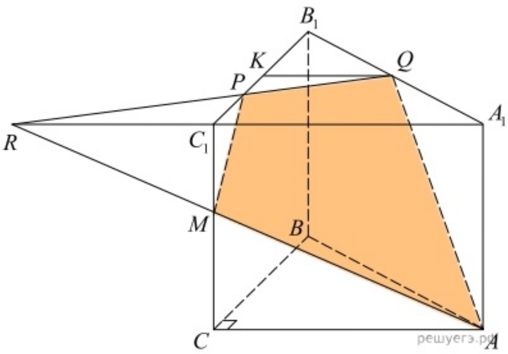
В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, $AC = 4$, $BC = 16$, $AA_1 = 4\sqrt{2}$. Точка Q — середина ребра A_1B_1, а точка P делит ребро B_1C_1 в отношении 1:2, считая от вершины C_1. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ.

Решение.

а) Пусть R — точка пересечения прямых PQ и A_1C_1, а K— середина B_1C_1 (см. рисунок). Тогда M — точка пересечения прямых AR и CC_1.



Треугольники PKQ и PC_1R подобны, откуда

$$\frac{C_1R}{KQ} = \frac{C_1P}{KP} = 2,$$
$$C_1R = 2KQ = A_1C_1 = 4.$$

Отрезок C_1M — средняя линия треугольника AA_1R, поскольку $A_1C_1 = C_1R$ и прямые AA_1 и CC_1 параллельны. Значит,

$$C_1M = \frac{A_1A}{2} = \frac{C_1C}{2}.$$

то есть M — середина CC_1.

б) Расстояние от точки A_1 до плоскости APQ равно высоте h пирамиды A_1AQR, опущенной из вершины A_1.

Объём пирамиды A_1AQR: $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{AQR}$.

С другой стороны, объём пирамиды A_1AQR:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{B_1C_1}{2} S_{AA_1R} = \frac{1}{3} \cdot \frac{B_1C_1}{2} \cdot \frac{1}{2} AA_1 \cdot A_1R = \frac{128\sqrt{2}}{3}.$$

Значит,

$$h = \frac{128\sqrt{2}}{S_{AQR}}.$$

В треугольнике AQR находим стороны:

$$AQ = QR = 10,$$
$$AR = 4\sqrt{6}.$$

Площадь равнобедренного треугольника AQR равна

$$S_{AQR} = \frac{1}{2} \cdot AR\sqrt{AQ^2 - \frac{AR^2}{4}} = 4\sqrt{114}.$$

Следовательно,

$$h = \frac{128\sqrt{2}}{4\sqrt{114}} = \frac{32\sqrt{57}}{57}.$$

Ответ: $\frac{32\sqrt{57}}{57}$.

14. **Задание 14 № 509445**

Решите неравенство $\lg^2\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}<\lg^2\frac{x+5}{20}$.

Решение.

Данное неравенство можно записать в виде:

$$\lg^2\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}-\lg^2\frac{x+5}{20}<0.$$

Воспользовавшись формулой разности квадратов и преобразуя выражение $\lg\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}\pm\lg\frac{x+5}{20}$ по формулам суммы и разности логарифмов, получаем

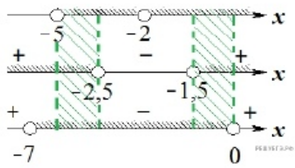
$$\left(\lg\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}+\lg\frac{x+5}{20}\right)\left(\lg\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}-\lg\frac{x+5}{20}\right)<0$$

$$\begin{cases}x+5>0,\\ \lg\frac{(x+2)^2(x+5)^2}{100}\cdot\lg\left(4(x+2)^2\right)<0\end{cases}$$

Что равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}x+5>0\\ \lg\frac{(x+2)^2(x+5)^2}{100}<0,\\ \lg\left(4(x+2)^2\right)>0.\end{cases}\ (1)\qquad\begin{cases}x+5>0,\\ \lg\frac{(x+2)^2(x+5)^2}{100}>0,\\ \lg\left(4(x+2)^2\right)<0.\end{cases}\ (2)$$

Решим систему (1), произведя её равносильные преобразования:

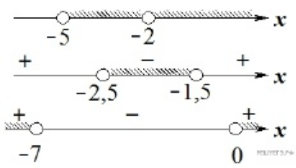


$$\begin{cases}x+5>0,\\ x\neq-2,\\ (2(x+2))^2>1,\\ \left(\frac{x^2+7x+10}{10}\right)^2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-5,\\ x\neq-2,\\ (2x+4-1)(2x+4+1)>0,\\ \left(\frac{x^2+7x+10}{10}-1\right)\left(\frac{x^2+7x+10}{10}+1\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-5,\ x\neq-2,\\ (2x+3)(2x+5)>0,\\ (x^2+7x)(x^2+7x+20)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-5,\ x\neq-2,\\ (2x+3)(2x+5)>0,\\ x(x+7)<0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-5<x<-2,5,\\ -1,5<x<0.\end{array}\right.$$

Из приведённых выкладок легко усмотреть, что преобразованная аналогичным образом система (2), равносильна системе

$$\begin{cases}x>-5,\ x\neq-2,\\ (2x+3)(2x+5)<0,\\ (x+7)x>0,\end{cases}$$



которая не имеет решений. Таким образом, ответ: $(-5;\ -2,5)\cup(-1,5;\ 0)$.

Ответ: $(-5;\ -2,5)\cup(-1,5;\ 0)$.

15. **Задание 15 № 513923**

В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. руб. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года.

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.
— в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн. руб.
— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите *r*, если в 2021 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 6,1 млн. рублей.

Решение.

Пусть банк начисляет *r* процентов, то есть умножает остаток долга на $x=1+\frac{r}{100}$. Тогда первые три платежа составляли $4,2x-4,2$ миллионов рублей. Пусть, далее, четвертый и пятый платежи составляли N миллионов рублей. Тогда $N=(4,2x-N)x$, откуда $N=\frac{4,2x^2}{1+x}$. По условию, общие выплаты составят 6,1 млн руб., откуда имеем:

$$3(4,2x-4,2)+2\cdot\frac{4,2x^2}{1+x}=6,1\Leftrightarrow 3(42x-42)+\frac{84x^2}{1+x}=61\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{84x^2}{1+x}=187-126x\Leftrightarrow 84x^2=(1+x)(187-126x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 210x^2-61x-187=0\Leftrightarrow(10x-11)(21x+17)=0\underset{x>0}{\Leftrightarrow}x=1,1.$$

Тогда $r=10$.

Ответ: 10.

Приведём другое решение.

График погашения кредита

Дата	**Долг до выплаты,** тыс. руб.	**Выплата,** тыс. руб.	**Долг после выплаты,** тыс. руб.
01.07.2016	4200		
01.01.2017	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		
01.02.2017		$42r$	
01.07.2017			4200
01.01.2018	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		
01.02.2018		$42r$	
01.07.2018			4200
01.01.2019	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		
01.02.2019		$42r$	
01.07.2019			4200
01.01.2020	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		
01.02.2020		x	
01.07.2020			$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)-x$
01.01.2021	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-x\left(1+\frac{r}{100}\right)$		
01.02.2022		x	0

1) $4200\frac{r}{100}\cdot 3+2x=6100.$

2) $4200\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-x\left(1+\frac{r}{100}\right)=x$, откуда

$$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-(3050-63r)\left(1+\frac{r}{100}\right)=3050-63r\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21r^2+3590r-38\ 000=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} r=10, \\ r=\dfrac{-3800}{21} \end{array}\right.\underset{r>0}{\Leftrightarrow} r=10.$$

Расчеты будем вести в тыс. руб.

1. Поскольку в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг клиента будет равен сумме взятого кредита, то в течение первых трех из пяти лет клиент будет выплачивать кредитору лишь процентные начисления за первые три года. Общая сумма выплаченных денежных средств составит $3\cdot 4200\cdot 0,01r=126r$ (тыс. руб.) Следовательно, за последние два расчетных года клиент выплатит кредитору $(6100-126r)$ тыс. руб. А это значит, что суммы выплат 2020 года и аналогичная сумма 2021 года составят по $(3050-63r)$ (тыс. руб.) каждая.

2. По условию задачи к январю 2020 года долг клиента составит 4200 тыс. руб. В январе 2020 г этот долг возрастет до $4200\cdot(1+0,01r)=4200+42r$ (тыс. руб).

С февраля по июнь клиент выплатит кредитору сумму $(3050-63r)$ тыс. руб. Долг к июлю 2020 г. составит $4200+42r-3050+63r=1150+105r$ (тыс. руб.)

3. К январю 2021 года долг клиента составит $(1150+105r)$ тыс. руб. В январе 2020 г. этот долг возрастет до

$$(1150+105r)\cdot(1+0,01r)=1150+105r+11,5r+1,05r^2=1,05r^2+116,5r+1150 \text{ (тыс. руб.)}$$

С февраля по июнь клиент выплатит кредитору сумму $(3050-63r)$ тыс. руб. Долг будет погашен полностью. Следовательно,

$$1,05r^2+116,5r+1150-3050+63r=0\Leftrightarrow 105r^2+11650r+115000-305000+6300r=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 105r^2+17950r-190000=0\Leftrightarrow 21r^2+3590r-38000=0.$$

$$r=\frac{-1795\pm\sqrt{3222025+798000}}{21}=\frac{-1795\pm\sqrt{4020025}}{21}=\frac{-1795\pm 2005}{21}.$$

$$r_1=\frac{-1795+2005}{21}=\frac{210}{21}=10;$$

$$r_2=\frac{-1795-2005}{21}<0.$$

второй корень не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 10.

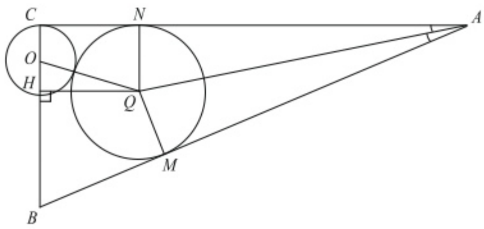
16. **Задание 16 №** [509467]

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 12$, $BC = 5$. Окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

Решение.



а) Пусть Q — центр второй окружности, M и N — её точки касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H — проекция точки Q на BC. Имеем: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$, следовательно, $\cos\angle A = \frac{12}{13}, \sin\angle A = \frac{5}{13}.$ Тогда $\operatorname{tg}\angle NAQ = \operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} = \frac{\sin\angle A}{1+\cos\angle A} = \frac{1}{5}.$ Поэтому $AC > AN = 5NQ$, что и требовалось доказать.

б) Пусть x — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHQ:

$$QH = CN = 12 - 5x > 0, OQ = x + \frac{1}{2}, OH = |OC - CH| = \left|\frac{1}{2} - x\right|.$$

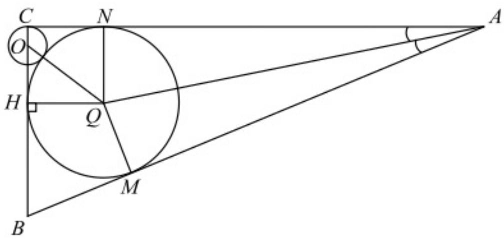
По теореме Пифагора $OH^2 + QH^2 = OQ^2$, откуда:

$$(12-5x)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 122x + 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 2,88. \end{array}\right.$$

Условию $12 - 5x > 0$ удовлетворяет только $x = 2$.

Ответ: 2.

Примечание.



Заметим, что радиус окружности, вписанной в данный треугольник также равен 2. Это означает, что большая окружность в действительности является вписанной в треугольник и касается катета BC. Это не влияет на правильность проведенных вычислений.

17. Задание 17 № 505244

Найдите все значения a, при которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$$

принадлежит отрезку $[1;3]$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x)=4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\log_2(3x-1)+2a$. Она определена при $x>\dfrac{1}{3}$, возрастает на области определения и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Значит, уравнение $f(x)=0$ имеет единственное решение. Это решение принадлежит отрезку $[1;3]$ тогда и только тогда, когда $f(1)\le 0$ и $f(3)\ge 0$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}4+3+2a\le 0,\\ 8+9+2a\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+7\le 0,\\ 2a+17\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{17}{2}\le a\le -\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\left[-\dfrac{17}{2};-\dfrac{7}{2}\right]$.

18. Задание 18 № 505503

а) Можно ли число 2014 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 199 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

Решение.

а) Например числа 2006 и 8 имеют одинаковую сумму цифр и в сумме дают 2014.

б) Предположим, что число 199 можно представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр. Пусть одно из этих чисел состоит из a сотен, b десятков и c единиц. Тогда другое число состоит из $1-a$ сотен, $9-b$ десятков и $9-c$ единиц. Суммы цифр этих чисел равны $a+b+c$ и $19-a-b-c$ соответственно. Они имеют разную чётность и не могут быть одинаковыми.

в) Наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой фиксированной суммой цифр, равно сумме пяти наименьших чисел с этой суммой цифр.

Для сумм 1, 2, 3 и 4 имеем соответственно:

$$\begin{gathered}1+10+100+1000+10\,000=11\,111,\\ 2+11+20+101+110=244,\\ 3+12+21+30+102=168,\\ 4+13+22+31+40=110.\end{gathered}$$

Если сумма цифр равна 5 или больше, обозначим её через a. Тогда наименьшее из таких чисел — как минимум a. Числа с одинаковой суммой цифр дают одинаковые остатки при делении на 9, поэтому идут минимум через 9. Значит, их сумма не меньше чем

$$a+(a+9)+(a+18)+(a+27)+(a+36)=5a+90\ge 115.$$

Получаем, что искомое число равно 110.

Ответ: а) да; б) нет; в) 110.