Вариант № 41054172

1. Задание 1 № 77369

Решите уравнение $(x-6)^2=-24x$.

Решение.

Используем формулы квадрата суммы и разности:

$$(x-6)^2=-24x \Leftrightarrow x^2-12x+36=-24x \Leftrightarrow x^2+12x+36=0 \Leftrightarrow (x+6)^2=0 \Leftrightarrow x=-6.$$

Ответ: −6.
Ответ: -6

2. Задание 2 № 320186

На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

Решение.

Общее количество выступающих на фестивале групп для ответа на вопрос неважно. Сколько бы их ни было, для указанных стран есть 6 способов взаимного расположения среди выступающих (Д — Дания, Ш — Швеция, Н — Норвегия):

...Д...Ш...Н..., ...Д...Н...Ш..., ...Ш...Н...Д..., ...Ш...Д...Н..., ...Н...Д...Ш..., ...Н...Ш...Д...

Дания находится после Швеции и Норвегии в двух случаях. Поэтому вероятность того, что группы случайным образом будут распределены именно так, равна

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0,33.$$

Ответ: 0,33.

Замечание.

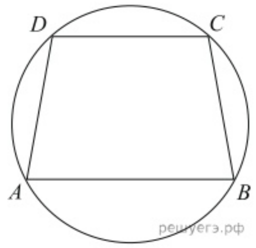
Пусть требуется найти вероятность того, что датские музыканты окажутся последними среди n выступающих от разных государств групп. Поставим команду Дании на последнее место и найдем количество перестановок без повторений из $n-1$ предыдущих групп: оно равно $(n-1)!$ Общее количество перестановок из всех n групп равно $n!$ Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}.$$

Ответ: 0,33

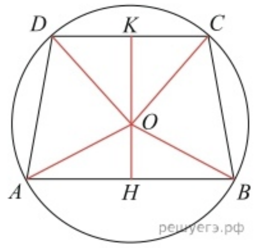
3. Задание 3 № 27926

Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.



Решение.

Высота трапеции $KH = KO + OH$, где KO и OH — высоты равнобедренных треугольников DOC и AOB. По теореме Пифагора:



$$KO = \sqrt{OC^2 - KC^2} = \sqrt{R^2 - \frac{DC^2}{4}} = \sqrt{25-9} = 4,$$

$$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{25-16} = 3.$$

Тогда $KH = KO + OH = 7$.

Ответ: 7.

Примечание.

Если бы большее основание трапеции лежало выше центра окружности (то есть оба основания располагались по одну сторону от центра окружности) длина высоты равнялась бы не сумме, а разности найденных отрезков.

Ответ: 7

4. Задание 4 № 504824

Найдите значение выражения $\sqrt{50}\cos^2\frac{9\pi}{8} - \sqrt{50}\sin^2\frac{9\pi}{8}$.

Решение.

Используем формулу косинуса двойного угла $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$:

$$\sqrt{50}\cos^2\frac{9\pi}{8} - \sqrt{50}\sin^2\frac{9\pi}{8} = \sqrt{50}\cos\frac{9\pi}{4} = \sqrt{50}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{50}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5.$$

Ответ: 5.

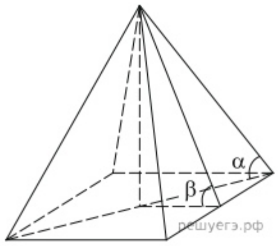
Ответ: 5

5. Задание 5 № 509419

В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 22, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $\sqrt{14}$. Найти сторону основания пирамиды.

Решение.

Введём обозначения углов, как показано на рисунке. Пусть R — длина половины диагонали. В силу связи основных углов в правильной пирамиде:



$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta/\sqrt{2} = \sqrt{7},$$

поэтому

$$a = \sqrt{2}R = \sqrt{2}\cdot l\cos\alpha.$$

Вычислим $\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}} = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Получаем, что

$$a = \sqrt{2}\cdot l\cos\alpha = \sqrt{2}\cdot 22\cdot\frac{1}{\sqrt{8}} = 11.$$

Ответ: 11.

Примечание.

Докажем формулу связи основных углов в правильной пирамиде.

Пусть h — высота пирамиды, a — сторона основания пирамиды, тогда диагональ основания пирамиды равна $a\sqrt{2}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{0,5a\sqrt{2}};\ \operatorname{tg}\beta = \frac{h}{0,5a}, \text{ откуда } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: 11

6. Задание 6 № 119972

Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

Решение.

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0+2=3, \\ ax_0^2+2x_0+3=3x_0+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0=0,5, \\ 0,5x_0-x_0=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,125, \\ x_0=4. \end{cases}$$

Искомое значение a равно 0,125.

Ответ: 0,125.

Приведем другое решение.

По смыслу задачи $a \neq 0$, а значит, график заданной функции — парабола. Касательная к параболе (а также и к гиперболе) имеет с ней единственную общую точку. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы уравнение $ax^2+2x+3=3x + 1$ имело единственно решение. Для этого дискриминант $1 - 8a$ уравнения $ax^2 - x + 2 = 0$ должен быть равен нулю, откуда $a = \frac{1}{8} = 0,125.$

Ответ: 0,125

7. Задание 7 № 27958

Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\frac{\upsilon^2}{L} - g\right)$, где m – масса воды в килограммах, υ скорость движения ведерка в м/с, L – длина веревки в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $P(\upsilon) \geq 0$ при заданной длине верёвки $L = 0,4$ м:

$$P \geq 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{\upsilon^2}{L} - g\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\upsilon^2}{0{,}4} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow \upsilon^2 \geq 4 \Leftrightarrow \upsilon \geq 2 \text{ м/с.}$$

Ответ: 2.

Ответ: 2

8. Задание 8 № 99600

Часы со стрелками показывают 8 часов ровно. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

Решение.

До четвертой встречи стрелок минутная должна сначала пройти 8 разделяющих их часовых делений (поскольку часы показывают 8 часов), затем 3 раза обойти полный круг, то есть пройти 36 часовых делений, и пройти последние L делений, на которые поворачивается часовая стрелка за время движения минутной. Скорость движения минутной стрелки в 12 раз больше часовой: пока часовая обходит один полный круг, минутная проходит 12 кругов. Приравняем время движения часовой и минутной стрелок до их четвертой встречи:

$$\frac{L}{1} = \frac{8+36+L}{12} \Leftrightarrow 12L = L+44 \Leftrightarrow L = 4.$$

Часовая стрелка пройдет 4 деления, что соответствует 4 часам, то есть 240 минутам.

Ответ: 240.

Приведем арифметическое решение.

Скорость минутной стрелки 1 круг в час, а часовой — $\frac{1}{12}$ круга в час, поэтому скорость удаления или сближения стрелок равна $\frac{11}{12}$ круга в час. Расстояние между стрелками, отсчитываемое по окружности, в начальный момент составляет 40 минут или $\frac{2}{3}$ круга. С момента первой встречи до момента четвёртой встречи минутная стрелка должна опередить часовую на три круга. Всего $\frac{2}{3}+3=\frac{11}{3}$ круга. Поэтому необходимое время равно $\frac{11}{3} : \frac{11}{12} = 4$ часа или 240 минут.

Приведем другое решение.

Ясно, что в первый раз стрелки встретятся между 8 и 9 часами, второй раз — между 9 и 10 часами, третий — между 10 и 11, четвертый — между 11 и 12 часами, то есть ровно в 12 часов. Таким образом, они встретятся ровно через 4 часа, что составляет 240 минут.

Помещаем решение в общем виде.

Скорость вращения часовой стрелки равна 0,5 градуса в минуту, а минутной — 6 градусов в минуту. Поэтому когда часы показывают время h часов m минут часовая стрелка повернута на $30h + 0{,}5m$ градусов, а минутная — на $6m$ градусов относительно 12-часового деления.

Пусть в первый раз стрелки встретятся через t_1 минут. Тогда если минутная стрелка еще не опережала часовую в течение текущего часа, то $6m + 6t_1 = 30h + 0{,}5m + 0{,}5t_1$, т. е. $t_1 = (60h - 11m)/11$ (*). В противоположном случае получаем уравнение $6m + 6t_1 = 30h + 0{,}5m + 0{,}5t_1 + 360$, откуда $t_1 = (60h - 11m + 720)/11$ (**).

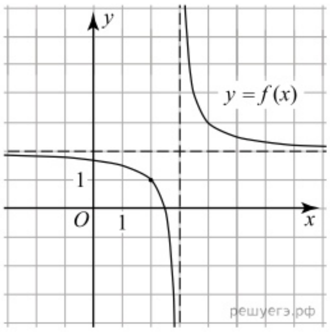
Пусть во второй раз стрелки встретятся через t_2 минут после первого, тогда $0{,}5t_2 = 6t_2 - 360$, откуда $t_2 = 720/11$ (***). Это же верно для каждого следующего оборота.

Поэтому для встречи с номером n из (*) и (**) с учетом (***) имеем соответственно: $t_n = (60h - 11m + 720(n-1))/11$ или $t_n = (60h - 11m + 720n - 720)/11$.

Ответ: 240

9. Задание 9 № 564197

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{a}{x+b}+c$, где числа a, b и c — целые. Найдите $f(13)$.



Решение.

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=2$, значит, $c=2$.
График функции имеет вертикальную асимптоту $x=3$, значит, $b=-3$.
По графику $f(2)=1$, тогда

$$\frac{a}{2-3}+2=1 \Leftrightarrow a=1.$$

Таким образом, $f(x)=\dfrac{1}{x-3}+2$. Найдём $f(13)$.

$$f(13)=\frac{1}{13-3}+2=2,1.$$

Ответ: 2,1.
Ответ: 2,1

10. Задание 10 № 509352

Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

Решение.

Вероятность того, что на одном из требуемых мест окажется чётное число равна 0,5. Следовательно, вероятность того, что на двух местах одновременно окажутся два чётных числа равна 0,5 · 0,5 = 0,25.

Ответ: 0,25.
Ответ: 0,25

11. Задание 11 № 77500

Найдите точку максимума функции $y=-\dfrac{x}{x^2+289}$.

Решение.

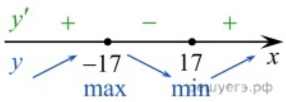
Найдем производную заданной функции:

$$y'=-\left(\frac{x}{x^2+289}\right)'=-\frac{1\cdot\left(x^2+289\right)-x\cdot(2x)}{\left(x^2+289\right)^2}=\frac{x^2-289}{\left(x^2+289\right)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2-289=0\Leftrightarrow x^2=289\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=17,\\ x=-17.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=-17$.

Ответ: −17.

Ответ: -17

12. Задание 12 № 514081

а) Решите уравнение $3\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^x+3\cdot 4^{x+1}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $[2;\ 3]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^x+3\cdot 4^{x+1}=0\Leftrightarrow 9^x-7\cdot 6^x+12\cdot 4^x=0\Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x-7\left(\frac{3}{2}\right)^x+12=0.$$

Пусть $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, тогда уравнение запишется в виде $t^2-7t+12=0$, откуда $t=3$ или $t=4$.

При $t=3$ получим: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=3$, откуда $x=\log_{\frac{3}{2}}3$.

При $t=4$ получим: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=4$, откуда $x=\log_{\frac{3}{2}}4$.

б) Поскольку $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2<3<\left(\dfrac{3}{2}\right)^3<4$, получаем: $2<\log_{\frac{3}{2}}3<3<\log_{\frac{3}{2}}4$. Значит, отрезку $[2;\ 3]$ принадлежит число $\log_{\frac{3}{2}}3$.

Ответ: а) $\log_{\frac{3}{2}}3$; $\log_{\frac{3}{2}}4$, б) $\log_{\frac{3}{2}}3$.

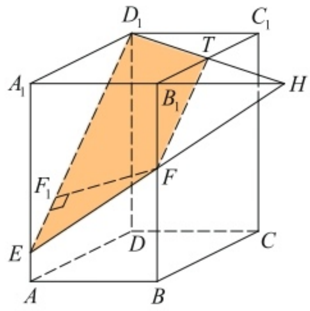
13. Задание 13 № 509363

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4 : 3$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

Решение.



а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны, как треугольники с параллельными сторонами, следовательно,

$$\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{A_1E}{A_1D_1} = \frac{6A_1A}{7AD} = \frac{6 \cdot 14}{7 \cdot 12} = 1.$$

Таким образом, $B_1F = B_1T = \frac{1}{2}B_1C_1 = 6$. Тогда $FB = 14 - 6 = 8$ и $BF : FB_1 = 4 : 3$.

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны. Четырёхугольник ED_1TF— трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H. Точка T — середина B_1C_1, поэтому отрезок FT — средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H = EH$, откуда $D_1T = EF$, то есть трапеция ED_1TF — равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1 = EA_1\sqrt{2} = 12\sqrt{2}, \quad FT = FB_1 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2},$$

$$EF = D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + TC_1^2} = 2\sqrt{17}.$$

Высота равнобедренной трапеции $FF_1 = \sqrt{EF^2 - EF_1^2} = \sqrt{(2\sqrt{17})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}.$

Тогда $S_{EFTD_1} = 5\sqrt{2} \cdot \dfrac{12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} = 90.$

Ответ: б) 90.

14. Задание 14 № 507582

Решите неравенство $\left(x+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq 4\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$.

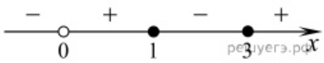
Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 5-x \geq 0, \\ 5-x \neq 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2-6x+9}=1$, т. е. $|x-3|=1$ и, значит, $x=2$ или $x=4$. Тем самым, $x=2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2-6x+9} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$, получим: $x+\frac{3}{x} \geq 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$.



Решим это неравенство, получим: $0 < x \leq 1$ или $x \geq 3$.

Учитывая ограничения, получаем множество решений исходного неравенства: $(0;\ 1] \cup \{2\} \cup [3;\ 4) \cup (4;\ 5]$.

Ответ: $(0;\ 1] \cup \{2\} \cup [3;\ 4) \cup (4;\ 5]$.

15. Задание 15 № 510103

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть начальная сумма кредита равна S_0, тогда переплата за первый месяц равна $\frac{r}{100}S_0$. По условию, ежемесячный долг перед банком должен уменьшиться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты, равной $S_0/19$, и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов, равной

$$\frac{r}{100}S_0,\ \frac{18}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0,\ \ldots,\ \frac{2}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0,\ \frac{1}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0.$$

Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, найдём полную переплату по кредиту:

$$\frac{r}{100}S_0\left(1+\frac{18}{19}+\ldots+\frac{2}{19}+\frac{1}{19}\right)=\frac{r}{100}S_0\cdot\frac{1+\frac{1}{19}}{2}\cdot 19=\frac{r}{10}S_0.$$

По условию общая сумма выплат на 30% больше суммы, взятой в кредит, тогда:

$$0,1rS_0=0,3S_0\Leftrightarrow r=3.$$

Ответ: 3.

Примечание Дмитрия Гущина.

Укажем общие формулы для решения задач этого типа. Пусть на n платежных периодов (дней, месяцев, лет) в кредит взята сумма S, причём каждый платежный период долг сначала возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же сумму меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Тогда величина переплаты П и полная величина выплат В за всё время выплаты кредита даются формулами

$$\text{П}=\frac{r}{100}\cdot\frac{n+1}{2}S_0,\qquad \text{В}=S_0+\text{П}=S_0\left(1+\frac{r(n+1)}{200}\right).$$

В условиях нашей задачи получаем: $\frac{r(n+1)}{200}S_0=0,3S_0$, откуда для $n = 19$ находим $r = 3$.

Доказательство формул (для получения полного балла его нужно приводить на экзамене) немедленно следует из вышеприведённого решения задачи путём замены 19 месяцев на n месяцев и использовании формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии.

16. Задание 16 № 505568

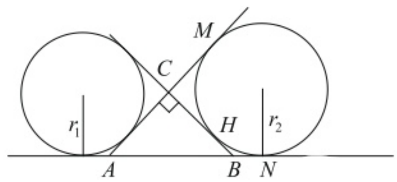
Прямые, содержащие катеты AC и CB прямоугольного треугольника ACB, являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу AB, является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника ACB.

б) Найдите площадь треугольника ACB.

Решение.

а) Введём обозначения, как показано на рисунке, пусть M, H, N — точки касания. Касательные, проведённые к окружности из одной точки равны: $AM = AN$, $CM = CH$, $HB = BN$. Поэтому:



$$P = AC + CH + HB + AB \; = \; AC + CM + BN + AB \; = \; AM + AN \; = 2AM,$$

откуда $p = AM$, где P — периметр, p — полупериметр треугольника.

б) Для определения площади треугольника используем формулу, связывающую её с полупериметром, стороной и радиусом вневписанной окружности, касающейся этой стороны и продолжений двух других сторон треугольника:

$$S = (p - AC) \cdot r_1 = (AM - AC)r_1 = CMr_1 = r_2r_1 = 8.$$

Ответ: $S_{ACB} = 8$.

Примечание: указанная в решении формула легко может быть получена из следующих соображений $S_{ACB} = S_{ABCO_1} - S_{ACO_1}$, где O_1 — центр окружности с радиусом r_1. При этом

$$S_{ACO_1} = \frac{1}{2}AC \cdot r_1, \quad S_{ABCO_1} = S_{ABO_1} + S_{BCO_1} = \frac{1}{2}AB \cdot r_1 + \frac{1}{2}BC \cdot r_1 = \frac{1}{2}(AB + BC) \cdot r_1.$$

Тогда

$$S_{ACB} = \frac{1}{2}(AB + BC) \cdot r_1 - \frac{1}{2}AC \cdot r_1 = \frac{1}{2}((AB + BC + AC) - 2AC) \cdot r_1 = \frac{1}{2}(P_{ABC} - 2AC) \cdot r_1 = (p - AC) \cdot r_1.$$

17. Задание 17 № 484632

При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$ имеет решения?

Решение.

Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 = y+1, \\ (y-a)^2 + (x-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Исходная система имеет решения, тогда и только тогда, когда относительно y имеет решения система:

$$\begin{cases} (y-a)^2 + y + 1 = 1, \\ y+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + (1-2a)y + a^2 = 0, \\ y \ge -1. \end{cases}$$

Решая уравнение этой системы, находим, что $y = \dfrac{2a - 1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$. Требование задачи будет выполнено, если последняя смешанная система имеет хотя бы одно решение. Искомые значения a находятся из совокупности неравенств

$$\frac{2a - 1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \ge -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-4a} \ge -1 - 2a, \\ \sqrt{1-4a} \le 1 + 2a. \end{array} \right.$$

Иррациональные неравенства можно решить, используя теоремы о равносильности:

$$\sqrt{x} \le y \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x \le y^2 \end{cases} \text{ и } \sqrt{x} \ge y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < 0, \\ x \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge 0, \\ x \ge y^2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < 0, \\ x \ge 0, \end{cases} \\ x \ge y^2 \end{array} \right.$$

Получим: $-2 \le a \le \dfrac{1}{4}$ или $0 \le a \le \dfrac{1}{4}$, что дает $-2 \le a \le \dfrac{1}{4}$.

Другой путь решения неравенств — ввести замену $t = \sqrt{1-4a}$. В этом случае $a = \dfrac{1}{4}(1-t^2)$. Тогда:

$$t \ge -1 - \frac{1}{2}(1-t^2), \text{ откуда } t^2 - 2t - 3 \le 0 \underset{t \ge 0}{\Leftrightarrow} 0 \le t \le 3$$

и

$$t \le 1 + \frac{1}{2}(1-t^2), \text{ что дает } t^2 + 2t - 3 \le 0 \underset{t \ge 0}{\Leftrightarrow} 0 \le t \le 1.$$

Тем самым, $0 \le t \le 3$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$0 \le \sqrt{1-4a} \le 3 \Leftrightarrow 0 \le 1 - 4a \le 9 \Leftrightarrow -1 \le -4a \le 8 \Leftrightarrow -2 \le a \le \frac{1}{4}.$$

Ответ: $a \in \left[-2, \dfrac{1}{4}\right]$.

18. Задание 18 № 501734

а) Чему равно число способов записать число 1292 в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i— целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$ ровно 130 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i— целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$ ровно 130 способами?

Решение.

Каждое число $0 \le a_i \le 99$ однозначно представляется в виде $a_i = 10b_i + c_i$, где $0 \le b_i \le 9$ и $0 \le c_i \le 9$ $(i = 0;\ 1;\ 2;\ 3)$. Значит, для каждого представления некоторого числа N в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ имеет место единственное представление N в виде $N = 10n + m$, где $n = b_3 \cdot 10^3 + b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + b_0$ и $m = c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$ —произвольные целые числа от 0 до 9999. Число способов записать число N в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ равно числу способов записать число N в виде $N = 10n + m$.

а) Для представления числа 1292 в виде $1292 = 10n + m$ в качестве n можно взять любое целое число от 0 до 129. При этом $m = 1292 - 10n$ определено однозначно. Таким образом, искомое число способов равно 130.

б) Повторяя рассуждения предыдущего пункта, несложно показать, что каждое из чисел от 1290 до 1299 представимо в требуемом виде ровно 130 способами.

в) Рассмотрим представление некоторого числа N в виде $N = 10n + m$, где n и m —некоторые целые числа от 0 до 9999. Представим m в виде $m = 10k + l$, где l — цифра единиц числа m, а k — некоторое целое число от 0 до 999. Тогда выполнено:

$$N = 10n + 10k + l \Leftrightarrow N - l = 10(n + k) \Leftrightarrow \frac{N - l}{10} = n + k.$$

Найдём все числа K, представимые ровно 130 способами в виде $K = n + k$, где n — некоторое целое число от 0 до 9999, а k — некоторое целое число от 0 до 999.

Пусть для некоторого числа K представления $K = n_1 + k_1$ и $K = n_2 + k_2$ таковы, что n_1 — наименьшее возможное n, а n_2— наибольшее возможное n. Тогда $n_1 = 0$ или $k_1 = K - n_1 = 999$, иначе бы было представление $K = (n_1 - 1) + (k_1 + 1)$. Аналогично, $n_2 = 9999$ или $k_2 = K - n_2 = 0$.

Заметим, что для любого целого n_0 такого, что $n_1 < n_0 < n_2$, имеется представление $K = n_0 + k_0$, поскольку $0 \le n_1 < n_0 < n_2 \le 9999$, $0 \le k_2 < k_0 < k_1 \le 999$. Таким образом, количество представлений равно $n_2 - n_1 + 1$. Если $n_1 = 0$; $n_2 = 9999$ или $k_1 = 999$, $k_2 = 0$, то представлений больше. Значит, или $n_1 = 0$; $n_2 = 129$; $k_2 = 0$; $K = 129$; $N = 1290 + l$, или $n_2 = 9999$; $n_1 = 9870; k_1 = 999$; $K = 10869$; $N = 108690 + l$, где l— произвольная цифра. Таким образом, искомое количество чисел равно 20.

Ответ: а) 130; б) да; в) 20.