

Вариант № 41054171

1. Задание 1 № [282850](#)

Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = -8$.

Решение.

Извлекая кубический корень из обеих частей уравнения, получаем $x - 1 = -2$, откуда $x = -1$.

Ответ: -1.

Ответ: -1

2. Задание 2 № [500037](#)

Проводится жеребьёвка Лиги Чемпионов. На первом этапе жеребьёвки восемь команд, среди которых команда «Барселона», распределились случайным образом по восьми игровым группам — по одной команде в группу. Затем по этим же группам случайным образом распределяются еще восемь команд, среди которых команда «Зенит». Найдите вероятность того, что команды «Барселона» и «Зенит» окажутся в одной игровой группе.

Решение.

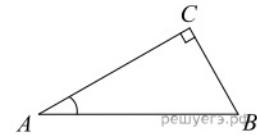
По результатам первой жеребьёвки команда «Барселона» находится в одной из 8 групп. Вероятность того, что команда «Зенит» окажется в той же игровой группе равна одной восьмой.

Ответ: 0,125.

Ответ: 0,125

3. Задание 3 № 27239

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 2$, $\sin A = \frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите BC .



Решение.

Имеем:

$$BC = AC \operatorname{tg} A = \frac{AC \sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{1 - \frac{17}{289}}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} \cdot \frac{17}{\sqrt{272}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{16}} = 2 \cdot \frac{1}{4} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Приведем решение Алишера Простова.

Найдем косинус угла A :

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Найдем гипотенузу AB :

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{2}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

По теореме Пифагора найдем BC :

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{17 - 16}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0,5.$$

Ответ: 0,5

4. Задание 4 № 26823

Найдите $2p(x-7) - p(2x)$, если $p(x) = x - 3$.

Решение.

Заменив аргумент в равенстве $p(x) = x - 3$, находим $p(2x) = 2x - 3$ и $p(x-7) = (x-7) - 3 = x - 10$. Тогда

$$2p(x-7) - p(2x) = 2(x-10) - (2x-3) = -17.$$

Ответ: -17.

Ответ: -17

5. Задание 5 № 509440

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 5, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $0,25\sqrt{11}$. Найти сторону основания пирамиды.

Решение.

Введём обозначения, как показано на рисунке. Выразим длину стороны AC через длину боковой стороны AS . Высота правильного треугольника выражается через его сторону: $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$. Точки O

высота AH делится в отношении $2 : 1$, поэтому $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{\sqrt{3}}{3}AC$,

$OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{6}AC$. Угол SHO равен углу между боковой гранью и плоскостью основания. Из прямоугольного треугольника SOH :

$$SO = OH \operatorname{tg} \angle SHO = \frac{1\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} AC = \frac{\sqrt{33}}{24} AC.$$

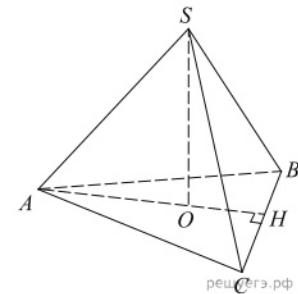
Из прямоугольного треугольника AOS по теореме Пифагора:

$$AS = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\frac{1}{3}AC^2 + \frac{11}{192}AC^2} = AC\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{11}{192}} = AC\sqrt{\frac{64+11}{192}} = AC\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}AC.$$

Откуда $AC = \frac{8}{5}AS = 8$.

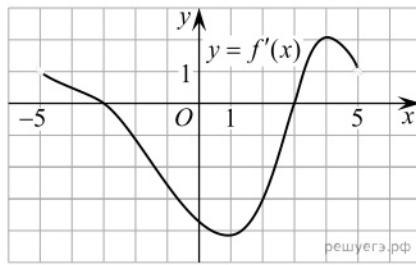
Ответ: 8.

Ответ: 8



6. Задание 6 № 505119

Функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-5; 5]$. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0 , в которой функция принимает наименьшее значение, если $f(-5) \geq f(5)$.

**Решение.**

Напомним, что если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, а её производная положительна (отрицательна) на интервале $(a; b)$, то функция возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

Тем самым, функция f , график производной которой дан в условии, возрастает на отрезках $[-5; -3]$ и $[3; 5]$ и убывает на отрезке $[-3; 3]$.

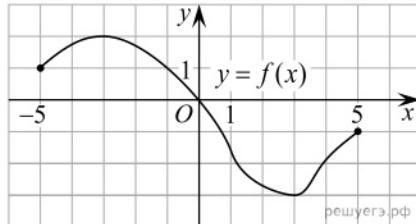
Из этого следует, что f принимает наименьшее значение на левой границе отрезка, в точке -5 , или в точке минимума $x_{\min} = 3$. В силу возрастания f на отрезке $[3; 5]$ справедливо неравенство $f(5) \geq f(3)$. Поскольку по условию $f(-5) \geq f(5)$, справедлива оценка $f(-5) \geq f(3)$.

Тем самым, наименьшего значения функция f достигает в точке 3 . График одной из функций, удовлетворяющих условию, приведён на рисунке.

Ответ: 3.

Примечание Б. М. Беккера (Санкт-Петербург).

Непрерывность функции на концах отрезка существенна. Действительно, если бы функция f имела в точке 5 разрыв первого рода (см. рис.), значение $f(5)$ могло оказаться меньше значения $f(3)$, а тогда наименьшим значением функции на отрезке $[-5; 5]$ являлось бы значение функции в точке 5 .

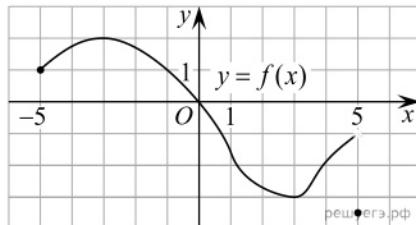
**Примечание портала РЕШУ ЕГЭ.**

Мы были удивлены, обнаружив это задание в экзаменационной работе досрочного ЕГЭ по математике 28.04.2014г. Это непростое задание отсутствует в Открытых банках заданий, что, несомненно, оказалось неприятным сюрпризом для выпускников.

Примечание Александра Ларина (Москва).

В этой задачке весь ужас «выстрелил в холостую», 99,9999% решающих даже и не обратят внимание на потенциальную угрозу — ответ-то получается такой же. А про соотношение значений на границах и уж тем более про непрерывность никто читать и не собирается :-) А вот если условие слегка поменять, то «минус балл» всей стране обеспечен будет.

Ответ: 3



7. Задание 7 № 525114

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 256 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Решение.

Подставим в формулу $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, данные из условия: $p_1 = 1$ атм, $V_1 = 256$ л, $p_2 = 128$ атм. Решим полученное уравнение, заметив, что $1,4 = \frac{7}{5}$ и возведя обе части уравнения в степень $\frac{5}{7}$:

$$1 \cdot 256^{\frac{7}{5}} = 128 \cdot V_2^{\frac{7}{5}} \Leftrightarrow 256 = (2^7)^{\frac{5}{7}} \cdot V_2 \Leftrightarrow 256 = 32V_2 \Leftrightarrow V_2 = 8 \text{ (л)}.$$

Ответ: 8.

Ответ: 8

8. Задание 8 № 500253

Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Решение.

Пусть x (км/ч) — собственная скорость катера, y (км/ч) — скорость течения реки весной. Тогда летом она составит $y - 1$ (км/ч); $x > y > 1$. Составим таблицу по данным задачи:

	Весна	Лето
По течению	$x + y$	$x + y - 1$
Против течения	$x - y$	$x - y + 1$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3}, \\ \frac{x+y-1}{x-y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y) = 5(x-y), \\ 2(x+y-1) = 3(x-y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y, \\ x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 5. \end{cases}$$

Таким образом, скорость течения весной равна 5 км/ч.

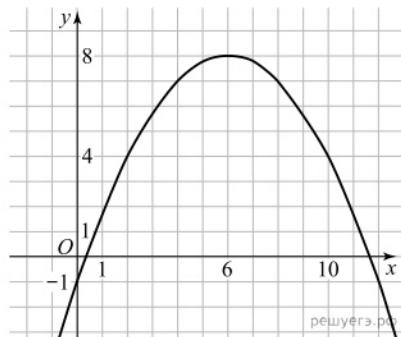
Ответ: 5.

Ответ: 5

9. Задание 9 № 562061

На рисунке изображён график функции вида

$f(x) = \frac{x^2}{a} + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите значение дискриминанта уравнения $f(x) = 0$.



Решение.

По рисунку определяем, что $f(x) = -\frac{(x-6)^2}{4} + 8 = -\frac{x^2}{4} + 3x - 1$, значит, $a = -4, b = 3, c = -1$.

Тогда дискриминант уравнения $-\frac{x^2}{4} + 3x - 1 = 0$ равен

$$D = 3^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = 8.$$

Ответ: 8.

Ответ: 8

10. Задание 10 № 319353

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованым.

Решение.

Вероятность того, что стекло сделано на первой фабрике и оно бракованное: $0,45 \cdot 0,03 = 0,0135$.

Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике и оно бракованное: $0,55 \cdot 0,01 = 0,0055$.

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0,0135 + 0,0055 = 0,019$.

Ответ: 0,019.

Ответ: 0,019

11. Задание 11 № [245175](#)

Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

Решение.

Выделим полный квадрат:

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{(x - 3)^2 + 4}.$$

Отсюда имеем:

$$y = \sqrt{(x - 3)^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2.$$

Поэтому наименьшее значение функции достигается в точке 3, и оно равно 2.

Ответ: 2.

Примечание.

Приведем другое решение.

Поскольку функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая, а подкоренное выражение положительно при всех значениях переменной, заданная функция достигает наименьшего значения в той же точке, в которой достигает наименьшего значения подкоренное выражение. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке $x = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3, и оно равно 4. Следовательно, наименьшее значение заданной функции $y_{\text{нм}} = \sqrt{4} = 2$.

Ответ: 2

12. Задание 12 № 501215

а) Решите уравнение $1 + \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

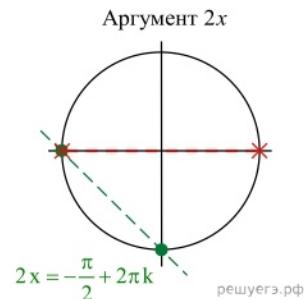
Решение.

а) Выполним преобразования:

$$1 + \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)} \Leftrightarrow 1 + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -\frac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x + \cos 2x = -1, & (1) \\ \sin 2x \neq 0. & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (1) находим:

$$\begin{aligned} \sin 2x + \cos 2x = -1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi + 2\pi k, & (a) \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. & (b) \end{cases} \end{aligned}$$



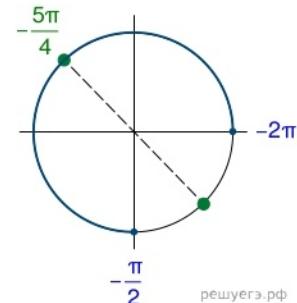
Так как решения уравнения (а) не удовлетворяют условию (2), то окончательно получаем $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Из решений, найденных в пункте а), промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит только одно число: $-\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$.

Примечание.

Для преобразования выражения $\sin 2x + \cos 2x = -1$ мы воспользовались приемом, называемым введением вспомогательного угла. Можно было бы использовать известное соотношение $\sin + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. Третий путь — свести уравнение к однородному неполному тригонометрическому уравнению второй степени, используя формулы двойных углов. А именно,



$$\sin 2x + \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = -1 \Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x + \cos x) = 0,$$

откуда либо $\cos x = 0$, либо $\sin x + \cos x = 0$. Последнее уравнение — однородное тригонометрическое первой степени, оно эквивалентно уравнению $\operatorname{tg} x + 1 = 0$. Осталось решить полученные простейшие уравнения и отбросить корни, не лежащие в ОДЗ.

13. Задание 13 № 509502

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C .

Решение.

а) В плоскости BB_1D_1D через точку K проведем прямую параллельно BD_1 . Пусть эта прямая пересекает диагональ B_1D_1 в точке L . В плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$ проведем прямую C_1L ,

пусть она пересекает сторону A_1B_1 в точке P . Треугольник KPC_1 — сечение, проходящее через точки K и C_1 параллельно прямой BD_1 . Действительно, прямая BD_1 параллельна плоскости сечения, так как параллельна лежащей в нем прямой KL .

В плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$ через точку A_1 проведем прямую параллельно C_1P . Пусть она пересекает D_1B_1 в точке M . По теореме Фалеса имеем:
 $B_1L : B_1D_1 = B_1K : B_1B = 1 : 4$ и $D_1M : D_1B_1 = 1 : 4$,
поэтому $ML : LB_1 = 2 : 1$. Тогда
 $A_1P : PB_1 = ML : LB_1 = 2 : 1$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть теперь точка N — основание высоты B_1N прямоугольного треугольника KB_1C_1 . B_1N — является проекцией наклонной PN на плоскость BB_1C_1C . Тогда угол PNB_1 — линейный угол искомого двугранного угла. Имеем:

$$PB_1 = \frac{1}{3}A_1B_1 = \frac{4}{3}, \quad S_{B_1C_1K} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2,$$

$$C_1K = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}, \quad B_1N = \frac{2S}{C_1K} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$\operatorname{tg} \angle PNB_1 = \frac{PB_1}{B_1N} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Тем самым, $\angle PNB_1 = \arctg \frac{\sqrt{17}}{3}$.

Ответ: б) $\arctg \frac{\sqrt{17}}{3}$.

Приведём другое решение.

б) Уравнение плоскости — $ax + by + cz + d = 0$.

Приведём координаты точек $C_1(0; 4; 4)$, $K(4; 4; 3)$, $P\left(4; \frac{8}{3}; 4\right)$.

Подставив координаты указанных точек в уравнение, получим систему трёх уравнений

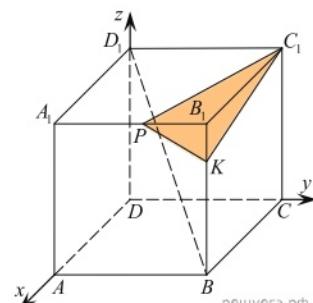
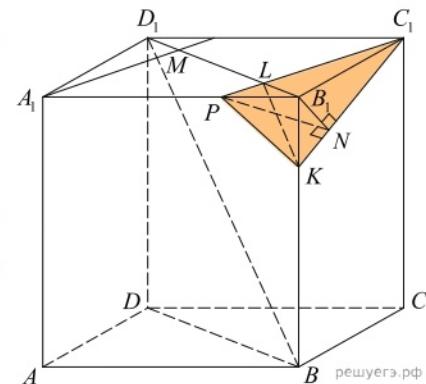
$$\begin{cases} 4b + 4c + d = 0, \\ 4a + 4b + 3c + d = 0, \\ 4a + \frac{8}{3}b + 4c + d = 0. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, из первого третье, из второго третье, получим следующую эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} -4a + c = 0, \\ -4a + \frac{4}{3}b = 0, \\ \frac{4}{3}b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}c, \\ b = 3a = \frac{3}{4}c, \\ b = \frac{3}{4}c. \end{cases}$$

Таким образом, вектор нормали плоскости имеет вид $(c; 3c; 4c)$. Откуда имеем: $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$. Получаем уравнение плоскости: $x + 3y + 4z + d = 0$. Определим теперь коэффициент d , для этого подставим в это уравнение координаты точки C_1 :

$$12 + 16 + d = 0 \Leftrightarrow d = -28.$$



Имеем: $x + 3y + 4z - 28 = 0$ — уравнение плоскости PKC_1 . Координаты вектора нормали к плоскости BB_1C : $\vec{n}_{BB_1C} = (0; 1; 0)$. Координаты вектора нормали к плоскости PKC_1 : $\vec{n}_{PKC_1} = (1; 3; 4)$. Обозначим угол между плоскостями PKC_1 и BB_1C как β . Найдём косинус угла между плоскостями PKC_1 и BB_1C : $\cos \beta = \frac{\vec{n}_{PKC_1} \cdot \vec{n}_{BB_1C}}{|\vec{n}_{PKC_1}| \cdot |\vec{n}_{BB_1C}|} = \frac{3}{\sqrt{26}}$.

Откуда $\beta = \arccos \frac{3}{\sqrt{26}}$. Может также быть получен ответ и через арктангенс: $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{17}}{3}$, $\beta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{3}$.

Приведём идею решения Евгения Матвеева.

Введём систему координат с центром в точке $B_1(0, 0, 0)$. Уравнение плоскости сечения C_1PK в отрезках $3x + y + 4z = 4$. Нормальный вектор к этой плоскости: $n_{C_1PK} = (3, 1, 4)$, нормальный вектор к плоскости BB_1C_1C : $n_1 = (1, 0, 0)$. Тогда

$$\cos(n; n_1) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{26}}.$$

14. Задание 14 № 514625

Решите неравенство $\frac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10 \cdot 9^x + 10 \cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^x + 3} \leq 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}$.

Решение.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{3t^3 - 10t^2 + 10t - 5}{3t^2 - 10t + 3} \leq t + \frac{1}{t-2} + \frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{t(3t^2 - 10t + 3)}{3t^2 - 10t + 3} + \frac{6t-2}{3t^2 - 10t + 3} + \frac{t-3}{3t^2 - 10t + 3} \leq t + \frac{1}{t-2} + \frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{t(3t^2 - 10t + 3)}{3t^2 - 10t + 3} + \frac{2(3t-1)}{(3t-1)(t-3)} + \frac{t-3}{(3t-1)(t-3)} \leq t + \frac{1}{t-2} + \frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow t + \frac{2}{t-3} + \frac{1}{3t-1} \leq t + \frac{1}{t-2} + \frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{t-3} \leq \frac{1}{t-2}, \\ t \neq \frac{1}{3} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t-1}{(t-2)(t-3)} \leq 0, \\ t \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3} < t \leq 1, \\ 2 < t < 3. \end{cases} \end{aligned}$$

При $t < \frac{1}{3}$ получим: $3^x < \frac{1}{3}$, откуда $x < -1$.

При $\frac{1}{3} < t \leq 1$ получим: $\frac{1}{3} < 3^x \leq 1$, откуда $-1 < x \leq 0$.

При $2 < t < 3$ получим: $2 < 3^x < 3$, откуда $\log_3 2 < x < 1$.

Решение исходного неравенства: $x < -1$; $-1 < x \leq 0$; $\log_3 2 < x < 1$.

Ответ: $(-\infty; -1); (-1; 0]; (\log_3 2; 1)$.

15. Задание 15 № 520787

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1000000 рублей на ($n+1$) месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n -й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n -го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу ($n+1$)-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

Решение.

По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1000, 960, 920, \dots, 240, 200, 0.$$

$$\text{Значит, } n = \frac{1000 - 200}{40} = 20.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1000k, 960k, \dots, 240k, 200k.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$1000(k-1)+40, 960(k-1)+40, \dots, 240(k-1)+40, 200k.$$

Всего следует выплатить

$$(k-1) \cdot \frac{20 \cdot 1240}{2} + 800 + 200k = 12600k - 11600 \text{ (тыс. рублей)}.$$

Тогда $12600k - 11600 = 1378$, откуда $12600k = 12978$, и следовательно, $k = 1,03$, то есть $r = 3$.

Ответ: 3.

16. Задание 16 № 505425

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

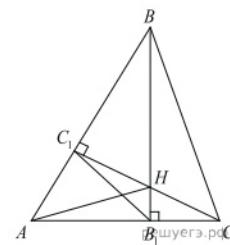
- Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
- Найдите BC , если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

Решение.

а) В четырёхугольнике AC_1HB_1 углы C_1 и B_1 — прямые, следовательно, около этого четырёхугольника можно описать окружность, причём AH — её диаметр. Вписанные углы AC_1B_1 и AHB_1 опираются на одну дугу, следовательно, $\angle AHB_1 \equiv \angle AC_1B_1$.

Углы BC_1C и BB_1C — прямые, значит, точки B , C , B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC . Следовательно,

$$\angle AC_1B_1 = 180^\circ - \angle BC_1B_1 = \angle BCB_1.$$



Получаем, что $\angle ACB \equiv \angle AHB_1$.

б) В треугольнике AB_1C_1 диаметр описанной окружности $AH \equiv 4$, откуда

$$B_1C_1 = AH \cdot \sin \angle BAC = AH \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике BB_1A имеем:

$$AB_1 = AB \cos \angle BAB_1 = AB \cos 60^\circ = \frac{1}{2}AB.$$

В прямоугольном треугольнике CC_1A имеем:

$$AC_1 = AC \cos \angleCAC_1 = AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}AC.$$

Получаем, что $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A и $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$, следовательно, они подобны. Тогда $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1} = 2$. Значит,

$$BC = 2B_1C_1 = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Приведем решение пункта б) Тофига Алиева.

В четырёхугольнике AC_1HB_1 углы C_1 и B_1 — прямые, следовательно, около этого четырёхугольника можно описать окружность, причём AH — её диаметр. Эта окружность описана также вокруг треугольника C_1HB_1 , тогда по теореме синусов $\frac{B_1C_1}{\sin \angle A} = 2R = AH$, откуда $B_1C_1 = AH \sin \angle A = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

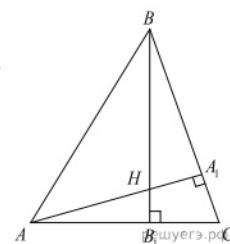
Как доказано в основном решении, треугольники C_1HB_1 и ABC подобны с коэффициентом подобия $\cos \angle A$, тогда $BC = \frac{B_1C_1}{\cos \angle A} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}$.

Примечание Дмитрия Гущина.

Укажем другое решение.

а) Поскольку AA_1 — перпендикуляр к BC , а BB_1 — перпендикуляр к AC (см. рис.), углы AHB_1 и ACB равны как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

б) Сторона треугольника, величина противолежащего ей угла и отрезок высоты, проведённой из вершины этого угла в точку пересечения высот треугольника, связаны соотношением: $BC = AH \operatorname{tg} A$, откуда $BC = 4 \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3}$.

**Примечание.**

Рекомендуем сравнить эту задачу с заданием [519475](#) из экзаменационного варианта ЕГЭ 2018 года.

17. Задание 17 № 505453

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(\log_8(x+a) - \log_8(x-a))^2 - 12a(\log_8(x+a) - \log_8(x-a)) + 35a^2 - 6a - 9 = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Пусть $t = \log_8(x+a) - \log_8(x-a)$, тогда, используя теорему, обратную теореме Виета, получим:

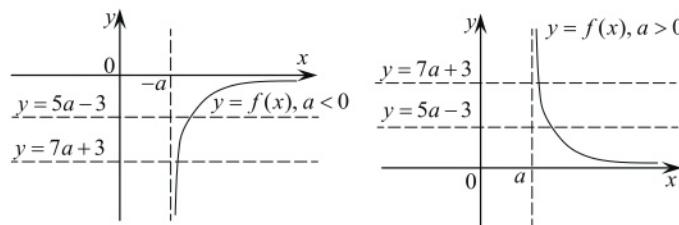
$$t^2 - 12at + 35a^2 - 6a - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - ((5a-3) + (7a+3))t + (5a-3)(7a+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5a-3, \\ t = 7a+3. \end{cases}$$

Значит, исходное уравнение имеет два различных корня тогда и только тогда, когда график функции $f(x) = \log_8(x+a) - \log_8(x-a)$ имеет с горизонтальными прямыми $y = 5a-3$ и $y = 7a+3$ ровно две общие точки. Эти прямые совпадают, если $a = -3$.

При $a = 0$ уравнение не имеет решений. Если $a > 0$, то при $x > a$, а если $a < 0$, то при $x > -a$, имеем:

$$f(x) = \log_8(x+a) - \log_8(x-a) = \log_8\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = \log_8\left(1 + \frac{2a}{x-a}\right).$$

При неограниченном увеличении x значения функции стремятся к нулю, причём, для $a < 0$ функция f является возрастающей, а при $a > 0$ — убывающей. Эскизы графиков изображены на рисунке.



Тем самым, при $a > 0$, должны быть выполнены неравенства $5a-3 > 0$, $7a+3 > 0$, откуда $a > \frac{3}{5}$, при $a < 0$, должны быть выполнены неравенства $5a-3 < 0$, $7a+3 < 0$, откуда $a < -\frac{3}{7}$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup \left(-3; -\frac{3}{7}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Приведём авторское решение.

Пусть $t = \log_8(x+a) - \log_8(x-a)$, тогда получим:

$$t^2 - 12at + 35a^2 - 6a - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5a-3, \\ t = 7a+3. \end{cases}$$

Значит, решение исходного уравнения — это решение уравнений $\log_8(x+a) - \log_8(x-a) = 5a-3$ или $\log_8(x+a) - \log_8(x-a) = 7a+3$.

Исследуем сколько решений имеет уравнение $\log_8(x+a) - \log_8(x-a) = b$ в зависимости от a и b . При $a \neq 0$ и $x > a$, и $x > -a$, то есть при $x > |a|$, левая часть определена и принимает вид

$$\log_8 \left(\frac{x+a}{x-a} \right) = \log_8 \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right).$$

При $x > |a|$ выражение $1 + \frac{2a}{x-a}$ принимает по одному все значения из промежутка $(1; +\infty)$ для $a > 0$ и принимает по одному разу все значения из промежутка $(0; 1)$ для $a < 0$. Значит, при $x > |a|$ выражение $\log_8 \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)$ принимает по одному разу все значения из промежутка $(0; +\infty)$ при $a > 0$ и принимает по одному разу все значения из промежутка $(-\infty; 0)$ при $a < 0$. Таким образом, уравнение $\log_8(x+a) - \log_8(x-a) = b$ имеет одно решение при $ab > 0$ и не имеет решений при $a \neq 0$ и $ab \leq 0$. При $a = 0$ и $x > 0$ уравнение принимает вид $0 = b$ и либо имеет бесконечно много решений, либо не имеет решений.

Уравнение $\log_8(x+a) - \log_8(x-a) = 5a - 3$ и $\log_8(x+a) - \log_8(x-a) = 7a + 3$ могут иметь общие решения при $5a - 3 = 7a + 3$, то есть при $a = -3$. При $a = -3$ оба уравнения принимают вид $\log_8(x-3) - \log_8(x+3) = -18$ и имеют одно решение.

При других значениях a исходное уравнение имеет два решения, если оба уравнения $\log_8(x+a) - \log_8(x-a) = 5a - 3$ и $\log_8(x+a) - \log_8(x-a) = 7a + 3$ имеют по одному решению. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} (5a-3)a > 0, \\ (7a+3)a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -\frac{3}{7}, \\ a > \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при a принадлежащем множеству $(-\infty; -3) \cup \left(-3; -\frac{3}{7}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

18. Задание 18 № 509326

Известно, что a, b, c , и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{7}{19}$.

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 6d$?

Решение.

а) Пусть $a = 10, b = 20, c = 11$ и $d = 37$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{21}{57} = \frac{7}{19}$.

б) Предположим, что $11 \cdot \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Тогда:

$$\begin{aligned} 11(a+c)bd &= (b+d)(ad+bc) \Leftrightarrow 11abd + 11bcd = abd + bcd + ad^2 + b^2c \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10abd - ad^2 = b^2c - 10bcd \Leftrightarrow ad(10b-d) = bc(b-10d). \end{aligned}$$

С другой стороны имеем: $10b-d \geq 10 \cdot 10 - 99 > 0 > 99 - 10 \cdot 10 \geq b-10d$. Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ разные знаки и, значит, левая и правая часть в последнем равенстве не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99 \geq a \geq 3b+1$ и $c \geq 6d+1$. Значит, $b \leq \frac{98}{3} < 33$. Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b \leq 32$. Используя неравенства $a \geq 3b+1, c \geq 6d+1, b \leq 32$ и $d \geq 10$, получаем:

$$\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{3b+6d+2}{b+d} = 3 + \frac{3d+2}{b+d} \geq 3 + \frac{3d+2}{d+32} = 6 - \frac{94}{d+32} \geq 6 - \frac{94}{42} = \frac{79}{21}.$$

Пусть $a = 97, b = 32, c = 61$ и $d = 10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{158}{42} = \frac{79}{21}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{79}{21}$.

Ответ: а) Да, например, если $a = 10, b = 20, c = 11$ и $d = 37$; б) нет; в) $\frac{79}{21}$.