ФИО ученика____
ФИО учителя____
Город/район____
Школа____

Таблица полученных ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

ВАРИАНТ 1

Часть 1

Ответом к заданиям 1-11 является целое число или конечная десятичная дробь.

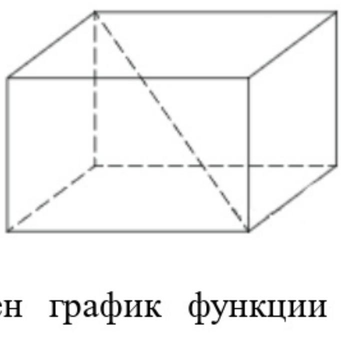
1. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = -1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

2. При производстве в среднем на каждые 2982 исправных насоса приходится 18 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

3. У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?

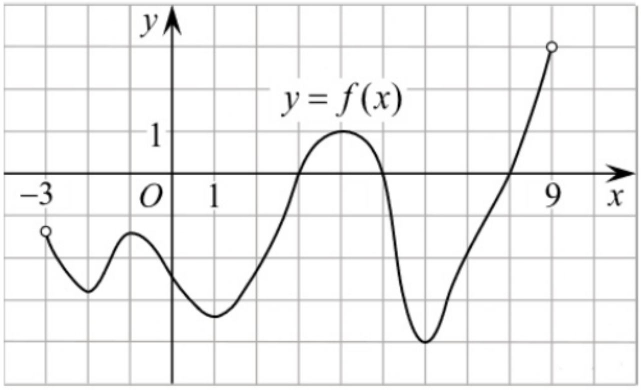
4. Найдите значение выражения $\frac{(5a^2)^3\cdot(6b)^2}{(30a^3b)^2}$ при $a \neq 0, b \neq 0$.

5. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.



6. На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определенной на интервале (−3; 9). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой *y*=12 или совпадает с ней.

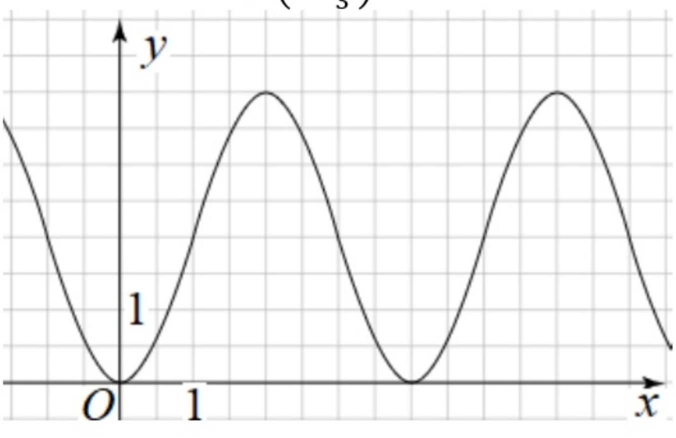
ФИО ученика________________________________



7. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 1400$К, $a = -10$К/мин², $b = 200$К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

8. Расстояние между городами А и Б равно 435 км. Из города А в город Б со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города Б выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

9. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a\cos\left(\frac{\pi x}{b} + c\right) + d$, где числа a, b, c и d - целые. Найдите $f\left(-\frac{14}{3}\right)$.



10. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

11. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке $[1; 9]$.

ФИО ученика_______________________________

Часть 2

Для заданий 12-18 запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное и обоснованное решение и ответ. Решение и ответы записывайте четко и разборчиво.

12. а) Решите уравнение $\sqrt{x^3+4x^2+9}-3=x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{2};\frac{7}{5}\right]$.

13. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E=6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AD=12$, $AA_1=14$, $AB=4\sqrt{2}$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

14. Решите неравенство: $\left|x^2-\frac{29}{12}x-\frac{35}{12}\right|\ge 2x^2-\frac{61}{12}x-\frac{19}{12}$.

15. Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна вносить в банк часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна выплатит банку в течение первого года кредитования?

16. В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD, точка M — середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC=3$, $AD=4$.

17. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{4-2x+y}=2,\\ a(x^2+3y+1)^2-(a+1)(x^2+3y+1)-2a-1=0\end{cases}$$

имеет не более трех решений.

18. Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 100 рублей, на неё приклеивают

ФИО ученика______________________________

бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 10 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110 рублей, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 81 рубль, а средняя цена книг без бирки — 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки — 210 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

ФИО ученика_______________________________

ФИО ученика____

ФИО учителя____

Город/район____

Школа____

Таблица полученных ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

ВАРИАНТ 2

Часть 1

Ответом к заданиям 1-11 является целое число или конечная десятичная дробь.

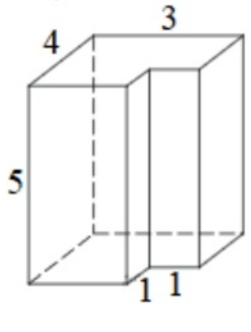
1. Найдите корень уравнения $\sqrt{-32-x}=2$.

2. В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

3. Большее основание равнобедренной трапеции равно 34. Боковая сторона равна 14. Синус острого угла равен $\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите меньшее основание.

4. Найдите $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если $p(b)=\left(b+\frac{3}{b}\right)\left(3b+\frac{1}{b}\right)$ при $b\neq 0$.

5. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



6. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-t^4+$ $+6t^3+5t+23$ (где x - расстояние от точки отсчета в метрах, t - время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t=3$ с.

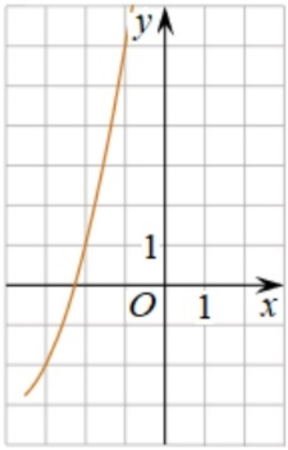
7. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P=\sigma ST^4$, где P - мощность излучения

ФИО ученика________________________

звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ - постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{16} \cdot 10^{20} \text{м}^2$, а мощность её излучения равна $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

8. На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

9. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c - целые. Найдите абсциссу вершины параболы.



10. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей - 1 очко, если проигрывает - 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

11. Найдите точку максимума функции $y = (x-2)^2(x-4) + 5$.

Часть 2

Для заданий 12-18 запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное и обоснованное решение и ответ. Решение и ответы записывайте четко и разборчиво.

12. а) Решите уравнение $\cos 2x - 5\sqrt{2}\cos x - 5 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

13. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра равны 1. На продолжении отрезка A_1C_1 за точку C_1 отмечена точка M так, что $A_1C_1 = C_1M$, а на продолжении отрезка B_1C за точку C отмечена точка N так, что $B_1C = CN$.

ФИО ученика________________________________

а) Докажите, что $MN = MB_1$.

б) Найдите расстояние между прямыми B_1C_1 и MN.

14. Решите неравенство $\dfrac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \leq \dfrac{3\sqrt{x+3}}{x+2}$.

15. Для перевозки 500 маленьких и 26 больших блоков был выделен автомобиль грузоподъемностью 9,75 т. По техническим условиям он может перевозить не более 38 маленьких блоков. Габариты блоков таковы, что перевозка одного большого блока приравнивается к перевозке 18 маленьких. Большой блок весит 3,5 т, а маленький 0,25 т. Какое минимальное количество перевозок потребуется для перемещения всех блоков?

16. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 12$, $BC = 5$. Окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

17. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 4|2x - y - 10|, \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

18. В строку подряд написано 1000 чисел. Под каждым числом a первой строки напишем число, указывающее, сколько раз число a встречается в первой строке. Из полученной таким образом второй строки аналогично получаем третью: под каждым числом второй строки пишем, сколько раз оно встречается во второй строке. Затем из третьей строки так же получаем четвёртую, из четвёртой - пятую, и так далее.

а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

б) Докажите, что 11-я строка совпадает с 12-й.

в) Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строка не совпадает с 11-й.

ФИО ученика________________________________

ФИО ученика____
ФИО учителя____
Город/район____
Школа____

Таблица полученных ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

ВАРИАНТ 3
Часть 1

Ответом к заданиям 1-11 является целое число или конечная десятичная дробь.

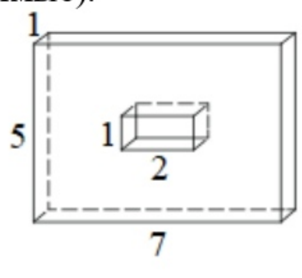
1. Найдите корень уравнения: $x = \frac{6x-15}{x-2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

2. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

3. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

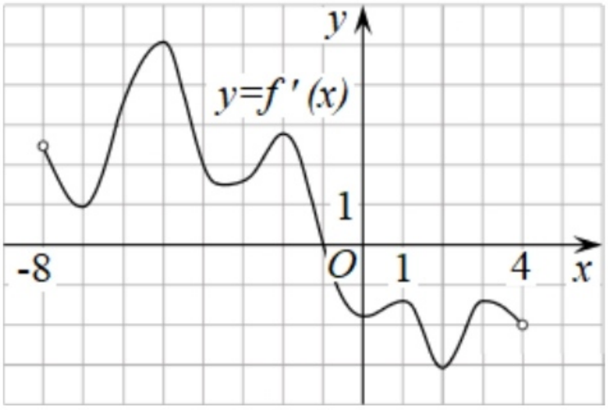
4. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2}$ при $6 \le a \le 10$.

5. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



6. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

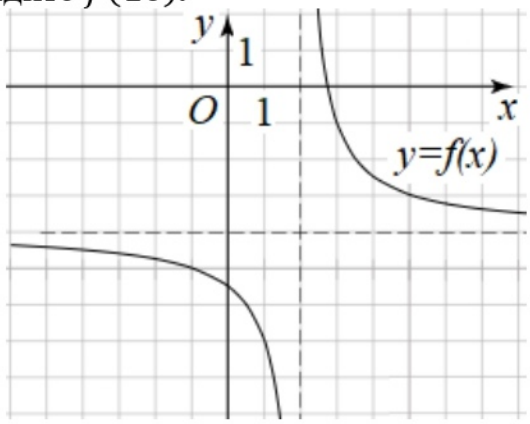
ФИО ученика______________________________



7. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 400$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решётке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

8. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 60 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 3 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 10 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 15 минут? Ответ дайте в км/ч.

9. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$, где числа a, b и c - целые. Найдите $f(10)$.



10. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

11. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{\frac{25}{x} + x + 25}.$

ФИО ученика________________________________

Часть 2

Для заданий 12-18 запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное и обоснованное решение и ответ. Решение и ответы записывайте четко и разборчиво.

12. а) Решите уравнение: $(2\cos x+1)(\sqrt{-\sin x}-1)=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

13. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P - точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

14. Решите неравенство $x^3+2x^2-\frac{24x^2-x+3}{x-3}\le 1.$

15. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов (то есть увеличил ставку a% до $(a+40)$%). К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

16. В треугольнике ABC угол A равен 120°. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O - центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC=\sqrt{15}$, $\angle ABC=45°$.

17. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4x-|3x-|x+a||=9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

18. С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.

б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трехзначного числа?

ФИО ученика______________________________