Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Найдите корень уравнения

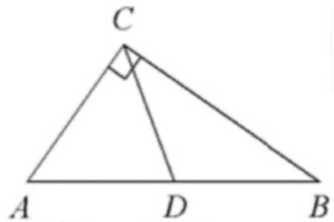
$\log_{27} 3^{5x+5} = 2.$

Ответ: ____________________________.

2 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7. Результат округлите до тысячных.

Ответ: ____________________________.

3 В треугольнике ABC CD – медиана, угол C равен 90°, угол B равен 35°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.



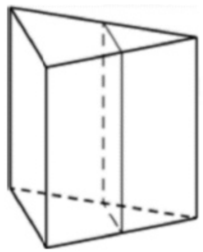
Ответ: ____________________________.

4 Найдите

$\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

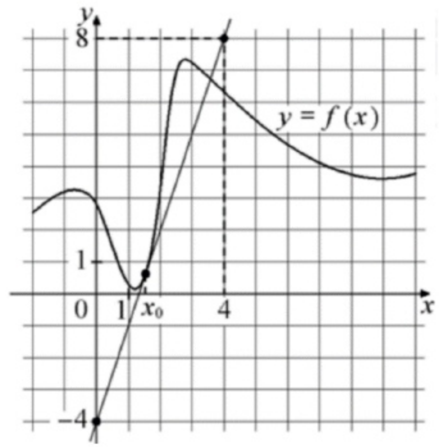
Ответ: ___________________________.

5 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 37. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



Ответ: ___________________________.

6 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

7 Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 – давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 – объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 294,4 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

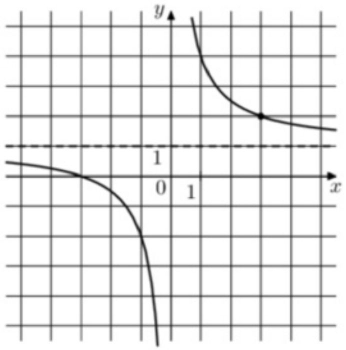
Ответ: ___________________________.

8 Первый час автомобиль ехал со скоростью 115 км/ч, следующие три часа – со скоростью 45 км/ч, а затем два часа – со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 210927

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(-12)$.



Ответ: ___________________________.

10 Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что 77% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Ответ: ___________________________.

11 Найдите наибольшее значение функции

$y = \ln(8x) - 8x + 7$ на отрезке $\left[\frac{1}{16}; \frac{5}{16}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos 2x + 3\cos x = 2\sqrt{3}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

13 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный $(AB = BC)$ треугольник ABC. Точка K – середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC = 1:3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.
б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

14 Решите неравенство

$$2^x + \frac{2^{x+2}}{2^x - 4} + \frac{4^x + 7\cdot 2^x + 20}{4^x - 3\cdot 2^{x+2} + 32} \le 1.$$

15 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

16 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

а) Докажите, что $BM = CM$.
б) Найдите угол ABC, если угол BCD равен 64°, а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4|2x - y|, \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

18 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	0,2	
2	0,167	
3	55	
4	0,8	
5	74	
6	3	
7	9,2	
8	55	
9	0,75	
10	0,6976	
11	6	
12	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{11\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$ б) $\frac{5\pi}{2};\ \frac{13\pi}{6};\ \frac{7\pi}{2}$	
13	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{530}}{53}$	
14	$(-\infty;0]\cup[\log_2 3;2)\cup(2;3)$	
15	3	
16	71	
17	$\left(-5\sqrt{5}-5;-10\right]\cup\left[0;5\sqrt{5}-5\right)$	
18	а) да б) 9 в) 9/17	

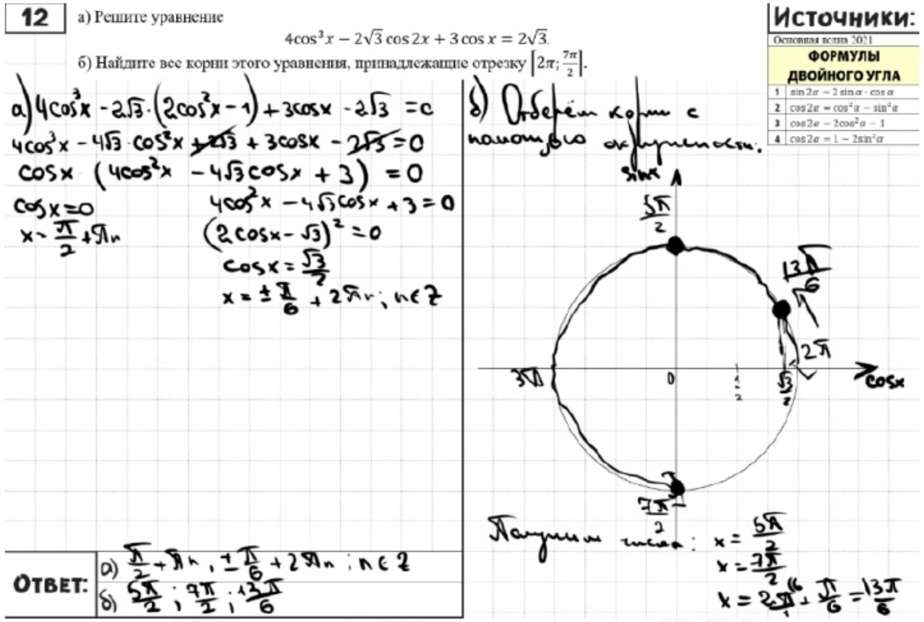
Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

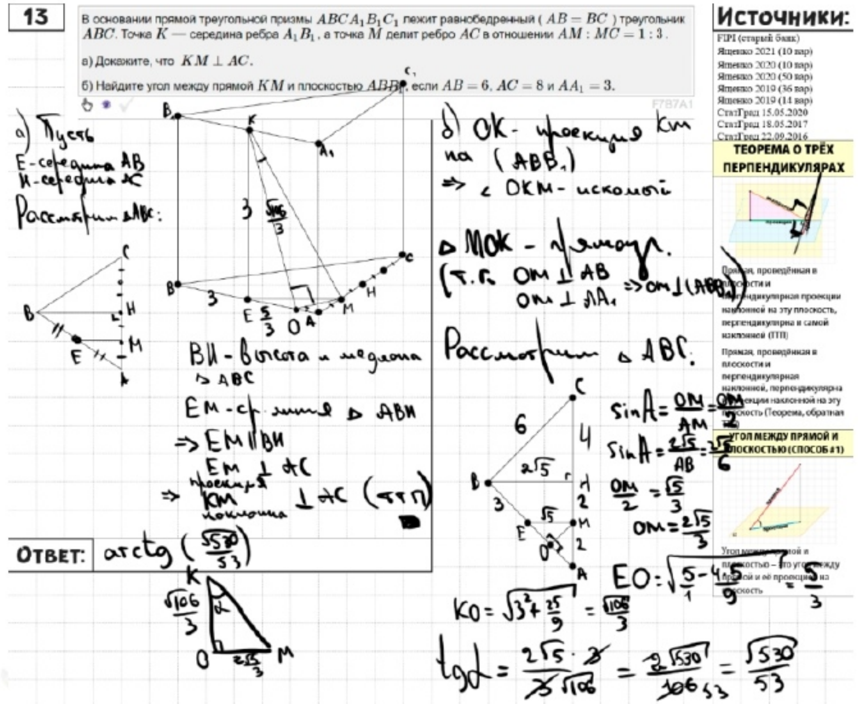
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

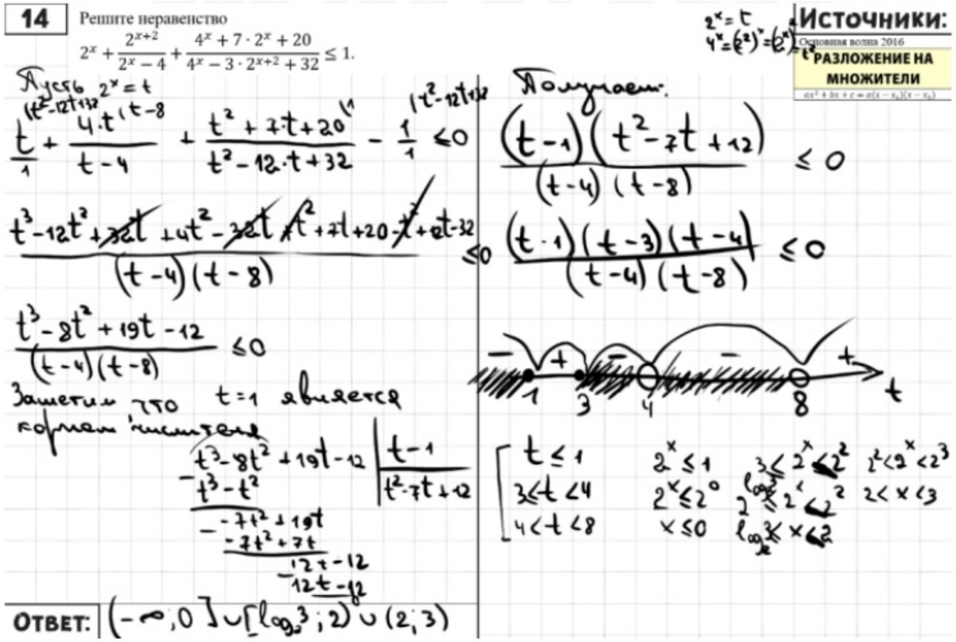


Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

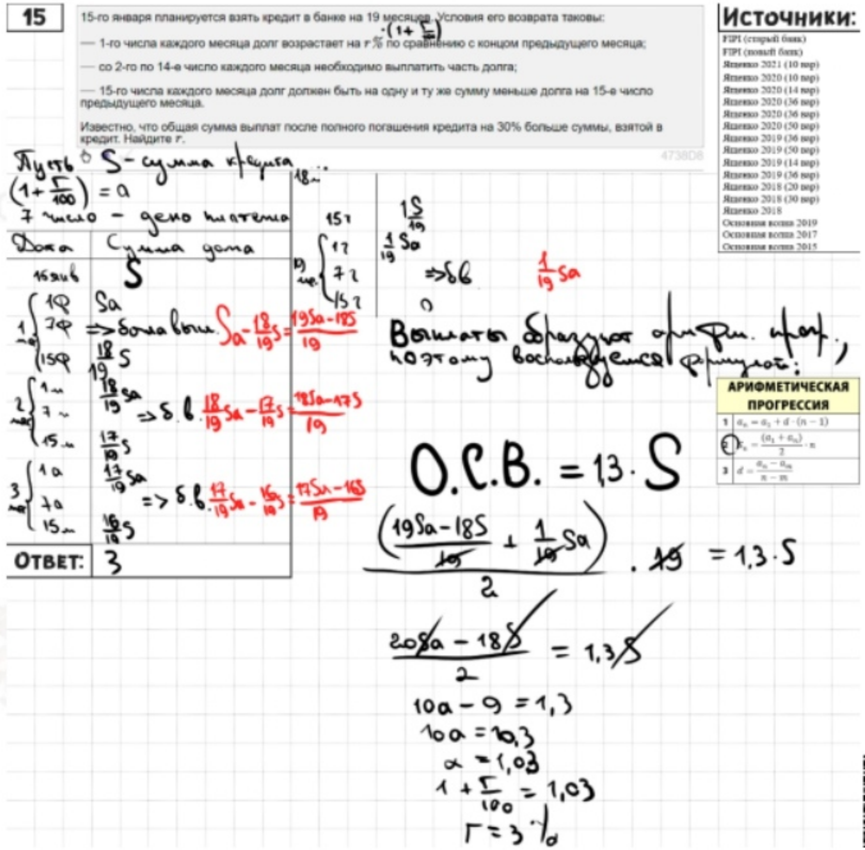


Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

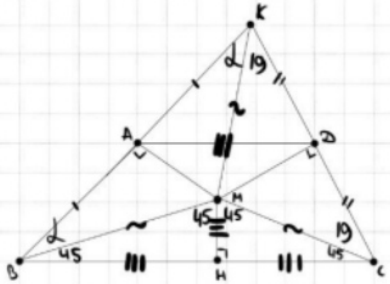
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 210927

16 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Найдите угол ABC, если угол BCD равен 64°, а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017



а) ① AB ∩ CD = K
② AD – ср. линия △ BCK
=> A – середина BK
D – середина CK
△ BKM = △ CKM – равнобедренные (т.к. AM и DM – высота-медиана)
=> BM = KM = CM ■

б) ① H – середина BC (т.к. MH – высота и медиана в р/б. △)
=> BH = CH = AD = HM
② ∠MCH = 45°
∠MCK = 64 – 45 = 19
∠HBM = 45
Пусть ∠MBA = α = ∠AKM
③ △BKC:
α + 19 + 64 + 45 + α = 180
2α = 52
α = 26
∠ABC = 26 + 45 = 71

Ответ: 71

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4|2x - y|, \\ x + 2y = a \end{cases}$$
имеет более двух решений.

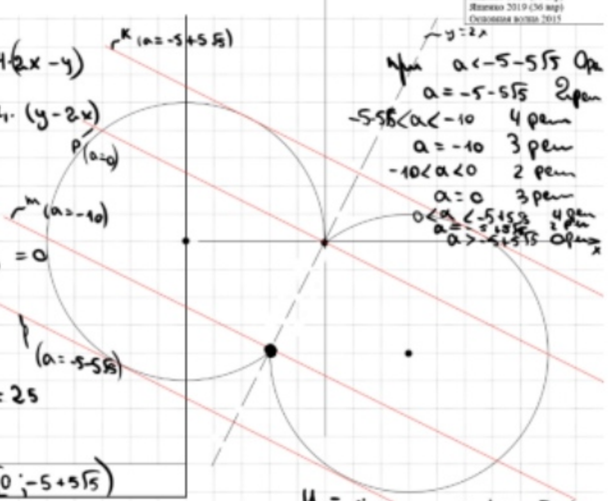
Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2015

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y \ge 0 \\ x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4(2x - y) \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - y < 0 \\ x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4\cdot(y - 2x) \end{cases} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 2x \\ x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y > 2x \\ x^2 + 10x + y^2 = 0 \end{cases} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 2x \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25 \end{cases} \\ \begin{cases} y > 2x \\ (x+5)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a \end{array}\right.$$



при a < −5−5√5 0 реш
a = −5−5√5 2 реш
−5−5√5 < a < −10 4 реш
a = −10 3 реш
−10 < a < 0 2 реш
a = 0 3 реш
0 < a < −5+5√5 4 реш
a = −5+5√5 3 реш
a > −5+5√5 0 реш

Ответ: $(-5-5\sqrt{5}; -10] \cup [0; -5+5\sqrt{5})$

Найдём a для прямой P проходящей через т. (0;0)
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$
$0 = 0 + \frac{1}{2}a$
$a = 0$

Найдём a для прямой m (−2; −4)
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$
$-4 = -\frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}a$
$-5 = \frac{1}{2}a$
$a = -10$

Найдём a для прямой l, k:
$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a \\ (x+5)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$
$(x+5)^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x)^2 = 25$
$x^2 + 10x + \cancel{25} + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}x^2 - \cancel{25} = 0$
$\frac{5}{4}x^2 + (10 - \frac{1}{2}a)\cdot x + \frac{1}{4}a^2 = 0 \quad | \cdot 4$
$5x^2 + (40 - 2a)\cdot x + a^2 = 0$
$D = 0$
$(40 - 2a)^2 - 4\cdot 5\, a^2 = 0$
$1600 - 160a + 4a^2 - 20a^2 = 0$
$16a^2 + 160a - 1600 = 0$
$a^2 + 10a - 100 = 0$
$D = 100 + 400 = (\sqrt{5}\,10)^2$
$a = \frac{-10 \pm 10\sqrt{5}}{2} = -5 \pm 5\sqrt{5}$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 210927

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Источники:

В театре число мальчиков $\leq \frac{2}{11}$ числа посетивших театр

В кино число мальчиков $\leq \frac{2}{5}$ числа посетивших кино

Нужно максимизировать количество девочек в театре и в кино

а) В группе 9 мальчиков и 11 девочек

Пусть все мальчики входят в одно мн-во, все девочки входят в оба мн-ва

Если 4 мальчика было в театре, то $\frac{4}{15} \leq \frac{2}{11}$ неверно

Если 3 мальчика было в театре, то $\frac{3}{14} \leq \frac{2}{11}$ неверно

Если 2 мальчика было в театре, то $\frac{2}{13} \leq \frac{2}{11}$ Верно

$\Rightarrow$ мальчиков в театре ≤ 2

Если 7 мальчиков было в кино, то $\frac{7}{18} \leq \frac{2}{5}$ Верно

$\Rightarrow$ мальчиков в кино ≤ 7

$\Rightarrow$ Ответ: а) Да, 2 в театре и 7 в кино

б) 9 мальчиков быть может (см. а)

Пусть было 10 мальчиков, 10 девочек

Если 3 мал. было в театре, то $\frac{3}{13} \leq \frac{2}{11}$ неверно

2 мал. было в театре, то $\frac{2}{12} \leq \frac{2}{11}$ Верно

$\Rightarrow$ мальчиков в театре ≤ 2

Если 8 мальчиков было в кино, то $\frac{8}{18} \leq \frac{2}{5}$ неверно

Если 7 мал. было в кино, то $\frac{7}{17} \leq \frac{2}{5}$ неверно

$\Rightarrow$ мальчиков в кино ≤ 6

Ответ: б) 9 $\Rightarrow$ Всего 10 мальчиков быть не может

ОТВЕТ:	а) Да
	б) 9
	в) $\frac{9}{17}$.

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

$\left(\frac{d}{m_т + m_к + d}\right)_{наим}$ - ? Разделим на d

$$\left(\frac{1}{\frac{m_т}{d} + \frac{m_к}{d} + 1}\right)_{наим} = \frac{1}{\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 1} = \frac{9}{17}.$$

Найдём наибольшие значения $\frac{m_т}{d}$ и $\frac{m_к}{d}$

$\frac{m_т}{m_т + d} \leq \frac{2}{11} \quad \Big| \cdot (m_т + d) \cdot 11$

$11 \cdot m_т \leq 2m_т + 2d$

$9m_т \leq 2d \quad \Big| : 9d$

$\frac{m_т}{d} \leq \frac{2}{9}$

$\frac{m_к}{m_к + d} \leq \frac{2}{5} \quad \Big| \cdot (m_к + d) \cdot 5$

$5 \cdot m_к \leq 2m_к + 2d$

$3m_к \leq 2d \quad \Big| : 3d$

$\frac{m_к}{d} \leq \frac{2}{3}$

$\frac{m_к}{d} \leq \frac{6}{9}$

Пример: 9 девочек, 2 мал. - т, 6 мал. - к

Условие задачи вып-ся, доля девочек $\frac{9}{9+2+6} = \frac{9}{17}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 210927

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.