Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2022 года
по математике

Профильный уровень

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Пояснения к тренировочному варианту контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2022 года по МАТЕМАТИКЕ

Назначение тренировочного варианта заключается в том, чтобы дать возможность участнику ЕГЭ составить представление о структуре будущих КИМ, количестве заданий, об их форме и уровне сложности. А так же потренироваться в решении заданий.

Это позволит выпускникам выработать стратегию подготовки к ЕГЭ в 2022 г.

Тренировочный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2022 года
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \mathrm{os}\,\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения $\log_4(10+2x) = 3$

Ответ:____________________________.

2 В параллели 51 учащийся, среди них два друга — Михаил и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Михаил и Сергей окажутся в одной группе.

Ответ:____________________________.

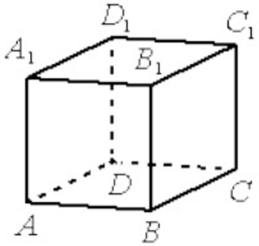
3 В равнобедренной трапеции основания равны 4 и 8, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45°. Найдите площадь этой трапеции.

Ответ:____________________________.

4 Найдите значение выражения $12\sin 150° \cdot \cos 120°$.

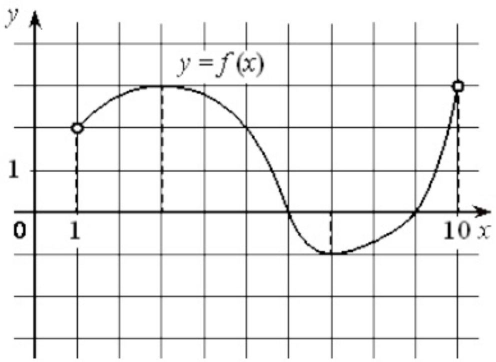
Ответ:____________________________.

5 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и A_1B_1.
Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____________________________

6 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(1 ; 10)$. Найдите точку из отрезка $[2 ; 6]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ:_____________________________.

7 В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой составляет R_1= 36 Ом. Параллельно с ней в розетку предполагается подключить электрообогреватель, сопротивление которого R_2 (в Ом). При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление R вычисляется по формуле $R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом. Определите наименьшее возможно сопротивление электрообогревателя. Ответ дайте в омах.

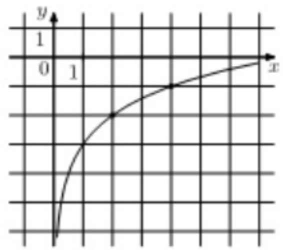
Ответ:_____________________________.

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №3   МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

8 Имеется два сосуда. Первый содержит 10 кг, а второй 5кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 56% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 64% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ:_____________________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(32)$.



Ответ:_____________________________.

10 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,6. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,45. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Ответ:_____________________________.

11 Найдите точку максимума функции $y = (x + 8)^2 \cdot e^{3 - x}$.

Ответ:_____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(x^2+2x-1)\left(\log_2(x^2-3)+\log_{0.5}(\sqrt{3}-x)\right)=0$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2{,}5; -1{,}5]$.

13 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 14, высота SH равна 24. Точка K — середина бокового ребра SD, а точка N — середина ребра CD. Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P.
а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.
б) Найдите расстояние от точки P до плоскости ABS.

14 Решите неравенство $9^{\frac{1}{x}-1}+2\cdot 3^{\frac{1}{x}-1}-3\geq 0.$

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 900 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 12% по сравнением с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 8% по сравнением с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен. Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №3 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

16 В прямоугольнике ABCD диагонали пересекаются в точке O, а угол BDC равен 75°. Точка P лежит вне прямоугольника, а угол APB равен 150°.
а) Докажите, что углы BAP и POB равны.
б) Прямая PO пересекает сторону CD в точке F. Найдите CF, если $AP=6\sqrt{3}$ и $BP=4$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$$
имеет ровно два различных корня.

18 На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?

б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равнятся 11?

в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	27
2	0,32
3	12
4	-3
5	90
6	3
7	45
8	40
9	2
10	0,27
11	-6

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным; все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

12 а) Решите уравнение $(x^2+2x-1)\left(\log_2(x^2-3)+\log_{0.5}(\sqrt{3}-x)\right)=0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2{,}5; -1{,}5]$.

Решение.

а) $x^2+2x-1=0$ или $\log_2(x^2-3)+\log_{0.5}(\sqrt{3}-x)=0$

при условии: $\begin{cases} x^2-3>0 \\ \sqrt{3}-x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2>3 \\ x<\sqrt{3} \end{cases}$ $\Rightarrow x<-\sqrt{3}$

1) $x^2+2x-1=0$

$D=(2)^2-4\cdot1\cdot(-1)=8$

$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{8}}{2}=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2}$ – посторонний корень

$x_2=\dfrac{-2-\sqrt{8}}{2}=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$

2) $\log_2(x^2-3)+\log_{0.5}(\sqrt{3}-x)=0$

$\log_2\dfrac{x^2-3}{\sqrt{3}-x}=0$

$\dfrac{x^2-3}{\sqrt{3}-x}=1$

$x^2-3=\sqrt{3}-x$

$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-x)=0$

$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})+(x-\sqrt{3})=0$

$(x-\sqrt{3})\left((x+\sqrt{3})+1\right)=0$

$x_3=\sqrt{3}$ – посторонний корень; $x_4=-1-\sqrt{3}$

б) Сравним подходящие корни с концами отрезка:

$-1-\sqrt{2} > -2{,}5$ | $-1-\sqrt{2} < -1{,}5$

$-\sqrt{2} > -2{,}5+1$ | $-\sqrt{2} < -1{,}5+1$

$(-\sqrt{2})^2 < (-1{,}5)^2$ | $(-\sqrt{2})^2 > (-0{,}5)^2$

$2 < 2{,}25$ | $2 > 0{,}25$

$\Rightarrow -1-\sqrt{2} \in [-2{,}5; -1{,}5]$

$-1-\sqrt{3} < -2{,}5$

$-\sqrt{3} < -2{,}5+1$

$(-\sqrt{3})^2 > (-1{,}5)^2$

$3 > 2{,}25$

$\Rightarrow -1-\sqrt{3} \notin [-2{,}5; -1{,}5]$

Ответ: а) $-1-\sqrt{2}$; $-1-\sqrt{3}$. б) $-1-\sqrt{2}$.

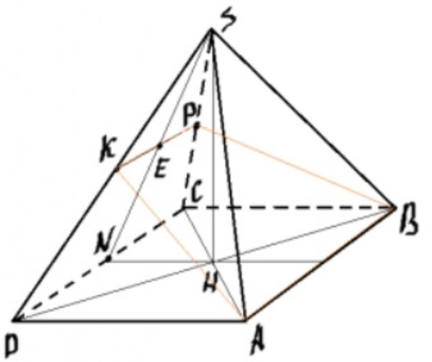
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 14, высота SH равна 24. Точка K — середина бокового ребра SD, а точка N — середина ребра CD. Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P.

а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости ABS.

Решение.



а)

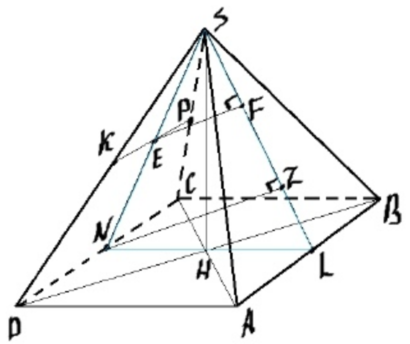
$KP \cap SN = E$

1. DC ∥ $AB \Rightarrow DC \parallel (AKB)$ (теорема о паралельности прямой и плоскости)

$$\left.\begin{array}{r} DC \subset (DSC) \\ DC \parallel (AKB) \\ (DSC) \cap (AKB) = KP \end{array}\right| \Rightarrow \text{DC} \parallel KP$$

2. Если DC ∥ KP и K - середина SD, то KP средняя линия ΔDSC

⟹ точка пересечения E - середина SN.



б)

1. DC ∥ KP *и* DC ∥ $AB \Rightarrow KP \parallel AB \Rightarrow KP \parallel (ASB) \Rightarrow \rho(P; ASB) = \rho(E; SL)$

2. HL $= \frac{14}{2} = 7$; SH = 24

Найдём SL по т. Пифагора, как гипотенузу в прямоугольном ΔHSL:

$SL = \sqrt{SH^2 + HL^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$

$S_{NSL} = \frac{1}{2} SH \cdot NL = \frac{1}{2} NZ \cdot SL \quad \Rightarrow NZ = \frac{SH \cdot NL}{SL} = \frac{24 \cdot 14}{25}$

3. $EF \perp SL$ *и* $NZ \perp SL \quad \Rightarrow$ EF ∥ NZ и E - середина SN ⟹ EF средняя линия ΔNSL:

$EF = \frac{1}{2} NZ = \frac{1}{2} \cdot \frac{24 \cdot 14}{25} = 6.72$

Ответ: 6,72

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $9^{\frac{1}{x}-1} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{x}-1} - 3 \geq 0.$

Решение.

Заменим: $3^{\frac{1}{x}-1} = t$ при этом $t > 0$ Получим: $t^2 + 2t - 3 \geq 0$

Решив неравенство получим: $t \leq -3$ и $t \geq 1$

$t \leq -3$ - постороннее решение, так как неудовлетворяет условию $t > 0$

Обратная замена: $t \geq 1$

$3^{\frac{1}{x}-1} \geq 1$

$3^{\frac{1}{x}-1} \geq 3^0$

$\frac{1}{x} - 1 \geq 0$

$0 < x \leq 1$

Ответ: (0; 1].

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением или включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №3 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 900 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

— в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 12% по сравнением с концом предыдущего года;

— в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 8% по сравнением с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен. Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение.

Пусть:

S - сумма взятая в кредит равная 900 тыс. рублей;

Так как первые пять лет долг возрастает на 12%, то k - коэффициент увеличения долга в это время будет равен 1,12;

Так как последующие пять лет долг возрастает на 8%, то n - коэффициент увеличения долга в это время будет равен 1,08.

По условию, долг перед банком на начало июля каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$S;\ \frac{9}{10}S;\ \frac{8}{10}S;\ \frac{7}{10}S; \ldots;\ \frac{2}{10}S;\ \frac{1}{10}S;\ 0.$

Последовательность размера долга на январь каждого года такова:

$Sk;\ \frac{9}{10}Sk;\ \frac{8}{10}Sk;\ \frac{7}{10}Sk;\ \frac{6}{10}Sk;\ \frac{5}{10}Sn;\ \frac{4}{10}Sn;\ \frac{3}{10}Sn;\ \frac{2}{10}Sn;\ \frac{1}{10}Sn.$

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

$Sk - \frac{9}{10}S; \frac{9}{10}Sk - \frac{8}{10}S; \frac{8}{10}Sk - \frac{7}{10}S; \frac{7}{10}Sk - \frac{6}{10}S; \frac{6}{10}Sk - \frac{5}{10}S; \frac{5}{10}Sn - \frac{4}{10}S; \frac{4}{10}Sn - \frac{3}{10}S; \frac{3}{10}Sn - \frac{2}{10}S; \frac{2}{10}Sn - \frac{1}{10}S.$

Общая сумма выплат составляет:

$$Sk-\frac{9}{10}S+\frac{9}{10}Sk-\frac{8}{10}S+\frac{8}{10}Sk-\frac{7}{10}S+\frac{7}{10}Sk-\frac{6}{10}S+\frac{6}{10}Sk-\frac{5}{10}S+\frac{5}{10}Sn-\frac{4}{10}S+\frac{4}{10}Sn-\frac{3}{10}S+\frac{3}{10}Sn-\frac{2}{10}S+\frac{2}{10}Sn-\frac{1}{10}S=$$

$$=Sk\left(1+\frac{9}{10}+\frac{8}{10}+\frac{7}{10}+\frac{6}{10}\right)+Sn\left(\frac{5}{10}+\frac{4}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\right)-S\left(\frac{9}{10}+\frac{8}{10}+\frac{7}{10}+\frac{6}{10}+\frac{5}{10}+\frac{4}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\right)=$$

$$=Sk\cdot 4+Sn\cdot 1.5-S\cdot 4.5=S(4k+1.5n-4.5)$$

Подставим значения из условия и найдём общую сумму выплат:

$$900(4\cdot 1{,}12+1.5\cdot 1{,}08-4.5)=900\cdot 1{,}6=1440$$

Ответ: 1440 тыс. рублей.

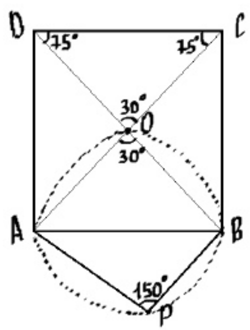
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 В прямоугольнике ABCD диагонали пересекаются в точке O, а угол BDC равен 75°. Точка P лежит вне прямоугольника, а угол APB равен 150°.

а) Докажите, что углы BAP и POB равны.

б) Прямая PO пересекает сторону CD в точке F. Найдите CF, если $AP=6\sqrt{3}$ и $BP=4$.

Решение.



1. DO = OC (диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам)

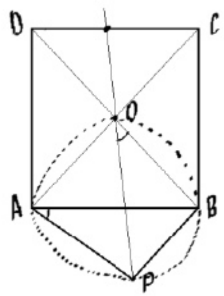
Δ ODC равнобедренный с основанием DC

$\Longrightarrow \angle ODC=\angle DCO=75° \Longrightarrow \angle COD=30°$

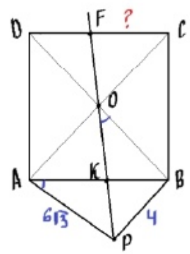
$\Longrightarrow \angle AOB=\angle COD=30°$ (как вертикальные углы)

$\angle AOB+\angle APB=30°+150°=180°$

Так как противоположные углы в четырёхугольнике AOBP в сумме равны 180 градусов, то около него можно описать окружность.



Углы BAP и POB равны, так как опираются на одну и ту же дугу PB.



б)

1. Найдём AB по теореме косинусов:

$$AB^2=AP^2+PB^2-2\cdot AP\cdot PB\cdot \cos P$$

$$AB^2=\left(6\sqrt{3}\right)^2+4^2-2\cdot 6\sqrt{3}\cdot 4\cdot \cos 150°=36\cdot 3+16-48\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=196$$

$$AB=\sqrt{196}=14$$

2. $\angle OAB=\angle OPB=75°$ (опираются на одну и ту же дугу OB)

$\angle OBA = \angle OPA = 75°$ (опираются на одну и ту же дугу OA)

$\Rightarrow PK -$ биссектриса

По свойству биссектрисы:

$$\frac{AP}{AK} = \frac{PB}{14 - AK}$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{AK} = \frac{4}{14 - AK}$$

$$6\sqrt{3}(14 - AK) = 4AK$$

$$84\sqrt{3} - 6\sqrt{3}AK = 4AK$$

$$AK = \frac{84\sqrt{3}}{6\sqrt{3} + 4} = \frac{378 - 84\sqrt{3}}{23}$$

3. $\Delta AOK = \Delta COF$ (по стороне и двум прилежащим углам)

$$FC = AK = \frac{378 - 84\sqrt{3}}{23}$$

Ответ: $\frac{378-84\sqrt{3}}{23}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №3 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Перейдём к равносильной системе:

$$\begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ x^2 + 8x + 16 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

1. $9x^2 - a^2 = 0$

$(3x - a)(3x + a) = 0$

$3x - a = 0$ или $3x + a = 0$

$x = \frac{a}{3}$ $\quad x = -\frac{a}{3}$

$\frac{a}{3} \neq -\frac{a}{3} \quad \Rightarrow a \neq 0$

2. $x^2 + 8x + 16 - a^2 \neq 0$

$(x + 4)^2 - a^2 \neq 0$

$(x + 4 - a)(x + 4 + a) \neq 0$

$x \neq a - 4 \quad x \neq -a - 4$

$\frac{a}{3} \neq a - 4$	$\frac{a}{3} \neq -a - 4$	$-\frac{a}{3} \neq a - 4$	$-\frac{a}{3} \neq -a - 4$
$a - 3a \neq -12$	$a + 3a \neq -12$	$-a - 3a \neq -12$	$-a + 3a \neq -12$
$-2a \neq -12$	$4a \neq -12$	$-4a \neq -12$	$2a \neq -12$
$a \neq 6$	$a \neq -3$	$a \neq 3$	$a \neq -6$

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?

б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равнятся 11?

в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

Решение.

По условию: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11} < a_{12}$

Так как среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, то сумма этих семи равна 56.

Так как среднее арифметическое семи наибольших из них равно 16, то сумма этих семи равна 112.

а) Предположим, что наибольшее из этих двенадцати чисел равняется 18, тогда наибольшее значение суммы будет:

18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 = 105, что не равно 112-ти.

б) Если среднее арифметическое всех двенадцати чисел равнятся 11, то сумма их равна 132.

Пусть А = $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$; В = $a_6 + a_7$; С = $a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$.

А + В = 56 В + С = 112

А = 56 - В С = 112 - В

Если А + В + С = 132, то

56 - В + В + 112 - В = 132

В = 36

Найдём наименьшее С. Для этого определим наименьшее a_7. 36 = 17+ 19. наименьшее $a_7 = 19$.

Тогда наименьшее $a_8 = 20$. И сумма пяти наибольших 20 + 21 + 22 + 23 + 24 = 110. При В = 36, С = 112 - В = 112 - 36 = 76, что не равняется 110-ти.

в) Наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел, это наименьшее значение выражения:

А + В + С = 56 - В + В + 112 - В = 168 - В, делённое на 12.

Достигается это при наибольшем В.

Из п.а видно, чтобы соблюдалось условие «сумма наибольших равна 112», нужно

увеличить значение каждого числа на 1 ед. Так как все числа различны, то это единственный вариант: нельзя увеличить a_6 и a_7 не увеличивая остальные.

$\Rightarrow a_6 = 13$ и $a_7 = 14 \Rightarrow$ В $= 27$.

Наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел равно: $\frac{168-27}{12} = 11{,}75$

Ответ: а) нет; б) нет; в) 11,75.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*