Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2022 года
по математике

Профильный уровень

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Пояснения к тренировочному варианту контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2022 года по МАТЕМАТИКЕ

Назначение тренировочного варианта заключается в том, чтобы дать возможность участнику ЕГЭ составить представление о структуре будущих КИМ, количестве заданий, об их форме и уровне сложности. А так же потренироваться в решении заданий.

Это позволит выпускникам выработать стратегию подготовки к ЕГЭ в 2022 г.

Тренировочный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2022 года
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x-4} = 5$.

Ответ:____________________________.

2 В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

Ответ:____________________________.

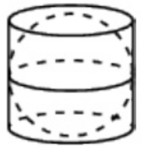
3 Сторона ромба равна 34, а один из углов этого ромба равен 150°. Найдите высоту этого ромба.

Ответ:____________________________.

4 Найдите tg α, если $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

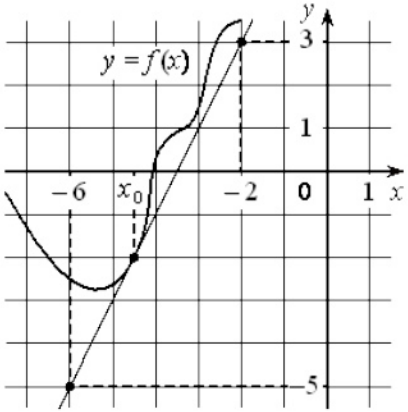
Ответ:____________________________.

5 Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 50. Найдите объём цилиндра.



Ответ:______________________________.

6 На рисунке изображены график дифференцируемой функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Ответ:______________________________.

7 Водолазный колокол, содержащий υ = 6 моль воздуха при давлении p_1 = 2,5 атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 (в атмосферах). Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A = a\upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где α = 5,75 $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, T = 300 K — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 10 350 Дж. Ответ дайте в атмосферах.

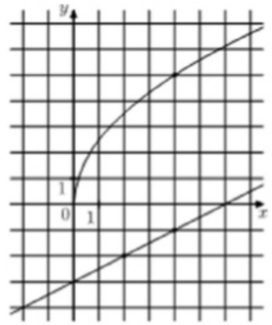
Ответ:______________________________.

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №2 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

8 Автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 65 км/ч по прямому шоссе, встречает другой автомобиль, движущийся ему навстречу с постоянной скоростью 55 км/ч. Каким будет расстояние (в километрах) между этими автомобилями через 25 минут после встречи.

Ответ:______________________________.

9 На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



Ответ:______________________________.

10 В танцевальной студии 40% - парни. Остальные девушки. Опытные танцоры, которые умеют танцевать танец под названием «Цыганская полька», составляют 23% занимающихся, причём доля таких опытных танцоров среди девушек равна 25%. Для танца на балу выбран случайным образом парень, занимающийся в этой студии. Найдите вероятность события «выбранный парень умеет танцевать цыганскую польку».

Ответ:______________________________.

11 Найдите точку максимума функции y = ln (x + 7) − 10x + 11.

Ответ:______________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $4cos^3x + 4\sqrt{3}sin^2x + 3cosx = 4\sqrt{3}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

13 В правильной шестиугольной призме $A\,B\,C\,D\,E\,FA_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1\,F_1$ стороны основания равны 5, а боковое рёбра равны 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1 .

14 Решите неравенство $(log_2^2x - 2log_2x)^2 + 36log_2x + 45 < 18log_2^2x$.

15 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 292 820 рублей?

16 В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O, величина угла AOC составляет 120°.

а) Докажите, что около четырёхугольника $BDOE$ можно описать окружность.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = 4$, а $\angle BED = 75°$

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №2 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$

имеет ровно три различных корня.

18 Красный карандаш стоит 17 рублей, синий – 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	1,4
2	0,5
3	17
4	-0,4
5	75
6	2
7	5
8	50
9	15
10	0,2
11	-6,9

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным; все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №2 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

12 а) Решите уравнение $4cos^3x + 4\sqrt{3}sin^2x + 3cosx = 4\sqrt{3}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$4cos^3x + 4\sqrt{3}(1 - cos^2x) + 3cosx - 4\sqrt{3} = 0$

$4cos^3x + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}cos^2x + 3cosx - 4\sqrt{3} = 0$

$4cos^3x - 4\sqrt{3}cos^2x + 3cosx = 0$

$cosx\left(4cos^2x - 4\sqrt{3}cosx + 3\right) = 0$

Значит:

$\mathrm{cosx} = 0$ или $4cos^2x - 4\sqrt{3}cosx + 3 = 0$

$\mathrm{cosx} = 0$, при $\mathrm{x} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$4cos^2x - 4\sqrt{3}cosx + 3 = 0$

$D = \left(-4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 0$

$cosx = \frac{4\sqrt{3}}{4 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

б) С помощью двойных неравенств найдём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$:

1) $-\frac{7\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq -2\pi \ / \cdot \frac{2}{\pi}$

$-7 \leq 1 + 2k \leq -4$

$-8 \leq 2k \leq -5$

$-4 \leq k \leq -2{,}5$

$k = -4; -3.$

при $k = -4$ $x = \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}$

при $k = -3$ $x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5\pi}{2}$

2) $-\frac{7\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq -2\pi \ / \cdot \frac{6}{\pi}$

$-21 \leq 1 + 12n \leq -12$

$-22 \leq 12n \leq -13$

$-1\frac{10}{12} \leq n \leq -1\frac{1}{12}$

нет целых n

3) $-\frac{7\pi}{2} \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le -2\pi \;\; / \cdot \frac{6}{\pi}$

$-21 \le -1 + 12n \le -12$

$-20 \le 12n \le -11$

$-1\frac{8}{12} \le n \le -\frac{11}{12}$

$n = -1.$

при $n = -1$ $x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

б) $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{13\pi}{6}$.

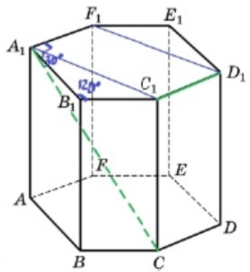
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковое рёбра равны 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1 .

Решение.



а)

1) Докажем что $A_1F_1D_1C_1$ - прямоугольник.

В шестиугольнике $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все углы равны по 120°

$\angle B_1A_1F_1 = \angle B_1A_1C_1 + \angle C_1A_1F_1$

$\Delta B_1A_1C_1$ равнобедренный с основанием $A_1C_1 \Rightarrow \angle B_1A_1C_1 = \frac{180°-\angle C_1B_1A_1}{2} = \frac{180°-120°}{2} = 30°$

$\angle C_1A_1F_1 = 120° - 30° = 90°$

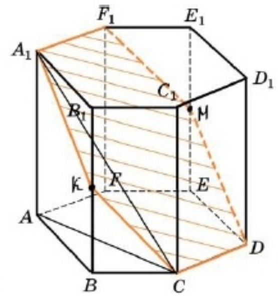
аналогично: $\angle A_1F_1D_1 = \angle F_1D_1C_1 = \angle D_1C_1A_1 = 90°$

$\Rightarrow$ $A_1F_1D_1C_1$ - прямоугольник.

2) Угол между CA_1 и C_1D_1 равен углу между CA_1 и A_1F_1.

Т.к. C_1A_1 - проекция CA_1 на плоскость основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, то по теореме о трёх перпендикурярах: если $A_1F_1 \perp C_1A_1$, то $A_1F_1 \perp CA_1$.

ч.т.д.



б)

1) Сечение призмы плоскостью CA_1F_1 представляет собой шестиугольник A_1F_1MDCK.

Найдём его площадь через площадь его ортогональной проекции (основание ABCDEF) и косунус угла между плоскостями в которых лежат данные фигуры:

$S_{ABCDEF} = S_{A_1F_1MDCK} \cdot \cos\angle A_1CA$

2) Найдём AC в ΔACB:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120°$

$AC^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 50 + 25 = 75$

$AC = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Найдём A_1C по т. Пифагора, как гипотенузу в прямоугольном ΔAA_1C:

$A_1C = \sqrt{AA_1{}^2 - AC^2} = \sqrt{11^2 + 75} = \sqrt{196} = 14$

$\cos\angle A_1CA = \frac{AC}{A_1C}$

$\cos\angle A_1CA = \frac{5\sqrt{3}}{14}$

3) $S_{ABCDEF} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 5^2 = \frac{75\sqrt{3}}{2}$

4) $S_{A_1F_1MDCK} = \frac{S_{ABCDEF}}{\cos\angle A_1CA}$

$S_{A_1F_1MDCK} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{14}{5\sqrt{3}} = 105$

Ответ: 105.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $(log_2^2x - 2log_2x)^2 + 36log_2x + 45 < 18log_2^2x$.

Решение.

$(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 - 18\log_2^2 x + 36\log_2 x + 45 < 0$

$(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 - 2(\log_2^2 x - 2\log_2 x) + 45 < 0$

Заменим: $\log_2^2 x - 2\log_2 x = t$ и получим:

$t^2 - 2t + 45 < 0$

Находим: $3 < t < 15$

Обратная замена: $3 < \log_2^2 x - 2\log_2 x < 15$

Решим равносильную систему:

$\begin{cases} \log_2^2 x - 2\log_2 x > 3 \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x < 15 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 > 0 \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x - 15 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 x < -1 \cup \log_2 x > 3 \\ -3 < \log_2 x < 5 \end{cases}$

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №2 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

$|\to\ -3 < \log_2 x < -1 \cup 3 < \log_2 x < 5$

1) $-3 < \log_2 x < -1$

$\log_2\frac{1}{8} < \log_2 x < \log_2\frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}$

2) $3 < \log_2 x < 5$

$\log_2 8 < \log_2 x < \log_2 32$

$8 < x < 32$

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right) \cup (8; 32)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -12 и/или 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 292 820 рублей?

Решение.

Пусть: S - сумма взятая в кредит; k - коэффициент увеличения долга равный 1,1;

x - ежегодный платёж .

Сумма долга после первого начисления процентов: Sk.

Сумма долга после первой выплаты: Sk - x.

Сумма долга после второго начисления процентов: (Sk - x)k.

Сумма долга после второй выплаты: Sk^2- kx.

Сумма долга после третьего начисления процентов: (Sk^2- kx)k

Сумма долга после третий выплаты: Sk^3- k^2x - x

Сумма долга после четвёртого начисления процентов: (Sk^3- k^2 x - x)k

Сумма долга после четвёртой выплаты: Sk^4- k^3x - k^2x - kx - x.

Так как кредит погашен четырьмя равными платежами за четыре года, то:

Sk^4- k^3x - k^2x - kx - x = 0, а 4x = 292820 руб.

Найдём S, зная что k = 1.1 и x = 73205.

$$S = \frac{k^3x + k^2x + kx + x}{k^4} = \frac{x(k^3 + k^2 + k + 1)}{k^4}$$

$$S = \frac{73205(1.1^3 + 1.1^2 + 1.1 + 1)}{1.1^4} = \frac{73205 \cdot 4.641}{1.4641} = \frac{73205 \cdot 46410}{14641} = 5 \cdot 46410 = 232050$$

Ответ: 232050 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

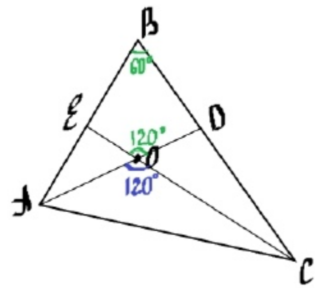
Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №2 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

16 В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O, величина угла AOC составляет 120°.

а) Докажите, что около четырёхугольника $BDOE$ можно описать окружность.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = 4$, а $\angle BED = 75°$.

Решение.



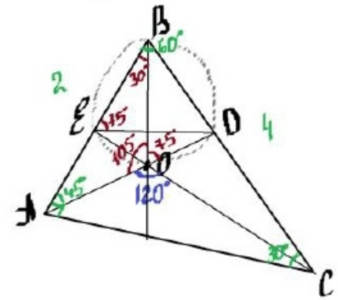
а)

Около четырёхугольника можно описать окружность, если сумма его противоположных углов равна 180 градусов.

$\angle EOD = \angle AOC = 120°$ (вертикальные)

$$\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle BCA) = 180° - \big(2(\angle OAC + \angle OCA)\big)$$
$$= 180° - \big(2(180° - \angle AOC)\big) = 180° - \big(2(180° - 120°)\big) = 60°$$

$\angle EBD + \angle EOD = 60° + 120° = 180°$ $\Rightarrow$ Около четырёхугольника $BDOE$ можно описать окружность. ч.т.д.



б)

Проведём биссектриссу BO. $\angle ABO = 30°$

$\angle BOD = \angle BED = 75°$ (как вписанные на общую дугу BD)

$\angle AOB = 180° - 75° = 105°$ (смежные)

В ΔABO: $\angle BAO = 180° - (\angle ABO + \angle BOA) = 180° - (30° + 105°) = 45°$

$\Rightarrow \angle BAC = 90° \Rightarrow$ треугольник ABC – прямоугольный с гипотенузой BC

По свойству прямоугольного треугольника:

$\angle ACB = 90° - \angle ABC = 90° - 60° = 30°$

$\Rightarrow AB = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (как катет лежащий напротив угла в 30°)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC$$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №2 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$

имеет ровно три различных корня.

Решение.

Перейдём к равносильной системе:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2 \\ x^2 + ax + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + a^2x^2 + 1 + 2x^3a + 2x^2 + 2ax$

$x^4 + 2x^3a + a^2x^2 - x^2 = 0$

$x^2(x^2 + 2xa + a^2 - 1) = 0$

$x^2((x + a)^2 - 1) = 0$

$x^2(x + a - 1)(x + a + 1) = 0$

$x = 0,\ \ x = 1 - a,\ \ x = -1 - a$

Условие на различность корней:

$1 - a \neq -1 - a \neq 0$ при $a \neq \pm 1$

Решим неравенство $x^2 + ax + 1 \geq 0$ с найденными корнями:

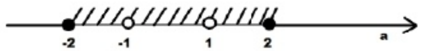
$x = 0 \quad 0^2 + a \cdot 0 + 1 \geq 0; \quad 1 \geq 0 \quad a \in (-\infty; +\infty)$.

$x = 1 - a \quad (1 - a)^2 + a(1 - a) + 1 \geq 0; \quad 1 - 2a + a^2 + a - a^2 + 1 \geq 0; \quad a \leq 2$.

$x = -1 - a \quad (-1 - a)^2 + a(-1 - a) + 1 \geq 0; \quad 1 + 2a + a^2 - a - a^2 + 1 \geq 0;$

$a \geq -2$.

Совместно с условием:



Ответ: $[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Красный карандаш стоит 17 рублей, синий – 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

Решение.

Пусть a - количество красных карандашей и b - количество синих карандашей. При этом: $a, b \in \mathbb{N}$.

Тогда $17a$ (руб.)- траты на красные карандаши и $13b$ (руб.)- траты на синие карандаши.

По условию: 495 руб на покупку и $|a-b| \le 5$.

а) Решим систему: $\begin{cases} 17a + 13b \le 495 \\ a + b = 32 \end{cases}$ $\begin{cases} 17(32-b) + 13b \le 495 \\ a = 32 - b \end{cases}$ $\begin{cases} b \ge 12.25 \\ a = 32 - b \end{cases}$

Предположим $b = 13$, тогда $a = 32 - 13 = 19$, но $|19 - 13| = 6$, что не удовлетворяет условию.

Возьмём $b = 14$, тогда $a = 32 - 14 = 18$, $|18 - 14| = 4$, что удовлетворяет условию.

Значит можно купить 32 карандаша таким образом:

$17 \cdot 18 + 13 \cdot 14 = 306 - 182 = 488$ р.

б) Решим систему: $\begin{cases} 17a + 13b \le 495 \\ a + b = 35 \end{cases}$ $\begin{cases} 17(35-b) + 13b \le 495 \\ a = 35 - b \end{cases}$ $\begin{cases} b \ge 25 \\ a = 35 - b \end{cases}$

Если $b = 25$, то $a = 35 - 25 = 10$, но $|10 - 25| = 15$, что не удовлетворяет условию и разность будет только расти. Значит нельзя купить 35 карандаша таким образом.

в) Пусть $a + b = x$, тогда имеем:

$\begin{cases} 17a + 13b \le 495 \\ a + b = x \end{cases}$ $\begin{cases} 17(x-b) + 13b \le 495 \\ a = x - b \end{cases}$

$17x - 17b + 13b \le 495$

$-4b \le 495 - 17x$

$b \ge \dfrac{17x - 495}{4}$

Применим условие:

$|a-b| \le 5$

$-5 \le a - b \le 5$

$-5 \le x - b - b \le 5$

$-5 \le x - 2b \le 5$

$-5 \le x - 2b \le 5$

$-5 - x \le -2b \le 5 - x$

$\dfrac{x-5}{2} \le b \le \dfrac{x+5}{2}$

Следовательно:

$\dfrac{17x - 495}{4} \le b \le \dfrac{x+5}{2}$

$\dfrac{17x - 495}{4} \le \dfrac{x+5}{2}$

$17x - 495 \le 2x + 10$

$15x \le 505$

$x \le 33\dfrac{10}{15}$

Наибольшее целое решение этого неравенства – число 33.

Значит, искомое число карандашей – 33.

Проверим: в рамках данных условий возьмём $b = 18$, тогда $a = 15$

$17 \cdot 15 + 13 \cdot 18 = 489$ р.

Ответ: а) Да; б) Нет; в) 33.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*