Вариант 1
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-1	0,006	6	5	3	5	2	240	1	0,02	-3

Решения заданий 12-18

Задача 12

а) Решите уравнение $\sqrt{x^3+4x^2+9}-3=x.$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{2};\frac{7}{5}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде $\sqrt{x^3+4x^2+9}=x+3$ и воспользуемся тем, что

$$\sqrt{x}=y\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0,\\ x=y^2.\end{cases}$$

Получим:

$$\sqrt{x^3+4x^2+9}=x+3\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+4x^2+9=x^2+6x+9,\\ x\geq -3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^2+3x-6)=0,\\ x\geq -3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2},\end{array}\right.\\ x\geq -3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}.\end{array}\right.$$

б) Число 0 принадлежит отрезку $\left[-\frac{9}{2};\frac{7}{5}\right]$. Чтобы сравнить $\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$ и $\frac{7}{5}$ сравним разность этих чисел с нулем:

$$\frac{-3+\sqrt{33}}{2}-\frac{7}{5}=\frac{-15+5\sqrt{33}-14}{10}=\frac{-29+5\sqrt{33}}{10}=\frac{-\sqrt{841}+\sqrt{825}}{10}<0.$$

Значит, $\frac{-3+\sqrt{33}}{2}<\frac{7}{5}$.

Ответ: а) 0, $\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$; б) 0, $\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

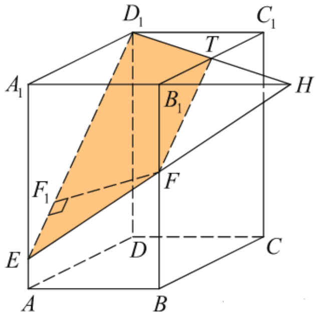
Задача 13

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AD = 12$, $AA_1 = 14$, $AB = 4\sqrt{2}$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

Решение.



а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны, как треугольники с параллельными сторонами, следовательно,

$$\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{A_1E}{A_1D_1} = \frac{6A_1A}{7AD} = \frac{6\cdot 14}{7\cdot 12} = 1.$$

Таким образом, $B_1F = B_1T = \frac{1}{2}B_1C_1 = 6$. Тогда $FB = 14 - 6 = 8$ и $BF : FB_1 = 4 : 3$.

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны. Четырёхугольник ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H. Точка T — середина B_1C_1, поэтому отрезок FT — средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H = EH$, откуда $D_1T = EF$, то есть трапеция ED_1TF — равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1 = EA_1\sqrt{2} = 12\sqrt{2}, \quad FT = FB_1\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{2},$$

$$EF = D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + TC_1^2} = 2\sqrt{17}.$$

Высота равнобедренной трапеции $FF_1 = \sqrt{EF^2 - EF_1^2} = \sqrt{(2\sqrt{17})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$.

Тогда $S_{EFTD_1} = 5\sqrt{2}\cdot\dfrac{12\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2} = 90$.

Ответ: б) 90.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 14

Решите неравенство: $\left|x^2-\frac{29}{12}x-\frac{35}{12}\right| \geq 2x^2-\frac{61}{12}x-\frac{19}{12}.$

Решение.

Неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left|x^2-\frac{29}{12}x-\frac{35}{12}\right| \geq 2x^2-\frac{61}{12}x-\frac{19}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-\frac{29}{12}x-\frac{35}{12} \geq 2x^2-\frac{61}{12}x-\frac{19}{12}, \\ -x^2+\frac{29}{12}x+\frac{35}{12} \geq 2x^2-\frac{61}{12}x-\frac{19}{12} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-\frac{8}{3}x+\frac{4}{3} \leq 0, \\ x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right) \leq 0, \\ (x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -0,5 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $[-0,5;\ 3]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 15

Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна вносить в банк часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна выплатит банку в течение первого года кредитования?

Решение.

Пусть B_i — размер долга Жанны на конец месяца i, X_i — платеж Жанны в конце месяца i. Мы знаем, что имеет место соотношение $B_i = 1{,}02B_{i-1} - X_i$. Кроме того, мы знаем, что последовательность (B_i) является арифметической прогрессией. При этом $B_0 = 1200$ тыс. руб., а $B_{24} = 0$, так как в конце срока кредитования долг Жанны должен быть равен нулю. Этих двух точек достаточно, чтобы узнать всю последовательность B_i: $b_i = \dfrac{24-i}{24}\cdot 1200$. Значит,

$$X_i = 1{,}02B_{i-1} - B_i = \left(1{,}02\cdot\frac{25-i}{24} - \frac{24-i}{24}\right)\cdot 1200 = \frac{1{,}5-0{,}02i}{24}\cdot 1200.$$

Поскольку X_i линейно зависит от i, последовательность X_i также является арифметической прогрессией. Значит,

$$X_1+X_2+\ldots+X_{12} = \frac{(X_1+X_{12})\cdot 12}{2} = 6(50\cdot 1{,}48+50\cdot 1{,}26) = 300\cdot(1{,}48+1{,}26) = 300\cdot 2{,}74 = 822 \text{ тыс. рублей.}$$

Ответ: 822 тыс. рублей.

Приведём другое решение.

Ежемесячно Жанна возвращает банку по 1,2 млн : 24 = 50 тыс. руб. тела долга и выплачивает равномерно уменьшающуюся от максимального значения до нуля сумму процентов за пользование кредитом. За первый месяц это 0,02 · 1,2 млн = 24 тыс. руб. За второй месяц на 1/24 меньше то есть 23 тыс. руб., затем 22 тыс. руб. и так далее. Поэтому выплаты за 12 первых месяцев составят арифметическую прогрессию с первым членом 74, последним — 63 тыс. руб. Ее сумма равна 12(74 + 63)/2 = 822 тыс. руб.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

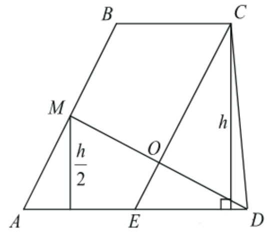
Задача 16

В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD, точка M — середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC = 3$, $AD = 4$.

Решение.



а) Обозначим высоту трапеции через h (рис. 1). Тогда расстояние от точки M до прямой AD равно $\frac{h}{2}$. Значит,

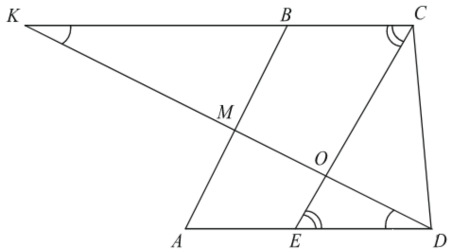
$$S_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{AD}{2} = S_{CED}.$$

При этом

$$S_{AMD} = S_{AMOE} + S_{EOD},$$

$$S_{CED} = S_{COD} + S_{EOD},$$

поэтому $S_{AMOE} = S_{COD}$.



б) Пусть прямые BC и MD пересекаются в точке K (рис. 2). Тогда $\angle KBM = \angle MAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых KC и AD и секущей AB, $\angle BMK = \angle AMD$ как вертикальные, $AM = BM$. Значит, треугольники AMD и BMK равны, откуда $BK = AD = 4$.

Углы KOC и DOE равны как вертикальные, $\angle OED = \angle OCK$ как накрест лежащие при параллельных прямых KC и AD и секущей CE. Значит, треугольники KOC и DOE подобны по двум углам, откуда $\frac{OE}{OC} = \frac{ED}{CK} = \frac{2}{7}$. Следовательно,

$$S_{AMOE} = S_{COD} = \frac{7}{9} S_{CDE} = \frac{7}{9} \cdot h = \frac{2}{9} \cdot \frac{7h}{2} = \frac{2}{9} S_{ABCD}.$$

Ответ: б) $\frac{2}{9}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 17

Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4-2x+y}=2, \\ a(x^2+3y+1)^2-(a+1)(x^2+3y+1)-2a-1=0 \end{cases}$$

имеет не более трех решений.

Решение.

Возводим первое уравнение в квадрат, находим, что $y=2x$, подставим найденное значение во второе уравнение, получим

$$a(x^2+6x+1)^2-(a+1)(x^2+6x+1)-2a-1=0. \quad (*)$$

Поскольку уравнение $y=2x$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между переменными, количество решений системы равно количеству корней уравнения $(*)$.

Пусть

$$t=x^2+6x+1.$$

Заметим, что

$$(x+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+6x+9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+6x+1 \geq -8,$$

значит, $t \geq -8$. Каждому значению $t > -8$ соответствуют два значения переменной x, а значению $t=-8$ - одно значение переменной x. Тогда уравнение $(*)$ записывается в виде

$$at^2-(a+1)t-2a-1=0 \Leftrightarrow (t+1)(at-2a-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & t=-1, \\ & at=2a+1. \end{aligned}\right.$$

Условие задачи будет выполнено, если будет выполнено одно из условий:

— второе уравнение совокупности не имеет решений;

— корни обоих уравнений совокупности равны;

— корень второго уравнения совокупности не больше −8.

При $a=0$ уравнение $at=2a+1$ не имеет решений. Если $a \neq 0$, то

$$at=2a+1 \Leftrightarrow t=2+\frac{1}{a}.$$

Корни уравнений совокупности совпадают, если

$$-1=2+\frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a}=-3 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}.$$

Корень второго уравнения совокупности не больше −8, если

$$2+\frac{1}{a} \leq -8 \Leftrightarrow \frac{10a+1}{a} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{10} \leq a < 0.$$

Объединяя все случаи, получаем, что исходная система уравнений имеет не более трех решений при $-\dfrac{1}{10} \leq a \leq 0, \;\; a=-\dfrac{1}{3}.$

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{3}\right\} \cup \left[-\dfrac{1}{10}; 0\right].$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задача 18

Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 100 рублей, на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 10 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110 рублей, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 81 рубль, а средняя цена книг без бирки — 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки — 210 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

Решение.

а) Предположим, что продавались всего три книги, которые первоначально стоили 120, 94 и 20 рублей. Средняя цена «выгодных» книг составляет $\frac{94+20}{2}=57$ рублей. После увеличения цены книги стали стоить 130, 104 и 30 рублей. Теперь средняя цена «выгодных» книг составляет 30 рублей.

б) В примере из предыдущего пункта первоначально средняя цена «невыгодных» книг составляет 120 рублей, а после увеличения $\frac{130+104}{2}=117$ рублей.

в) Пусть всего привезли n книг. Первоначально «выгодных» было x книг, после увеличения цены выгодных стало y книг. Средняя цена всех книг после увеличения составляет 120 рублей. Получаем два уравнения: $110n=226(n-x)+81x$ и $120n=210(n-y)+90y$, откуда $116n=145x$, то есть $4n=5x$, и $90n=120y$, то есть $3n=4y$. Поэтому число n кратно 4 и 5, то есть кратно 20. Таким образом, $n\geq 20$.

Покажем, что возможен случай $n=20$. Пусть первоначально было 15 книг по 80 рублей, одна книга — по 96 рублей и четыре книги по 226 рублей. Тогда средняя цена всех книг 110 рублей, средняя цена книг с биркой 81 рубль, а средняя цена книг без бирки — 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки — 210 рублей. Все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 20.

Приведём другое решение.

а,б) Если изначально были три книги с ценами 5, 95 и 995 рублей, то после повышения цен они стали стоить 15, 105, 1005 рублей. Тогда средняя цена выгодных книг стала 15 (а была $\frac{5+95}{2}=50$), а средняя цена прочих стала $\frac{105+1005}{2}=555$ (а была 995).

в) Пусть было x книг ценой 100 рублей и выше, y книг ценой от 90 до 99 рублей и z книг ценой менее 90 рублей. Книги из второй группы при повышении цены лишаются бирки «выгодно». Тогда суммарная цена всех книг составляла $110\cdot(x+y+z)$, суммарная цена выгодных книг — $81\cdot(y+z)$, суммарная цена книг первой группы — $226x$, откуда

$$110(x+y+z)=226x+81(y+z)\Leftrightarrow 29(y+z)=116x\Leftrightarrow y+z=4x\Leftrightarrow x+y+z=5x.$$

Значит, общее число книг кратно 5. После повышения суммарная цена составляла $120\cdot(x+y+z)$ (каждая книга подорожала на 10 рублей). При этом суммарная цена книг третьей группы составила $90z$, а суммарная цена прочих — $210\cdot(x+y)$, откуда

$$120(x+y+z)=210(x+y)+90z\Leftrightarrow 30z=90(x+y)\Leftrightarrow z=3(x+y)\Leftrightarrow x+y+z=4(x+y).$$

Значит, общее число книг кратно 4. Поэтому общее число книг не может быть меньше 20. 20 книг быть может — пусть $y=1$, $x=4$, $z=15$, причем изначально были 4 книги по 226 рублей, 15 книг по 80 рублей и одна книга за 96 рублей, тогда все условия задачи выполнены.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: − обоснованное решение пункта *а*; − обоснованное решение пункта *б*; − искомая оценка в пункте *в*; − пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Вариант 2
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-36	0,498	22	1	92	59	4000	10	-4	0,32	2

Решения заданий 12-18

Задача 12

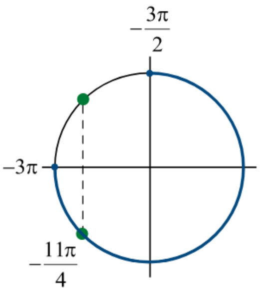
12. а) Решите уравнение $\cos 2x - 5\sqrt{2}\cos x - 5 = 0.$
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\cos^2 x - 1 - 5\sqrt{2}\cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x + \sqrt{2})(\cos x - 3\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = 3\sqrt{2}, \text{ решений нет} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим число $-\frac{11\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k:\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 13

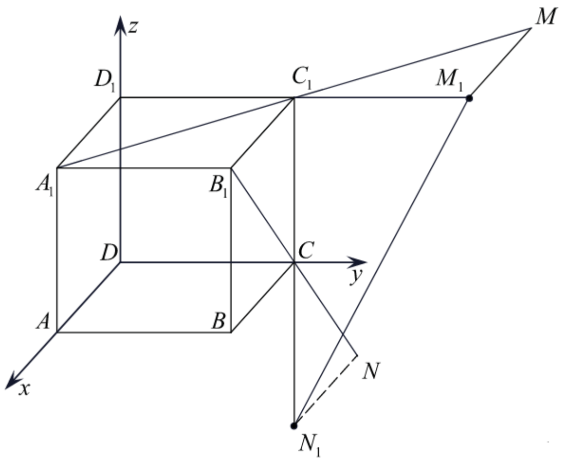
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра равны 1. На продолжении отрезка A_1C_1 за точку C_1 отмечена точка M так, что $A_1C_1 = C_1M$, а на продолжении отрезка B_1C за точку C отмечена точка N так, что $B_1C = CN$.

а) Докажите, что $MN = MB_1$.

б) Найдите расстояние между прямыми B_1C_1 и MN.

Решение.

а) Введем систему координат, как показано на рисунке. В введенной системе координат имеем:



$$M(-1;2;1),\ N(-1;1;-1),\ B_1(1;1;1),\ C_1(0;1;1).$$

$$\overrightarrow{MN} = (0;-1;-2),\ \overrightarrow{MB_1} = (2;-1;0),\ \overrightarrow{B_1C_1} = (-1;0;0)$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{5},\ |\overrightarrow{MB_1}| = \sqrt{5}.$$

Таким образом, у нас получилось, что $MN = MB_1$.

б) Заметим, что проекцией B_1C_1 на плоскость DCC_1D_1 является точка C_1. Спроектируем MN на плоскость DCC_1D_1, получим отрезок M_1N_1. Таким образом, задача свелась к нахождению расстояния от точки C_1 до M_1N_1. Это расстояние равно длине высоты, проведенной из вершины C_1 треугольника $N_1C_1M_1$. Очевидно, что данный треугольник является прямоугольным, а его катеты равны 2 и 1. Тогда его гипотенуза находится по теореме Пифагора, она равна $\sqrt{5}$. Следовательно, высота равна

$$h = \frac{2\cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 14

Решите неравенство $\frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \le \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2}$.

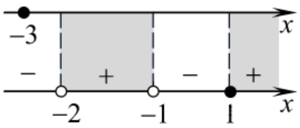
Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \le \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2} - \frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}\cdot\left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+1}\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\cdot\frac{3x+3-2x-4}{(x+1)(x+2)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}\cdot(x-1)}{(x+1)(x+2)} \ge 0.$$

И решим это неравенство методом интервалов, учитывая, что $x \ge -3$.



Ответ: $\{-3\} \cup (-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 15

Для перевозки 500 маленьких и 26 больших блоков был выделен автомобиль грузоподъемностью 9,75 т. По техническим условиям он может перевозить не более 38 маленьких блоков. Габариты блоков таковы, что перевозка одного большого блока приравнивается к перевозке 18 маленьких. Большой блок весит 3,5 т, а маленький 0,25 т. Какое минимальное количество перевозок потребуется для перемещения всех блоков?

Решение.

Для совершения минимального количества поездок загрузка автомобиля должна быть максимальной. С учётом грузоподъёмности и габаритных размеров возможны три способа максимальной загрузки автомобиля:

а) 2 больших блока и 2 маленьких блока (масса 7,5 т, но ограничение по количеству блоков);

б) 1 большой блок и 20 маленьких блоков (масса 8,5 т, но ограничение по количеству блоков);

в) 38 маленьких блоков (масса 9,5 т, но ограничение по количеству блоков).

Пусть первым способом будет совершено x перевозок, вторым — y перевозок, третьим — z перевозок. Требуется найти минимальное значение суммы $x+y+z$, при выполнении условий

$$\begin{cases} 2x+y \geq 26, \\ 2x+20y+38z \geq 500. \end{cases}$$

Домножим первое неравенство на 18 и сложим со вторым неравенством. Получаем:

$$38x+38y+38z \geq 968 \Leftrightarrow x+y+z \geq 25\frac{9}{19}.$$

Значит, минимальное число перевозок больше 25.

Приведём пример, при котором можно перевезти все блоки за 26 перевозок: если 25 перевозок будут осуществлены вторым способом, то будут перевезены все 500 маленьких блоков и 25 больших блоков, и на 26-ю перевозку останется только один большой блок.

Ответ: 26.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

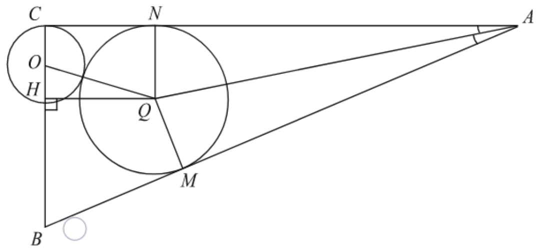
Задача 16

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 12$, $BC = 5$. Окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

Решение.



а) Пусть Q — центр второй окружности, M и N — её точки касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H — проекция точки Q на BC. Имеем: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$, следовательно, $\cos\angle A = \frac{12}{13}$, $\sin\angle A = \frac{5}{13}$. Тогда $\operatorname{tg}\angle NAQ = \operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} = \frac{\sin\angle A}{1+\cos\angle A} = \frac{1}{5}$. Поэтому $AC > AN = 5NQ$, что и требовалось доказать.

б) Пусть x — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHQ:

$$QH = CN = 12 - 5x > 0,\ OQ = x + \frac{1}{2},\ OH = |OC - CH| = \left|\frac{1}{2} - x\right|.$$

По теореме Пифагора $OH^2 + QH^2 = OQ^2$, откуда:

$$(12-5x)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 122x + 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 2, \\ &x = 2{,}88. \end{aligned}\right.$$

Условию $12 - 5x > 0$ удовлетворяет только $x = 2$.

Ответ: 2.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 17

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=4|2x-y-10|, \\ x+2y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

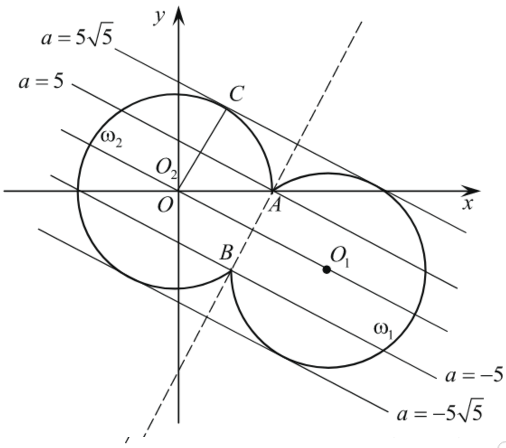
Решение.

Преобразуем первое уравнение системы:

$$x^2-8x+y^2+4y+15=4|2x-y-10| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=4(2x-y-10), \\ 2x-y-10\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=-4(2x-y-10), \\ 2x-y-10<0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-16x+y^2+8y+55=0, \\ y\leq 2x-10, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y>2x-10 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-8)^2+(y+4)^2=25, \\ y\leq 2x-10, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y>2x-10. \end{cases} \end{array} \right.$$

Тем самым, первое уравнение задаёт объединение дуг ω_1 и ω_2 окружностей радиуса 5 с центрами в точках $O_1(8;\,-4)$ и $O_2(0;\,0)$, лежащих ниже и выше прямой $y=2x-1$ соответственно (см. рис.), пересекающихся в точках $A(5;\,0)$ и $B(3;\,-4)$. Заметим, что точка касания $C(\sqrt{5};\,2\sqrt{5})$ лежит на дуге ω_2 и прямая O_2C перпендикулярна прямой O_1O_2, поскольку произведение угловых коэффициентов данных прямых равно -1.



Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, параллельную прямой O_1O_2 или совпадающую с ней.

При $a=5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке A и ещё в одной точке, отличной от точки A, то есть исходная система имеет три решения.

Аналогично, при $a=-5$ прямая m проходит через точку B и исходная система имеет три решения.

При $a=5\sqrt{5}$ прямая m проходит через точку C, значит, прямая m касается дуг ω_1 и ω_2, то есть исходная система имеет два решения.

Аналогично, при $a=-5\sqrt{5}$ прямая m касается дуг ω_1 и ω_2, то есть исходная система имеет два решения.

При $-5\sqrt{5}<a<-5$ или $5<a<5\sqrt{5}$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в двух точках, отличных от точек A и B, то есть исходная система имеет четыре решения.

При $-5<a<5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке, отличной от точек A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-5\sqrt{5}$ или $a>5\sqrt{5}$ прямая m не пересекает дуги ω_1 и ω_2, то есть исходная система не имеет решений.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $-5\sqrt{5}<a\leq -5$ или $5\leq a<5\sqrt{5}$.

Ответ: $-5\sqrt{5}<a\leq -5;\ 5\leq a<5\sqrt{5}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a = -5$ и/или $a = 5$.	3
При всех значениях a верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля.	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 18

В строку подряд написано 1000 чисел. Под каждым числом a первой строки напишем число, указывающее, сколько раз число a встречается в первой строке. Из полученной таким образом второй строки аналогично получаем третью: под каждым числом второй строки пишем, сколько раз оно встречается во второй строке. Затем из третьей строки так же получаем четвёртую, из четвёртой - пятую, и так далее.

а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

б) Докажите, что 11-я строка совпадает с 12-й.

в) Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строка не совпадает с 11-й.

Решение.

а) Очевидно, что начиная со второй строчки, все числа в таблице не больше 1000. Кроме того, каждое число не больше написанного под ним. Поэтому сумма чисел в третьей строчке не меньше, чем во второй и т.д., и каждая из этих сумм не больше миллиона. Следовательно, поскольку все время суммы возрастать не могут, в каких-то соседних строчках суммы совпадут, а тогда совпадут и сами строчки.

б) Докажем, что если в m-ой строчке при $m \geq 2$, число отлично от написанного над ним, то оно не меньше, чем 2^{m-2}. Действительно, для $m = 2$ это очевидно, так как все числа второй строки натуральные. Пусть это уже проверено для всех строк с номерами, меньшими m. Пусть в $m-1$-ой строчке написано число a, а под ним написано число b, большее a. Тогда в $m-2$-ой строчке написано b чисел, равных a. Ясно, что в $m-2$-ой строчке будет написано несколько групп одинаковых чисел, по a в каждой группе, причем числа из разных групп различны. Отсюда вытекает, что b делится на a, то есть $b \geq 2a$. Кроме того, по крайней мере одно из чисел в этих группах отличается от a, а значит, по предположению индукции $a \geq 2^{(m-1)-2}$. Итак, $b \geq 2a \geq 2^{m-2}$. Наше утверждение доказано по индукции для всех $m \geq 2$. Если предположить, что 11-я строчка отлична от 12-й, то какое-то число в 12-й строчке будет больше, чем $2^{12-2} = 1024 > 1000$, что невозможно.

в) Приведем такой пример:

0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488
1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488
4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488
…………………………………………………………….
256, ……………………………., 256, 488, …, 488
1 512, ……………………………., 512, 488, …, 488

В первой строчке 0 и 1 встречаются по одному разу, 2 — два раза, 4 — четыре раза, 8 — восемь раз, …., 256 — 256 раз, 488 — встречается 488 раз, в 11 строчке встречается 512 раз число 512 и 488 раз число 488.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Вариант 3
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	0,25	1	4	96	-7	30	108	−3,625	0,9975	5

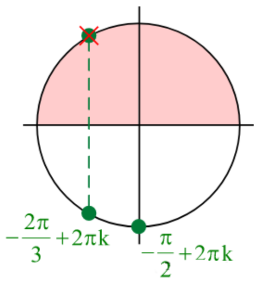
Решения заданий 12-18

Задача 12

а) Решите уравнение: $(2\cos x+1)(\sqrt{-\sin x}-1)=0.$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

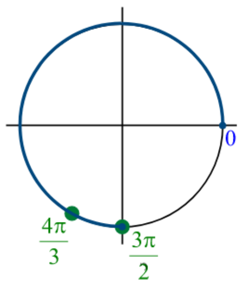
а) Решим уравнение:



$$(2\cos x+1)(\sqrt{-\sin x}-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-\sin x\geq 0,\\ \left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0,\\ \sqrt{-\sin x}-1=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\leq 0,\\ \left[\begin{array}{l}2\cos x=-1,\\ -\sin x=1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\leq 0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2},\\ \sin x=-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $\dfrac{4\pi}{3}$ и $\dfrac{3\pi}{2}$.



Ответ: а) $\left\{-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k: k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 13

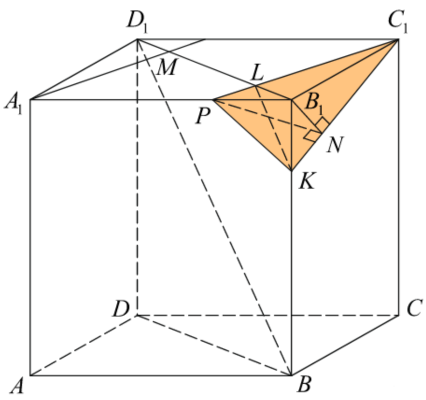
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Решение.

а) В плоскости BB_1D_1D через точку K проведем прямую параллельно BD_1. Пусть эта прямая пересекает диагональ B_1D_1 в точке L. В плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$ проведем прямую C_1L, пусть она пересекает сторону A_1B_1 в точке P. Треугольник KPC_1 — сечение, проходящее через точки K и C_1 параллельно прямой BD_1. Действительно, прямая BD_1 параллельна плоскости сечения, так как параллельна лежащей в нем прямой KL.



В плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$ через точку A_1 проведем прямую параллельно C_1P. Пусть она пересекает D_1B_1 в точке M. По теореме Фалеса имеем: $B_1L : B_1D_1 = B_1K : B_1B = 1:4$ и $D_1M : D_1B_1 = 1:4$, поэтому $ML : LB_1 = 2:1$. Тогда $A_1P : PB_1 = ML : LB_1 = 2:1$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть теперь точка N — основание высоты B_1N прямоугольного треугольника KB_1C_1. B_1N — является проекцией наклонной PN на плоскость BB_1C_1C. Тогда угол PNB_1 — линейный угол искомого двугранного угла. Имеем:

$$PB_1 = \frac{1}{3}A_1B_1 = \frac{4}{3},\ S_{B_1C_1K} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1 = 2,$$

$$C_1K = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17},\ B_1N = \frac{2S}{C_1K} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$\operatorname{tg}\angle PNB_1 = \frac{PB_1}{B_1N} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Тем самым, $\angle PNB_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 14

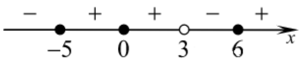
Решите неравенство $x^3+2x^2-\dfrac{24x^2-x+3}{x-3}\le 1.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{\left(x^3+2x^2\right)(x-3)-24x^2+x-3}{x-3}\le 1 \Leftrightarrow \frac{x^4+2x^3-3x^3-6x^2-24x^2+x-3-x+3}{x-3}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^4-x^3-30x^2}{x-3}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-6)(x+5)}{x-3}\le 0,$$



откуда $x\le -5,\ x=0$ и $3<x\le 6.$

Ответ: $(-\infty;\ -5];\ \{0\};\ (3;\ 6].$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 15

Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов (то есть увеличил ставку $a\%$ до $(a+40)\%$). К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение.

Пусть банк первоначально принял вклад в размере S у. е. под $x\%$ годовых. Тогда к началу второго года сумма стала $S(1+0,01x)$ у. е.

После снятия четверти накопленной суммы на счету осталось $\frac{3S}{4}(1+0,01x)$ у. е.

С момента увеличения банком процентной ставки на 40% к концу второго года хранения остатка вклада накопленная сумма стала

$$\frac{3S}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01) \text{ у. е.}$$

По условию задачи эта сумма равна $1,44S$ у.е.

Решим уравнение $\frac{3S}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01)=1,44S$.

$$\frac{3S}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01)=1,44S \Leftrightarrow (1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01)=1,92 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (100+x)\cdot(100+(x+40))=19200 \Leftrightarrow (100+x)\cdot(140+x)=19200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x=-120\pm\sqrt{19600} \Leftrightarrow x=-120\pm 140 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=20.$$

После повышения на 40 процентных пунктов ставка достигла 20% + 40% = 60%.

Ответ: 60.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

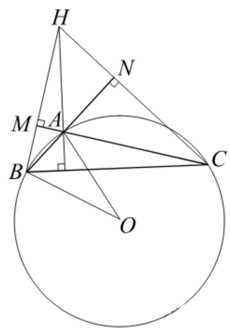
Задача 16

В треугольнике ABC угол A равен 120°. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O - центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45°$.

Решение.



а) По теореме синусов имеем: $BC = 2AO \cdot \sin 120° = AO\sqrt{3}$. Четырехугольник $MHNA$ вписан в окружность с диаметром AH, тогда по теореме синусов для треугольника MNA имеем:

$$MN = 2R \cdot \sin 120° = AH \cdot \sin 120° = AH \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Треугольники MAN и BAC подобны так как

$$\frac{MA}{AB} = \frac{AN}{AC} = \cos 60° = \frac{1}{2},$$

тогда $MN = \frac{1}{2}BC$. Подставляя получаем,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}AH = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow AH = AO.$$

б) По теореме о вписанном угле $\angle BOA = 2\angle ACB = 2 \cdot 15° = 30°$. Тогда

$$\angle BAO = \frac{180° - 30°}{2} = 75°,$$

а $\angle BAH = 180° - 45° = 135°$. Тогда $\angle HAO = 360° - 135° - 75° = 150°$. Из доказанного в пункте а) имеем, что

$$AH = AO = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}.$$

Найдем площадь треугольника

$$S_{AHO} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}^2 \cdot \sin 150° = \frac{5}{4}.$$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $9|x-1|-4x+|3x-|x+a||=0$. Функция $f(x)=9|x-1|-4x+|3x-|x+a|$ непрерывна и неограниченно возрастает при $x \geq 1$, так как при любом раскрытии модулей

$$f(x) = 9x - 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где $k \geq 9-4-4=1>0$. При $x \leq 1$ функция f убывает, так как при любом раскрытии модулей

$$f(x) = -9x + 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где $k \leq -9-4+4=-9<0$. Следовательно, наименьшее значение функция f принимает при $x=1$, и уравнение $f(x)=0$ будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(1) \leq 0$.

Решим это неравенство:

$$|3-|1+a|| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq |a+1|-3 \leq 4 \Leftrightarrow |a+1| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq a+1 \leq 7 \Leftrightarrow -8 \leq a \leq 6.$$

Ответ: $-8 \leq a \leq 6$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
В представленном решении обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован: например, не указано явно необходимое и достаточное условие существования корня, или то, что функция принимает все значения из промежутка $[f(1); +\infty)$, или решение содержит вычислительную ошибку.	3
Верно рассмотрены отдельные случаи раскрытия модуля, в результате чего получена часть верного ответа (возможно, другие случаи не рассмотрены или при их рассмотрении допущены ошибки).	2
Верно рассмотрены отдельные случаи раскрытия модуля, но не найдена никакая часть верного ответа.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задача 18

С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.

б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трехзначного числа?

Решение.

а) Например, из числа 2847 получается 2108124117.

б) Заметим, что если в изначальном числе была цифра 9 (не в последнем разряде), то в получившемся числе справа от нее должна стоять цифра 1 или 9. Значит, цифра 9 в числе 37494128 могла получиться только в результате сложения соседних цифр. Но сумма 4 + 4 не равна 9, поэтому такое число не могло получиться.

в) Пусть изначальное трехзначное число равно $100a + 10b + c$, где a, b и c — цифры. Получившееся число будет семизначным, только если $a+b \geq 10$ и $b+c \geq 10$, а во всех остальных случаях полученное число будет меньше 1 000 000.

Если $a+b \geq 10$ и $b+c \geq 10$, то полученное число будет равно

$$a \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + (a+b-10) \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + (b+c-10) \cdot 10 + c.$$

Знакочередующая сумма цифр полученного числа равна

$$a - 1 + (a + b - 10) - b + 1 - (b + c - 10) + c = 2a - b.$$

При $a = 9$ получившееся число будет больше, чем при любом другом a, вне зависимости от b и c. В этом случае $2a - b$ делится на 11 только при $b = 7$ и любом c. При $a = 9$ и $b = 7$ максимальное число получится для $c = 9$.

Таким образом, максимальное число получается из числа 979 и равно 9167169.

Ответ: а) 2847; б) нет; в) 9167169.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Приведем верный пример в пункте а и обоснованно получен верный ответ в пункте в ИЛИ обоснованно получены верные ответы в пунктах б и в	3
Приведен верный пример в пункте а и обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Приведен верный пример в пункте а или обоснованно получен верный ответ в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4