Вариант № 41054174

1. Задание 1 № 26654

Найдите корень уравнения $16^{x-9}=\frac{1}{2}$.

Решение.

Перейдем к одному основанию степени:

$$16^{x-9}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2^{4(x-9)}=2^{-1}\Leftrightarrow 4x-36=-1\Leftrightarrow x=\frac{35}{4}\Leftrightarrow x=8,75.$$

Ответ: 8,75

Ответ: 8,75

2. Задание 2 № 320184

Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «А = сумма очков равна 5»?

Решение.

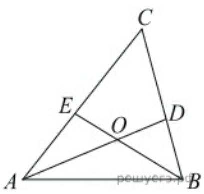
Сумма очков может быть равна 5 в четырех случаях: «3 + 2», «2 + 3», «1 + 4», «4 + 1».

Ответ: 4.

Ответ: 4

3. Задание 3 № 27764

В треугольнике ABC угол C равен $58°$, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Рассмотрим угол AOB в треугольнике AOB:

$$\angle AOB=180°-(\angle OAB+\angle OBA)=180°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=$$
$$=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle C)=180°-\frac{1}{2}(180°-58°)=180°-61°=119°.$$

Ответ: 119.

Ответ: 119

4. Задание 4 № 26760

Найдите значение выражения $\frac{8}{\sin(-\frac{27\pi}{4})\cos(\frac{31\pi}{4})}$.

Решение.

Выполним преобразования:

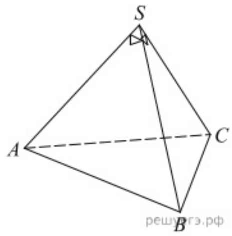
$$\frac{8}{\sin(-\frac{27\pi}{4})\cos(\frac{31\pi}{4})}=\frac{8}{\sin(-7\pi+\frac{\pi}{4})\cos(8\pi-\frac{\pi}{4})}=\frac{8}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-16.$$

Ответ: −16.

Ответ: -16

5. Задание 5 № 27111

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



Решение.

Удобно считать треугольник ASB основанием пирамиды, тогда отрезок SC будет являться её высотой. Заметим, что

$$S_{ASB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

Поскольку $SC = 3$, далее имеем:

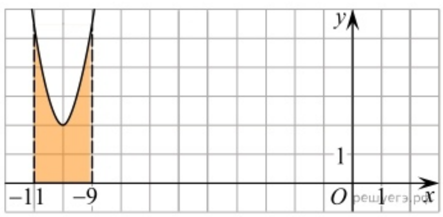
$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}S_{ASB} \cdot SC = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

Ответ: 4,5

6. Задание 6 № 323079

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение.

Площадь выделенной фигуры равна разности значений первообразных, вычисленных в точках -9 и -11.

Имеем:

$$F(-9)=(-9)^3+30\cdot(-9)^2+302\cdot(-9)-\frac{15}{8}=-729+2430-2718-\frac{15}{8}=-1018\frac{7}{8}.$$

$$F(-11)=(-11)^3+30\cdot(-11)^2+302\cdot(-11)-\frac{15}{8}=-1331+3630-3322-\frac{15}{8}=-1024\frac{7}{8}.$$

$$F(-9)-F(-11)=-1018\frac{7}{8}+1024\frac{7}{8}=6.$$

Приведем другое решение.

Вычисления можно было бы упростить, выделив полный куб:

$$F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}=(x+10)^3+2x-1000-\frac{15}{8},$$

что позволяет сразу же найти

$$F(-9)-F(-11)=(-9+10)^3+2\cdot(-9)-((-11+10)^3+2\cdot(-11))=1-18-(-1-22)=6.$$

Приведем ещё одно решение.

Можно было бы найти разность первообразных, используя формулы сокращенного умножения:

$$F(-9)-F(-11)=\left((-9)^3+30\cdot(-9)^2+302\cdot(-9)-\frac{15}{8}\right)-\left((-11)^3+30\cdot(-11)^2+302\cdot(-11)-\frac{15}{8}\right)=$$

$$=(-9)^3-(-11)^3-30\cdot((-9)^2-(-11)^2)+302\cdot((-9)-(-11))=11^3-9^3-30\cdot(11^2-9^2)+302\cdot(11-9)=$$

$$=(11-9)(11^2+11\cdot 9+9^2)-30\cdot(11-9)(11+9)+302\cdot 2=2\cdot 301-30\cdot 40+604=1206-1200=6.$$

Приведем ещё одно решение.

Получим явное выражение для $f(x)$. Поскольку

$$f(x)=F'(x)=3x^2+60x+302=3(x^2+20x+100)+2=3(x+10)^2+2,$$

имеем:

$$\int\limits_{-11}^{-9}(3(x+10)^2+2)dx=((x+10)^3+2x)\Bigg|_{-11}^{-9}=1-(-1)+2(-9-(-11))=2+4=6.$$

Примечание.

Этот подход можно несколько усовершенствовать. Заметим, что график функции $f(x)=3(x+10)^2+2$ получен сдвигом графика функции $y=3x^2+2$ на 10 единиц влево вдоль оси абсцисс. Поэтому искомая площадь фигуры равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $y=3x^2+2$ и отрезком $[-1;\ 1]$ оси абсцисс. Имеем:

$$S=\int\limits_{-1}^{1}(3x^2+2)dx=2\int\limits_{0}^{1}(3x^2+2)dx=2(x^3+2x)\big|_0^1=2(1+2)-0=6.$$

Ответ:6.

Ответ: 6

7. Задание 7 № 28009

Два тела массой $m=2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $\upsilon=10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q=m\upsilon^2\sin^2\alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 50 джоулей?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $Q\geq 50$ Дж на полуинтервале $2\alpha\in(0^\circ;180^\circ]$ при заданных значениях массы тел $m=2$ кг и их скоростей $\upsilon=10$ м/с:

$$m\upsilon^2\sin^2\alpha\geq 50\Leftrightarrow 200\sin^2\alpha\geq 50\Leftrightarrow\sin^2\alpha\geq\frac{1}{4}\underset{0^\circ<\alpha\leq 90^\circ}{\Leftrightarrow}\sin\alpha\geq\frac{1}{2}\underset{0^\circ<\alpha\leq 90^\circ}{\Leftrightarrow}30^\circ\leq\alpha\leq 90^\circ.$$

Значит, наименьший угол $2\alpha=2\cdot 30^\circ=60^\circ$.

Ответ: 60.
Ответ: 60

8. Задание 8 № 99610

По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй — длиной 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

Решение.

Пока сухогрузы перейдут из первого положения во второе, второй сухогруз переместился относительно первого на

$$120+400+80+600=1200\text{ м}.$$

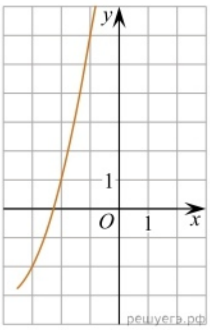
Пусть u — разность скоростей сухогрузов, тогда

$$u=\frac{1200\text{ м}}{12\text{ мин}}=\frac{6000\text{ м}}{60\text{ мин}}=100\text{ м/мин}=6\text{ км/ч}.$$

Ответ: 6.
Ответ: 6

9. Задание 9 № 564654

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=ax^2+bx+c$, где числа a, b и c — целые. Найдите абсциссу вершины параболы.



Решение.

Из рисунка видно, что $f(-3)=-2$, $f(-2)=1$, $f(-1)=6$, следовательно, $f(-3)-f(-2)=a(9-4)+b(-3+2)=5a-b=-3$, $f(-2)-f(-1)=a(4-1)+b(-2+1)=3a-b=-5$. Решая эту систему, находим $a=1$, $b=8$. Абсцисса вершины параболы $x_0=-\frac{b}{2a}=-4$.

Ответ: −4.
Ответ: -4

10. Задание 10 № 320211

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение.

Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате следующих событий: батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или батарейка исправна, но по ошибке забракована. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0,02\cdot 0,99$ и $0,98\cdot 0,01$.

События быть неисправной батарейкой или быть исправной образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно происходит), поэтому можно применить формулу полной вероятности. Получим:

$$0,0198+0,0098=0,0296.$$

Ответ: 0,0296.

Ответ: 0,0296

11. Задание 11 № 26698

Найдите наименьшее значение функции $y=6\cos x+\frac{24}{\pi}x+5$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции $y=6\cos x+\frac{24}{\pi}x+5$, $y'=-6\sin x+\frac{24}{\pi}$. Уравнение $y'=0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей. Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=6\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{24}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+5=-14.$$

Ответ: −14.

Ответ: -14

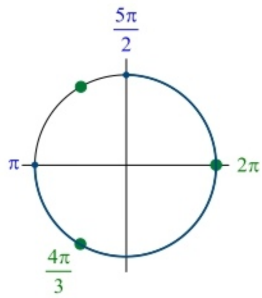
12. Задание 12 № 485991

а) Решите уравнение $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение, получаем $\cos x=\cos 2x$. Значит, $2x=x+2\pi k$ или $x=-2x+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. В первом случае $x=2\pi k$, во втором случае $x=\frac{2\pi k}{3}$, где $k\in\mathbb{Z}$. Первая серия решений входит во вторую.



б) Отметим решения на тригонометрической окружности. Отрезку $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и 2π.

Ответ: а) $\left\{\frac{2\pi k}{3}:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{4\pi}{3}$; 2π.

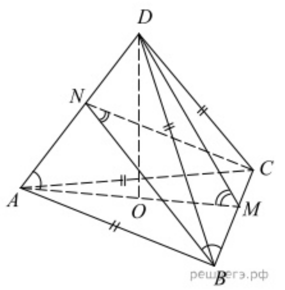
13. Задание 13 № 513920

В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AD и BC равны. $AB = BD = DC = AC = 5$.

а) Докажите, что $AD = BC$.

б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60°.

Решение.



а) Треугольник BAC — равнобедренный. Проведём $AM \perp BC$. M — середина BC, тогда $DM \perp BC$, так как треугольник BDC равнобедренный. $\angle AMD = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при ребре BC. Аналогично $\angle BNC = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при ребре AD. $\Delta ABC = \Delta DBC$ по трём сторонам, тогда $MA = MD$ и

$$\angle MAD = \frac{180^\circ - \varphi}{2} = \alpha.$$

Аналогично $\Delta BAD = \Delta CAD$ и $NB = NC$, а

$$\angle NBC = \frac{180^\circ - \varphi}{2} = \alpha.$$

Треугольники ANM и BMN равны по общему катету MN и острому углу α, тогда $AN = BM$. Но $AN = \frac{1}{2}AD,\ BM = \frac{1}{2}BC,$ следовательно, $AD = BC$.

б) По условию φ=60°, тогда треугольник AMD равносторонний. Пусть $AD = AM = MD = BC = a$, тогда $BM = \frac{a}{2}$. В треугольнике AMB имеем $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 25,$ откуда $a = 2\sqrt{5}$ и $AD = AM = MD = BC = 2\sqrt{5}.$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DO.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 10.$$

$$DO = AD \cdot \sin\alpha = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{15}.$$

Тогда

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \sqrt{15} = \frac{10\sqrt{15}}{3}.$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{15}}{3}$.

14. Задание 14 № 508570

Решите неравенство: $\log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2-12|x|+37)-\log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2-12|x|+37)\geq 0.$

Решение.

Заметим, что выражение, стоящее под знаком логарифма, не меньше 1:

$$x^2-12|x|+37=(|x|-6)^2+1\geq 1.$$

Кроме того, при ненулевых значениях переменной справедливы неравенства $1-\dfrac{x^2}{37}<1$ и $1+\dfrac{x^2}{37}>1$, а значит,

$$\log_{1-\frac{x^2}{37}}\left(x^2-12|x|+37\right)\leq 0, \text{ и } \log_{1+\frac{x^2}{37}}\left(x^2-12|x|+37\right)\geq 0.$$

Тем самым, неравенство выполнено в том и только в том случае, когда оба логарифма равны нулю. Имеем:

$$\begin{cases}\log_{1-\frac{x^2}{37}}\left(x^2-12|x|+37\right)=0,\\ \log_{1+\frac{x^2}{37}}\left(x^2-12|x|+37\right)=0\end{cases}\Rightarrow x^2-12|x|+37=1\Leftrightarrow(|x|-6)^2+1=1\Leftrightarrow|x|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6,\\x=-6.\end{array}\right.$$

Проверка подтверждает, что при найденных значениях x исходное неравенство выполняется.

Таким образом, ответом являются два значения: $x=6$ или $x=-6$.

Ответ: $\{-6;\ 6\}$.

15. Задание 15 № 506959

Баба Валя, накопив часть своей пенсии, решила улучшить свое материальное положение. Она узнала, что в Спёрбанке от пенсионеров принимают вклады под определенный процент годовых и на этих условиях внесла свои сбережения в ближайшее отделение Спёрбанка. Но через некоторое время соседка ей рассказала, что недалеко от той местности, где проживают пенсионеры, есть коммерческий банк, в котором процент годовых для пенсионеров-вкладчиков в 20 раз выше, чем в Спёрбанке. Баба Валя не доверяла коммерческим банкам, но стремление улучшить свое материальное положение взяло верх. После долгих колебаний и ровно через год после открытия счета в Спёрбанке Баба Валя сняла половину образовавшейся суммы от ее вклада, заявив: «Такой навар меня не устраивает!» и открыла счет в том коммерческом банке, о котором говорила ее соседка, не теряя надежды на значительное улучшение своего материального благосостояния.

Надежды оправдались: через год сумма Бабы Вали в коммерческом банке превысила ее первоначальные кровные сбережения на 65%. Сожалела Баба Валя, что год назад в Спёрбанке сняла не всю сумму, а лишь половину, однако, подумала: «А где же мы не теряли?..» Гендиректор коммерческого банка оказался хорошим: не оставил Бабу Валю без денег.

А каков в Спёрбанке процент годовых для пенсионеров?

Решение.

Пусть Баба Валя внесла в Спёрбанк S у.е. под $x\%$ годовых. Тогда за год хранения вклада внесенная сумма выросла до $S(1+0,01x)$ у.е. Баба Валя сняла со счета $\dfrac{S}{2}(1+0,01x)$ у.е. и поместила эту сумму в коммерческий банк. За год хранения вклада в коммерческом банке сумма выросла до $\dfrac{S}{2}(1+0,01x)\cdot(1+0,2x)$ у.е. А эта сумма по условию задачи составляет $1,65S$ у.е.

Решим уравнение $\dfrac{S}{2}(1+0,01x)\cdot(1+0,2x)=1,65S$:

$$(1+0,01x)\cdot(1+0,2x)=3,3\Leftrightarrow(100+x)\cdot(10+2x)=3300\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+210x+1000-3300=0\Leftrightarrow x^2+105x-1150=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-115,\\x=10.\end{array}\right.$$

По условию задачи нам подходит только положительный корень $x=10$. Значит, в Спёрбанке процент годовых для пенсионеров равен 10.

Ответ: 10.

16. Задание 16 № 509425

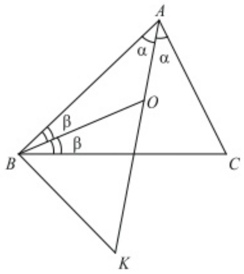
Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $BK = OK$.

а) Докажите, что четырехугольник $ABKC$ вписанный.

б) Найдите длину отрезка AO, если известно, что радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны 3 и 12 соответственно, а $OK = 5$.

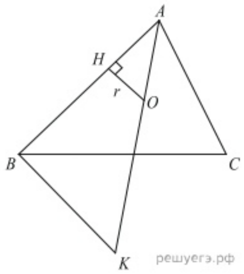
Решение.

а) Пусть $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta$. Так как O — центр вписанной окружности треугольника ABC, то AO, BO — биссектрисы углов A и B, значит, $\angle BAO = \alpha, \angle ABO = \beta$. Угол BOK внешний для треугольника AOB, поэтому $\angle BOK = \alpha + \beta$. (см. рисунок).



Так как $BK = OK$ (по построению), то $\angle OBK = \angle BOK = \alpha + \beta$, тогда $\angle CBK = \angle OBK - \angle CBO = \alpha + \beta - \beta = \alpha$. Углы CBK и KAC опираются на один и тот же отрезок CK и равны друг другу: $\angle CBK = \angle KAC = \alpha$. Тогда по признаку, связанному со свойством вписанных углов, точки A, B, K, C лежат на одной окружности.

б) Обозначим через r, R радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Пусть H—проекция точки O на сторону AB (см. рис.), тогда $OH = r, AO = \dfrac{r}{\sin\alpha}$. Так как точки A, B, K, C лежат на одной окружности, то радиус описанной окружности треугольника ABK совпадает с радиусом описанной окружности треугольника ABC и равен R. Из треугольника ABK по теореме синусов: $\dfrac{BK}{\sin\alpha} = 2R,\ \sin\alpha = \dfrac{BK}{2R}$. Тогда



$$AO = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{r}{\frac{BK}{2R}} = \frac{r\cdot 2R}{BK}.$$

Так как $r = 3,\ R = 12,\ BK = OK = 5$, то $AO = \dfrac{3\cdot 24}{5} = 14,4.$

Ответ: 14,4.

17. Задание 17 № 520999

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x+\frac{a^2}{x}+1\right|+\left|x+\frac{a^2}{x}-1\right|=2$$

имеет хотя бы один корень.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(t)=|t+1|+|t-1|$. Её минимальное значение равно 2 и достигается при $-1\le t\le 1$.

Исходное уравнение принимает вид

$$f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)=2.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда двойное неравенство

$$-1\le x+\frac{a^2}{x}\le 1$$

имеет решения.

Заметим, что множество значений выражения $x+\dfrac{a^2}{x}$ это $(-\infty;\ -2|a|];\ \ [2|a|;\ +\infty)$ при $a\ne 0$ и $(-\infty;\ 0);\ (0;\ +\infty)$ при $a=0$.

Таким образом, исходное уравнение имеет хотя бы один корень при $-\dfrac{1}{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$.

18. Задание 18 № 505669

Можно ли из последовательности 1, 1/2, 1/3, 1/4,… выделить арифметическую прогрессию

а) длиной 4

б) длиной 5

в) длиной k, где k — любое натуральное число?

Решение.

а) Например, годится такая прогрессия: $\dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{12};\ \dfrac{1}{24}.$

б) Например, годится такая прогрессия: $\dfrac{1}{24};\ \dfrac{1}{30};\ \dfrac{1}{40};\ \dfrac{1}{60};\ \dfrac{1}{120}.$

в) Ясно, что последовательность $\dfrac{k}{k!};\ \dfrac{k-1}{k!};\ldots;\dfrac{1}{k!}$ является арифметической прогрессией с разностью $-\dfrac{1}{k!}$. Кроме того, каждый член такой последовательности можно сократить так, чтобы в числителе была единица. Значит, все они являются членами исходной последовательности.