Вариант № 37812191

1. Задание 1 № 413030

Длина зонта в сложенном виде равна 25 см и складывается из длины ручки (рис. 3) и трети длины спицы (зонт в три сложения). Найдите длину спицы, если длина ручки зонта равна 6,2 см.

Два друга Петя и Вася задумались о том, как рассчитать площадь поверхности зонта.

На первый взгляд зонт кажется круглым, а его купол напоминает часть сферы (сферический сегмент). Но если присмотреться, то видно, что купол зонта состоит из восьми отдельных клиньев, натянутых на каркас из восьми спиц (рис. 1). Сферическая форма в раскрытом состоянии достигается за счёт гибкости спиц и эластичности ткани, из которой изготовлен зонт.

Петя и Вася сумели измерить расстояние между концами соседних спиц a. Оно оказалось равно 38 см. Высота купола зонта h (рис. 2) оказалась равна 25 см, а расстояние d между концами спиц, образующих дугу окружности, проходящей через вершину зонта, — ровно 100 см.

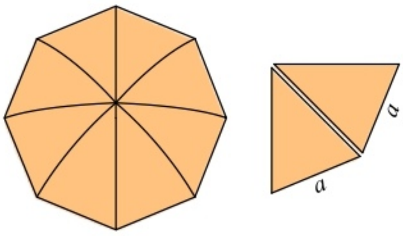


*Рис.*1

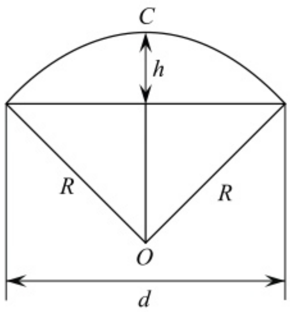


*Рис.*2

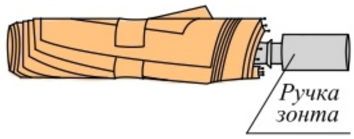


*Рис.*3

Решение.

Из условия треть длины спицы составляет 25 − 6,2=18,8 см, следовательно, длина спицы — 56,4 см.

Ответ: 56,4.

Ответ: 56,4

2. Задание 2 № 413031

Поскольку зонт сшит из треугольников, рассуждал Петя, площадь его поверхности можно найти как сумму площадей треугольников. Вычислите площадь поверхности зонта методом Пети, если высота каждого равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 53,1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах с округлением до десятков.

Решение.

Площадь поверхности зонта является суммой площадей восьми равнобедренных треугольников с основанием 38 см и высотой 53,1 см. Таким образом, $S=8\cdot\frac{1}{2}\cdot 38\cdot 53,1=8071,2$ см^2, округлив значение до десятков, получим 8070 см^2.

Ответ: 8070.

Ответ: 8070

3. Задание 3 № 413032

Вася предположил, что купол зонта имеет форму сферического сегмента. Вычислите радиус R сферы купола, зная, что $OC = R$ (рис. 2). Ответ дайте в сантиметрах.

Решение.

Радиус можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника, катеты которого $\frac{d}{2}$ и $R-h$, а гипотенуза R:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2+(R-h)^2=R^2 \Leftrightarrow R=\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2+h^2}{2h} \Leftrightarrow R=62,5 \text{ см.}$$

Ответ: 62,5.
Ответ: 62,5

4. Задание 4 № 413033

Вася нашёл площадь купола зонта как площадь поверхности сферического сегмента по формуле $S=2\pi Rh$, где R — радиус сферы, а h — высота сегмента. Рассчитайте площадь поверхности купола способом Васи. Число π округлите до 3,14. Ответ дайте в квадратных сантиметрах с округлением до целого.

Решение.

Воспользуемся значением R, полученным в предыдущем задании, тогда по формуле $S=2\pi Rh$ рассчитаем площадь поверхности купола $S=2\cdot 3,14\cdot 62,5\cdot 25=9812,5$ см^2, округлив до целого, получим 9813 см^2.

Ответ: 9813.
Ответ: 9813

5. Задание 5 № 413034

Рулон ткани имеет длину 35 м и ширину 80 см. На фабрике из этого рулона были вырезаны треугольные клинья для 29 зонтов, таких же, как зонт, который был у Пети и Васи. Каждый треугольник с учётом припуска на швы имеет площадь 1050 кв. см. Оставшаяся ткань пошла в обрезки. Сколько процентов ткани рулона пошло в обрезки?

Решение.

Площадь рулона составляет $3500\cdot 80=280000$ см^2, площадь получившихся зонтиков — $29\cdot 8\cdot 1050=243600$ см^2. Найдем долю обрезков ткани рулона $\frac{280000-243600}{280000}\cdot 100\%=13\%$.

Ответ: 13.
Ответ: 13

6. Задание 6 № 337528

Найдите значение выражения $1\frac{8}{17}:\left(\frac{12}{17}+2\frac{7}{11}\right)$.

Решение.

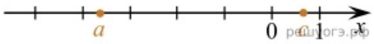
Выполним действия в скобках, затем деление:

$$1\frac{8}{17}:\left(\frac{12}{17}+2\frac{7}{11}\right)=\frac{25}{17}:\left(\frac{12}{17}+\frac{29}{11}\right)=\frac{25}{17}:\frac{12\cdot 11+29\cdot 17}{17\cdot 11}=\frac{25}{17}\cdot\frac{17\cdot 11}{132+493}=\frac{25\cdot 11}{625}=0,44.$$

Ответ: 0,44.
Ответ: 0,44

7. Задание 7 № 314789

На координатной прямой отмечены числа a и c. Какое из следующих утверждений неверно? *В ответе укажите номер выбранного варианта.*



1) $a - c > 0$
2) $-3 < a + 1 < -2$
3) $\frac{a}{c} < 0$
4) $-c > -1$

Решение.
Заметим, что $-4 < a < -3$ и $0 < c < 1$, и проверим все варианты ответа:
1) $a - c > 0 \Leftrightarrow a > c$ — неверно.
2) $-3 < a + 1 < -2 \quad \Leftrightarrow a < 0$ — верно.
3) $\frac{a}{c} < 0$ — верно, поскольку $a < 0$, а $c > 0$.
4) $-c > -1 \Leftrightarrow c < 1$ — верно.

Неверным является утверждение 1.
Ответ: 1

8. Задание 8 № 338274

Найдите значение выражения $\frac{8ab}{a+8b} \cdot \left(\frac{a}{8b} - \frac{8b}{a}\right)$ при $a = 8\sqrt{3} + 7,\ b = \sqrt{3} - 3.$

Решение.
Преобразуем выражение:

$$\frac{8ab}{a+8b} \cdot \left(\frac{a}{8b} - \frac{8b}{a}\right) = \frac{8ab}{a+8b} \cdot \frac{a^2 - 64b^2}{8ab} = \frac{(a-8b)(a+8b)}{a+8b} = a - 8b.$$

Подставим значения $a = 8\sqrt{3} + 7,\ b = \sqrt{3} - 3$:

$$8\sqrt{3} + 7 - 8(\sqrt{3} - 3) = 8\sqrt{3} + 7 - 8\sqrt{3} + 3 \cdot 8 = 31.$$

Ответ: 31.
Ответ: 31

9. Задание 9 № 338494

Решите уравнение $(x-4)^2 + (x+9)^2 = 2x^2$.
Решение.
Последовательно получаем:

$$(x-4)^2 + (x+9)^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + x^2 + 18x + 81 = 2x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x = -97 \Leftrightarrow x = -9,7.$$

Ответ: −9,7.
Ответ: -9,7

10. **Задание** 10 № [132734]

В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 9 черных, 4 желтых и 7 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет желтое такси.

Решение.

Вероятность того, что приедет желтая машина равна отношению количества желтых машин к общему количеству машин: $\frac{4}{20}=0,20.$

Ответ: 0,2.

Ответ: 0,2

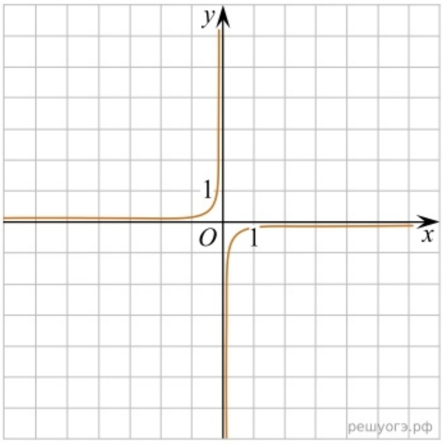
11. **Задание** 11 № [339114]

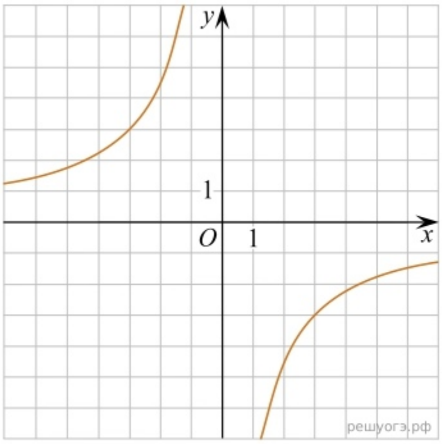
Установите соответствие между функциями и их графиками.

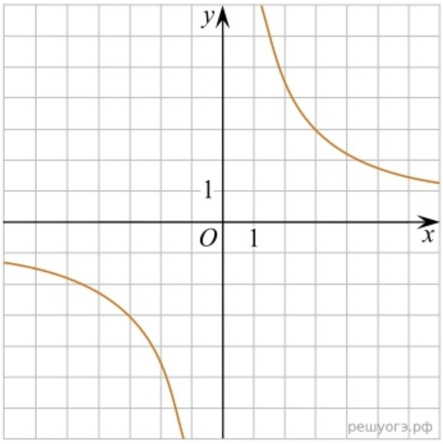
Функции

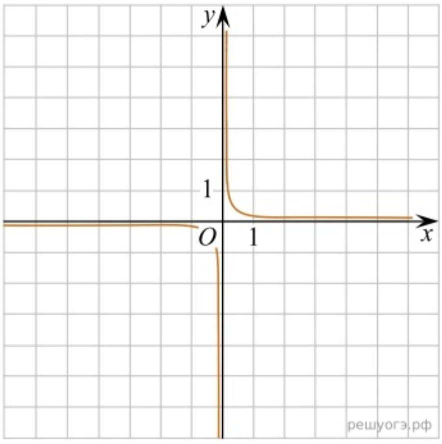
А) $y=\dfrac{1}{9x}$ Б) $y=\dfrac{9}{x}$ В) $y=-\dfrac{9}{x}$

Графики

1) 

2) 

3) 

4) 

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В
□	□	□

Решение.

Все представленные здесь функции — гиперболы. Общая формула для уравнения гиперболы: $y=\dfrac{a}{x}$, если $a>0$, то ветви гиперболы располагаются в первой и третьей четвертях, в противном случае — во второй и четвёртой четвертях.

Для того, чтобы отличить гиперболы лежащие в одинаковых четвертях нужно подставить какое-нибудь значение x в формулу и проверить, какому графику будет соответствовать полученное значение.

Таким образом, установим соответствие: А — 4, Б — 3, В — 2.

Ответ: 432.

Ответ: 432

12. Задание 12 № [311964]

Из закона всемирного тяготения $F = G\dfrac{mM}{r^2}$ выразите массу m и найдите её величину (в килограммах), если $F = 13{,}4$ Н, $r = 5$ м, $M = 5\cdot 10^9$ кг и гравитационная постоянная $G = 6{,}7\cdot 10^{-11}$ $\dfrac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$.

Решение.

Выразим массу: $m = \dfrac{r^2\cdot F}{G\cdot M}$. Подставим значения переменных:

$$m = \frac{5^2\cdot 13{,}4}{6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot 5\cdot 10^9} = \frac{5\cdot 13{,}4\cdot 100}{6{,}7} = 1000.$$

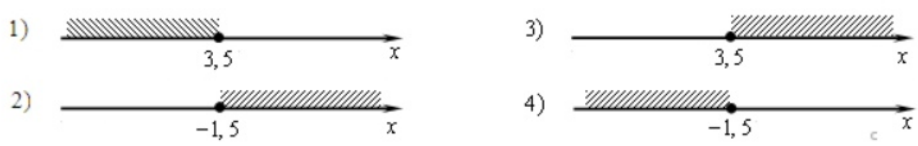
Ответ: 1000.

Ответ: 1000

13. Задание 13 № [107]

Решите неравенство $4x+5 \ge 6x-2$ и определите, на каком рисунке изображено множество его решений.

В ответе укажите номер правильного варианта.



Решение.

Решим неравенство:

$$4x+5 \ge 6x-2 \Leftrightarrow -2x \ge -7 \Leftrightarrow x \le 3{,}5.$$

Решение неравенства изображено на рис. 1.

Правильный ответ указан под номером 1.

Ответ: 1

14. Задание 14 № [393942]

Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение.

Пусть бригада в первый день покрасила a_1 метров забора, во второй— a_2, … , в последний— a_n метров забора. Тогда $a_1 + a_n = 60$ м, а за n дней было покрашено

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}n = 30n$ метров забора.

Поскольку всего было покрашено 240 метров забора, имеем: $30n = 240 \Leftrightarrow n = 8$. Таким образом, бригада красила забор в течение 8 дней.

Ответ: 8.

Ответ: 8

15. Задание 15 № 132774

Разность углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 40°. Найдите меньший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Пусть меньший угол равен x, тогда больший угол равен $x+40^\circ$.

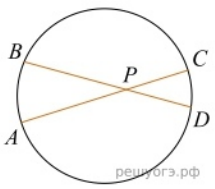
Поскольку сумма односторонних углов равна 180°, имеем: $x+x+40^\circ=180^\circ \Leftrightarrow 2x=140^\circ \Leftrightarrow x=70^\circ$.

Таким образом, наименьший угол параллелограмма равен 70°.

Ответ: 70.
Ответ: 70

16. Задание 16 № 356618

Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P, $BP=15$, $CP=6$, $DP=10$. Найдите AP.



Решение.

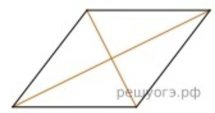
Так как хорды AC и BD пересекаются в точке P, по свойству хорд: $BP\cdot PD=AP\cdot PC$, значит

$$AP=\frac{BP\cdot PD}{PC}=\frac{15\cdot 10}{6}=25.$$

Ответ: 25.
Ответ: 25

17. Задание 17 № 323957

Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 6.



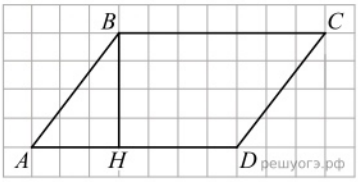
Решение.

Площадь ромба можно найти как половину произведения его диагоналей: $S=\frac{1}{2}14\cdot 6=42.$

Ответ: 42.
Ответ: 42

18. Задание 18 № 311356

На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$. Используя рисунок, найдите $\sin\angle HBA$.



Решение.

Синус угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к гипотенузе. Треугольник BAH — прямоугольный, поэтому $\sin\angle HBA = \dfrac{AH}{AB}$.

Вычислим по теореме Пифагора длину гипотенузы AB:

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Тогда

$$\sin\angle HBA = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.
Ответ: 0,6

19. Задание 19 № 93

Укажите номера верных утверждений.

1) Существует квадрат, который не является прямоугольником.
2) Если два угла треугольника равны, то равны и противолежащие им стороны.
3) Внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, равны.

Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.

Решение.

Проверим каждое из утверждений.

1) «Существует квадрат, который не является прямоугольником» — *некорректное* утверждение, корректное — «Существует прямоугольник, который не является квадратом».

2) «Если два угла треугольника равны, то равны и противолежащие им стороны» — *верно*, т. к. треугольник, два угла которого равны является равнобедренным, причём равные стороны лежат напротив равных углов.

3) «Внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, равны» — *верно*, это теорема планиметрии.

Ответ: 23.
Ответ: 23

20. Задание 20 № 177

Решите неравенство $\dfrac{x^2}{3} < \dfrac{3x+3}{4}$.

Решение.

Перенесём две части неравенства в одну часть и избавимся от знаменателя: $4x^2 - 9x - 9 < 0$, приравняем левую часть к нулю и найдём корни. Отсюда $x = 3$ и $x = -0,75$. Расставив корни на координатной прямой, определим знаки неравенства, получаем: $-0,75 < x < 3$.

Ответ: (-0,75; 3).

21. Задание 21 № 311600

Расстояние между городами A и B равно 750 км. Из города A в город B со скоростью 50 км/ч выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся?

Решение.

Пусть x км — искомое расстояние, $x > 0$.

Составим таблицу по данным задачи:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Первый автомобиль	50	$\frac{x}{50}$	x
Второй автомобиль	70	$\frac{750-x}{70}$	$750-x$

Так как второй автомобиль вышел на 3 ч. позже первого, составим уравнение:

$$\frac{x}{50}-\frac{750-x}{70}=3 \Leftrightarrow 7x-3750+5x=1050 \Leftrightarrow 12x=4800 \Leftrightarrow x=400$$

Ответ: 400 км.

Другое решение:

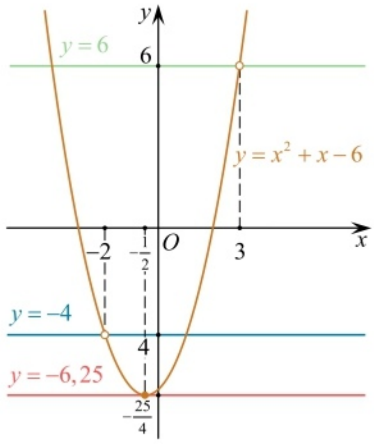
За первые три часа пути автомобиль, выехавший из города A, проехал 150 километров и расстояние от него до города. В стало равным 600 км. Далее, скорость сближения двух автомобилей равна 120 км/ч, значит, они встретятся через 5 часов после выезда второго автомобиля. Таким образом, первый автомобиль до встречи находился в пути 8 часов, и проехал за это время 400 километров.

Ответ: 400 км.

22. Задание 22 № 49

Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.



Пусть $t=x^2$, тогда числитель принимает вид $t^2-13t+36$. По теореме, обратной теореме Виета, сумма корней уравнения $t^2-13t+36=0$ равна 13, а их произведение— 36. Тем самым, это числа 4 и 9. Тогда по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, получаем: $t^2-13t+36=(t-4)(t-9)$. Возвращаясь к исходной переменной, имеем:

$$x^4-13x^2+36=(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

Сократим дробь: при $x\neq-2$ и $x\neq3$ функция принимает вид:

$$y=(x-2)(x+3)=x^2+x-6,$$

её график — парабола с выколотыми точками $(-2;-4)$ и $(3;6)$.

Выделим полный квадрат:

$$y=x^2+x-6=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-6=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}.$$

Следовательно, искомая парабола получается сдвигом графика функции $y=x^2$ на $(-0,5;-6,25)$ — см. рис.

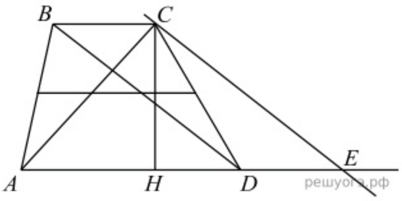
Прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5;-6,25)$, ординаты выколотых точек суть $y(-2)=4-2-6=-4$ и $y(3)=9+3-6=6$. Поэтому $c=-6,25$, $c=-4$ или $c=6$.

Ответ: $c=-6,25$, $c=-4$ или $c=6$.

23. Задание 23 № 339619

Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 15 и 7, а средняя линия равна 10.

Решение.



Пусть $AC = 7,\ BD = 15,\ m = 10$ — длина средней линии. Проведём высоту CH и проведём прямую CE, параллельную BD. Рассмотрим четырёхугольник $BCED$: $BC \parallel DE$, $BD \parallel CE$, следовательно, $BCED$ — параллелограмм, откуда $DE = BC$, $BD = CE = 15$. Рассмотрим треугольник ACE, $AE = AD + DE = AD + BC = 2m = 20$. Пусть p — полупериметр треугольника ACE. Найдём площадь треугольника ACE по формуле Герона:

$$S_{ACE} = \sqrt{p(p-AC)(p-CE)(p-AE)} = \sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)} = \sqrt{21\cdot 14\cdot 6\cdot 1} = \\ = \sqrt{3\cdot 7\cdot 2\cdot 7\cdot 2\cdot 3} = 2\cdot 3\cdot 7 = 42.$$

Выразим площадь треугольника ACE как произведение основания AE на высоту CH, откуда найдём CH:

$$S_{ACE} = \frac{1}{2}AE\cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{2S_{ACE}}{AE} \Leftrightarrow CH = 4,2.$$

Площадь трапеции равна произведению высоты на полусумму длин оснований: $\dfrac{AD+BC}{2}\cdot CH = m\cdot CH = 10\cdot 4,2 = 42.$

Ответ: 42.

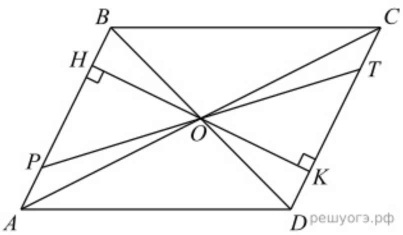
Примечание.

Можно не искать высоту трапеции, а заметить, что площади треугольников ABC и CDE равны, так как соответственно равны их основания BC и DE и высоты проведённые к этим основаниям. Тогда $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{CDE} + S_{ACD} = S_{ACE} = 42$.

24. Задание 24 № 340104

Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и T соответственно. Докажите, что $BP = DT$.

Решение.

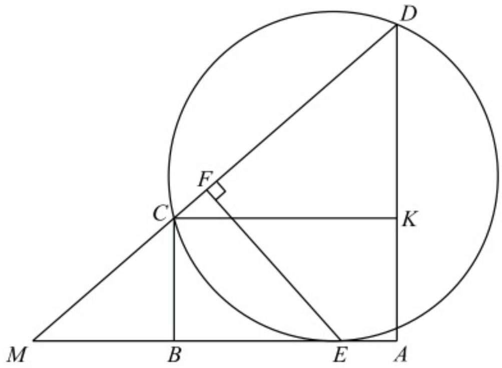


Проведём через точку O прямую HK, перпендикулярную стороне AB. Поскольку стороны AB и CD параллельны, HK также перпендикулярно и стороне CD. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Рассмотрим треугольники AOB и COD, BO равно OD, AO равно OC, углы AOB и COD равны как вертикальные, следовательно, треугольники равны. Поэтому равны их соответствующие элементы, то есть $OH = OK$. Рассмотрим треугольники OPH и OKT, они прямоугольные, OH равно OK, углы POH и KOT равны как вертикальные, следовательно, треугольники равны, поэтому OP равно OT. Рассмотрим треугольники BOP и TOD, OP равно OT, OB равно OD, углы POB и TOD равны как вертикальные, следовательно, данные треугольники равны, и $BP = DT$.

25. Задание 25 № 340129

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 14$, $BC = 12$.

Решение.



Проведём построения, как показано на рисунке. Расстояние от точки E до прямой CD — отрезок EF. Продолжим стороны AB и CD до пересечения в точке M, проведём отрезок CK, параллельный AB. Рассмотрим четырёхугольник $ABCK$ прямая BC параллельна AK, прямая AB параллельна прямой CK, угол BAK — прямой, следовательно, $ABCK$ — прямоугольник. Откуда $AB = KC$. Значит, $KD = AD - BC = 14 - 12 = 2$. Из прямоугольного треугольника CDK: $\cos\angle CDK = \dfrac{KD}{CD} = \dfrac{2}{CD}$. Рассмотрим треугольники MCB и CKD, они прямоугольные, углы DMA и DCK равны как соответственные углы при параллельных прямых, следовательно, эти треугольники подобны:

$$\frac{BC}{KD} = \frac{MC}{CD} \Leftrightarrow MC = CD\frac{BC}{KD} = CD\frac{12}{2} \Leftrightarrow MC = 6CD.$$

По теореме о касательной и секущей:

$$ME^2 = MD \cdot MC = (MC + CD) \cdot MC = (6CD + CD) \cdot 6CD = 42CD^2.$$

Откуда $ME = \sqrt{42CD^2} = CD\sqrt{42}$. Рассмотрим треугольники MEF и MAD, они прямоугольные, угол BMC — общий, следовательно, эти треугольники подобны. Значит, углы MEF и ADM равны, а значит, $\cos\angle MEF = \cos\angle ADM$. Найдём EF из прямоугольного треугольника MEF:

$$EF = ME\cos\angle MEF = ME\cos\angle ADM = \frac{2ME}{CD} = \frac{2CD\sqrt{42}}{CD} = 2\sqrt{42}.$$

Ответ: $2\sqrt{42}$.