Математическая вертикаль. Итоговая работа за 8 класс

28 сентября 2021 года. Продолжительность 120 минут

Ответы и решения. Вариант №1

Геометрия

Задача 1.
Ответ. **а) да; б) нет; в) нет; г) нет.**

Решение.

а) Центр вписанной окружности — точка, равноудаленная от всех сторон четырёугольника, лежит на всех биссектрисах.

б) Контрпримеров много, надо каждый проверять, например, подходит равнобокая трапеция.

в) Контрпримеров много различных, например, треугольники со сторонами 3, 4, 5 и 10, 7, 7. Первый прямоугольный, второй — нет, при этом периметр второго в два раза больше и треугольники не подобны. Обязательно обращайте внимание на существование треугольника (выполнение неравенства треугольника)!

г) В тупоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит снаружи.

Задача 2. [*Достаточно написать ответы*]
Ответ. **а) 10; б) 52.**

Решение.

а) Из теоремы Пифагора для треугольника ABH: $AB^2 = AH^2 + BH^2$, откуда $AB = 10$. $CD = AB = 10$ как противоположные стороны параллелограмма.

б) Заметим, что $\triangle ABD = \triangle CDB$, откуда $S_{CDB} = S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH = 52$.

Задача 3.
Ответ. **а)** $\angle BEA = 33°$**; б)** $EAC = 90°$**; в)** $\angle ECD = 39°$**.**

Решение.

а) $\angle BEA = \angle BCA = 33°$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.

б) $\angle EAC = 90°$, так как он вписанный и опирается на диаметр.

в) $\angle CED = \frac{1}{2} \smile CD = 51°$, $\angle EDC = 90°$, так как опирается на диаметр. По теореме о сумме углов для треугольника ECD получаем, что $\angle ECD = 39°$.

Задача 4.
Ответ. **а)** $\triangle ABC \sim \triangle PSC \sim \triangle PQR$**; б)** $AB = 10$, $PQ = 12$**; в)** $PC : AR = 2 : 9$

Решение.

б) Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle PSC$, откуда $\frac{AB}{PS} = \frac{BC}{SC} = \frac{15}{6}$, поэтому $AB = 10$. Аналогично $\triangle PQR \sim \triangle PSC$, откуда $\frac{QR}{CS} = \frac{PQ}{PS} = 3$ и $PQ = 12$.

в) Из отношения соответственных сторон в подобных треугольниках следует, что $\frac{PC}{AC} = \frac{2}{5}$, $\frac{PC}{PR} = \frac{1}{3}$. Пусть $PC = 2x$, тогда $AC = 5x$ и $PR = 6x$, откуда $AR = 9x$. Получаем: $PC : AR = 2 : 9$.

Алгебра

Задача 5. **Ответ**. **а) 4; б) -0,8**

Задача 6.
Ответ. **а) нет; б) нет; в) да; г) нет.**

Решение.

В пункте а надо проверять пример, подходят разные варианты, например $a = 1$, $b = -100$.

В пункте б можно подставить $x = -2$, для которого выполняется первое неравенство, но не выполняется второе.

Пункт в - верно написанная теорема Виета.

В пункте г любые ненулевые числа опровергают утверждение, например $a = b = 1$.

Задача 7. [2 балла]
Ответ. $[3; +\infty)$**, или, что то же самое,** $x \geqslant 3$**.**

Решение. $4x - 8 \leqslant 1 - 15 + 6x \quad \Leftrightarrow \quad -8 - 1 + 15 \leqslant 6x - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 6 \leqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2x \geqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 3$

Задача 8. [4 балла]
Ответ. **-6,6.**

Решение. Приведем к общему знаменателю и перевернем дробь за скобками:

$$\left(\frac{(x-2y)^2 - (x+2y)^2}{(x-2y)(x+2y)}\right) \cdot \frac{x^2 - 2xy}{4xy} = \frac{-8xy}{(x-2y)(x+2y)} \cdot \frac{x(x-2y)}{4xy} = \frac{-2x}{x+2y}.$$

Если $x = 3{,}3$ и $y = -1{,}15$, то $\frac{-2x}{x+2y} = -6{,}6$.

Задача 9. [4 балла]
Ответ. **3 украшения**

Решение. Пусть Игорь в час делает x украшений, тогда Катя делает $x + 4$ украшений. Игорь на изготовление 21 украшений тратит $\frac{21}{x}$ часов, Катя на изготовление 42 украшений тратит $\frac{42}{x+4}$ часов. Так как первое время на час больше второго, составим уравнение: $\frac{21}{x} = \frac{42}{x+4} + 1$, решаем уравнение и получаем $x = 3$ и $x = -28$. Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи.

Теория вероятностей и статистика

Задача 10.
Ответ. **а) 0,15; б) 0,88.**

Задача 11. [2 балла]
Ответ. $\frac{5}{36}$

Решение. Так как $8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2$, то из 36 вариантов выпадения кубиков ровно в пяти получается сумма равна 8, поэтому, вероятность равна $\frac{5}{36}$.

Задача 12.
Ответ. **а) на ребре SA 0,3; на ребре AB 0,8; на ребре DF 0,5. б) 5; в) 0,34.**

Решение. Вероятность наступления события C равна $0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$. Вероятность наступления события E равна $0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$. События C и E несовместны, поэтому вероятность их объединения равна 0,34.

Задача 13.
Ответ. **а) 1125; б) ноябрь.**

Решение. а) Посчитаем среднее арифметическое шести значений:
$\frac{1225 + 1350 + 1150 + 1275 + 1200 + 1300}{6} = \frac{7500}{6} = 1250$. Посчитаем 90% от 1250: $0{,}9 \cdot 1250 = 1125$.

Математическая вертикаль. Итоговая работа за 8 класс

28 сентября 2021 года. Продолжительность 120 минут

Ответы и решения. Вариант №2

Геометрия

Задача 1.
Ответ. **а) нет; б) да; в) нет; г) нет.**

Решение.

а) Контрпримеров верных можно привести много, например, четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, у которого одна диагональ делится пополам, а другая — нет, но угол между ними 90 градусов (по клеткам такой легко построить)

б) Центр описанной окружности – точка, равноудаленная от всех вершин, лежит на всех серединных перпендикулярах к сторонам.

в) Контрпримеров много различных, например, треугольники со сторонами 3, 4, 5 и 12, 12, 12. Первый прямоугольный, второй — равносторонний, при этом периметр второго в три раза больше, но треугольники не подобны. Обязательно обращайте внимание на существование треугольника (выполнение неравенства треугольника)!

г) В тупоугольном треугольнике точка пересечения высот лежит снаружи.

Задача 2. [*Достаточно написать ответы*]
Ответ. **а) 13; б) 120.**

Решение.

а) Из теоремы Пифагора для треугольника ABH: $AB^2 = AH^2 + BH^2$, откуда $AB = 13$. $CD = AB = 13$ как противоположные стороны параллелограмма.

б) Заметим, что $\triangle ABD = \triangle CDB$, откуда $S_{CDB} = S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH = 120$.

Задача 3.
Ответ. **а)** $\angle AEC = 90°$; **б)** $\angle DCE = 23°$; **в)** $\angle BAC = 36°$.

Решение.

а) $\angle AEC = 90°$, так как он вписанный и опирается на диаметр.

б) $\angle DCE = \angle DAE = 23°$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.

в) $\angle BCA = \frac{1}{2} \smile AB = 54°$, $\angle CBA = 90°$, так как опирается на диаметр. По теореме о сумме углов для треугольника ABC получаем, что $\angle BAC = 39°$.

Задача 4.
Ответ. **а)** $\triangle ABC \sim \triangle KNC \sim \triangle KLM$; **б)** $AB = 20$, $KL = 36$; **в)** $KC : AM = 3 : 14$

Решение.

б) Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle KNC$, откуда $\frac{AB}{KN} = \frac{BC}{NC} = \frac{15}{9}$, поэтому $AB = 20$. Аналогично $\triangle KNC \sim \triangle KLM$, откуда $\frac{LM}{NC} = \frac{KL}{KN} = 4$ и $KL = 36$.

в) Из отношения соответственных сторон в подобных треугольниках следует, что $\frac{KC}{AC} = \frac{3}{5}$, $\frac{KC}{KM} = \frac{1}{4}$. Пусть $KC = 3x$, тогда $AC = 5x$ и $KM = 12x$, откуда $AM = 14x$. Получаем: $KC : AM = 3 : 14$.

Алгебра

Задача 5.
Ответ. **а) 5; б) -0,7**

Задача 6.
Ответ. а) нет; б) да; в) нет; г) нет.

Решение.

В пункте а надо проверять пример, подходят разные варианты, например $a = 1$, $b = -100$.

Пункт б - верно написанная теорема Виета.

В пункте в можно подставить $x = 3$, для которого выполняется первое неравенство, но не выполняется второе.

В пункте г контрпримеров много, каждый отдельный нужно проверять, например, $x = 10$, $y = 6$.

Задача 7. [2 балла]
Ответ. $x \in [1; +\infty)$ **или** $x \geqslant 1$**.**

Решение. Раскроем скобки и перенесем все слагаемые с переменной в левую часть, а без – в правую: $2x - 10x \leqslant 1 - 15 + 6$, откуда $-8x \leqslant -8$ откуда $x \geqslant 1$.

Задача 8. [4 балла]
Ответ. 0,5

Решение. Приведем к общему знаменателю и перевернем дробь за скобками:
$$\left(\frac{(a+7b)^2-(a-7b)^2}{(a-7y)(a+7y)}\right)\cdot\frac{a^2-7ab}{14ab}=\frac{28ab}{(a-7b)(a+7b)}\cdot\frac{a(a-7b)}{14ab}=\frac{2a}{a+7b}.$$
Если $a = 2$ и $b = \frac{6}{7}$, то $\frac{2a}{a+7b} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Задача 9. [4 балла]
Ответ. 2

Решение. Пусть Володя в час делает x украшений, тогда Маша делает $x + 3$ украшений. Володя на изготовление 12 украшений тратит $\frac{12}{x}$ часов, Маша на изготовление 42 украшений тратит $\frac{10}{x+3}$ часов. Так как первое время на 4 часа больше второго, составим уравнение: $\frac{12}{x} = \frac{10}{x+3} + 4$, решаем уравнение, получаем $x = 2$ и $x = -\frac{9}{2}$. Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи.

Теория вероятностей и статистика

Задача 10.
Ответ. **а) 0,2; б) 0,96.**

Задача 11. [2 балла]

Ответ. $\dfrac{1}{9}$

Решение. Так как $9 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3$, то из 36 вариантов выпадения кубиков ровно в четырёх получается сумма равна 9, поэтому, вероятность равна $\dfrac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Задача 12.
Ответ. **а) на ребре SD 0,4; на ребре AB 0,8; на ребре DF 0,7. б) 5; в) 0,16.**

Решение. Вероятность наступления события C равна $0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$. Вероятность наступления события G равна $0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}04$. События C и G несовместны, поэтому вероятность их объединения равна 0,16.

Задача 13.
Ответ. **а) 1060; б) декабрь.**

Решение. а) Посчитаем среднее арифметическое шести значений:
$\dfrac{1225 + 1400 + 1275 + 1425 + 1250 + 1375}{6} = \frac{7950}{6} = 1325$. Посчитаем 80% от 1325: $0{,}8 \cdot 1325 = 1060$.