Математическая вертикаль. Итоговая работа за 7 класс

28 сентября 2021 года. Продолжительность 120 минут

Ответы и решения. Вариант №1

Геометрия

Задача 1. Если утверждение верно, напишите «ДА», иначе напишите «НЕТ» и **нарисуйте пример, опровергающий утверждение, отметив на картинке всё необходимое для понимания вашего примера**.

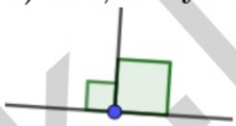
а) [1 балл] Из двух смежных углов один всегда больше другого.

б) [1 балл] Если площадь прямоугольника равна 30 см^2, то его периметр не может быть меньше, чем 26 см.

в) [1 балл] Каждый угол всякого треугольника меньше суммы двух других его углов.

г) [1 балл] Если медиана, проведённая к гипотенузе, и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны медиане, проведённой к гипотенузе, и катету другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники равны.

Ответ.
а) нет, могут быть два угла по 90°

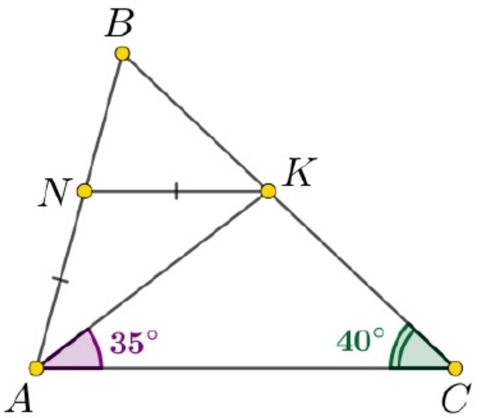


б) нет, например, прямоугольник 5×6 **см имеет периметр 22 см**
в) нет, например, треугольник с углами $150^\circ, 20^\circ, 10^\circ$
г) да

Задача 2. [*Достаточно написать ответы*] В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Известно, что $\angle CAB = 60^\circ$, $AH = 6$. Найдите:
а) [1 балл] $\angle ACH$; **б) [2 балла]** BH.

Ответ. **а) 30 градусов; б) 18.**

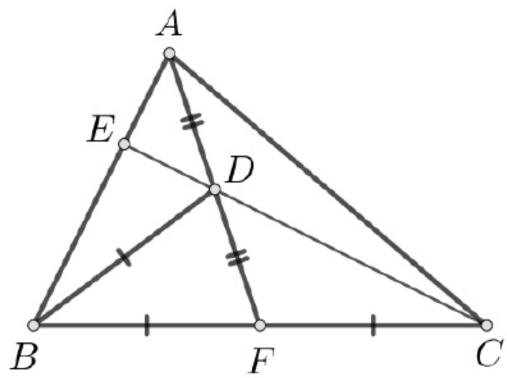
Задача 3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK и отмечена точка N на стороне AB такая, что $AN = NK$. Известно, что $\angle CAK = 35^\circ$, $\angle KCA = 40^\circ$.
а) [1 балл] Найдите угол AKC.
б) [1 балл] Найдите угол ANK.
в) [3 балла] Докажите, что отрезки NK и AC параллельны. [*Требуется полное решение, в том числе нужно обосновать результаты пунктов* (*а*) *или* (*б*), *если вы захотите их использовать*.]



Ответ. **а)** 105°**; б)** 110°

Решение. в) Поскольку AK — биссектриса, $\angle NAK = \angle KAC$, а $\triangle NAK$ р/б, т.к. $NK = NA$ по условию. Значит, $\angle NAK = \angle NKA$, то есть $\angle KAC = \angle NKA$, а это накрест лежащие углы при прямых NK и AC и секущей AK, значит, NK и AC параллельны. □

Задача 4. [6 баллов] AF — медиана треугольника ABC, D — середина отрезка AF, E — точка пересечения прямой CD со стороной AB. Оказалось, что $BD = BF$. Докажите, что $AE = DE$. [*Требуется полное решение*]



Решение. 1) $\angle BDF = \angle BFD$, т.к. $\triangle DBF$ р/б по условию.
2) Поэтому $\angle ADB = \angle DFC$ как смежные с равными углами.
3) Тогда $\triangle ADB = \triangle DFC$ по 1-му признаку, ведь по условию $AD = DF$, $BD = FC$ и углы между ними равны по п.(2).
4) Из равенства этих треугольников $\angle BAD = \angle CDF$.
5) А $\angle CDF = \angle ADE$ как вертикальные.
6) Значит, из (4) и (5) $\angle BAD = \angle ADE$, то есть $\triangle DEA$ равнобедренный и $DE = EA$, что и требовалось доказать.

Алгебра

Задача 5. [**1 балл**] Вычислите: $2^{14} : 2^7 - 2^6$. [*Достаточно написать ответ*]
Ответ. **64**

Задача 6. [**2 балла**] Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 16, \\ 3x - 2y = 56. \end{cases}$ [*Требуется полное решение*]

Ответ. **(18;-1)**
Решение. Сложим уравнения системы, получим: $4x = 72 \quad \Leftrightarrow \quad x = 18$. Тогда из 1-го уравнения $18 + 2y = 16 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = -2 \quad \Leftrightarrow \quad y = -1$.

Задача 7. [*Достаточно написать ответы*] Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:
а) [**1 балл**] $(2b - 3c)^2 =$ **Ответ**. $4b^2 - 12bc + 9c^2$
б) [**1 балл**] $6x^3(0{,}5x - y)(0{,}5x + y) =$ **Ответ**. $1{,}5x^5 - 6x^3y^2$
в) [**2 балла**] $(2a + 1)^2 - (2a + 1)^3 =$ **Ответ**. $-8a^3 - 8a^2 - 2a$

Задача 8. График некоторой линейной функции f пересекает оси координат в точках $A(2; 0)$ и $B(0; 4)$.
а) [**1 балл**] Постройте график этой функции f.
б) [**1 балл**] Найдите значение функции f при $x = 4$.
в) [**1 балл**] При каком значении аргумента значение функции f равно 5?
г) [**2 балла**] Задайте данную функцию f уравнением.
Ответ. **а) рис. б)** -4**; в)** $-0{,}5$**; г)** $y = 4 - 2x$**.**

Задача 9. Ниже даны несколько утверждений. Запишите «Да», если утверждение верно. Если утверждение неверно, запишите «Нет» и **приведите пример, опровергающий это утверждение.**

а) [**1 балл**] Если $a - b = 2$, то $a^3 - b^3 = 8$.

б) [**1 балл**] Значение линейной функции $y = 100 - 3x$ не может быть больше 100 ни при каких значениях аргумента.

в) [**1 балл**] Если значение выражения $x^2 - 16x + 64$ равно 9, то $x - 8 = 3$.

г) [**1 балл**] Для любых натуральных k и n верно равенство $(3^k)^n = 3^{kn}$.
Ответ. **а) Нет; б) нет; в) нет; г) да.**
Решение. а) Например, $a = 3$, $b = 1$, тогда $a - b = 2$, $a^3 - b^3 = 26 \neq 8$.
б) Например, при $x = -1$, $y = 103$.
в) Если $x = 5$, $x - 8 = -3$ и $x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2 = 9$. *Это единственный контрпример.*

Задача 10. [**4 балла**] Винни-Пух за час съедает на 4 блинчика больше, чем Кролик успевает испечь за час. Сначала Кролик 3 часа готовил блинчики в одиночестве, потом пришёл Винни и в течение ещё двух часов Кролик пёк блинчики, а Винни-Пух их ел. В результате осталось 100 блинчиков. Сколько блинчиков съел Пух? [*Требуется полное решение*]
Ответ. **80 блинчиков**
Решение. За последние два часа Винни-Пух съел на $4 \cdot 2 = 8$ блинчиков больше, чем Кролик испёк за это время. То есть осталось на 8 блинчиков меньше, чем Кролик успел испечь до прихода Пуха. Значит, за 3 часа Кролик испёк $100 + 8 = 108$ блинчиков. То есть за час Кролик печёт $108 : 3 = 36$ блинчиков. Тогда Винни за час ест $36 + 4 = 40$ блинчиков и за 2 часа он съел $40 \cdot 2 = 80$ блинчиков.
Во втором варианте приведён другой способ решения: с помощью уравнения.

Теория вероятностей и статистика

Задача 11. У Светы по алгебре стояли пять оценок: 3, 4, 5, 2, 4. Поэтому среднее арифметическое её оценок по алгебре было равно 3,6, а медиана её оценок по алгебре была равна 4. Затем Света взялась за алгебру и получила ещё 15 пятёрок.

а) [**1 балл**] Какой теперь стала медиана Светиных оценок по алгебре?
[*Достаточно написать ответ*]

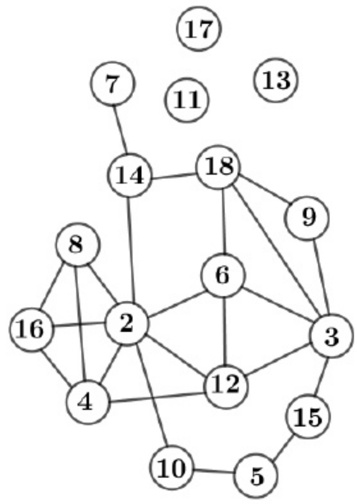
б) [**2 балла**] Каким теперь стало среднее арифметическое Светиных оценок по алгебре?
[*Требуется полное решение*]

Ответ. **а) 5; б) 4,65**

Решение. Сейчас у Светы 5 оценок, их сумма равна $3+4+5+2+4=18$, если Света получит ещё 15 пятёрок, всего будет 20 оценок, а сумма будет $18+5\cdot 15=93$. Тогда среднее равно

$$93:20=46{,}5:10=4{,}65.$$

Задача 12. [*Достаточно написать ответы*] Алёше нужно было нарисовать граф, вершины которого соответствуют натуральным числам от 2 до 18, в котором два числа соединены ребром, если одно из них делится на второе. Граф Алёши изображён справа. Алёша сделал две ошибки: одно ребро нарисовать забыл, но зато нарисовал одно лишнее ребро.



а) [**1 балл**] Сколько вершин в графе у Алёши?

б) [**1 балл**] Какие вершины соединяет лишнее ребро?

в) [**1 балл**] Какие ещё вершины нужно соединить ребром?

г) [**1 балл**] Существует ли в Алёшином графе путь, соединяющий вершины 15 и 16?

д) [**1 балл**] Из скольких рёбер состоит кратчайший путь в Алёшином графе, соединяющий вершины 4 и 15?

е) [**2 балла**] Предложите какой-либо способ расставить в ряд все натуральные числа от 2 до 18, кроме каких-то трёх, так, чтобы в каждой паре соседей одно из чисел делилось на другое.

Ответ. **а) 17; б) 14 и 18; в) 2 и 18; г) да; д) 3;**
е) всего 14 чисел, надо проверять, например, 7-14-2-10-5-15-3-9-18-6-12-4-16-8

Задача 13. В столице Швамбрании действуют платные парковочные зоны. Стоимость парковки зависит от длительности парковки, загруженности зоны, от времени суток и от дня недели. Перекресток улиц Нижняя и Верхняя находится на границе двух зон с разной почасовой оплатой. Неполный час оплачивается пропорционально длительности парковки. Помимо почасовой оплаты владелец автомобиля может приобрести абонемент на месяц или на год, позволяющий парковаться в выбранной парковочной зоне без дополнительной оплаты в течение того календарного месяца или года, на который приобретён абонемент. Тарифы и условия показаны в таблице.

Парковочная зона	Зона 1 (ул. Верхняя)	Зона 2 (ул. Нижняя)
Тариф «День» (пн - сб с 9.00 до 21.00)	20 швабров в час	5 швабров за первый час и 25 швабров за каждый последующий
Тариф «Ночь» (пн - сб с 21.00 до 9.00)	10 швабров в час	6 швабров в час
Тариф «Воскресный» (воскресенье на протяжении суток)	12 швабров в час	15 швабров в час
Месячный абонемент	5000 швабров	55 00 швабров
Годовой абонемент	45 000 швабров	50 000 швабров

Пример расчета: если владелец оставляет машину в зоне 1 на период с 20:00 субботы до 2 часов 15 минут ночи воскресенья, то он должен заплатить $20 + 10 \cdot 3 + 2{,}25 \cdot 12 = 77$ (швабров).

а) [**1 балл**] Джон живет за городом и держит машину в своем гараже, но зимой он почти месяц гостил у мамы, которая живет в столице на перекрестке Нижней и Верхней улицы. Он приехал 5 декабря и купил декабрьский месячный абонемент парковочной зоны 1, которым пользовался в течение декабря. В течение пятницы 31 декабря и всю новогоднюю ночь Джон никуда не ездил, а его машина оставалась на парковке в зоне 1. Утром 1 января в 10:30 Джон уехал за город, оплатив парковку по часам. Сколько денег в общей сложности Джон потратил на парковку возле маминого дома за январь и декабрь? [*Достаточно написать ответ*]

б) [**3 балла**] Сестра Джона, Алиса, приезжала к маме только на Новый год. Она приехала в 21:00 в пятницу 31 декабря и припарковалась в зоне 2, а уехала днём 1 января. Известно, что Алиса заплатила за парковку 157 швабров. В какое время 1 января она уехала?
[*Требуется полное решение*]

Ответ. **а) 5120 швабров; б) 13:12**

Решение. С 21:00 до 09:00 Алиса потратила $6 \cdot 12 = 72$ швабра, за час с 9:00 до 10:00 5 швабров. Итого 77 швабров. Пусть Алисина машина провела на парковке ещё x часов. Тогда всего она потратила $77 + 25x$ швабров, что по условию равно 157 швабров.

$$
\begin{aligned}
77 + 25x &= 157 \\
25x &= 157 - 77 \\
25x &= 80 \\
x &= \frac{80}{25} \\
x &= \frac{16}{5}
\end{aligned}
$$

$$3{,}2 \text{ часа} = 3 \text{ часа } 12 \text{ минут}$$

$$10{:}00 + 03{:}12 = 13{:}12$$

Во втором варианте приведён немного другой способ решения — без уравнения.

Математическая вертикаль. Итоговая работа за 7 класс

28 сентября 2021 года. Продолжительность 120 минут

Ответы и решения. Вариант №2

Геометрия

Задача 1. Если утверждение верно, напишите «ДА», иначе напишите «НЕТ» и **нарисуйте пример, опровергающий утверждение, отметив на картинке всё необходимое для понимания вашего примера**.

а) [1 балл] Биссектрисы вертикальных углов всегда лежат на одной прямой.

б) [1 балл] Если периметр прямоугольника равен 28 см, то его площадь не может быть больше, чем 45 см^2.

в) [1 балл] Не существует треугольника, в котором один из углов равен сумме двух других.

г) [1 балл] В треугольнике ABC с наибольшим углом при вершине C длина медианы CM всегда меньше половины длины стороны AB.

Ответ. **а) да; б) нет; в) нет; г) нет.**

Решение. а) б) например, периметр квадрата 7×7 см равен 28 см, а площадь равна 49 см^2.

в) Этим свойством обладают все прямоугольные треугольники (и только они).

г) Простой контрпример: треугольник с прямым углом C. Также подходит треугольник с острым углом C, при условии, что $\angle C$ больше каждого из углов $\angle A$ и $\angle B$. Треугольник с тупым углом C не может обладать указанным свойством.

Задача 2. [*Достаточно написать ответы*] В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Известно, что $\angle CAB = 30°$, $BH = 7$. Найдите:

а) [1 балл] $\angle ACH$; **б) [2 балла]** AH.

Ответ. **а)** $60°$**; б) 21.**

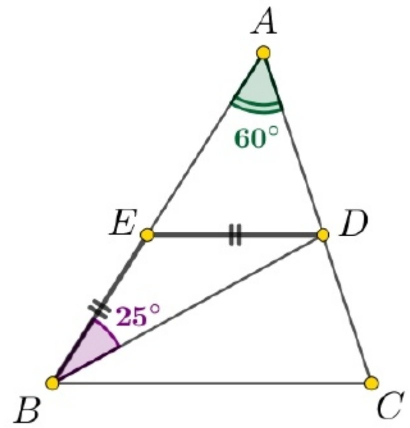
Задача 3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD и отмечена точка E на стороне AB такая, что $BE = DE$. Известно, что $\angle DBE = 25°$, $\angle DAE = 60°$.

а) [1 балл] Найдите угол BDA.

б) [1 балл] Найдите угол DEA.

в) [3 балла] Докажите, что отрезки DE и BC параллельны.

[*Требуется полное решение, в том числе нужно обосновать результаты пунктов (а) или (б), если вы захотите их использовать.*]



Ответ. **а)** $95°$**; б)** $50°$

Решение. в) 1) Поскольку AK — биссектриса, $\angle DBA = \angle DBC$, значит, $\angle ABC = 50°$.

2) $\triangle BED$ р/б, т.к. $BE = DE$ по условию. Значит, $\angle DBE = \angle BDE = 25°$, тогда $\angle DEA = 50°$ как внешний угол треугольника BED.

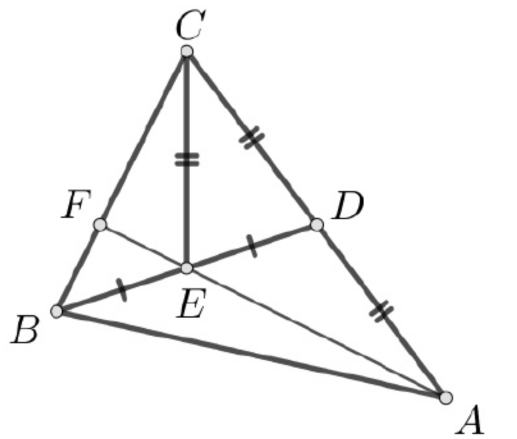
3) Значит, $\angle DEA = \angle CBA$, а это соответственные углы при прямых DE и BC и секущей BE, значит, DE и BC параллельны. □

В первом варианте приведён другой способ решения.

Задача 4. [6 баллов] BD — медиана треугольника ABC, E — середина отрезка BD, F — точка пересечения прямой AE со стороной BC. Оказалось, что $CD = CE$. Докажите, что $FB = FE$. [*Требуется полное решение*]

Решение. См. решение задачи 4 из первого варианта.

Указание: докажите равенство $\triangle BCE$ и $\triangle EAD$.



Алгебра

Задача 5. [**1 балл**] Вычислите: $3^8 : 3^4 - 3^3$. [*Достаточно написать ответ*]
Ответ. **54**

Задача 6. [**2 балла**] Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 20, \\ 4x - 3y = 58. \end{cases}$ [*Требуется полное решение*]

Ответ. **(13;-2)**
Решение. Сложим уравнения системы, получим: $6x = 78 \quad \Leftrightarrow \quad x = 13$. Тогда из 1-го уравнения $26 + 3y = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 3y = -6 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2$.

Задача 7. [*Достаточно написать ответы*] Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:
а) [**1 балл**] $(b - 4c)^2 =$ **Ответ**. $b^2 - 8bc + 16c^2$
б) [**1 балл**] $5x^3(0{,}2x - 2y)(0{,}2x + 2y) =$ **Ответ**. $0{,}2x^5 - 20x^3y^2$
в) [**2 балла**] $(1 - 3a)^3 - (1 - 3a)^2 =$ **Ответ**. $-27a^3 + 18a^2 - 3a$

Задача 8. График некоторой линейной функции f пересекает оси координат в точках $A(6; 0)$ и $B(0; 3)$.
а) [**1 балл**] Постройте график этой функции f.
б) [**1 балл**] Найдите значение функции f при $x = 2$.
в) [**1 балл**] При каком значении аргумента значение функции f равно 4?
г) [**2 балла**] Задайте данную функцию f уравнением.
Ответ. **а) рис. б) 2; в) -2; г)** $y = 3 - 0{,}5x$

Задача 9. Ниже даны несколько утверждений. Запишите «Да», если утверждение верно. Если утверждение неверно, запишите «Нет» и **приведите пример, опровергающий это утверждение.**
а) [**1 балл**] Если $a + b = -2$, то $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = -8$.
б) [**1 балл**] Значение линейной функции $y = 5x + 1000$ не может быть меньше 1000 ни при каких значениях аргумента.
в) [**1 балл**] Если значение выражения $4x^2 - 12x + 9$ равно 25, то $2x - 3 = 5$.
г) [**1 балл**] Для всех натуральных k верно равенство $5^k - 3^k = 2^k$.
Ответ. **а) да; б) нет; в) нет; г) нет.**
Решение. а)
б) Например, при $x = -20$, $y = 900$.
в) Если $x = -1$, то $2x - 3 = -5$ и $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 = 25$. *Это единственный контрпример.*
г) Например, при $k = 2$ получим $25 - 9 \neq 4$.

Задача 10. [**4 балла**] По вечерам Крош и Ёжик топят печку. Крош за час сжигает на 3 веточки больше, чем Ёжик успевает собрать за час. Днём Ёжик 6 часов собирал веточки, потом наступил вечер и пришёл Крош. В течение трёх часов Крош топил печку веточками, а Ёжик их собирал. В результате осталось 99 веточек. Сколько веточек в этот день сжёг Крош?
[*Требуется полное решение*]
Ответ. **63 веточки**
Решение. Пусть Ёжик за час собирает x веточек, тогда Крош сжигает $x + 3$ веточки в час. Ёжик собирал веточки в общей сложности 9 часов. Значит, он собрал $9x$ веточек. А Крош сжёг за 3 часа $3(x + 3)$ веточек. По условию у них осталось 99 веточек, поэтому:

$$9x - 3(x + 3) = 99$$
$$9x - 3x - 9 = 99$$
$$6x = 108$$
$$x = 18$$

Итак, ёжик за час собирает 18 веточек, тогда Крош за час сжигает 21 веточку, а за 3 часа — 63 веточки. *В первом варианте мы решили аналгичную задачу другим способом, без уравнения.*

Теория вероятностей и статистика

Задача 11. У Пети по алгебре стояли пять оценок: 2, 3, 2, 4, 3. Поэтому его средний балл по алгебре был равен 2,8, а медиана его оценок по алгебре была равна 3. К концу четверти Петя решил повысить свой средний балл и получил ещё 4 четвёрки и 6 пятёрок.

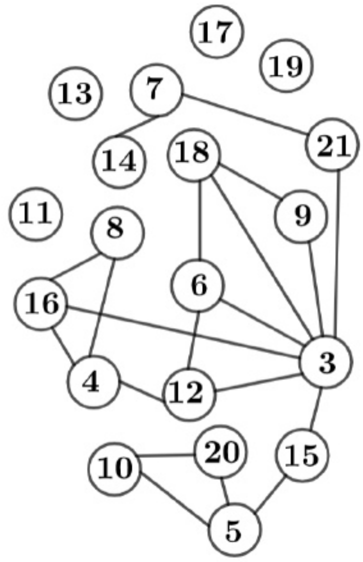
а) [**1 балл**] Какой теперь стала медиана оценок Пети по алгебре? [*Достаточно написать ответ*]

б) [**2 балла**] Каким теперь стало среднее арифметическое оценок Пети по алгебре? [*Требуется полное решение*]

Ответ. **а) 4; б) 4**

Решение. Сейчас у Пети 5 оценок, их сумма равна $2{,}8 \cdot 5 = 14$. Если Петя получит ещё 4 четвёрки и 6 пятёрок, всего будет 15 оценок, а сумма будет $14 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 60$. Тогда среднее равно $60 : 15 = 4$.

Задача 12. [*Достаточно написать ответы*] Артёму нужно было нарисовать граф, вершины которого соответствуют натуральным числам от 3 до 21, в котором два числа соединены ребром, если одно из них делится на второе. Граф Артёма изображён справа. Артём сделал две ошибки: одно ребро нарисовать забыл, но зато нарисовал одно лишнее ребро.



а) [**1 балл**] Сколько вершин в графе у Артёма?

б) [**1 балл**] Какие вершины соединяет лишнее ребро?

в) [**1 балл**] Какие ещё вершины нужно соединить ребром?

г) [**1 балл**] Существует ли в графе Артёма путь, соединяющий вершины 8 и 9?

д) [**1 балл**] Из скольких рёбер состоит кратчайший путь в графе Артёма, соединяющий вершины 10 и 9?

е) [**2 балла**] Предложите какой-либо способ расставить в ряд все натуральные числа от 3 до 21, кроме каких-то шести, так, чтобы в каждой паре соседей одно из чисел делилось на другое.

Ответ. **а) 19; б) 3 и 16; в) 4 и 20; г) да; д) 4;**
е) всего 13 чисел, надо проверять, например, 14-7-21-3-9-18-6-12-4-20-10-5-15 (точно должно не быть 11, 13, 17, 19 и 8, 16)

Задача 13. В столице Швамбрании действуют платные парковочные зоны. Стоимость парковки зависит от длительности парковки, загруженности зоны, от времени суток и от дня недели. Перекресток улиц Нижняя и Верхняя находится на границе двух зон с разной почасовой оплатой. Неполный час оплачивается пропорционально длительности парковки. Помимо почасовой оплаты владелец автомобиля может приобрести абонемент на месяц или на год, позволяющий парковаться в выбранной парковочной зоне без дополнительной оплаты в течение того календарного месяца или года, на который приобретён абонемент. Тарифы и условия показаны в таблице.

Парковочная зона	Зона 1 (ул. Верхняя)	Зона 2 (ул. Нижняя)
Тариф «День» (пн - сб с 9.00 до 21.00)	**24 швабра в час**	**5 швабров за первый час и 30 швабров за каждый последующий**
Тариф «Ночь» (пн - сб с 21.00 до 9.00)	**12 швабров в час**	**14 швабров в час**
Тариф «Воскресный» (воскресенье на протяжении суток)	**12 швабров в час**	**10 швабров в час**
Месячный абонемент	**6000 швабров**	**6500 швабров**
Годовой абонемент	**60 000 швабров**	**65 000 швабров**

Пример расчета: если владелец оставляет машину в зоне 1 на период с 19:00 субботы до 2 часов 30 минут ночи воскресенья, то он должен заплатить $24 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 2{,}5 \cdot 12 = 114$ (швабров).

а) [**1 балл**] Роберт живет за городом и держит машину в своём гараже, но зимой он почти месяц гостил у мамы, которая живет в столице на перекрестке Нижней и Верхней улицы. Он приехал 7 декабря и купил декабрьский месячный абонемент парковочной зоны 1, которым пользовался в течение декабря. В течение пятницы 31 декабря и всю новогоднюю ночь Роберт никуда не ездил, а его машина оставалась на парковке в зоне 1. Утром 1 января в 11:30 Роберт уехал за город, оплатив парковку по часам. Сколько денег в общей сложности Роберт потратил на парковку возле маминого дома за январь и декабрь? [*Достаточно написать ответ*]

б) [**3 балла**] Сестра Роберта, Кэтрин, приезжала к маме только на Новый год. Она приехала в 21:00 в пятницу 31 декабря и припарковалась в зоне 2, а уехала днём 1 января. Известно, что Кэтрин заплатила за парковку 278 швабров. В какое время 1 января она уехала? [*Требуется полное решение*]

Ответ. **а) 6168 швабров; б) 13:30**

Решение. С 21:00 до 09:00 Кэтрин заплатила $12 \cdot 14 = 168$ швабров. Значит, $278 - 168 = 110$ швабров Кэтрин заплатила с 09:00 до момента отъезда. За первый час она заплатила 5 швабров, значит, с 10:00 до момента отъезда она заплатила 105 швабров. Поскольку днём после первого часа действует тариф 30 швабров в час, она стояла ещё $105 : 30 = 3{,}5$ часа. Итак, $10{:}00 + 03{:}30 = 13{:}30$.

В первом варианте приведён немного другой способ решения — с использованием уравнения.