Вариант № 41054170

1. Задание 1 № 26669

Найдите корни уравнения: $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(x-7)}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \Leftrightarrow x-7 = \pm 1 + 6n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8+6n; \\ x = 6+6n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Значениям $n \geq 0$ соответствуют положительные корни.

Если $n=-1$, то $x=2$ и $x=0$.

Если $n=-2$, то $x=8-12=-4$ и $x=6-12=-6$.

Значениям $n \leq -3$ соответствуют меньшие значения корней.

Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -4.

Ответ: −4.

Ответ: -4

2. Задание 2 № 509412

У Вити в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Витя наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей.

Решение.

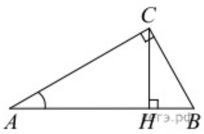
У Вити в копилке лежит 12+6+4+3=25 монет на сумму 12+12+20+30=74 рубля. Больше 70 рублей останется, если достать из копилки либо рублёвую, либо двухрублёвую монету. Искомая вероятность равна 18 : 25 = 0,72.

Ответ: 0,72.

Ответ: 0,72

3. Задание 3 № 27265

В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $AB=13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите AH.



Решение.

Имеем:

$$AH = AC\cos A = AB\cos^2 A = AB \cdot \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 A} = 13 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{25}} = 13 \cdot \frac{25}{26} = 12,5.$$

Ответ: 12,5.

Ответ: 12,5

4. Задание 4 № 26804

Найдите $p(x)+p(6-x)$, если $p(x)=\dfrac{x(6-x)}{x-3}$ при $x\neq 3$.

Решение.

Выполним преобразования:

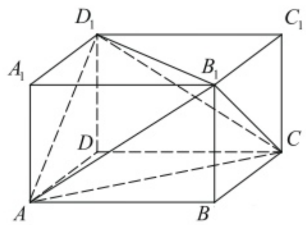
$$p(x)+p(6-x)=\frac{x(6-x)}{x-3}+\frac{(6-x)(6-(6-x))}{(6-x)-3}=\frac{x(6-x)}{x-3}+\frac{x(6-x)}{3-x}=\frac{x(6-x)}{x-3}-\frac{x(6-x)}{x-3}=0.$$

Ответ: 0.

Ответ: 0

5. Задание 5 № 27209

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Решение.

Искомый объем равен разности объемов параллелепипеда и четырех пирамид, основания которых являются гранями данной треугольной пирамиды. Объём каждой из этих пирамид равен одной трети произведения площади основания на высоту, а площадь основания вдвое меньше площади основания параллелепипеда:

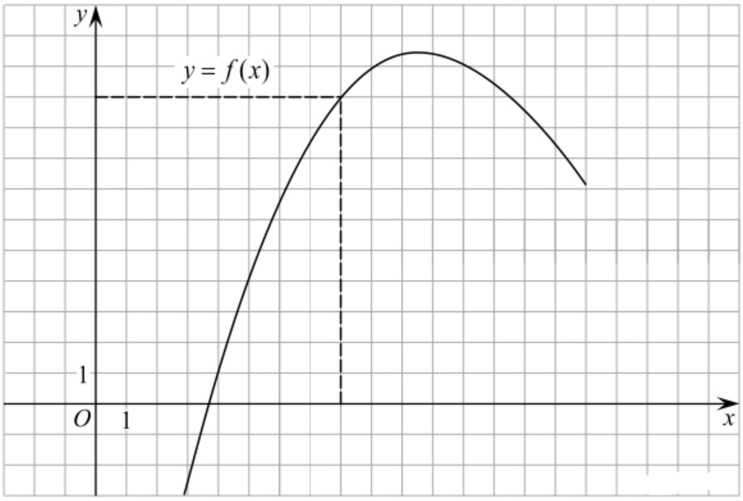
$$V_{\text{пир}}=V_{\text{пар}}-4\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot V_{\text{пар}}\right)=\frac{1}{3}V_{\text{пар}}=1,5.$$

Ответ: 1,5.

Ответ: 1,5

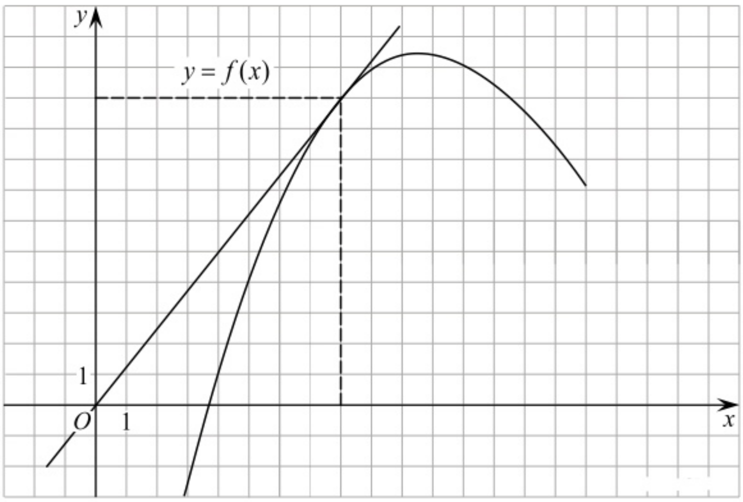
6. Задание 6 № 40129

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$.



Решение.

Поскольку касательная проходит через начало координат, её уравнение имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку (8;10), поэтому $10=8\cdot k$, откуда $k=1{,}25$. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: $f'(8) = 1{,}25$.



Ответ: 1,25.

Ответ: 1,25

7. Задание 7 № 27953

При температуре $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 10$м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ})$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}(^{\circ}\mathrm{C})^{-1}$— коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $l(t^{\circ}) - l_0 = 3$ мм при заданных значениях длины $l_0 = 10$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^{\circ}\mathrm{C})^{-1}$:

$$l(t^{\circ}) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0 \alpha t^{\circ} = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^{\circ} = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow t^{\circ} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow t^{\circ} = 25\ ^{\circ}\mathrm{C}.$$

Ответ: 25.

Ответ: 25

8. Задание 8 № 99597

Первый велосипедист выехал из поселка по шоссе со скоростью 15 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же поселка в том же направлении выехал второй велосипедист, а еще через час после этого – третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 часа 20 минут после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть υ км/ч – скорость третьего велосипедиста, а t ч – время, которое понадобилось ему, чтобы догнать второго велосипедиста. Таким образом,

$$\upsilon t = 10 \cdot (t+1) \Leftrightarrow \upsilon = \frac{10 \cdot (t+1)}{t}.$$

А через 2 часа 20 минут после этого догнал первого. Таким образом,

$$\upsilon \cdot \left(t + \frac{7}{3}\right) = 15 \cdot \left(t + \frac{7}{3} + 2\right) \Leftrightarrow \frac{10 \cdot (t+1) \cdot (3t+7)}{3t} = \frac{15}{3} \cdot (3t+13) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6t^2 + 20t + 14 = 9t^2 + 39t \Leftrightarrow 3t^2 + 19t - 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-19 + \sqrt{19^2 + 4 \cdot 3 \cdot 14}}{6} = \dfrac{2}{3}; \\ t = \dfrac{-19 - \sqrt{19^2 + 4 \cdot 3 \cdot 14}}{6} = -7 \end{array}\right. \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t = \frac{2}{3}.$$

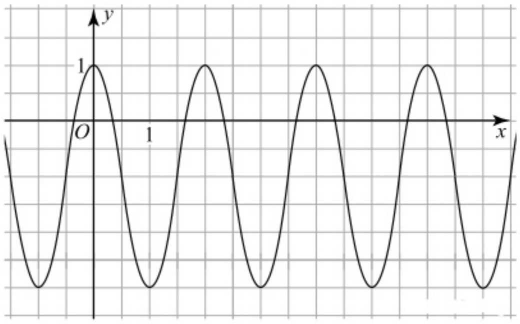
Таким образом, $\upsilon = \dfrac{10 \cdot \frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = 25.$

Ответ: 25.

Ответ: 25

9. Задание 9 № 564531

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a\cos(b\pi x + c) + d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите $f\left(\frac{100}{3}\right)$.



Решение.

По графику $f_{max} = 1$, $f_{min} = -3$, тогда $d = \frac{f_{max} + f_{min}}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$, и $|a| = \frac{f_{max} - f_{min}}{2} = \frac{1-(-3)}{2} = 2$.

По графику $f(0) = 1$, тогда, если $a = -2$, то

$$-2\cos c - 1 = 1 \Leftrightarrow \cos c = -1$$ — не имеет целочисленных решений,

если $a = 2$, то

$$2\cos c - 1 = 1 \Leftrightarrow \cos c = 1 \Leftrightarrow c = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \underset{c\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} c = 0.$$

Значит, $a = 2$ и $c = 0$.

Найдём наименьший положительный период функции $f(x) = 2\cos(b\pi x) - 1$:

$$2\cos(b\pi x) - 1 = 2\cos(b\pi x \pm 2\pi) - 1 = 2\cos\left(b\pi\left(x \pm \frac{2}{b}\right)\right) - 1$$

Наименьший положительный период функции $f(x)$ равен $\pm\frac{2}{b}$, а по графику наименьший положительный период равен 2, тогда $b = \pm 1$.

Таким образом, $f(x) = 2\cos(-\pi x) - 1 = 2\cos(\pi x) - 1$. Найдём $f\left(\frac{100}{3}\right)$.

$$f\left(\frac{100}{3}\right) = 2\cos\frac{100\pi}{3} - 1 = 2\cos\frac{4\pi}{3} - 1 = -2.$$

Ответ: −2.

Ответ: -2

10. Задание 10 № 320187

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем— 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

В ответе укажите наименьшее необходимое количество выстрелов.

Решение.

Найдем вероятность противоположного события, состоящего в том, что цель не будет уничтожена за *n* выстрелов. Вероятность промахнуться при первом выстреле равна 1−0,4=0,6, а при каждом следующем 1−0,6=0,4. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятности этих событий. Поэтому вероятность промахнуться при *n* выстрелах равна: $0,6 \cdot 0,4^{n-1}$.

Осталось найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$0,6 \cdot 0,4^{n-1} < 0,02 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} < \frac{1}{30}.$$

Последовательно проверяя значения n, равные 1, 2, 3 и т. д. находим, что искомым решением является $n = 5$. Следовательно, необходимо сделать 5 выстрелов.

Ответ: 5.

Примечание.

Можно решать задачу «по действиям», вычисляя вероятность уцелеть после ряда последовательных промахов:

$P(1) = 0,6$.
$P(2) = P(1) \cdot 0,4 = 0,24$.
$P(3) = P(2) \cdot 0,4 = 0,096$.
$P(4) = P(3) \cdot 0,4 = 0,0384$;
$P(5) = P(4) \cdot 0,4 = 0,01536$.

Последняя вероятность меньше 0,02, поэтому достаточно пяти выстрелов по мишени.

Приведем другое решение.

Вероятность поразить мишень равна сумме вероятностей поразить ее при первом, втором, третьем и т. д. выстрелах. Поэтому задача сводится к нахождению наименьшего натурального решения неравенства

$$0,4 + 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + \ldots + 0,6^2 \cdot 0,4^{n-2} \geq 0,98.$$

В нашем случае неравенство решается подбором, в общем случае понадобится формула суммы геометрической прогрессии, использование которой сведет задачу к простейшему логарифмическому неравенству.

Ответ: 5

11. Задание 11 № 315127

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^{x} + 3$ на отрезке $[1;2]$.

Решение.

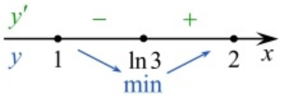
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2e^{2x} - 6e^{x} = 2e^{x}(e^{x} - 3).$$

Найдем нули производной:

$$2e^{x}(e^{x} - 3) = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3.$$

Отметим на рисунке нули производной и поведение функции на заданном отрезке:



Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является ее значение в точке минимума. Найдем его:

$$y(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 6e^{\ln 3} + 3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -6.$$

Ответ: −6.
Ответ: -6

12. **Задание 12 № 505308**

а) Решите уравнение $\sin 8\pi x+1=\cos 4\pi x+\sqrt{2}\cos\left(4\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2-\sqrt{7};\ \sqrt{7}-2\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin 4\pi x\cos 4\pi x+1=\cos 4\pi x+\sqrt{2}(\cos 4\pi x\cos\frac{\pi}{4}+\sin 4\pi x\sin\frac{\pi}{4})$$

$$2\sin 4\pi x\cos 4\pi x+1-2\cos 4\pi x-\sin 4\pi x=0$$

$$2\cos 4\pi x(\sin 4\pi x-1)-(\sin 4\pi x-1)=0$$

$$(2\cos 4\pi x-1)(\sin 4\pi x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\cos 4\pi x=1\\ \sin 4\pi x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\pi x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ 4\pi x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{1}{12}+\frac{n}{2}, n\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{1}{8}+\frac{k}{2}, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Ограничим каждое полученное решение из пункта «а» и решим эти неравенства:

1)

$$2-\sqrt{7}\le\frac{1}{12}+\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-2$$

$$\frac{23}{12}-\sqrt{7}\le\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-\frac{25}{12}$$

$$\frac{23}{6}-2\sqrt{7}\le n\le 2\sqrt{7}-\frac{25}{6}\Rightarrow n=-1,0,1\Rightarrow x=\frac{-5}{12},\frac{1}{12},\frac{7}{12}$$

2)

$$2-\sqrt{7}\le-\frac{1}{12}+\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-2$$

$$\frac{25}{12}-\sqrt{7}\le\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-\frac{23}{12}$$

$$\frac{25}{6}-2\sqrt{7}\le n\le 2\sqrt{7}-\frac{23}{6}\Rightarrow n=-1,0,1\Rightarrow x=-\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{5}{12}$$

3)

$$2-\sqrt{7}\le\frac{1}{8}+\frac{k}{2}\le\sqrt{7}-2$$

$$1.875-\sqrt{7}\le\frac{k}{2}\le\sqrt{7}-2.125$$

$$3.75-2\sqrt{7}\le k\le 2\sqrt{7}-4.25\Rightarrow k=-1,0,1\Rightarrow x=-\frac{3}{8},\frac{1}{8},\frac{5}{8}$$

Ответ: а) $\{x=\pm\frac{1}{12}+\frac{n}{2}, x=\frac{1}{8}+\frac{k}{2}: n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}\}$, б) $\pm\frac{5}{12},\pm\frac{1}{12},\pm\frac{7}{12},-\frac{3}{8},\frac{1}{8},\frac{5}{8}$.

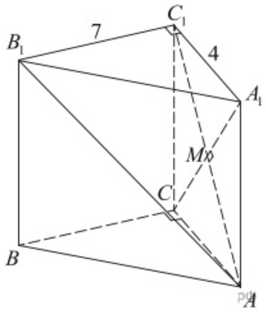
13. Задание 13 № 517563

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом.

а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 4$, $BC = 7$.

Решение.



а) Заметим, что $B_1C_1 \perp C_1A_1$ как катеты прямоугольного треугольника, и $B_1C_1 \perp C_1C$, поскольку призма прямая. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $B_1C_1 \perp ACA_1$. Кроме того, $A_1C \perp C_1A$ как диагонали квадрата. AB_1 − наклонная, AC_1 − ее проекция на плоскость ACA_1, A_1C − прямая в плоскости ACA_1, перпендикулярная проекции. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $AB_1 \perp CA_1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть M − середина AC_1. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки M до прямой AB_1, поскольку прямая A_1C перпендикулярна плоскости AB_1C_1. Это расстояние равно половине высоты прямоугольного треугольника AB_1C_1, проведённой к гипотенузе, то есть

$$d = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{2AB_1} = \frac{\sqrt{2}AC \cdot BC}{2\sqrt{2AC^2 + BC^2}} = \frac{14\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: б) $\frac{14\sqrt{2}}{9}$.

14. Задание 14 № 507254

Решите неравенство:

$$\log_3\frac{1}{x}+\log_3(x^2+3x-9)\le\log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right).$$

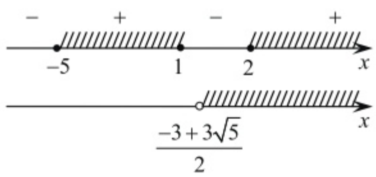
Решение.

Решим неравенство:

$$\log_3\frac{1}{x}+\log_3(x^2+3x-9)\le\log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3(x^2+3x-9)\le\log_3(x^3+3x^2+1-10x),\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x-9\le x^3+3x^2+1-10x,\\ x^2+3x-9>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x-9\le x^3+3x^2+1-10x,\\ \left[\begin{array}{l}x<\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2},\\ x>\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2},\end{array}\right.\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+2x^2-13x+10\ge0,\\ x>\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x^2+3x-10)\ge0,\\ x>\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\ge2.$$



Ответ: $[2;\ +\infty)$.

Примечание.

Чтобы не решать кубическое неравенство, можно подобрать подходящую группировку:

$$\log_3\frac{1}{x}+\log_3(x^2+3x-9)\le\log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}(x^2+3x-9)\le x^2+3x+\dfrac{1}{x}-10,\\ x>0,\ x^2+3x-9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}(x^2+3x-10)\le x^2+3x-10,\\ x>0,\ x^2+3x-9>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x-10\le x(x^2+3x-10),\\ x>0,\ x^2+3x-9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x^2+3x-10)\ge0,\\ x>0,\ x^2+3x-9>0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge2.$$

15. Задание 15 № 506958

Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

Решение.

Пусть сумма кредита S у.е., процентная ставка банка x %.

Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину» означает: Антон взятую сумму возвращал в банк равными долями. Сумма, образованная применением процентной ставки, составляет:

$$0,01xS+0,01x\cdot\frac{5S}{6}+0,01x\cdot\frac{4S}{6}+\ldots+0,01x\cdot\frac{2S}{6}+0,01x\cdot\frac{S}{6}=0,01Sx\cdot\left(1+\frac{5}{6}+\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=$$

$$=0,01Sx\cdot\frac{1+\frac{1}{6}}{2}\cdot 6=0,01Sx\cdot\frac{6+1}{2}=0,035Sx. \text{ (у.е.)}$$

Общая сумма, выплаченная Антоном за 6 месяцев: $S+0,035Sx=(1+0,035x)\cdot S$ (у.е.). А эта сумма по условию задачи равна $1,63S$ у.е. Решим уравнение:

$$(1+0,035x)S=1,63S\Leftrightarrow 1+0,035x=1,63\Leftrightarrow 0,035x=0,63\Leftrightarrow x=18.$$

Ответ: 18.

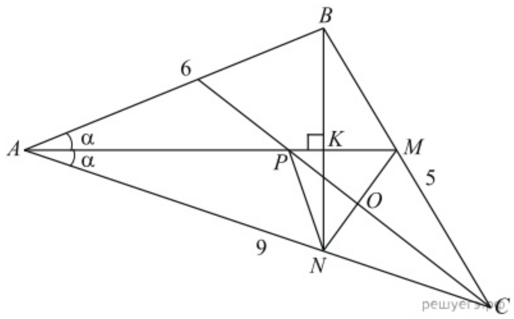
16. Задание 16 № 505501

В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N. $AB=6$; $BC=5$; $AC=9$.

а) докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам

б) пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP:PN$.

Решение.



а) Обозначим K точку пересечения отрезков AM и BN. Треугольник ABN равнобедренный, так как в нем AK является биссектрисой и высотой. Следовательно, AK является и медианой, то есть K— середина BN. Получаем, что $AN=AB=6$, откуда $NC=AC-AN=3$.

Рассмотрим треугольник ABC, биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $BM:MC=AB:AC$, учитывая, что длина BC равна 5, получаем: $BM=2$; $MC=3$.

В треугольнике MNC стороны NC и MC равны, следовательно, треугольник MNC — равнобедренный, с основанием MN. Значит, биссектриса угла C также является медианой и высотой. Таким образом, получаем, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

б) Рассмотрим треугольник PMN: отрезок PO перпендикулярен прямой MN и делит её пополам, следовательно, треугольник PMN — равнобедренный с основанием MN. Значит, $PM=PN$ и отношение $AP:PN=AP:PM$.

В треугольнике AMC отрезок CP — биссектриса, поэтому $AP:PM=AC:MC=3:1$.

Ответ: 3 : 1.

17. Задание 17 № 519477

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x+5)^2+y^2-a^2)\ln(9-x^2-y^2)=0, \\ ((x+5)^2+y^2-a^2)(x+y-a+5)=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

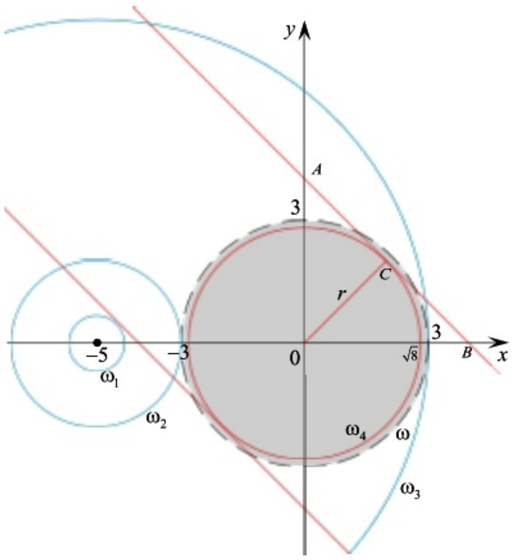
Заметим, что на области определения системы уравнений справедлива равносильность

$$\begin{cases} A\cdot B=0, \\ A\cdot C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0, \\ \begin{cases} B=0, \\ C=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда при условии существования логарифма $x^2+y^2<9$ имеем два случая:

$$(x+5)^2+y^2=a^2 \quad (1) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+y^2=8, \\ y=-x+(a-5). \end{cases} \quad (2)$$

Изобразим графики полученных уравнений и область определения — внутреннюю часть круга ω радиуса 3 с центром в начале координат (см. рис.) в одной системе координат. Определим, при каких значениях параметра уравнение (1) и система (2) совместно имеют ровно два решения, лежащие в области ω.



Рассмотрим уравнение (1). При $a=0$ уравнение $(x+5)^2+y^2=a^2$ имеет одно решение — пару (−5;0); точка (−5;0) не лежит в ω. При прочих значениях параметра уравнение имеет бесконечно много решений. Чтобы исходная система могла иметь ровно два решения, решения уравнения (1) должны лежать вне области определения системы: радиус окружности должен быть таким, что ни одна из ее точек не попадала в область ω. Находим (см. рис.): $|a|\le 2$ или $|a|\ge 8$.

Рассмотрим систему (2). Окружность, задаваемая первым уравнением, может иметь с прямой, задаваемой вторым уравнением, 0, 1 или 2 общие точки. Определим, какие значения параметра соответствуют касанию. Из равнобедренного прямоугольного треугольника AOC найдем

$$r=OC=AO\cdot\sin 45^\circ=\frac{|a-5|}{\sqrt{2}}=\sqrt{8},$$

откуда $a=1$ или $a=9$. Следовательно, при $1<a<9$ система имеет два решения. Оба они лежат в области ω.

Тем самым, при $(1;\ 2]\cup[8;\ 9)$ исходная система уравнений имеет ровно два решения.

Ответ: $(1;\ 2]\cup[8;\ 9)$.

18. Задание 18 № 502027

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Решение.

Пусть данное число равно $100a + 10b + c$, где a, b и c — цифры сотен, десятков и единиц соответственно. Если частное этого числа и суммы его цифр равно k, то выполнено $100a+10b+c=ka+kb+kc$.

а) Если частное равно 90, то $100a+10b+c=90a+90b+90c$; $10a=80b+89c$, что верно, например, при $c=0$, $b=1$, $a=8$ — частное числа 810 и суммы его цифр равно 90.

б) Если частное равно 88, то $100a+10b+c=88a+88b+88c \Leftrightarrow 12a=78b+87c \Leftrightarrow 4a=26b+29c$. Так как $a < 10$, то $b=0, c=1$ или $b=1, c=0$. В обоих этих случаях не существует натурального числа a, удовлетворяющего уравнению. Значит, частное трёхзначного числа и суммы его цифр не может быть равным 88.

в) Пусть k — наибольшее натуральное значение частного числа, не кратного 100, и суммы его цифр. Тогда

$$100a+10b+c=ka+kb+kc \Leftrightarrow (100-k)\,a=(k-10)\,b+(k-1)\,c.$$

Учитывая, что $b+c>0$, получаем:

$$9\,(100-k) \geq (100-k)\,a=(k-10)\,b+(k-1)\,c \geq (k-10)\,(b+c) \geq k-10,$$

откуда $9\,(100-k) \geq k-10 \Leftrightarrow 10k \leq 910 \Leftrightarrow k \leq 91$.

Частное числа 910 и суммы его цифр равно 91. Значит, наибольшее натуральное значение частного трёхзначного числа, не кратного 100, и суммы его цифр равно 91.

Ответ: а) да; б) нет; в) 91.