1

Найдите корень уравнения $\log_{27} 3^{5x+5} = 2$.

C62378

Источники:

FIPI (старый банк)
Пробный ЕГЭ 2018
Пробный ЕГЭ 2013
Основная волна (Резерв) 2013

$$27^2 = 3^{5x+5}$$
$$(3^3)^2 = 3^{5x+5}$$
$$3^6 = 3^{5x+5}$$
$$6 = 5x + 5$$
$$5x = 1$$
$$x = 0{,}2$$

Ответ: 0,2

2

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7. Результат округлите до тысячных.

4c90B4

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2018

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

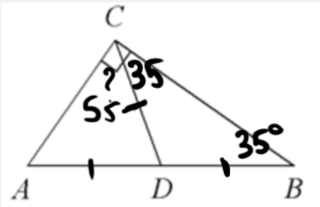
$$P = \frac{\cancel{6}}{\cancel{36}} = \frac{1}{6} = 0{,}1666 \approx 0{,}167$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \hline 6 & 0{,}1666 \\ 40 & \\ 36 & \\ 40 & \end{array}$$

Ответ: 0,167

3

В треугольнике ABC CD — медиана, угол C равен 90°, угол B равен 35°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.

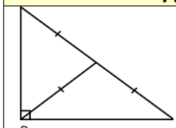


5B17F7

Источники:

FIPI (старый банк)

СВОЙСТВО МЕДИАНЫ



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Ответ: 5 5

4

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$ и $\alpha \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

BEF0CB

① $\left(-\frac{4\sqrt{41}}{41}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{16\cdot\cancel{41}}{41^{\cancel{2}}} + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = \frac{25}{41}$

~~$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$~~ $\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$

② $tg\alpha = \frac{-4\cancel{\sqrt{41}}\cdot\sqrt{41}}{\cancel{41}\cdot(-5)} = 0,8$

Источники:

FIPI (старый банк)

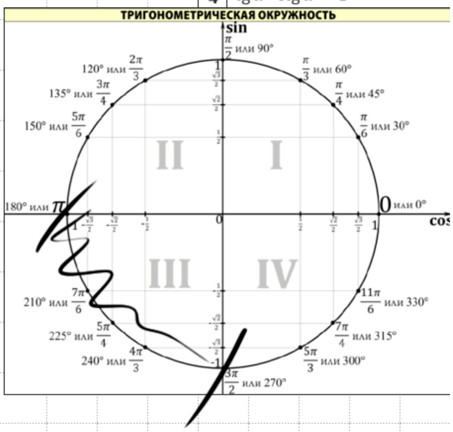
FIPI (новый банк)

Основная волна 2017

Основная волна 2013

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

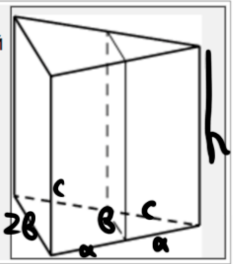
1	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2	$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
3	$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
4	$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$



Ответ: 0 , 8

5

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 37. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



AB1F5D

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Досрочная волна 2015

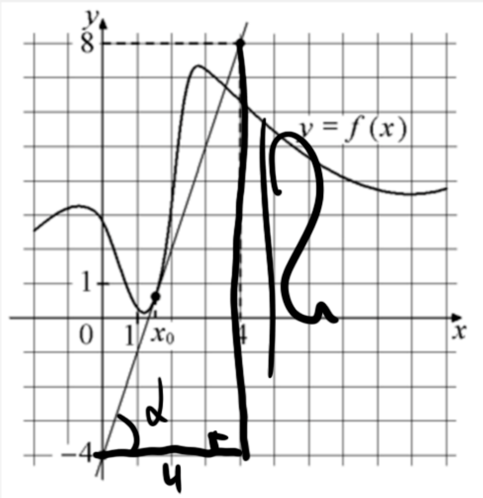
$S_{пов.\ мал} = ah + bh + ch = 37$

$S_{пов.\ бол.} = 2ah + 2bh + 2ch = 2 \cdot 37 = 74$

Ответ: 74

6

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



$f'(x_0) = tg\alpha$

$tg\alpha = 3$

56F47A

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2020
Досрочная волна 2017
Основная волна 2013

Ответ: 3

7

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 294,4 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

$\swarrow V_1$

$p_1 = 1$ P_2

F56EEF

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2019

$$1 \cdot 294{,}4^{1{,}4} = 128 \cdot V_2^{1{,}4}$$

$$V_2^{1{,}4} = \frac{294{,}4^{1{,}4}}{128}$$

$$V_2^{1{,}4} = \frac{294{,}4^{1{,}4}}{2^7} \quad \Big|\ ^5$$

$$V_2^{7} = \frac{294{,}4^{7}}{2^{35}} \quad \Big|\ ^{\frac{1}{7}}$$

$$V_2 = \frac{294{,}4}{2^5} = \frac{294{,}4}{32} = \ldots$$

$$\begin{array}{r|l} 2944 & 320 \\ \hline 2880 & 9{,}2 \\ \hline 640 & \end{array}$$

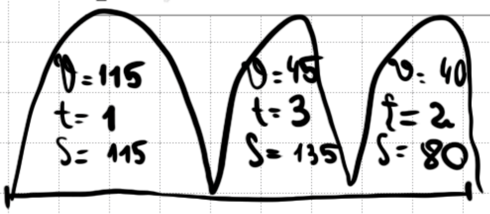
Ответ: 9,2

8

Первый час автомобиль ехал со скоростью 115 км/ч, следующие три часа — со скоростью 45 км/ч, а затем два часа — со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

081941

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2017

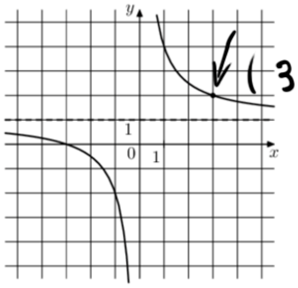


$$v_{cp} = \frac{115 + 135 + 80}{1 + 3 + 2} = \frac{330}{6} = 55$$

Ответ: 55

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(-12)$.

Источники:
Mathege



(3; 2)

$\uparrow$ $a = 1$

① $y = \frac{k}{x} + 1$

$2 = \frac{k}{3} + 1$

$1 = \frac{k}{3}$

$k = 3$

② $y = \frac{3}{x} + 1$

$f(-12) = \frac{3}{-12} + 1 = 0{,}75$

Ответ: 0,75

10 Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что 77% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Источники:
Только MATHEGE

P(Признаки болезни)

P(человек болен) = 0,77 · и P(система нашла больного) = 0,9 = 0,6930

P(человек здоров) = 0,23 · и P(система ошиблась) = 0,02 = 0,0046

0,6930 или + 0,0046

= 0,6976

Ответ: 0,6976

11

Введите ответ в поле ввода

Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(8x) - 8x + 7$$

на отрезке $\left[\frac{1}{16}; \frac{5}{16}\right]$.

Введите ответ

Номер: 5117 Статус задания: **НЕ РЕШЕНО** ОТВЕТИТЬ

Источники:

FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Пробный ЕГЭ 2016

	ПРОИЗВОДНЫЕ
1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$\big(U(V)\big)' = \big(U(V)\big)' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

① $y' = \frac{1\cdot\cancel{8}}{\cancel{8}x} - 8 = 0$

$\frac{1}{x} = 8$

$x = \frac{1}{8}$

② $y\left(\frac{1}{16}\right) = \dots$

$y\left(\frac{1}{8}\right) = \ln 1 - 8\cdot\frac{1}{8} + 7 = 6$

$y\left(\frac{5}{16}\right) = \dots$

ОТВЕТ: 6

12

а) Решите уравнение

$$4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos 2x + 3\cos x = 2\sqrt{3}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Источники:

Основная волна 2021

	ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА
1	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
2	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3	$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
4	$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

а) $4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cdot(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 2\sqrt{3} = 0$

$4\cos^3 x - 4\sqrt{3}\cos^2 x \cancel{+2\sqrt{3}} + 3\cos x \cancel{-2\sqrt{3}} = 0$

$\cos x \cdot (4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3) = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

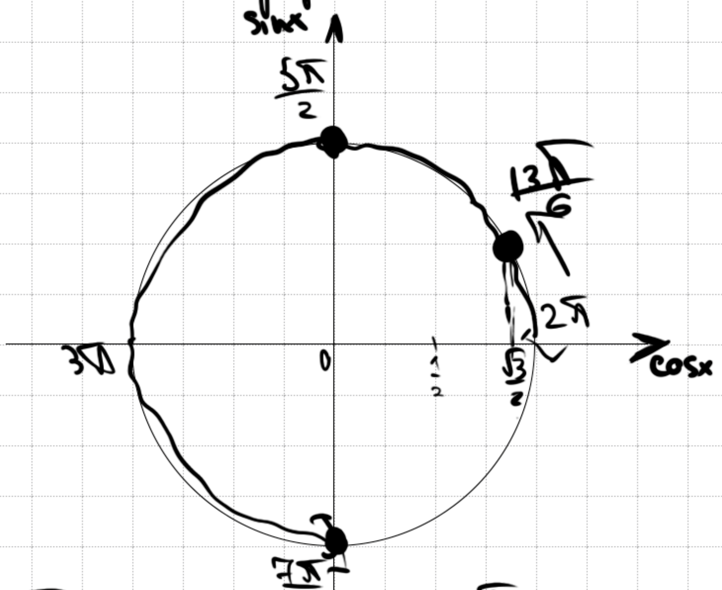
$4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$

$(2\cos x - \sqrt{3})^2 = 0$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим числа: $x = \frac{5\pi}{2}$

$x = \frac{7\pi}{2}$

$x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$

ОТВЕТ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$

б) $\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{13\pi}{6}$

13

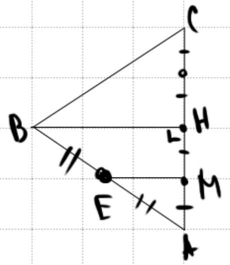
В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

F7B7A1

а) Пусть
E - середина AB
H - середина AC
Рассмотрим $\triangle ABC$:

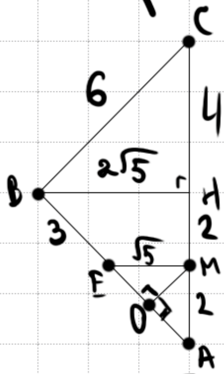


BH - высота и медиана $\triangle ABC$
EM - ср. линия $\triangle ABH$
$\Rightarrow EM \parallel BH$
$EM \perp AC$
$\Rightarrow$ KM (наклонная) $\perp AC$ (ТТП); проекция - EM

б) OK - проекция KM на (ABB_1)
$\Rightarrow \angle OKM$ - искомый

$\triangle MOK$ - прямоуг.
(т.к. $OM \perp AB$, $OM \perp AA_1$ $\Rightarrow OM \perp (ABB_1)$)

Рассмотрим $\triangle ABC$:



$\sin A = \frac{OM}{AM} = \frac{OM}{2}$

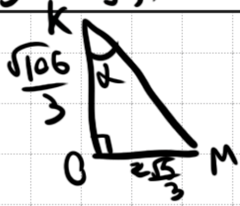
$\sin A = \frac{2\sqrt5}{AB} = \frac{2\sqrt5}{6}$

$\frac{OM}{2} = \frac{\sqrt5}{3}$

$OM = \frac{2\sqrt5}{3}$

$EO = \sqrt{\frac{5}{1} - \frac{4 \cdot 5}{9}} = \frac{5}{3}$

$KO = \sqrt{3^2 + \frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{106}}{3}$



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt5 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{106}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{530}}{\cancel{106}_{53}} = \frac{\sqrt{530}}{53}$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{530}}{53}\right)$

Источники:
FIPI (старый банк)
Ященко 2021 (10 вар)
Ященко 2020 (10 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2019 (14 вар)
СтатГрад 15.05.2020
СтатГрад 18.05.2017
СтатГрад 22.09.2016

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной (ТТП)

Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная наклонной, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость (Теорема, обратная ТТП)

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ (СПОСОБ #1)

Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость

14 Решите неравенство

$$2^x + \frac{2^{x+2}}{2^x-4} + \frac{4^x+7\cdot 2^x+20}{4^x-3\cdot 2^{x+2}+32} \le 1.$$

$2^x=t$

$4^x=(2^2)^x=(2^x)^2=t^2$

Источники:

Основная волна 2016

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Пусть $2^x=t$

$$\frac{t}{1}^{\backslash t^2-12t+32} + \frac{4\cdot t}{t-4}^{\backslash t-8} + \frac{t^2+7t+20}{t^2-12t+32}^{\backslash 1} - \frac{1}{1}^{\backslash t^2-12t+32} \le 0$$

$$\frac{t^3-12t^2+\cancel{32t}+4t^2-\cancel{32t}+\cancel{t^2}+7t+20-\cancel{t^2}+12t-32}{(t-4)(t-8)} \le 0$$

$$\frac{t^3-8t^2+19t-12}{(t-4)(t-8)} \le 0$$

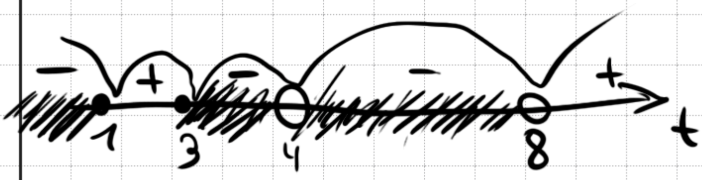
Заметим что $t=1$ является корнем числителя

$$\begin{array}{r|l} t^3-8t^2+19t-12 & t-1 \\ \hline -\;t^3-t^2 & t^2-7t+12 \\ -\;-7t^2+19t & \\ -7t^2+7t & \\ -\;12t-12 & \\ 12t-12 & \end{array}$$

Получаем:

$$\frac{(t-1)(t^2-7t+12)}{(t-4)(t-8)} \le 0$$

$$\frac{(t-1)(t-3)(t-4)}{(t-4)(t-8)} \le 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t\le 1 \\ 3\le t<4 \\ 4<t<8 \end{array}\right.$$

$2^x\le 1$ $\quad 2^x\le 2^0$ $\quad x\le 0$

$3\le 2^x<2^2$ $\quad 2^{\log_2 3}\le 2^x<2^2$ $\quad \log_2 3\le x<2$

$2^2<2^x<2^3$ $\quad 2<x<3$

Ответ: $(-\infty;0]\cup[\log_2 3;2)\cup(2;3)$

15

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца; $\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)$

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

4738D8

Источники:

- FIPI (старый банк)
- FIPI (новый банк)
- Ященко 2021 (10 вар)
- Ященко 2020 (10 вар)
- Ященко 2020 (14 вар)
- Ященко 2020 (36 вар)
- Ященко 2020 (36 вар)
- Ященко 2020 (50 вар)
- Ященко 2019 (36 вар)
- Ященко 2019 (50 вар)
- Ященко 2019 (14 вар)
- Ященко 2019 (36 вар)
- Ященко 2018 (20 вар)
- Ященко 2018 (30 вар)
- Ященко 2018
- Основная волна 2019
- Основная волна 2017
- Основная волна 2015

Пусть S – сумма кредита...

$\left(1+\frac{r}{100}\right)=a$

7 число – день платежа

Дата	Сумма долга
15 янв	S
1 мес: 1ч	Sa
7ч	$\Rightarrow$ была выплата $Sa-\frac{18}{19}S=\frac{19Sa-18S}{19}$
15ч	$\frac{18}{19}S$
2 мес: 1 ч	$\frac{18}{19}Sa$
7 ч	$\Rightarrow$ б.в. $\frac{18}{19}Sa-\frac{17}{19}S=\frac{18Sa-17S}{19}$
15 ч	$\frac{17}{19}S$
3 мес: 1 ч	$\frac{17}{19}Sa$
7 ч	$\Rightarrow$ б.в. $\frac{17}{19}Sa-\frac{16}{19}S=\frac{17Sa-16S}{19}$
15 ч	$\frac{16}{19}S$
Ответ:	3

18 ...

19 мес: 1 ч, 7 ч, 15 ч

$\frac{1S}{19}$

$\frac{1}{19}Sa$

$\Rightarrow$ б.в. $\frac{1}{19}Sa$

0

Выплаты образуют арифм. прогр., поэтому воспользуемся формулой:

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ	
1	$a_n=a_1+d\cdot(n-1)$
2	$S_n=\frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n$
3	$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$

$$\text{О.С.В.}=1{,}3\cdot S$$

$$\frac{\left(\frac{19Sa-18S}{\cancel{19}}+\frac{1}{\cancel{19}}Sa\right)}{2}\cdot\cancel{19}=1{,}3\cdot S$$

$$\frac{20\cancel{S}a-18\cancel{S}}{2}=1{,}3\cancel{S}$$

$$10a-9=1{,}3$$

$$10a=10{,}3$$

$$a=1{,}03$$

$$1+\frac{r}{100}=1{,}03$$

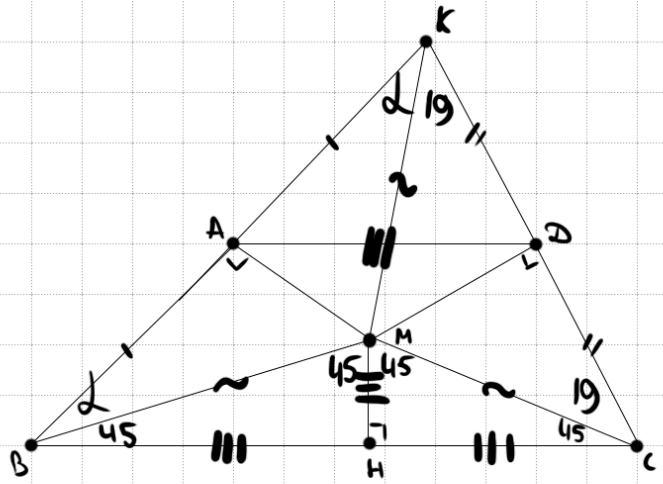
$$r=3\%$$

16

В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

а) Докажите, что $BM = CM$.
б) Найдите угол ABC, если угол BCD равен 64°, а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017



а) ① $AB \cap CD = K$
② AD - ср линия $\triangle BCK$
$\Rightarrow$ A - середина BK
D - середина CK
$\triangle BKM$ и $\triangle CKM$ - равнобедренные (т.к. AM и DM - высота-медиана)
$\Rightarrow BM = KM = CM$ ■

б) ① H - середина BC (т.к. MH - высота и медиана в р/б. тр.)
$\Rightarrow BH = CH = AD = HM$
② $\angle MCH = 45°$
$\angle MCK = 64 - 45 = 19$
$\angle HBM = 45$
Пусть $\angle MBA = \alpha = \angle AKM$
③ $\triangle BKC$:
$\alpha + 19 + 64 + 45 + \alpha = 180$
$2\alpha = 52$
$\alpha = 26$
$\angle ABC = 26 + 45 = 71$

Ответ: 71

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2+2x+y^2+4y=4|2x-y|,\\ x+2y=a\end{cases}$$

имеет более двух решений.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2015

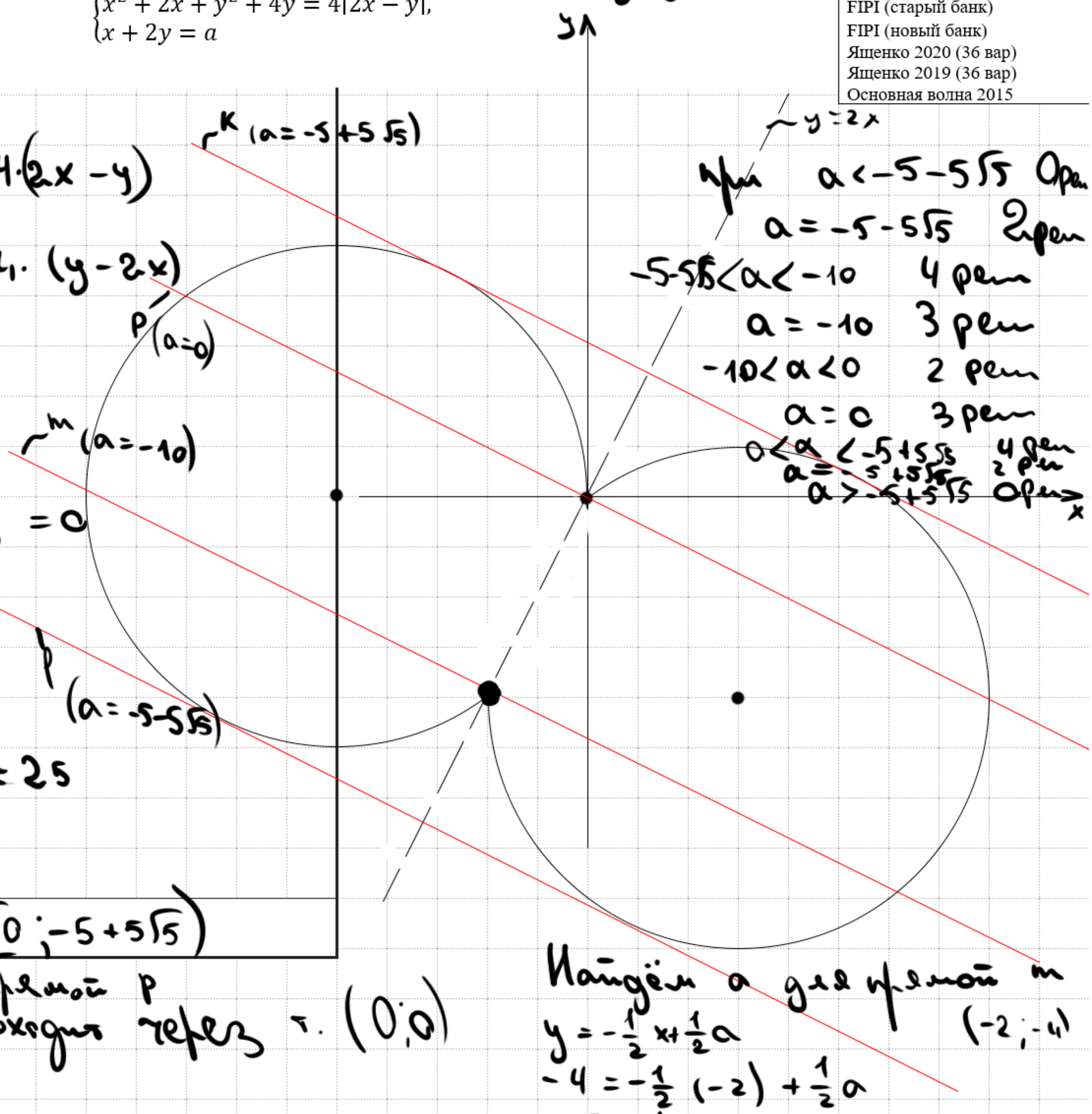
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-y\ge 0\\ x^2+2x+y^2+4y=4\cdot(2x-y)\end{cases}\\ \begin{cases}2x-y<0\\ x^2+2x+y^2+4y=4\cdot(y-2x)\end{cases}\end{array}\right.\\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\le 2x\\ x^2-6x+y^2+8y=0\end{cases}\\ \begin{cases}y>2x\\ x^2+10x+y^2=0\end{cases}\end{array}\right.\\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\le 2x\\ (x-3)^2+(y+4)^2=25\end{cases}\\ \begin{cases}y>2x\\ (x+5)^2+y^2=25\end{cases}\end{array}\right.\\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a\end{cases}$$

Ответ: $(-5-5\sqrt{5};-10]\cup[0;-5+5\sqrt{5})$



при $a<-5-5\sqrt{5}$ 0 реш
$a=-5-5\sqrt{5}$ 2 реш
$-5-5\sqrt{5}<a<-10$ 4 реш
$a=-10$ 3 реш
$-10<a<0$ 2 реш
$a=0$ 3 реш
$0<a<-5+5\sqrt{5}$ 4 реш
$a=-5+5\sqrt{5}$ 2 реш
$a>-5+5\sqrt{5}$ 0 реш

Найдём a для прямой p

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$ проходит через т. $(0;0)$

$0=0+\frac{1}{2}a$

$a=0$

Найдём a для прямой m $(-2;-4)$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$

$-4=-\frac{1}{2}(-2)+\frac{1}{2}a$

$-5=\frac{1}{2}a$

$a=-10$

Найдём a для прямых l и k:

$$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a\\ (x+5)^2+y^2=25\end{cases}$$

$(x+5)^2+\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}x\right)^2=25$

$x^2+10x+\cancel{25}+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{1}{4}x^2-\cancel{25}=0 \quad |\cdot 4$

$\frac{5}{4}x^2+\left(10-\frac{1}{2}a\right)\cdot x+\frac{1}{4}a^2=0$

$5x^2+(40-2a)\cdot x+a^2=0$

$D=0$

$(40-2a)^2-4\cdot 5\cdot a^2=0$

$1600-160a+4a^2-20a^2=0$

$16a^2+160a-1600=0$

$a^2+10a-100=0$

$D=100+400=(\sqrt{5}\,10)^2$

$a=\frac{-10\pm 10\sqrt{5}}{2}=-5\pm 5\sqrt{5}$

18

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2012

В театре число мальчиков $\le \frac{2}{11}$ числа посетивших театр
В кино число мальчиков $\le \frac{2}{5}$ числа посетивших кино

Нужно максимизировать количество девочек в театре и в кино

а) В группе 9 мальчиков и 11 девочек
Пусть все мальчики выбрали одно мер-тие
все девочки выбрали оба мер-тия

Если 4 мальчика было в театре, то $\frac{4}{15} \le \frac{2}{11}$ Неверно
Если 3 мальчика было в театре, то $\frac{3}{14} \le \frac{2}{11}$ неверно

Если 2 мальчика было в театре, то $\frac{2}{13} \le \frac{2}{11}$ Верно
$\Rightarrow$ мальчиков в театре ≤ 2
Если 7 мальчиков было в кино, то
$\frac{7}{18} \le \frac{2}{5}$ Верно
$\Rightarrow$ мальчиков в кино ≤ 7
$\Rightarrow$ Ответ: а) Да, 2 в театре и 7 в кино

Ответ:	а) Да
	б) 9
	в) $\frac{9}{17}$.

б) 9 мальчиков быть могло (см. а)
Пусть было 10 мальчиков
10 девочек
Если 3 мал. было в театре, то $\frac{3}{13} \le \frac{2}{11}$ Неверно
2 мал. было в театре, то $\frac{2}{12} \le \frac{2}{11}$ Верно
$\Rightarrow$ мальчиков в театре ≤ 2
Если 8 мальчиков было в кино, то
$\frac{8}{18} \le \frac{2}{5}$ неверно
Если 7 мал. было в кино, то
$\frac{7}{17} \le \frac{2}{5}$ Неверно
$\Rightarrow$ мальчиков в кино ≤ 6

Ответ: б) 9 $\Rightarrow$ Всего 10 мальчиков быть не может

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

$\left(\frac{d}{m_т + m_к + d}\right)_{наим} - ?$ Разделим на d

$$\left(\frac{1}{\frac{m_т}{d} + \frac{m_к}{d} + 1}\right)_{наим} = \frac{1}{\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 1} = \frac{9}{17}.$$

Найдём наибольшие значения $\frac{m_т}{d}$ и $\frac{m_к}{d}$

$\frac{m_т}{m_т + d} \le \frac{2}{11} \quad \Big| \cdot (m_т + d) \cdot 11$

$11 \cdot m_т \le 2m_т + 2d$
$9m_т \le 2d \quad \Big| : 9d$
$\frac{m_т}{d} \le \frac{2}{9}$

$\frac{m_к}{m_к + d} \le \frac{2}{5} \quad \Big| \cdot (m_к + d) \cdot 5$

$5 \cdot m_к \le 2m_к + 2d$
$3m_к \le 2d \quad \Big| : 3d$
$\frac{m_к}{d} \le \frac{2}{3}$
$\frac{m_к}{d} \le \frac{6}{9}$

Пример: 9 девочек
2 мал. - т
6 мал. - к
условие задачи вып-ся, доля девочек $\frac{9}{9+2+6} = \frac{9}{17}$.