Решение.

а) Сумма четырёх интересных чисел 791, 792, 793 и 794 равна 3170.

б) Рассмотрим четыре интересных числа, последние цифры которых равны a_1, a_2, a_3 и a_4 соответственно. Тогда две последние цифры суммы этих чисел совпадают с двумя последними цифрами суммы:

$$(90+a_1)+(90+a_2)+(90+a_3)+(90+a_4)=360+a_1+a_2+a_3+a_4.$$

Сумма $a_1+a_2+a_3+a_4$ может принимать любые целые значения от 0 до 36. Значит, две последние цифры суммы четырёх интересных чисел могут принимать любые целые значения от 60 до 96, и только такие значения. Следовательно, число 2121 нельзя представить в виде суммы четырёх интересных чисел.

в) Рассмотрим $n \le 10$ интересных чисел, последние цифры которых равны a_1, a_2, ..., a_n соответственно. Тогда две последние цифры суммы этих чисел совпадают с двумя последними цифрами суммы:

$$(90+a_1)+(90+a_2)+\ldots+(90+a_n)=90n+a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n$ может принимать любые целые значения от 0 до $9n$. Значит, две последние цифры суммы n интересных чисел могут принимать любые целые значения от $100-10n$ до $100-n$, и только такие значения.

Наименьшим решением неравенства $100-10n \le 21 \le 100-n$ является число 8. Следовательно, при $n \le 7$ число 2121 невозможно представить в виде суммы n интересных чисел.

Приведём пример, как представить 2121 в виде суммы восьми интересных чисел:

$$2121=90+90+90+90+90+90+90+1491.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение.

а) Рассмотрим прогрессию из четырёх членов: 128, 224, 392, 686. Она содержит число 686 и удовлетворяет условию задачи.

б) Предположим, что прогрессия содержит число 496. Отношение чисел 496 и 128 равно $\frac{31}{8}$. Это отношение нельзя представить в виде степени рационального числа с натуральным показателем, отличным от 1. Следовательно, знаменатель прогрессии равен $\frac{31}{8}$, а 496 — её второй член. В этом случае третий член прогрессии должен быть равен

$$\frac{31}{8}\cdot 496=1922,$$

но это противоречит тому, что прогрессия состоит из трёхзначных чисел.

в) Заметим, что $128=2^7$. Представим знаменатель прогрессии в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$.

Предположим, что прогрессия состоит из трёх чисел. Тогда её третий член равен

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot 128=\frac{a^2}{b^2}\cdot 2^7=2\cdot\left(\frac{8a}{b}\right)^2.$$

Это выражение достигает наибольшего значения, меньшего 1000, при наибольшем целом $\frac{8a}{b}$ таком, что $\left(\frac{8a}{b}\right)^2<\frac{1000}{2}=500$, то есть при $\frac{8a}{b}=22$. В этом случае третий член прогрессии равен 968.

Если прогрессия состоит из другого нечётного числа членов, то найдётся геометрическая прогрессия, состоящая из трёх членов, первый и последний члены которой совпадают с первым и последним членом исходной прогрессии, поэтому в этих случаях наибольший член прогрессии не превосходит 968.

Предположим, что прогрессия состоит из четырёх чисел. Тогда её четвёртый член равен

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot 128=\frac{a^3}{b^3}\cdot 2^7=2\cdot\left(\frac{4a}{b}\right)^3.$$

Это выражение достигает наибольшего значения, меньшего 1000, при наибольшем целом $\frac{4a}{b}$ таком, что $\left(\frac{4a}{b}\right)^3<\frac{1000}{2}=500$, то есть при $\frac{4a}{b}=7$. В этом случае четвёртый член прогрессии равен 686.

Предположим, что прогрессия состоит из шести чисел. Тогда её шестой член равен

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5\cdot 128=\frac{a^5}{b^5}\cdot 2^7=2^2\cdot\left(\frac{2a}{b}\right)^5.$$

Это выражение достигает наибольшего значения, меньшего 1000, при наибольшем целом $\frac{2a}{b}$ таком, что $\left(\frac{2a}{b}\right)^5<\frac{1000}{4}=250$, то есть при $\frac{2a}{b}=3$. В этом случае шестой член прогрессии равен 972.

Если в прогрессии восемь членов или больше, рассмотрим её восьмой член. Он равен

$$\left(\frac{a}{b}\right)^7\cdot 128=\left(\frac{2a}{b}\right)^7.$$

Заметим, что единственное трёхзначное число, являющееся седьмой степенью натурального числа, — это 128, то есть в этом случае прогрессия постоянна, а её наибольший член равен 128.

Таким образом, наибольшее число, являющееся членом такой прогрессии, равно 972.

Ответ: а) да; б) нет; в) 972.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение.

а) Рассмотрим трёхзначное число 102. Сумма его цифр равна 3, а отношение числа к этой сумме равно 34.

б) Обозначим первую цифру трёхзначного числа через a, вторую — через b, третью — через c. Тогда число равно $100a+10b+c$, а сумма его цифр $a+b+c$, откуда получаем:

$$100a+10b+c=84a+84b+84c;\ 16a=74b+83c.$$

Левая часть полученного равенства не превосходит 144, поскольку $a\le 9$. Следовательно, правая часть этого равенства не должна превосходить 144 и должна делиться на 16. При $b+c\ge 2$ правая часть больше 144, а для других значений b и c принимает значения 0, 74 и 83. Среди этих чисел только 0 делится на 16, но в этом случае число a должно равняться 0, что невозможно, поскольку исходное число трёхзначное. Таким образом, отношение не может быть равным 84.

в) Обозначим вторую цифру трёхзначного числа через b, а третью — через c. Тогда отношение числа к сумме его цифр равно

$$f(b;c)=\frac{400+10b+c}{4+b+c}.$$

Заметим, что

$$f(b;c)=10+\frac{9(40-c)}{4+b+c}.$$

Следовательно, при неотрицательных значениях b и c функция $f(b;c)$ убывает по каждому из аргументов. Для каждого значения $b+c$, начиная с наибольшего, будем искать однозначные числа b и c такие, чтобы $f(b;c)$ принимала целые значения.

Если $b+c=18$, то $f(18-c;c)=10+\dfrac{9(40-c)}{22}$ не принимает целых значений.

Если $b+c=17$, то $f(17-c;c)=10+\dfrac{9(40-c)}{21}$ принимает целое значение при $c=5$, но в этом случае $b=12$, что невозможно.

Если $b+c=16$, то $f(16-c;c)=10+\dfrac{9(40-c)}{20}$ принимает целое значение при $c=0$, но в этом случае $b=16$, что невозможно.

Если $b+c=15$, то $f(15-c;c)=10+\dfrac{9(40-c)}{19}$ принимает целое значение при $c=2$, но в этом случае $b=13$, что невозможно.

Если $b+c=14$, то $f(14-c;c)=10+\dfrac{9(40-c)}{18}$ принимает целое значение при чётных c, при этом наименьшее значение достигается при $c=8$ и $b=6$ и равно 26.

Если $b+c\le 13$, то $f(b;c)=10+\dfrac{9(40-c)}{4+b+c}\ge 10+\dfrac{9(40-9)}{4+13}>26$.

Таким образом, наименьшее значение искомого отношения равно 26 для числа 468 и суммы его цифр.

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение.

а) Сумма цифр числа 280 равна 10. Таким образом, произведение этого числа и суммы его цифр равно 2800.

б) Заметим, что $2491 = 47 \cdot 53$, причём 47 и 53 — простые числа. Сумма цифр трёхзначного числа не превосходит 27, следовательно, если для некоторого трёхзначного числа A выполняется равенство $A \cdot S = 2491$, то это число должно делиться и на 47, и на 53, что невозможно, поскольку это число трёхзначное. Таким образом, произведение не может быть равно 2491.

в) Заметим, что сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 9, как и само число. Следовательно, $A \cdot S$ даёт такой же остаток при делении на 9, как и S^2. Пусть $S = 9k + r$, где $0 \le r \le 8$. Тогда

$$S^2 = 81k^2 + 18kr + r^2 = 9\left(9k^2 + 2kr\right) + r^2,$$

то есть остаток от деления S^2 на 9 совпадает с остатком от деления r^2 на 9. Этот остаток может быть равен 0; 1; 4 или 7, поскольку r^2 принимает значения 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64. Таким образом, остаток от деления произведения $A \cdot S$ на 9 может быть равен 0; 1; 4 или 7.

Будем последовательно рассматривать числа, меньшие 5997, для которых остаток от деления на 9 равен 0; 1; 4 или 7.

Число 5995 даёт остаток 1 при делении на 9. Это число раскладывается в произведение простых множителей следующим образом: $5995 = 5 \cdot 11 \cdot 109$, а значит, его можно представить в виде произведения трёхзначного числа на какое-то другое число следующими способами:

$$5995 = 55 \cdot 109 = 11 \cdot 545.$$

Ни для какого из этих способов первый множитель не равен сумме цифр второго множителя.

Число 5994 даёт остаток 0 при делении на 9. Это число раскладывается в произведение простых множителей следующим образом: $5994 = 2 \cdot 3^4 \cdot 37$, а значит, его можно представить в виде произведения трёхзначного числа на какое-то другое число следующими способами:

$$5994 = 54 \cdot 111 = 37 \cdot 162 = 27 \cdot 222 = 18 \cdot 333 = 9 \cdot 666 = 6 \cdot 999.$$

Ни для какого из этих способов первый множитель не равен сумме цифр второго множителя.

Число 5992 даёт остаток 7 при делении на 9. Это число раскладывается в произведение простых множителей следующим образом: $5992 = 2^3 \cdot 7 \cdot 107$, а значит, его можно представить в виде произведения трёхзначного числа на какое-то другое число следующими способами:

$$5992 = 56 \cdot 107 = 28 \cdot 214 = 14 \cdot 428 = 8 \cdot 749 = 7 \cdot 856.$$

Сумма цифр трёхзначного числа $A = 428$ равна 14. Следовательно, для этого числа $A \cdot S = 5992$.

Таким образом, наибольшее значение произведения $A \cdot S$, меньшее 5997, равно 5992.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5992.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение.

а) Рассмотрим трёхзначное число 198. Сумма его цифр равна 18, а отношение числа к этой сумме равно 11.

б) Заметим, что сумма цифр трёхзначного числа не превосходит 27. Следовательно, если отношение такого числа к сумме его цифр равно 5, то это число не превосходит 135. Для таких чисел сумма цифр не превосходит 12, а значит, число не превосходит 60, то есть не является трёхзначным. Таким образом, отношение не может быть равным 5.

в) Обозначим вторую цифру трёхзначного числа через b, а третью — через c. Тогда отношение числа к сумме его цифр равно

$$f(b;c)=\frac{700+10b+c}{7+b+c}.$$

Заметим, что

$$f(b;c)=10+\frac{9(70-c)}{7+b+c}.$$

Следовательно, при неотрицательных значениях b и c функция $f(b;c)$ убывает по каждому из аргументов. Для каждого значения $b+c$, начиная с наименьшего, будем искать цифры b и c такие, чтобы $f(b;c)$ принимала целые значения.

Если $b+c=0$, то $b=c=0$, следовательно, число делится на 100, что противоречит условию.

Если $b+c=1$, то $f(1-c;c)=10+\dfrac{9(70-c)}{8}$ принимает целое значение при $c=6$, но в этом случае $b=-5$, что невозможно.

Если $b+c=2$, то $f(2-c;c)=10+\dfrac{9(70-c)}{9}$ принимает целые значения при любых c, при этом наибольшее значение достигается при $c=0$ и $b=2$ и равно 80.

Если $b+c\geq 3$, то $f(b;c)=10+\dfrac{9(70-c)}{7+b+c}\leq 10+\dfrac{9(70-0)}{7+3}=73<80$.

Таким образом, наибольшее значение искомого отношения равно 80 для числа 720 и суммы его цифр.

Ответ: а) да; б) нет; в) 80.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4