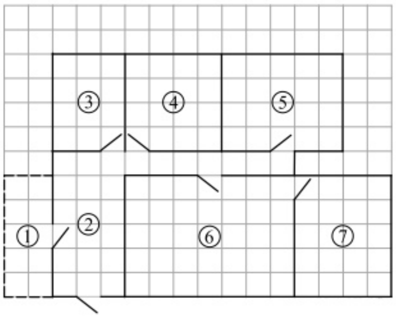
## Вариант № 37446031

### 1. Задание 1 № 366911

Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на схеме. Заполните таблицу, в ответ запишите последовательность четырёх цифр.

| Объекты | Балкон | Детская комната | Кабинет | Кухня |
|---|---|---|---|---|
| Цифры | | | | |




На плане изображена схема квартиры (сторона каждой клетки на схеме равна 1 м). Вход и выход осуществляются через единственную дверь.

При входе в квартиру расположен коридор, отмеченный цифрой 2. Слева от него расположен балкон. Перед входом в квартиру располагается совмещённый санузел, а справа от него — детская комната.

Гостиная занимает наибольшую площадь в квартире, из гостиной можно попасть в кабинет. В конце коридора находится кухня площадью 20 м$^2$.

Пол в гостиной планируется покрыть паркетной доской длиной 1 м и шириной 0,25 м.

В квартире проведены газопровод и электричество.

**Решение.**

При входе в квартиру расположен коридор, отмеченный цифрой 2. Слева от него расположен балкон. Значит, балкон отмечен цифрой 1. Перед входом в квартиру располагается совмещённый санузел, а справа от него— детская комната, следовательно, детская комната отмечена на схеме цифрой 4. Гостиная занимает наибольшую площадь в квартире, из гостиной можно попасть в кабинет, поэтому кабинет отмечен цифрой 7. В конце коридора находится кухня площадью 20 м$^2$, значит, кухня отмечена цифрой 5.

Ответ: 1475.
Ответ: 1475

### 2. Задание 2 № 366916

Паркетная доска продаётся в упаковках по 8 шт. Сколько упаковок с паркетной доской требуется купить, чтобы покрыть пол в гостиной?

**Решение.**

Заметим, что чтобы покрыть паркетной доской 1м $^2$ пола, требуется 4 доски. Найдём площадь гостиной:

$$7\cdot 5=35\text{ м}^2.$$

Значит, требуется 35·4=140 досок. Следовательно, требуется $\dfrac{140}{8}=17{,}5$ упаковок с паркетной доской. Таким образом, необходимо купить 18 упаковок.

Ответ: 18.
Ответ: 18

### 3. Задание 3 № 366917

Найдите площадь коридора (коридором считается площадь квартиры, незанятая комнатами или балконом). Ответ дайте в квадратных метрах.

**Решение.**

Сторона одной клетки равна 1 м. Значит, площадь коридора равна:

$$3\cdot 6+7\cdot 1=25\text{ м}^2.$$

Ответ: 25.
Ответ: 25

**4. Задание 4 № 366918**

Найдите расстояние между противоположными углами детской комнаты в метрах. Ответ запишите в виде $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

**Решение.**

Найдём расстояние между противоположными углами детской комнаты по теореме Пифагора:

$$\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}.$$

Таким образом, получаем ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4.$

Ответ: 4.

Ответ: 4

**5. Задание 5 № 366919**

Хозяин квартиры планирует установить в квартире плиту для готовки. Он рассматривает два варианта: газовая плита или электроплитка. Цены на плиты, данные о потреблении и тарифах оплаты даны в таблице.

| | **Цена** | **Сред. расход газа / сред. потребл. мощность** | **Стоимость газа / электро-энергии** |
|---|---|---|---|
| Газовая плита | 44 680 руб. | 1,4 куб. м/ч | 6 руб./куб. м |
| Электроплитка | 21 000 руб. | 5,8 кВт | 4 руб./(кВт·ч) |

Обдумав оба варианта, хозяин решил установить газовую плиту. Через сколько часов непрерывного использования экономия от использования газовой плиты вместо электрической компенсирует разность в стоимости установки газовой плиты и электроплитки?

**Решение.**

Разница в стоимости покупки газовой плиты и электроплитки равна 44680−21000=23680руб. Час использования газовой плиты стоит 1,4·6=8,4руб. Час использования электроплитки стоит 5,8·4=23,2руб. Разница в стоимости составляет 23,2−8,4=14,8руб. Значит, экономия от использования газовой плиты вместо электроплитки компенсирует разность в стоимости установки газовой и электрической плит через $\frac{23680}{14,8}=1600$ часов.

Ответ: 1600.

Ответ: 1600

**6. Задание 6 № 311234**

Найдите значение выражения $24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}$.

**Решение.**

Последовательно получаем:

$$24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}=24\cdot\frac{1}{4}+1=6+1=7.$$

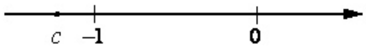
Ответ: 7.

Ответ: 7

**7. Задание 7 № 317600**

На координатной прямой отмечено число $c$. Расположите в порядке убывания числа $c,\ c^2$ и $\frac{1}{c}$.

*В ответе укажите номер правильного варианта.*




1) $c^2;\ c;\ \frac{1}{c}$

2) $c^2;\ \frac{1}{c};\ c$

3) $c;\ c^2;\ \frac{1}{c}$

4) $c;\ \frac{1}{c};\ c^2$

**Решение.**

Заметим, что $c < -1$, откуда следует, что $c^2 > 1, -1 < \frac{1}{c} < 0$. Таким образом, $c < \frac{1}{c} < c^2$.

Расположив числа по убыванию, получим последовательность $c^2;\ \frac{1}{c};\ c$.

Правильный ответ указан под номером: 2.

Ответ: 2

**8. Задание 8 № 350738**

Найдите значение выражения: $\frac{4x-25y}{2\sqrt{x}-5\sqrt{y}}-3\sqrt{y}$, если $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$

**Решение.**

Упростим выражение:

$$\frac{4x-25y}{2\sqrt{x}-5\sqrt{y}}-3\sqrt{y}=\frac{(2\sqrt{x}-5\sqrt{y})(2\sqrt{x}+5\sqrt{y})}{2\sqrt{x}-5\sqrt{y}}-3\sqrt{y}=2\sqrt{x}+5\sqrt{y}-3\sqrt{y}=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}=2(\sqrt{x}+\sqrt{y}).$$

По условию, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$, тогда $2(\sqrt{x}+\sqrt{y})=8$.

Ответ: 8

Ответ: 8

**9. Задание 9 № 311381**

Решите уравнение: $\frac{3}{x-19}=\frac{19}{x-3}$.

*Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.*

**Решение.**

Используем свойство пропорции.

$$\frac{3}{x-19}=\frac{19}{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 19, \\ x\neq 3, \\ 3(x-3)=19(x-19) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 19, \\ x\neq 3 \\ 16x=352 \end{cases} \Leftrightarrow x=22.$$

Ответ: 22.

Ответ: 22

**10. Задание 10 № 311391**

Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 15 до 29 делится на 5?

**Решение.**

Чисел от 15 до 29 — 15 штук. Среди них на 5 делится только 3 числа. Таким образом, вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 15 до 29 делится на 5 равна $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=0,2.$

Ответ: 0,2.

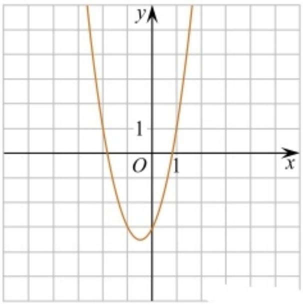
**Примечание.**

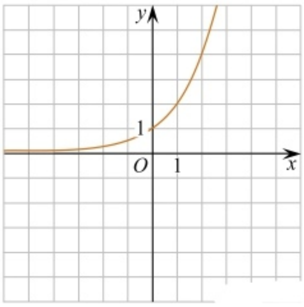
Фраза от «$M$ до $N$» подразумевает, что и $M$, и $N$ включаются в диапазон. Количество чисел в указанном диапазоне можно найти по формуле $N - M + 1$. Фраза «число делится на $k$» подразумевает, что число делится на $k$ без остатка. Такие соглашения используются в сборниках для подготовки к экзаменам во всех задачах подобного типа.

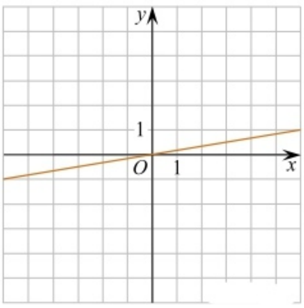
Ответ: 0,2

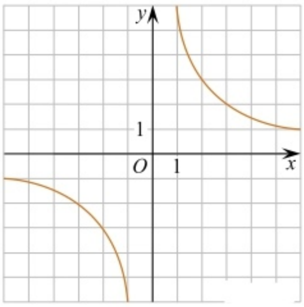
**11. Задание 11 № 193097**

На одном из рисунков изображена парабола. Укажите номер этого рисунка.

1)



2)



3)



4)



**Решение.**

Парабола изображена на рисунке 1.

Правильный ответ указан под номером 1.

Ответ: 1

**12. Задание 12 № 311530**

Площадь трапеции $S$ (в м$^2$) можно вычислить по формуле $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$, где $a$, $b$ — основания трапеции, $h$— высота (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите высоту $h$, если основания трапеции равны 5 м и 7 м, а её площадь 24 м$^2$.

**Решение.**

Выразим высоту трапеции из формулы площади:

$$h=\frac{2S}{a+b}.$$

Подставляя, получаем:

$$h=\frac{2S}{a+b}=\frac{48}{12}=4.$$

Ответ: 4.

**Приведём другое решение.**

Подставим в формулу известные значения величин:

$$\frac{5+7}{2}h=24\Leftrightarrow 6h=24\Leftrightarrow h=4 \text{ м}.$$

Ответ: 4

**13. Задание 13 № 338490**

При каких значениях $x$ значение выражения $9x+7$ меньше значения выражения $8x-3$?

*В ответе укажите номер правильного варианта.*

1) $x>4$
2) $x<4$
3) $x>-10$
4) $x<-10$

**Решение.**

Для ответа на вопрос задачи нужно решить неравенство $9x+7<8x-3$. Решим его:

$$9x+7<8x-3\Leftrightarrow x<-10.$$

Правильный ответ указан под номером: 4.

Ответ: 4

**14. Задание 14 № 394406**

Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют (из одного места) по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 метров больше его. Третий конькобежец пробегает то расстояние, который пробежал первый к моменту обгона его вторым, за время на $\frac{2}{3}$ мин больше, чем первый. Найдите скорость первого конькобежца в м/мин.

**Решение.**

Из условия видно, что скорость 2-го конькобежца наибольшая, а 3-го— наименьшая. Обозначим за $b$ скорость третьего конькобежца.

| | скорость (м/мин) |
|---|---|
| 1-й конькобежец | $qb$ |
| 2-й конькобежец | $q^2b$ |
| 3-й конькобежец | $b$ |

Где $q>1$, $b>0$, $t$ — время, за которое второй обгоняет первого.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} t(q^2b-qb)=400, \\ tqb=\left(t+\frac{2}{3}\right)\cdot b \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} tqb(q-1)=400, \text{ (1)} \\ t(q-1)=\frac{2}{3}. \text{ (2)} \end{cases}$$

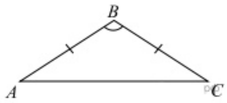
Разделим (1) на (2): $qb=\frac{400\cdot 3}{2}=600$ м/мин — скорость первого конькобежца.

Ответ: 600 м/мин.

Ответ: 600

**15. Задание 15 № 348593**

В треугольнике $ABC$ известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 108°$. Найдите угол $BCA$. Ответ дайте в градусах.



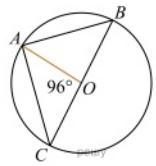

**Решение.**

Треугольник $ABC$ - равнобедренный, следовательно, $\angle BAC = \angle BCA = \dfrac{180° - 108°}{2} = 36°$

Ответ: 36
Ответ: 36

**16. Задание 16 № 311354**

Найдите градусную меру $\angle ACB$, если известно, что $BC$ является диаметром окружности, а градусная мера центрального $\angle AOC$ равна 96°.




**Решение.**
Так как $\angle AOC$ и $\angle AOB$ — смежные, $\angle AOB = 180° - \angle AOC = 84°$. Центральный угол равен дуге, на которую он опирается, поэтому градусная мера дуги $AB$ равна 84°. Угол $ACB$ — вписанный и равен половине дуги, на которую опирается, поэтому $\angle ACB = 42°$.

Ответ: 42.

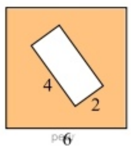
**Приведем решение Артура Ахметьянова.**
Треугольник $AOC$ равнобедренный, поскольку $AO = OC$ как радиусы окружности, тогда

$$\angle ACB = \angle ACO = \frac{180° - \angle AOC}{2} = \frac{180° - 96°}{2} = 42°.$$

Ответ: 42

**17. Задание 17 № 322861**

Из квадрата вырезали прямоугольник (см. рисунок). Найдите площадь получившейся фигуры.

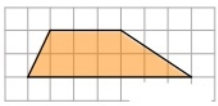



**Решение.**
Площадь получившейся фигуры равна разности площадей квадрата и прямоугольника: $6 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 28$.

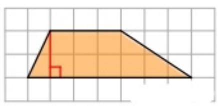
Ответ: 28.
Ответ: 28

**18. Задание 18 № 348613**

На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



**Решение.**
Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Таким образом,



$$S = \frac{1}{2} \cdot (3 + 7) \cdot 2 = 10$$

Ответ: 10.
Ответ: 10

**19. Задание 19 № 341358**

Какие из следующих утверждений верны?

1) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов.
2) В тупоугольном треугольнике все углы тупые.
3) Средняя линия трапеции равна полусумме её оснований.

*Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.*

**Решение.**

Проверим каждое из утверждений.

1) «Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов» — *верно*, для того, чтобы существовал треугольник, сумма любых его двух сторон должна быть больше третьей стороны.

2) «В тупоугольном треугольнике все углы тупые» — *неверно*: в тупоугольном треугольнике один тупой и два острых угла.

3) «Средняя линия трапеции равна полусумме её оснований» — *верно*.

Ответ: 13.

Ответ: 13

**20. Задание 20 № 311546**

Один из корней уравнения $3x^2+5x+2m=0$ равен $-1$. Найдите второй корень.

**Решение.**

Подставим известный корень в уравнение: $3-5+2m=0$. Получим уравнение относительно $m$. Решим его: $2m=2;\ m=1$. Подставим $m$ в уравнение: $3x^2+5x+2=0$, откуда

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot2}}{6}=\frac{-5\pm1}{6},\ x_1=-1,\ x_2=-\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

**21. Задание 21 № 311615**

Железнодорожный состав длиной в 1 км прошёл бы мимо столба за 1 мин., а через туннель (от входа локомотива до выхода последнего вагона) при той же скорости— за 3 мин. Какова длина туннеля (в км)?

**Решение.**

Поезд проходит через туннель за 3 минуты, при этом за одну минуту поезд проходит мимо выхода из туннеля, следовательно, от входа локомотива в туннель до выхода проходит 2 минуты. Мимо столба поезд длиной 1 км проходит за 1 минуту, поэтому его скорость равна 1 км/мин. Значит, за 2 минуты поезд пройдет 2 км, поэтому длина туннеля равна 2 км.

Ответ: 2.

**22. Задание 22 № 311967**

Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x^3-y}{x^2+1}-\frac{x^2y-x}{x^2+1}$, если $x$ и $y$ связаны соотношением $y=x^2+x-4$.

**Решение.**

Преобразуем выражение:

$$\frac{x^3-y}{x^2+1}-\frac{x^2y-x}{x^2+1}=\frac{x^3-y-x^2y+x}{x^2+1}=\frac{(x-y)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x-y.$$

С учётом дополнительного условия выражение принимает вид

$$x-x^2-x+4=4-x^2.$$

Полученное выражение не превосходит 4 и достигает наибольшего значения 4 при $x=0$.

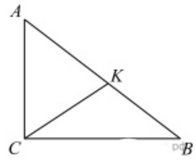
Ответ: 4.

**23. Задание 23 №** 50

В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ известны катеты: $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану $CK$ этого треугольника.

**Решение.**

Медиана, проведенная к гипотенузе, равна её половине:




$$CK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5.$$

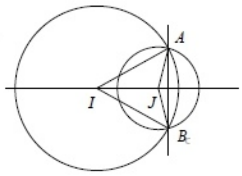
Ответ: 5.

**24. Задание 24 №** 341422

Окружности с центрами в точках $I$ и $J$ пересекаются в точках $A$ и $B$, причём точки $I$ и $J$ лежат по одну сторону от прямой $AB$. Докажите, что отрезки $AB$ и $IJ$ перпендикулярны.

**Решение.**

Точка $I$ равноудалена от $A$ и $B$, поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$. То же можно сказать и о $J$. Значит, $IJ$ — серединный перпендикуляр к $AB$.




**25. Задание 25 №** 339675

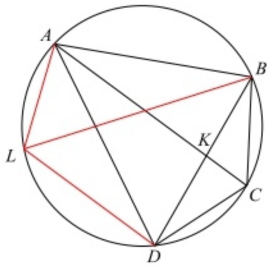
Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $K$, причём $\angle AKB = 60°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

**Решение.**

Проведём через точку $D$ прямую, параллельную диагонали $AC$. Дуги $AL$ и $CD$ равны, следовательно, равны и стягивающие их хорды: $AL = CD = 16$.

Вертикальные углы $AKB$ и $CKD$ равны. Углы $CKD$ и $LDK$ равны как накрест лежащие: $\angle CKD = \angle LDK = 60^\circ$.

Четырёхугольник $ABDL$ вписан в окружность, сумма его противолежащих углов равна $180°$: $\angle LAB = 180^\circ - \angle LDK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.




Рассмотрим треугольник $ABL$. По теореме косинусов

$$BL = \sqrt{AL^2 + AB^2 - 2AL \cdot AB\cos 120^\circ} = \sqrt{256 + 625 - 2 \cdot 16 \cdot 25 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{1281}.$$

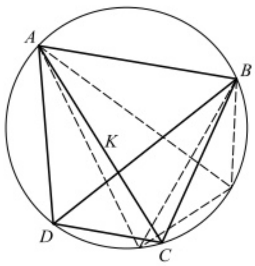
Найдём радиус описанной вокруг треугольника $ABL$ окружности по теореме синусов:

$$R = \frac{BL}{2\sin\angle BAL} = \frac{\sqrt{1281}}{2\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{1281}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{1281}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1281}{3}} = \sqrt{427}.$$

Ответ: $\sqrt{427}$.

**Приведём другое решение.**

Передвинем хорду $CD$ так, чтобы она стала параллельна стороне $AB$ (см. рисунок). Заметим, что при таком движении угол $AKB$ остаётся равен $60°$, поскольку он равен полусумме дуг $AB$ и $CD$. Параллельные прямые отсекают равные дуги, поэтому дуги $AD$ и $BC$ равны. Углы $ACD$ и $BDC$ равны, как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги. Таким образом, треугольник $KDC$ — равнобедренный:




$$\angle KDC = \angle KCD = (180^\circ - 60^\circ)/2 = 60^\circ.$$

Все углы треугольника $KDC$ равны $60°$, следовательно, треугольник $KDC$ — равносторонний, значит, $KD = KC = CD = 16$. Аналогично можно показать, что треугольник $AKB$ — равносторонний, откуда $AK = BK = AB = 25$.

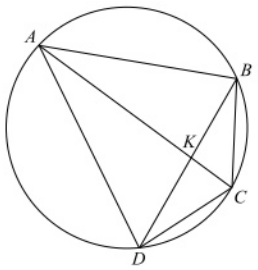
В треугольнике $BDC$ находим $BD = BK + KD = 25 + 16 = 41$. По теореме косинусов:

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2 - 2 \cdot BD \cdot CD\cos\angle BDC} = \sqrt{41^2 + 16^2 - 2 \cdot 41 \cdot 16\cos 60^\circ} = \sqrt{1281}.$$

По теореме синусов: $R = \dfrac{BC}{2\sin\angle BDC} = \dfrac{\sqrt{1281}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1281}{3}} = \sqrt{427}.$

**Приведём другое решение.**

Рассмотрим треугольник $BKC$, сумма углов треугольника равна $180^\circ$: $\angle CBD + \angle BCA + \angle CKB = 180^\circ$. Углы $AKB$ и $CKB$ являются смежными, следовательно, $\angle CKB = 180^\circ - \angle AKB$, откуда:




$$\angle CBD + \angle BCA + \angle CKB = 180^\circ \Leftrightarrow \angle CBD + \angle BCA + 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \angle CBD + \angle BCA = \angle AKB \Leftrightarrow \angle CBD + \angle BCA = 60^\circ.$$

Пусть $R$ — радиус описанной окружности, угол $BCA$ обозначим как $\alpha$. Рассмотрим треугольник $BCA$, он вписан в окружность, следовательно, по теореме синусов:

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle BCA} \Leftrightarrow AB = 2R\sin\angle BCA.$$

Аналогично, из треугольника $CBD$:

$$CD = 2R\sin\angle CBD \Leftrightarrow 2R\sin(60^\circ - \angle\alpha) \Leftrightarrow 2R\sin 60^\circ\cos\alpha - \cos 60^\circ\sin\alpha = 2R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right).$$

Разделим $CD$ на $AB$:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{16}{25} = \frac{\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Откуда:

$$32\sin\alpha = 25\sqrt{3}\cos\alpha - 25\sin\alpha \Leftrightarrow 57\sin\alpha = 25\sqrt{3}\cos\alpha \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{57}{25\sqrt{3}}.$$

Найдём $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{57^2}{25^2\cdot 3}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{57\cdot 19}{625}}} = \sqrt{\frac{625}{1708}} = \frac{25}{2\sqrt{427}}.$$

Таким образом, радиус описанной окружности равен:

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle\alpha} = \frac{25}{2\cdot\frac{25}{2\sqrt{427}}} = \sqrt{427}.$$

**Приведем еще одно решение.**

Углы $ABD$ и $ACD$ равны, поскольку опираются на одну дугу. Пусть $\alpha = \angle ABD = \angle ACD$.
В треугольнике $KCD$ по теореме синусов

$$\frac{CD}{\sin\angle CKD} = \frac{KD}{\sin\alpha} \;\Leftrightarrow\; KD = \frac{CD\cdot\sin\alpha}{\sin 60^\circ}.$$

В треугольнике $ABK$ по теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin\angle AKB} = \frac{AK}{\sin\alpha} \;\Leftrightarrow\; AK = \frac{AB\cdot\sin\alpha}{\sin 60^\circ}.$$

В треугольнике $AKD$ по теореме косинусов

$$AD^2 = KD^2 + AK^2 - 2\cdot AK\cdot KD\cdot\cos\angle AKD;$$
$$AD^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot CD^2\cdot\sin^2\alpha + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot AB^2\cdot\sin^2\alpha - 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot AB\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot CD\cdot\sin^2\alpha\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sin^2\alpha\cdot\left(CD^2 + AB^2 + AB\cdot CD\right).$$

В треугольнике $ACD$ по теореме синусов

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R \;\Leftrightarrow\; R = \frac{AD}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}\sin^2\alpha\cdot(CD^2 + AB^2 + AB\cdot CD)}}{2\sin\alpha} = \sqrt{\frac{16^2 + 25^2 + 16\cdot 25}{3}} = \sqrt{427}.$$