18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2-a}=\sqrt{y^2+1-a},\\ x^2+y^2=8x+6y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Заметим, что при $y^2<a-1$ правая часть первого уравнения системы не определена, а при $y^2\geq a-1$ первое уравнение системы принимает вид:

$$x^2+y^2-a=y^2+1-a;\ x^2=1,$$

откуда $x=1$ или $x=-1$.

При $x=1$ второе уравнение системы принимает вид:

$$1+y^2=8+6y;\ y^2-6y-7=0,$$

откуда $y=-1$ или $y=7$.

При $x=-1$ второе уравнение системы принимает вид:

$$1+y^2=-8+6y;\ y^2-6y+9=0,$$

откуда $y=3$.

Таким образом, решениями исходной системы являются пары чисел $(1;-1)$, $(1;7)$, $(-1;3)$, для которых выполнено условие $y^2\geq a-1$.

Для пары $(1;-1)$ условие $y^2\geq a-1$ принимает вид $a\leq 2$.

Для пары $(1;7)$ условие $y^2\geq a-1$ принимает вид $a\leq 50$.

Для пары $(-1;3)$ условие $y^2\geq a-1$ принимает вид $a\leq 10$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $2<a\leq 10$.

Ответ: $2<a\leq 10$

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|a-2|\cdot x^4-2ax^2+|a-12|=0$$

имеет хотя бы два различных корня.

Решение.

Пусть $t=x^2$, тогда исходное уравнение имеет хотя бы два различных корня тогда и только тогда, когда уравнение $|a-2|\cdot t^2-2at+|a-12|=0$ имеет хотя бы один положительный корень.

При $a=2$ уравнение принимает вид $-4t+10=0$ и имеет единственный корень $t=\frac{5}{2}$.

При $a\neq 2$ дискриминант D квадратного уравнения $|a-2|\cdot t^2-2at+|a-12|=0$ равен $4a^2-4|a-2|\cdot|a-12|$.

При $2<a\leq 12$ получаем:

$$D=4a^2+4(a-2)(a-12)=8a^2-56a+96=8(a-3)(a-4),$$

то есть уравнение имеет хотя бы один корень при $2<a\leq 3$ и $4\leq a\leq 12$.

При $a<2$ и $a>12$ получаем:

$$D=4a^2-4(a-2)(a-12)=56a-96=8(7a-12),$$

то есть уравнение имеет хотя бы один корень при $\frac{12}{7}\leq a<2$ и $a>12$.

Таким образом, квадратное уравнение $|a-2|\cdot t^2-2at+|a-12|=0$ имеет корни при $\frac{12}{7}\leq a<2$, $2<a\leq 3$ и $a\geq 4$.

При $\frac{12}{7}\leq a<2$, $2<a\leq 3$ и $a\geq 4$ выражение $|a-2|\cdot t^2-2at+|a-12|$ достигает наименьшего значения при $t=\frac{a}{|a-2|}>0$. Следовательно, если уравнение $|a-2|\cdot t^2-2at+|a-12|=0$ имеет хотя бы один корень, то хотя бы один из корней положительный.

Таким образом, исходное уравнение имеет хотя бы два различных корня при $\frac{12}{7}\leq a\leq 3$ и $a\geq 4$.

Ответ: $\frac{12}{7}\leq a\leq 3$; $a\geq 4$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-a^2\right|=|x+a|\cdot\sqrt{x+a^2-2a}$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению:

$$|x+a|\cdot|x-a|=|x+a|\cdot\sqrt{x+a^2-2a};\ |x+a|\cdot\left(|x-a|-\sqrt{x+a^2-2a}\right)=0.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $|x+a|=0$ при условии $x+a^2-2a\geq 0$. Получаем: $x=-a$.

Условие принимает вид $a^2-3a\geq 0$, откуда $a\leq 0$; $a\geq 3$.

Второй случай: $|x-a|-\sqrt{x+a^2-2a}=0$. Получаем:

$$|x-a|=\sqrt{x+a^2-2a};\ x^2-2ax+a^2=x+a^2-2a;\ x^2-(2a+1)x+2a=0,$$

откуда $x=1$; $x=2a$.

Корни $x=-a$ и $x=1$ совпадают при $a=-1$.

Корни $x=-a$ и $x=2a$ совпадают при $a=0$.

Корни $x=1$ и $x=2a$ совпадают при $a=\frac{1}{2}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при $a=-1$; $0\leq a<\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}<a<3$.

Ответ: $a=-1$; $0\leq a<\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}<a<3$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2\left(x^4 y^2 + 2a^2\right) = \log_2\left(1 - ax^2 y^2\right) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = 1$

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-a^2\right|=|x+a|\cdot\sqrt{x+5}$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению:

$$|x+a|\cdot|x-a|=|x+a|\cdot\sqrt{x+5};\ |x+a|\cdot\left(|x-a|-\sqrt{x+5}\right)=0.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $|x+a|=0$ при условии $x+5\ge 0$. Получаем: $x=-a$. Условие принимает вид $-a+5\ge 0$, откуда $a\le 5$.

Второй случай: $|x-a|-\sqrt{x+5}=0$. Получаем:

$$|x-a|=\sqrt{x+5};\ x^2-2ax+a^2=x+5;\ x^2-(2a+1)x+a^2-5=0.$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения равен $(2a+1)^2-4a^2+20=4a+21$. Значит, уравнение $x^2-(2a+1)x+a^2-5=0$ имеет два корня при $a>-\frac{21}{4}$, имеет один корень при $a=-\frac{21}{4}$ и не имеет корней при $a<-\frac{21}{4}$.

Число $-a$ является корнем квадратного уравнения $x^2-(2a+1)x+a^2-5=0$ при $a^2+(2a+1)a+a^2-5=0$, откуда

$$4a^2+a-5=0;\ (4a+5)(a-1)=0,$$

то есть при $a=-\frac{5}{4}$ и при $a=1$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при $a=-\frac{21}{4}$; $a=-\frac{5}{4}$; $a=1$ и $a>5$.

Ответ: $a=-\frac{21}{4}$; $a=-\frac{5}{4}$; $a=1$; $a>5$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a|x+1|+(1-a)|x-1|+2=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

При $x<-1$ уравнение принимает вид $-x+3-2a=0$, откуда $x=3-2a$. Корень $x=3-2a$ удовлетворяет неравенству $x<-1$ при $3-2a<-1$, откуда $a>2$.

При $-1\le x\le 1$ уравнение принимает вид $(2a-1)x+3=0$. При $a=\frac{1}{2}$ это уравнение не имеет корней, а при $a\ne\frac{1}{2}$ имеет единственный корень $x=\frac{3}{1-2a}$. Корень $x=\frac{3}{1-2a}$ принадлежит отрезку $[-1;1]$ при $-1\le\frac{3}{1-2a}\le 1$, откуда получаем:

$$\begin{cases}\frac{3}{1-2a}\ge -1,\\ \frac{3}{1-2a}\le 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{4-2a}{1-2a}\ge 0,\\ \frac{2+2a}{1-2a}\le 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{a-2}{2a-1}\ge 0,\\ \frac{a+1}{2a-1}\ge 0.\end{cases}$$

Следовательно, уравнение $(2a-1)x+3=0$ имеет корень на отрезке $[-1;1]$ при $a\le -1$ и $a\ge 2$.

При $x>1$ уравнение принимает вид $x+2a+1=0$, откуда $x=-2a-1$.

Корень $x=-2a-1$ удовлетворяет неравенству $x>1$ при $-2a-1>1$, откуда $a<-1$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при $a<-1$ и $a>2$.

Ответ: $a<-1$; $a>2$.