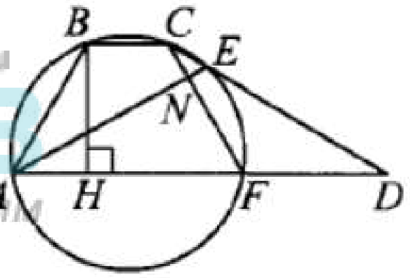
16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность, описанная около треугольника ABC, пересекает боковую сторону CD в точке E, а основание AD в точке F, причём $AB = FD$.

а) Докажите, что $\angle EAD = \angle EDA$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 5$, $BC = 3$, а прямые AE и CF перпендикулярны.

Решение.



а) Трапеция $ABCF$ вписана в окружность, поэтому $CF = AB = FD$. Значит, треугольник CFD равнобедренный и

$\angle EDA = \angle CDF = \angle FCD = \angle FCE = \angle FAE = \angle EAD$.

б) Пусть BH — высота трапеции $ABCF$, а N — точка пересечения прямых AE и CF.

В треугольнике ANF имеем:

$$\angle NAF = 90° - \angle NFA = 90° - \angle FCD - \angle FDC = 90° - 2\angle NAF.$$

Значит, $\angle NAF = 30°$; $\angle BAF = \angle CFA = \angle NFA = 60°$. Следовательно,

$$BH = AB \cdot \sin 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2},\ AH = AB \cdot \cos 60° = \frac{5}{2};\ AF = 2AH + BC = 8;$$

$$S_{ABCD} = BH \cdot \frac{BC + AD}{2} = BH \cdot \frac{BC + AF + FD}{2} = 20\sqrt{3}.$$

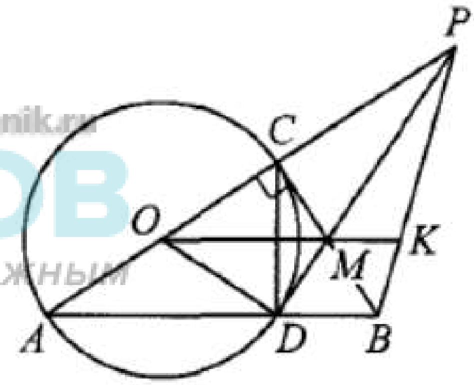
Ответ: б) $20\sqrt{3}$.

16 Окружность с центром O, построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D. Касательная, проведённая к этой окружности в точке D, пересекает катет BC в точке M.

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Прямая DM пересекает прямую AC в точке P, прямая OM пересекает прямую BP в точке K. Найдите $BK : KP$, если $\cos\angle BAC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Решение.



а) Отрезок CD является высотой треугольника ABC, поскольку вписанный угол ADC опирается на диаметр окружности. Прямая BC касается окружности с диаметром AC в точке C, поскольку радиус окружности OC перпендикулярен BC.

Следовательно, $CM = MD$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки. Значит,

$$\angle MBD = 90^\circ - \angle MCD = 90^\circ - \angle MDC = \angle MDB,$$

поэтому $BM = MD = CM$.

б) Прямые AB и OM параллельны, поскольку отрезок OM — средняя линия треугольника ABC. Значит, $BK : KP = AO : OP$.

Обозначим угол BAC через α. Тогда

$$\angle COD = 2\alpha,\ \angle ODP = 90^\circ;\ OP = \frac{OD}{\cos 2\alpha}.$$

Значит,

$$BK : KP = AO : OP = OD : \frac{OD}{\cos 2\alpha} = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{3}{5}.$$

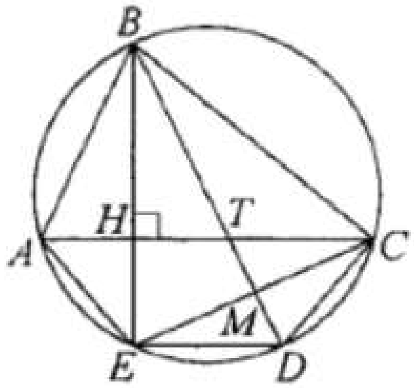
Ответ: б) $3:5$.

16 Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причём $AE = ED = CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T.

а) Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине.

б) Найдите площадь треугольника ABT, если $BD = 6$, $AE = \sqrt{6}$.

Решение.



а) Обозначим точку пересечения прямой EC и отрезка TD через M, а точку пересечения отрезков AC и BE через H. Угол BMC равен полусумме дуг BC и DE, а угол BHC равен полусумме дуг BC и AE. Дуги AE, ED и CD меньше $180°$ и стягиваются равными хордами. Следовательно, эти дуги равны. Значит,

$$\angle BMC = \angle BHC = 90° \text{ и } \angle ACE = \angle DCE.$$

В треугольнике TCD отрезок CM является биссектрисой и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный, $TC = CD$, а точка M — середина отрезка TD.

б) Дуги AE и CD равны, значит, $\angle ACE = \angle CED$, следовательно, прямые AC и DE параллельны, а $\angle BED = 90°$.

Обозначим $\angle DBE$ через α. Тогда $\sin\alpha = \frac{ED}{BD} = \frac{AE}{BD} = \frac{\sqrt{6}}{6}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

$$\angle ABE = \angle DBE = \angle DBC = \alpha;\ \angle EAC = \angle EBC = 2\alpha.$$

В треугольнике ABT отрезок BH является биссектрисой и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный, $AB = BT$, а точка H — середина отрезка AT.

Получаем:

$$AH = AE \cdot \cos\angle EAC = AE \cdot \cos 2\alpha = AE \cdot \left(1 - 2\sin^2\alpha\right) = \frac{2\sqrt{6}}{3};$$

$$AT = 2AH = \frac{4\sqrt{6}}{3};\ BH = AH \cdot \operatorname{ctg}\angle ABH = AH \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{30}}{3}.$$

Значит, площадь треугольника ABT равна

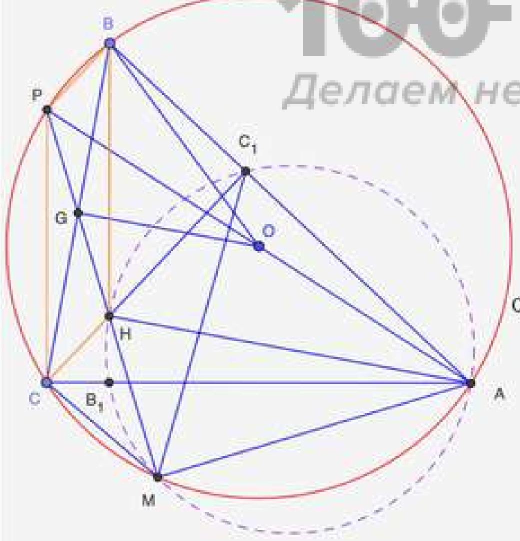
$$\frac{AT \cdot BH}{2} = \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$.

16 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Отрезок AP — диаметр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что прямая HP пересекает отрезок BC в его середине.

б) Луч PH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке M. Найдите длину отрезка MC_1, если расстояние от центра этой окружности до прямой BC равно 4, $\angle BPH = 120°$.



Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Отрезок AP — диаметр окружности, описанной около треугольника ABC.
а) Докажите, что прямая HP пересекает отрезок BC в его середине.
б) Луч PH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке M. Найдите длину отрезка MC_1, если расстояние от центра этой окружности до прямой BC равно 4, $\angle BPH = 120°$.

а) Пусть $(BC) \cap (PH) = G$;

$\angle PCA = 90°$(опирается на диаметр) $\Rightarrow PC \perp AC$, но $BH \perp AC \Rightarrow PC \parallel BH$; аналогично $CH \parallel BP \Rightarrow$

$CPBH$ – параллелограмм, диагонали которого пересекаются в их середине $\Rightarrow G$ – середина BC

б) $OG \perp BC$ (по свойству диаметра, проходящего через середину хорды) $\Rightarrow OG = 4$;

OG – средняя линия $\Delta HPA \Rightarrow AH = 2 \cdot OG = 8$; из точек M и C_1 отрезок AH виден под прямым углом $\Rightarrow$

точки M, H, C_1, A лежат на одной окружности с диаметром AH

$R = \dfrac{AH}{2} = 4$; так как $MPBA$ – вписанный, то $\angle MAB = 180° - \angle P = 60°$

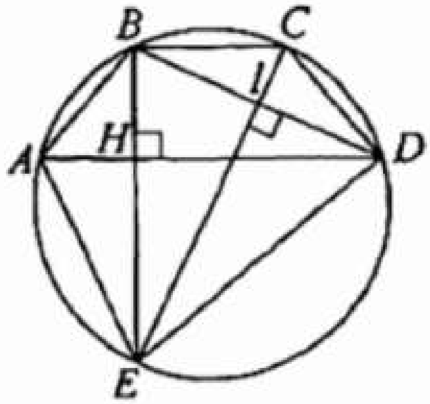
из ΔMAC_1: $MC_1 = 2R \cdot \sin A = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

16 В равнобедренной трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно боковой стороне. На плоскости выбрали точку E такую, что прямая BE перпендикулярна прямой AD, а прямая CE перпендикулярна прямой BD.

а) Докажите, что $\angle AEB = \angle ADB$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 32$, $\cos\angle AEB = \frac{3}{4}$.

Решение.



а) Обозначим точку пересечения прямых AD и BE через H, а точку пересечения прямых BD и CE через I.

В равнобедренной трапеции $ABCD$ сумма противоположных углов равна $180°$, следовательно, около неё можно описать окружность.

В равнобедренном треугольнике BCD

$$\angle CBD = \angle CDB.$$

В прямоугольном треугольнике BCE

$$\angle BEC = 90° - \angle IBE = \angle CBD = \angle CDB.$$

Следовательно, точка E лежит на окружности, описанной около треугольника BCD, то есть точки A, B, C, D и E лежат на одной окружности. Значит, $\angle AEB = \angle ADB$.

б) Обозначим $\angle AEB$ через α. Тогда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\angle ADB = \angle AEB = \alpha$. Дуги AB, BC и CD меньше $180°$ и стягиваются равными хордами, следовательно, эти дуги равны, откуда $\angle BAD = \angle CDA = 2\alpha$.

Получаем:

$$AH = AB \cdot \cos 2\alpha = AB \cdot \left(2\cos^2\alpha - 1\right) = 4;$$

$$BH = AB \cdot \sin 2\alpha = AB \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 12\sqrt{7};$$

$$HD = BH \cdot \operatorname{ctg}\angle BDH = BH \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 36;$$

$$AD = AH + HD = 40, \ BC = AB = 32.$$

Значит, площадь трапеции $ABCD$ равна

$$BH \cdot \frac{BC + AD}{2} = 432\sqrt{7}.$$

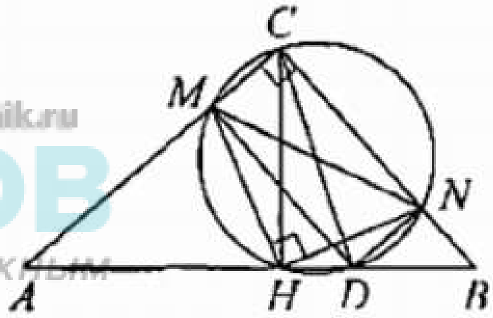
Ответ: б) $432\sqrt{7}$.

16 Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно такие, что $\angle MHN = 90°$.

а) Докажите, что треугольник MNH подобен треугольнику ABC.

б) Найдите CN, если $BC = 2$, $AC = 4$, $CM = 1$.

Решение.



а) В четырёхугольнике $CMHN$ углы NCM и MHN равны $90°$. Следовательно, около этого четырёхугольника можно описать окружность. Значит,

$$\angle NMH = \angle NCH = 90° - \angle HBC = \angle BAC.$$

Таким образом, прямоугольные треугольники ABC и MNH подобны по острому углу.

б) Обозначим вторую точку пересечения окружности, описанной около четырёхугольника $CMHN$, и отрезка AB через D. Тогда CD — диаметр окружности, поскольку $\angle CHD = 90°$. Значит $\angle CND = \angle CMD = \angle MCN = 90°$, следовательно, четырёхугольник $CNDM$ — прямоугольник. Таким образом,

$$CN = DM = AM \cdot \operatorname{tg}\angle BAC = (AC - CM) \cdot \frac{BC}{AC} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{3}{2}$.