15 Решите неравенство $\log_4^2\left(16+14x-x^2\right)+5\cdot\log_{0,25}\left(16+14x-x^2\right)+6>0$.

Решение.

Пусть $t=\log_4\left(16+14x-x^2\right)$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2-5t+6>0;\ (t-2)(t-3)>0,$$

откуда $t<2$; $t>3$.

При $t<2$ получим:

$$\log_4\left(16+14x-x^2\right)<2;\ 0<16+14x-x^2<16;\ 0<x^2-14x<16,$$

откуда $7-\sqrt{65}<x<0$; $14<x<7+\sqrt{65}$.

При $t>3$ получим:

$$\log_4\left(16+14x-x^2\right)>3;\ 16+14x-x^2>64;\ x^2-14x+48<0,$$

откуда $6<x<8$.

Решение исходного неравенства: $7-\sqrt{65}<x<0$; $6<x<8$; $14<x<7+\sqrt{65}$.

Ответ: $\left(7-\sqrt{65};0\right)$; $(6;8)$; $\left(14;7+\sqrt{65}\right)$.

15

Решите неравенство $\frac{1}{3^x-1}+\frac{9^{x+\frac{1}{2}}-3^{x+3}+3}{3^x-9}\ge 3^{x+1}$.

Решение.

Пусть $t=3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{1}{t-1}+\frac{3t^2-27t+3}{t-9}\ge 3t;\ \frac{1}{t-1}+\frac{3t(t-9)}{t-9}+\frac{3}{t-9}\ge 3t;$$
$$\frac{1}{t-1}+3t+\frac{3}{t-9}\ge 3t;\ \frac{t-3}{(t-1)(t-9)}\ge 0,$$

откуда $1<t\le 3$; $t>9$.

При $1<t\le 3$ получим: $1<3^x\le 3$, откуда $0<x\le 1$.

При $t>9$ получим: $3^x>9$, откуда $x>2$.

Решение исходного неравенства:

$$0<x\le 1;\ x>2.$$

Ответ: $(0;1]$; $(2;+\infty)$.

15 Решите неравенство $\left(4^x-5\cdot 2^x\right)^2-20\left(4^x-5\cdot 2^x\right)-96\le 0$.

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\left(t^2-5t\right)^2-20\left(t^2-5t\right)-96\le 0;\ \left(t^2-5t-24\right)\left(t^2-5t+4\right)\le 0;$$

$$(t+3)(t-8)(t-1)(t-4)\le 0,$$

откуда $-3\le t\le 1$; $4\le t\le 8$.

При $-3\le t\le 1$ получим: $-3\le 2^x\le 1$, откуда $x\le 0$.

При $4\le t\le 8$ получим: $4\le 2^x\le 8$, откуда $2\le x\le 3$.

Решение исходного неравенства: $x\le 0$; $2\le x\le 3$.

Ответ: $(-\infty;0]$; $[2;3]$.

15 Решите неравенство $\frac{1}{\log_3 x+4}+\frac{2}{\log_3(3x)}\cdot\left(\frac{2}{\log_3 x+4}-1\right)\leq 0.$

Ответ: $\left(\frac{1}{81};\frac{1}{27}\right],\left(\frac{1}{3};\infty\right)$

15 Решите неравенство $\left(4^x-2^{x+3}\right)^2+28\left(4^x-2^{x+3}\right)+192\geq 0.$

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\left(t^2-8t\right)^2+28\left(t^2-8t\right)+192\geq 0;\ \left(t^2-8t+12\right)\left(t^2-8t+16\right)\geq 0;$$

$$(t-2)(t-6)(t-4)^2\geq 0,$$

откуда $t\leq 2$; $t=4$; $t\geq 6$.

При $t\leq 2$ получим: $2^x\leq 2$, откуда $x\leq 1$.

При $t=4$ получим: $2^x=4$, откуда $x=2$.

При $t\geq 6$ получим: $2^x\geq 6$, откуда $x\geq\log_2 6$.

Решение исходного неравенства: $x\leq 1$; $x=2$; $x\geq\log_2 6$.

Ответ: $(-\infty;1]$; 2; $[\log_2 6;+\infty)$.

15

Решите неравенство $\frac{5^x}{5^x-4}+\frac{5^x+5}{5^x-5}+\frac{22}{25^x-9\cdot 5^x+20}\le 0.$

Решение.

Пусть $t=5^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t}{t-4}+\frac{t+5}{t-5}+\frac{22}{t^2-9t+20}\le 0;\ \frac{2t^2-4t+2}{t^2-9t+20}\le 0;\ \frac{2(t-1)^2}{(t-4)(t-5)}\le 0,$$

откуда $t=1$; $4<t<5$.

При $t=1$ получим: $5^x=1$, откуда $x=0$.

При $4<t<5$ получим: $4<5^x<5$, откуда $\log_5 4<x<1$.

Решение исходного неравенства: $x=0$; $\log_5 4<x<1$.

Ответ: 0; $(\log_5 4;1)$.