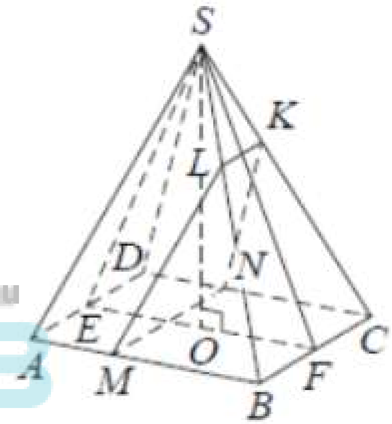
14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC = SK:KC = 1:3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Решение.



а) Пусть плоскость α пересекает прямые SB и AB в точках L и M соответственно. Поскольку плоскость α параллельна прямой BC, прямые KL, BC и MN параллельны. Следовательно,

$$SL:LB = SK:KC = DN:NC = AM:MB.$$

Таким образом, прямая LM, лежащая в плоскости α, параллельна прямой SA, а значит, плоскость α параллельна прямой SA.

б) Поскольку плоскость α параллельна плоскости SAD, искомый угол равен углу между плоскостями SAD и SBC. Пусть точки E и F — середины рёбер AD и BC соответственно. Тогда прямые SF и EF перпендикулярны прямой BC, а прямые SE и EF — прямой AD. Таким образом, плоскость SEF перпендикулярна прямым BC и AD, а также содержащим их плоскостям SBC и SAD соответственно.

Значит, угол между плоскостями α и SBC равен углу ESF.

Высота SO пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости SEF, откуда

$$EO = 2,\ SE = \sqrt{SA^2 - \frac{AD^2}{4}} = 3\sqrt{5};$$

$$\sin\angle ESO = \frac{OE}{SE} = \frac{2\sqrt{5}}{15};\ \angle ESF = 2\angle ESO = 2\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

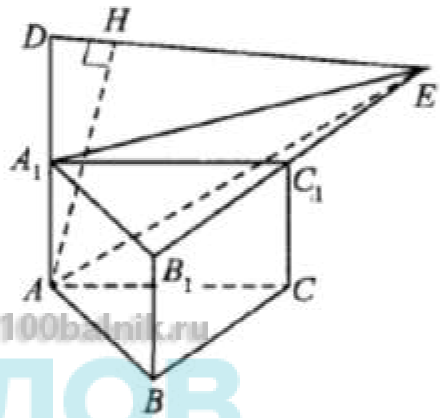
Ответ: б) $2\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{15}$.

14 В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC. На прямой AA_1 отмечена точка D так, что точка A_1 — середина отрезка AD. На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что точка C_1 — середина отрезка B_1E.

а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE, если $AB = 3$, $AA_1 = 1$.

Решение.



а) Треугольник $A_1B_1C_1$ правильный, поэтому угол A_1C_1E равен $120°$. В равнобедренном треугольнике A_1C_1E угол EA_1C_1 равен $\dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$, а значит, угол EA_1B_1 равен $90°$.

Таким образом, прямая A_1B_1 перпендикулярна прямым A_1D и A_1E. Значит, прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости A_1DE и прямой DE, лежащей в ней.

б) Прямая AB перпендикулярная прямым AD и DE, поскольку прямые AB и A_1B_1 параллельны, следовательно, прямая AB перпендикулярна плоскости DAE. Пусть отрезок AH — высота треугольника DAE. Тогда отрезок AH перпендикулярен прямым AB и DE, а его длина равна расстоянию h между прямыми AB и DE.

В прямоугольном треугольнике A_1B_1E имеем:

$$B_1E = 2A_1B_1 = 6,\ \angle A_1B_1E = 60°;\ A_1E = B_1E \cdot \sin\angle A_1B_1E = 3\sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике DA_1E имеем:

$$DA_1 = AA_1 = 1;\ DE = \sqrt{DA_1^{\,2} + A_1E^{\,2}} = 2\sqrt{7}.$$

Площадь треугольника DAE равна $\dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot DE = h\sqrt{7}$. С другой стороны, эта площадь равна $\dfrac{1}{2} \cdot A_1E \cdot DA = 3\sqrt{3}$. Таким образом, $h\sqrt{7} = 3\sqrt{3}$, откуда $h = \dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

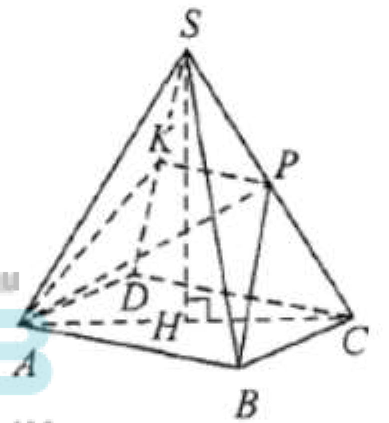
Ответ: б) $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AD равна 10, высота SH равна 12. Точка K — середина бокового ребра SD. Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $CDKP$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SCD.

б) Найдите объём пирамиды $ACDKP$.

Решение.



а) Прямые AB и CD параллельны, следовательно, прямая AB параллельна плоскости SCD и не имеет с ней общих точек. Значит, прямые AB и KP, лежащие в плоскости AKB, не имеют общих точек, то есть они параллельны. Следовательно, прямая KP параллельна прямой CD.

По теореме Фалеса получаем, что точка P — середина ребра SC. Треугольники SPK и SCD подобны с коэффициентом подобия 2, а значит, площадь треугольника SPK в 4 раза меньше площади треугольника SCD. Следовательно, площадь четырёхугольника $CDKP$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SCD.

б) Пирамиды $ASCD$ и $ACDKP$ имеют общую высоту, равную расстоянию h от точки A до плоскости SCD. Пусть S_1 — площадь треугольника SCD, тогда площадь четырёхугольника $CDKP$ равна $\frac{3S_1}{4}$.

Объём пирамиды $ASCD$, с одной стороны, равен $\frac{S_1 h}{3}$. С другой стороны, он равен $\frac{1}{3}\cdot SH\cdot\frac{AD^2}{2}=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 50=200$. Значит, $\frac{S_1 h}{3}=200$, откуда $S_1 h=600$.

Объём пирамиды $ACDKP$ равен $\frac{1}{3}\cdot h\cdot\frac{3S_1}{4}=\frac{S_1 h}{4}=150$.

Ответ: б) 150.

14 Точка E лежит на высоте SO, а точка F — на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, причём $SE:EO=SF:FC=2:1$.

а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF, если $AB=8$, $SO=14$.

Ответ: $\dfrac{88\sqrt{2}}{3}$

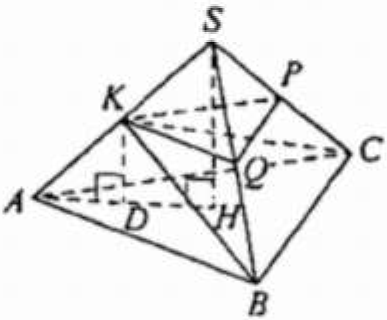
14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 16, высота SH равна 10. Точка K — середина бокового ребра SA. Плоскость, параллельная плоскости ABC, проходит через точку K и пересекает рёбра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $BCPQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SBC.

б) Найдите объём пирамиды $KBCPQ$.

Решение.

а) Прямая KQ лежит в плоскости KQP, параллельной плоскости ABC. Следовательно, прямые KQ и AB не имеют общих точек, а поскольку эти прямые лежат в одной и той же плоскости SAB, они параллельны. Тогда по теореме Фалеса точка Q — середина ребра SB. Аналогично точка P — середина ребра SC. Таким образом, отрезок QP — средняя линия треугольника SBC. Отсюда следует, что площадь треугольника SQP составляет четверть площади треугольника SBC, а тогда площадь четырёхугольника $BCPQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SBC.



б) Пусть отрезок KD — высота пирамиды $KABC$. Прямые SH и KD параллельны, а точка K — середина отрезка SA, значит, отрезок KD является средней линией треугольника ASH и $KD = \frac{SH}{2}$.

Объём пирамиды $SABC$ равен $\frac{1}{3} \cdot SH \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 10 \cdot 16^2 = \frac{640\sqrt{3}}{3}$.

Объём пирамиды $KABC$ равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{SH}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{320\sqrt{3}}{3}$. Значит, объём пирамиды $KSBC$ равен $\frac{640\sqrt{3}}{3} - \frac{320\sqrt{3}}{3} = \frac{320\sqrt{3}}{3}$.

Пирамиды $KSBC$ и $KBCPQ$ имеют общую высоту, равную расстоянию h от точки K до плоскости SBC. Пусть S_1 — площадь треугольника SBC, тогда площадь четырёхугольника $BCPQ$ равна $\frac{3S_1}{4}$.

Объём пирамиды $KSBC$ равен $\frac{S_1 h}{3}$. С другой стороны, он равен $\frac{320\sqrt{3}}{3}$, откуда $S_1 h = 320\sqrt{3}$.

Объём пирамиды $KBCPQ$ равен $\frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{3S_1}{4} = \frac{S_1 h}{4} = 80\sqrt{3}$.

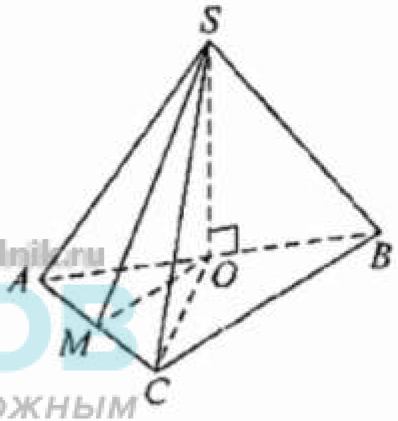
Ответ: б) $80\sqrt{3}$.

14 В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB.

а) Докажите, что $SA = SC$.

б) Найдите угол между плоскостями SAC и ABC, если $AC = 24$, $AB = 30$, $SA = 17$.

Решение.



а) Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна её половине, значит, $AO = OC$. Следовательно, прямоугольные треугольники ASO и CSO равны по двум катетам, а значит, их гипотенузы SA и SC также равны.

б) Пусть точка M — середина стороны AC. Поскольку треугольник SAC равнобедренный, прямые AC и SM перпендикулярны. Прямая SO перпендикулярна плоскости ABC и лежащей в ней прямой AC. Получаем, что плоскость SMO перпендикулярна прямой AC, а значит, и плоскостям ABC и SAC, то есть угол SMO искомый.

В прямоугольном треугольнике ASO имеем:

$$SA = 17,\ AO = \frac{AB}{2} = 15;\ SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 8.$$

Отрезок MO — средняя линия треугольника ABC, значит,

$$MO = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{2} = 9;\ \operatorname{tg}\angle SMO = \frac{SO}{MO} = \frac{8}{9}.$$

Таким образом, угол между плоскостями SAC и ABC равен $\operatorname{arctg}\frac{8}{9}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{8}{9}$.