

**Государственная итоговая аттестация по образовательным
программам основного общего образования в форме
основного государственного экзамена (ОГЭ)**

**Тренировочный вариант
контрольных измерительных материалов основного
государственного экзамена 2021 года по
МАТЕМАТИКЕ**

Разрешается копирование в некоммерческих образовательных целях

Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

**Пояснения к тренировочному варианту контрольных
измерительных материалов основного государственного экзамена
2021 года по МАТЕМАТИКЕ**

Тренировочный вариант предназначен для того, чтобы дать возможность участнику экзамена составить представление о структуре будущей экзаменационной работы, количестве и форме заданий, а также об их уровне сложности.

Эти сведения дают возможность потренироваться в решении заданий и выработать стратегию подготовки к сдаче экзамена по математике в 2021 году.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

АЛГЕБРА

- Формула корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

- Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня: x_1 и x_2 , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

- если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет единственный корень x_0 , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Формула n -го члена арифметической прогрессии (a_n) , первый член которой равен a_1 и разность равна d :

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

- Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

- Формула n -го члена геометрической прогрессии b_n , первый член которой равен b_1 , а знаменатель равен q :

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

- Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{(q^n - 1)b_1}{q - 1}.$$

Таблица квадратов двузначных чисел

		Единицы									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Десятки	1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ГЕОМЕТРИЯ

- Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n-2)$.
- Радиус r окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a , равен $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

- Радиус R окружности, описанной около правильного треугольника со стороной a , равен $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

- Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

- Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

- Формула длины l окружности радиусом R :

$$l = 2\pi R.$$

- Формула длины l дуги окружности радиусом R , на которую опирается центральный угол в φ градусов:

$$l = \frac{2\pi R \varphi}{360}.$$

- Формула площади S параллелограмма со стороной a и высотой h , проведённой к этой стороне:

$$S = ah.$$

- Формула площади S треугольника со стороной a и высотой h , проведённой к этой стороне:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

- Формула площади S трапеции с основаниями a , b и высотой h :

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

- Формула площади S круга радиусом R :

$$S = \pi R^2.$$

**Тренировочный вариант
контрольных измерительных материалов основного государственного
экзамена 2021 года по МАТЕМАТИКЕ**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 25 заданий. Часть 1 содержит 19 заданий, часть 2 содержит 6 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 запишите в бланк ответов № 1 в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1. Если получилась обыкновенная дробь, ответ запишите в виде десятичной.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на бланке ответов № 2. Задания можно выполнять в любом порядке. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования выполняйте в черновике. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами, выданными вместе с вариантом КИМ, и линейкой.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Для прохождения аттестационного порога необходимо набрать не менее 8 баллов, из которых не менее 2 баллов должны быть получены за решение заданий по геометрии (задания 15–19, 23–25).

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

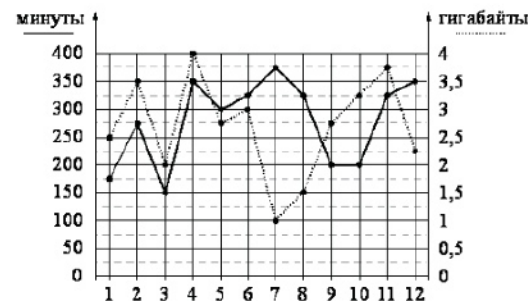
Желаем успеха!

Часть 1

Ответами к заданиям 1–19 являются число или последовательность цифр, которые следует записать в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами.

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1–5.

На рисунке точками показано количество минут исходящих вызовов и трафик мобильного интернета в гигабайтах, израсходованных абонентом в процессе пользования смартфоном, за каждый месяц 2019 года. Для удобства точки, соответствующие минутам и гигабайтам, соединены сплошными и пунктирными линиями соответственно.



В течение года абонент пользовался тарифом «Стандартный», абонентская плата по которому составляла 350 рублей в месяц. При условии нахождения абонента на территории РФ в абонентскую плату тарифа «Стандартный» входит:

- пакет минут, включающий 300 минут исходящих вызовов на номера, зарегистрированные на территории РФ;
- пакет интернета, включающий 3 гигабайта мобильного интернета;
- пакет SMS, включающий 120 SMS в месяц;
- безлимитные бесплатные входящие вызовы.

Стоимость минут, интернета и SMS сверх пакета тарифа указана в таблице.

Исходящие вызовы	3 руб./мин.
Мобильный интернет (пакет)	90 руб. за 0,5 ГБ
SMS	2 руб./шт.

Абонент не пользовался услугами связи в роуминге. За весь год абонент отправил 110 SMS.

- 1** Определите, какие месяцы соответствуют указанному в таблице трафику мобильного интернета.

Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите числа, соответствующие номерам месяцев, без пробелов, запятых и других дополнительных символов (например, для месяцев май, январь, ноябрь, август в ответ нужно записать число 51118).

Мобильный интернет	1 ГБ	3 ГБ	3,25 ГБ	1,5 ГБ
Номер месяца				

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ: _____.

- 2** Сколько рублей потратил абонент на услуги связи в декабре?

Ответ: _____.

- 3** Сколько месяцев в 2019 году абонент превысил лимит по пакету исходящих минут?

Ответ: _____.

- 4** Известно, что в 2019 году абонентская плата по тарифу «Стандартный» выросла на 40% по сравнению с 2018 годом. Сколько рублей составляла абонентская плата в 2018 году?

Ответ: _____.

- 5** В конце 2019 года оператор связи предложил абоненту перейти на новый тариф, условия которого приведены в таблице.

Стоимость перехода на тариф	0 руб.
Абонентская плата в месяц	470 руб.
В абонентскую плату включены пакеты:	
пакет исходящих вызовов	400 минут
пакет мобильного интернета	4 ГБ
пакет SMS	120 SMS
После расходования пакетов:	
входящие вызовы	0 руб./мин.
исходящие вызовы*	4 руб./мин.
мобильный интернет (пакет)	160 руб. за 0,5 ГБ
SMS	2 руб./шт.

*исходящие вызовы на номера, зарегистрированные на территории РФ

Абонент решает, перейти ли ему на новый тариф, посчитав, сколько бы он потратил на услуги связи за 2019 г., если бы пользовался им. Если получится меньше, чем он потратил фактически за 2019 г., то абонент примет решение сменить тариф.

Перейдет ли абонент на новый тариф? В ответе запишите ежемесячную абонентскую плату по тарифу, который выберет абонент на 2020 год.

Ответ: _____.

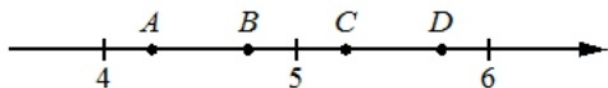
6

Найдите значение выражения $\frac{14}{5} \cdot \frac{7}{2}$.

Ответ: _____.

7

На координатной прямой отмечены точки A , B , C , и D .



Одна из них соответствует числу $\sqrt{33}$. Какая это точка?

- 1) точка A
- 2) точка B
- 3) точка C
- 4) точка D

Ответ: _____.

8

Найдите значение выражения $\frac{28^6}{4^4 \cdot 7^5}$.

Ответ: _____.

9

Решите уравнение $x^2 - 121 = 0$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Ответ: _____.

10

У бабушки 10 чашек: 4 с красными цветами, остальные с синими. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Найдите вероятность того, что это будет чашка с синими цветами.

Ответ: _____.

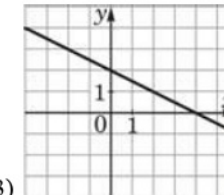
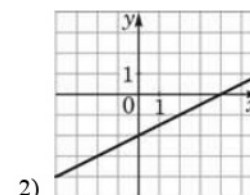
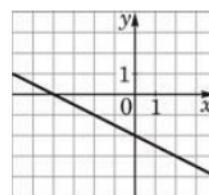
11

Установите соответствие между функциями и их графиками.

ФУНКЦИИ

А) $y = \frac{1}{2}x - 2$ Б) $y = -\frac{1}{2}x - 2$ В) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

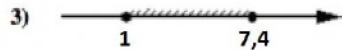
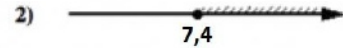
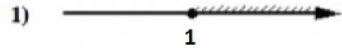
А	Б	В

- 12** Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2R$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R (в омах), если мощность составляет 224 Вт, а сила тока равна 4 А. Ответ дайте в омах.

Ответ: _____.

- 13** Укажите решение системы неравенств

$$\begin{cases} x - 7,4 \geq 0 \\ x + 2 \geq 3 \end{cases}$$



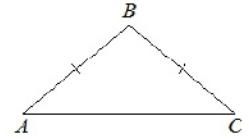
Ответ: _____.

- 14** В амфитеатре 23 ряда, причём в каждом следующем ряду на одно и то же число мест больше, чем в предыдущем. В седьмом ряду 26 мест, а в одиннадцатом ряду 34 места. Сколько мест в последнем ряду амфитеатра?

Ответ: _____.

- 15** В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 148^\circ$. Найдите угол BCA . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.



- 16** Сторона равностороннего треугольника равна $4\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: _____.

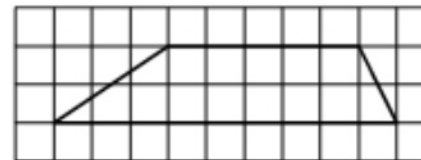


- 17** Один из углов параллелограмма равен 74° . Найдите больший угол этого параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.



- 18** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: _____.

19) Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей.
- 2) Сумма углов прямоугольного треугольника равна 90 градусам.
- 3) Биссектрисы треугольника пересекаются в точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

При выполнении заданий 20–25 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

Часть 2

20) Решите неравенство $(x - 3)^2 < \sqrt{5}(x - 3)$.

21) Расстояние между пристанями А и В равно 24 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошёл 15 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

22) Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x^2 - 2x - 3, & \text{при } x \geq -2 \\ -x - 7, & \text{при } x < -2 \end{cases}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

23) Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 150° , а $CD = 32$.

24) В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

25) На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD=80$, $MD=64$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике

Часть 1

За правильный ответ на каждое из заданий 1-19 ставится 1 балл.

Номер задания	Правильный ответ
1	76108
2	500
3	6
4	250
5	350
6	9,8
7	4
8	112
9	-11
10	0,6
11	213
12	15,25
13	2
14	58
15	16
16	4
17	106
18	14
19	3

Критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Часть 2

20 Решите неравенство $(x - 3)^2 < \sqrt{5}(x - 3)$.

Решение.

$$(x - 3)^2 - \sqrt{5}(x - 3) < 0$$

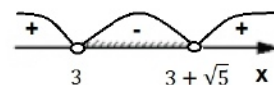
$$(x - 3)(x - 3 - \sqrt{5}) < 0$$

Найдем нули:

$$(x - 3)(x - 3 - \sqrt{5}) = 0$$

$$x = 3 \quad x = 3 + \sqrt{5}$$

Определим знаки:



Ответ: $(3; 3 + \sqrt{5})$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

- 21 Расстояние между пристанями А и В равно 24 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошёл 15 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение.

Пусть x км/ч - скорость лодки в неподвижной воде, тогда $(x + 5)$ км/ч - скорость лодки по течению и $(x - 5)$ км/ч - скорость лодки против течения.

Т.к. расстояние между пристанями А и В равно 24 км,

то время по течению будет $\frac{24}{x+5}$ ч., а против течения $\frac{24}{x-5}$ ч.

Время плота: $15 \text{ км} : 5 \text{ км/ч} = 3 \text{ ч.}$

Т.к. лодка отправилась вслед за плотом через час, то общее время лодки - 2 ч.

Составим и решим уравнение:

$$\frac{24}{x+5} + \frac{24}{x-5} = 2$$

$$\frac{24}{x+5} + \frac{24}{x-5} = 2 \quad / \cdot (x+5)(x-5)$$

$$24(x-5) + 24(x+5) - 2(x^2 - 25) = 0; \quad 24x - 120 + 24x + 120 - 2x^2 + 50 = 0$$

$$-2x^2 + 48x + 50 = 0 \quad / \div (-2)$$

$$x^2 - 24x - 25 = 0$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-25) = 676$$

$$x_1 = \frac{24 + \sqrt{676}}{2 \cdot 1} = 25; \quad x_2 = \frac{24 - \sqrt{676}}{2 \cdot 1} = -1 \text{ - посторонний корень}$$

Ответ: 25 км/ч.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена опписка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

- 22 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x^2 - 2x - 3, & \text{при } x \geq -2 \\ -x - 7, & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

$y = -x^2 - 2x - 3$ - графиком является парабола с ветвями вниз и вершиной

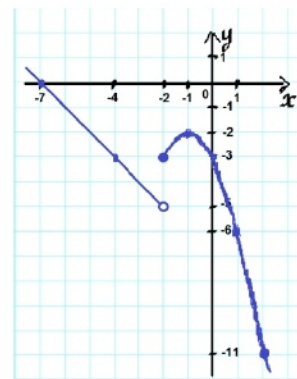
$x_0 = \frac{2}{-2} = -1$. Строим ее на $x \geq -2$ по точкам:

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-2	-3	-6	-11

$y = -x - 7$ - графиком является прямая.

Строим ее на $x < -2$ по точкам:

x	-7	-4	-2
y	0	-3	-5



Прямая $y = m$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней. С графиком имеет общие точки:

при

$m \leq 5$ - одну

$-5 < m < 3$ - две

$-3 \leq m < -2$ - три

$m = -2$ - две

$m > -2$ - одну

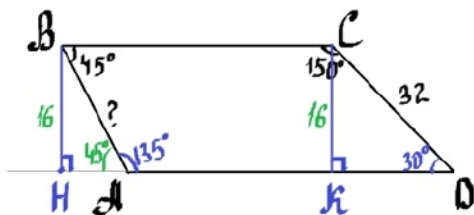
$\Rightarrow -5 < m < -3$ и $m = -2$

Ответ: $(-5; -3) \cup \{-2\}$

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

- 23 Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 150° , а $CD = 32$.

Решение.



Проведём высоты CK и BH к стороне AD и её продолжению

$\angle CDK = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ (односторонние углы)

$$CK = CD \cdot \sin 30^\circ = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16$$

$$BH = CK = 16$$

$\angle CBD = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ (односторонние углы)

$\angle BAN = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ (смежные углы)

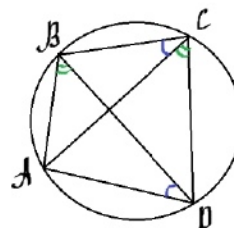
$$BA = \frac{BH}{\sin 45^\circ} = \frac{16 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}$$

Ответ: $16\sqrt{2}$.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

- 24 В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

Решение.



Углы $\angle BCA$ и $\angle BDA$ опираются на общий отрезок AB.

Пусть точки A, B и C лежат на окружности. Тогда D тоже лежит на окружности, так как углы $\angle BCA$ и $\angle BDA$ равны и могут являться только вписанными в данную окружность, опираясь на общую дугу AB.

Углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ опираются на дугу AD, а значит равны, как вписанные опирающиеся на одну дугу.

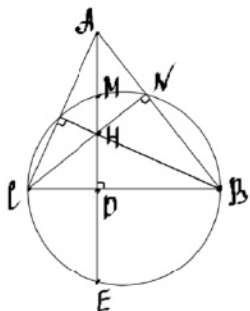
Что и требовалось доказать.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD=80$, $MD=64$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Решение.



CN - высота $\Rightarrow \angle CNB = 90^\circ$

Т.к BC диаметр, то $\angle CNB$ опирается на полуокружность $\Rightarrow N$ - лежит на окружности

$DE = MD = 64$ (диаметр делит перпендикулярную ему хорду пополам)

$AM = AD - MD = 80 - 64 = 16$

$AE = AD + DE = 80 + 64 = 144$

По теореме о секущих из одной точки:

$AN \cdot AB = AM \cdot AE = 16 \cdot 144 = 2304$

$\triangle ANH \sim \triangle ADB$ (подобие прямоугольных треугольников по общему острому углу

$$A) \Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AB}$$

$$AH = \frac{AN \cdot AB}{AD} = \frac{2304}{80} = 28,8$$

Ответ: 28,8.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 189/1513 зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52953),

«64. Экзаменационные работы проверяются двумя экспертами. По результатам проверки эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы... В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Третий эксперт назначается председателем предметной комиссии из числа экспертов, ранее не проверявших экзаменационную работу.

Третьему эксперту предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу. Баллы, выставленные третьим экспертом, являются окончательными.

Существенным считается следующее расхождение.

1. Расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 20–25, составляет 2 балла. Третий эксперт проверяет только ответ на те задания, которые вызвали столь существенное расхождение.

2. Расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами в любых двух или более заданиях (из заданий 20–25). Третий эксперт проверяет ответы на все задания 20–25.