

**Государственная итоговая аттестация по образовательным  
программам основного общего образования в форме  
основного государственного экзамена (ОГЭ)**

**Тренировочный вариант  
контрольных измерительных материалов основного  
государственного экзамена 2021 года по  
МАТЕМАТИКЕ**

Разрешается копирование в некоммерческих образовательных целях

**Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ**

**Пояснения к тренировочному варианту контрольных  
измерительных материалов основного государственного экзамена  
2021 года по МАТЕМАТИКЕ**

Тренировочный вариант предназначен для того, чтобы дать возможность участнику экзамена составить представление о структуре будущей экзаменационной работы, количестве и форме заданий, а также об их уровне сложности.

Эти сведения дают возможность потренироваться в решении заданий и выработать стратегию подготовки к сдаче экзамена по математике в 2021 году.

## СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

## АЛГЕБРА

- Формула корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

- Если квадратный трёхчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет два корня:  $x_1$  и  $x_2$ , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

- если квадратный трёхчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет единственный корень  $x_0$ , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Формула  $n$ -го члена арифметической прогрессии  $(a_n)$ , первый член которой равен  $a_1$  и разность равна  $d$ :

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

- Формула суммы первых  $n$  членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

- Формула  $n$ -го члена геометрической прогрессии  $b_n$ , первый член которой равен  $b_1$ , а знаменатель равен  $q$ :

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

- Формула суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{(q^n - 1)b_1}{q - 1}.$$

Таблица квадратов двузначных чисел

		Единицы									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Десятки	1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

## ГЕОМЕТРИЯ

- Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180^\circ(n-2)$ .
- Радиус  $r$  окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной  $a$ , равен  $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ .

- Радиус  $R$  окружности, описанной около правильного треугольника со стороной  $a$ , равен  $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ .

- Для треугольника  $ABC$  со сторонами  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где  $R$  — радиус описанной окружности.

- Для треугольника  $ABC$  со сторонами  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

- Формула длины  $l$  окружности радиусом  $R$ :

$$l = 2\pi R.$$

- Формула длины  $l$  дуги окружности радиусом  $R$ , на которую опирается центральный угол в  $\varphi$  градусов:

$$l = \frac{2\pi R \varphi}{360}.$$

- Формула площади  $S$  параллелограмма со стороной  $a$  и высотой  $h$ , проведённой к этой стороне:

$$S = ah.$$

- Формула площади  $S$  треугольника со стороной  $a$  и высотой  $h$ , проведённой к этой стороне:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

- Формула площади  $S$  трапеции с основаниями  $a$ ,  $b$  и высотой  $h$ :

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

- Формула площади  $S$  круга радиусом  $R$ :

$$S = \pi R^2.$$



- 1 Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность четырёх цифр без пробелов, запятых и других символов.

Объекты	сарай	гараж	жилой дом	теплица
Цифры				

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2 Плитки для садовых дорожек продаются в упаковках по 4 штуки. Сколько упаковок плиток понадобилось, чтобы выложить все дорожки?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3 Найдите площадь, которую занимает гараж. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 4 На сколько процентов площадь, которую занимает теплица, меньше площади, которую занимает гараж?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 Хозяин участка решил покрасить весь забор вокруг участка (только с внешней стороны) в зелёный цвет. Площадь забора равна 232 кв. м, а купить краску можно в одном из двух ближайших магазинов.

Цена и характеристика краски и стоимость доставки заказа даны в таблице.

Номер магазина	Расход краски	Масса краски в одной банке	Стоимость одной банки краски	Стоимость доставки заказа
1	0,6 кг/кв. м	5 кг	2400 руб.	400 руб.
2	0,4 кг/кв. м	4 кг	2300 руб.	600 руб.

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 6 Найдите значение выражения  $6,4 - 4,8$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Между какими целыми числами заключено число  $\frac{124}{15}$  ?

- 1) 8 и 9
- 2) 9 и 10
- 3) 10 и 11
- 4) 11 и 12

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 Найдите значение выражения  $a^{-10} \cdot (a^4)^3$ , при  $a = 4$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 9 Решите уравнение  $4(x + 1) = 9$

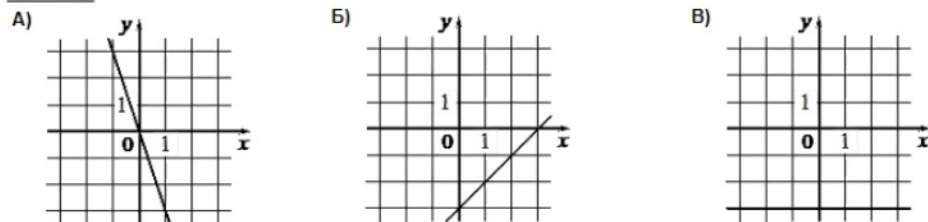
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 8 чёрных, 7 жёлтых и 5 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет жёлтое такси.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

## ГРАФИКИ



## ФОРМУЛЫ

1)  $y = -3$

2)  $y = x - 3$

3)  $y = -3x$

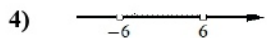
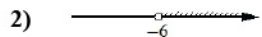
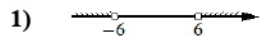
Ответ:

А	Б	В

- 12 Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула  $t_c = \frac{5}{9}(t_f - 32)$ , где  $t_c$  — температура в градусах Цельсия,  $t_f$  — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 167 градусов по шкале Фаренгейта?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 13 Укажите решение неравенства  $x^2 > 36$ .

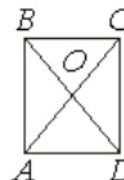


Ответ: \_\_\_\_\_.

- 14 У Кати есть теннисный мячик. Она со всей силы бросила его об асфальт. После первого отскока мячик подлетел на высоту 540 см, а после каждого следующего отскока от асфальта подлетал на высоту в три раза меньше предыдущей. После какого по счёту отскока высота, на которую подлетит мячик, станет меньше 10 см?

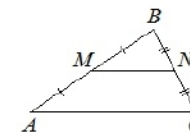
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 15 Диагонали AC и BD прямоугольника ABCD пересекаются в точке O,  $BO = 37$ ,  $AB = 56$ . Найдите AC.



Ответ: \_\_\_\_\_.

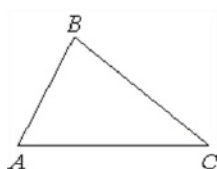
- 16 Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 42, сторона BC равна 44, сторона AC равна 62. Найдите MN.



Ответ: \_\_\_\_\_.

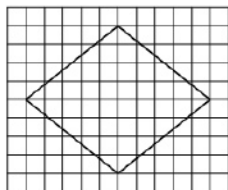


- 17 В треугольнике ABC известно, что  $AB = 9$ ,  $BC = 16$ ,  
 $\sin \angle ABC = \frac{7}{12}$ . Найдите площадь треугольника ABC.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 18 На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён ромб. Найдите длину его большей диагонали.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 19 Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Если три угла одного треугольника равны соответственно трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- 2) Все диаметры окружности равны между собой.
- 3) Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.*

*При выполнении заданий 20–25 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.*

**Часть 2**

- 20 Сократите дробь  $\frac{50^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-1}}$ .

- 21 Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 140 литров она заполняет на 3 минуты дольше, чем вторая труба?

- 22 Постройте график функции

$$y = 3|x + 2| - x^2 - 3x - 2.$$

Определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком ровно три общие точки.

- 23 Углы B и C треугольника ABC равны соответственно  $71^\circ$  и  $79^\circ$ . Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 8.

- 24 Биссектрисы углов B и C параллелограмма ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M — середина AD.

- 25 Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки  $AM = 4$  и  $MB = 8$ . Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.*

## Система оценивания экзаменационной работы по математике

## Часть 1

За правильный ответ на каждое из заданий 1-19 ставится 1 балл.

Номер задания	Правильный ответ
1	1275
2	7
3	48
4	75
5	55800
6	1,6
7	1
8	16
9	1,25
10	0,35
11	321
12	75
13	1
14	5
15	74
16	31
17	42
18	10
19	2

## Критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

## Часть 2

**20** Сократите дробь  $\frac{50^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-1}}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{50^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-1}} &= \frac{(25 \cdot 2)^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-1}} = \frac{25^n \cdot 2^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-1}} = \frac{(5^2)^n \cdot 2^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-1}} = \\ &= \frac{5^{2n} \cdot 2^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-1}} = 5 \cdot 2 = 10 \end{aligned}$$

Ответ: 10.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

- 21** Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 140 литров она заполняет на 3 минуты дольше, чем вторая труба?

Решение.

Пусть  $x$  литров в минуту - пропускает первая труба, тогда  $(x + 6)$  литров в минуту - пропускает вторая труба.

Т.к. объём резервуара 140 л., то время заполнения его первой трубой будет  $\frac{140}{x}$  мин., а второй трубой  $\frac{140}{x+6}$  мин.

Т.к. первая труба заполняет на 3 минуты дольше, то составим и решим уравнение:

$$\frac{140}{x} - \frac{140}{x+6} = 3 \quad | \cdot x(x+6)$$

$$140(x+6) - 140x - 3x(x+6) = 0$$

$$140x + 140 \cdot 6 - 140x - 3x^2 - 18x = 0$$

$$-3x^2 - 18x + 140 \cdot 6 = 0 \quad | \div (-3)$$

$$x^2 + 6x - 280 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-280) = 36 + 1120 = 1156$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{1156}}{2 \cdot 1} = 14; \quad x_2 = \frac{-6 - \sqrt{1156}}{2 \cdot 1} = -20 - \text{посторонний корень}$$

Ответ: 14 литров в минуту.

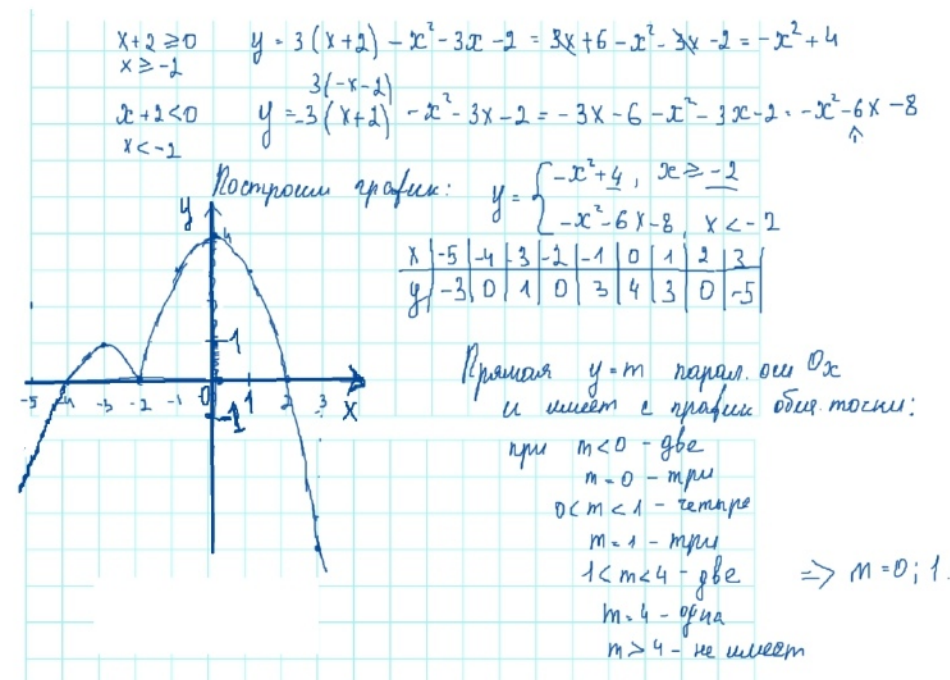
Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

- 22** Постройте график функции

$$y = 3|x + 2| - x^2 - 3x - 2.$$

Определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.



Ответ: 0; 1.

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл



- 23 Углы В и С треугольника ABC равны соответственно  $71^\circ$  и  $79^\circ$ . Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 8.

Решение.

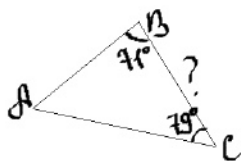
Найдём угол А:

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 180^\circ - (71^\circ + 79^\circ) = 30^\circ$$

По теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow BC = 2R \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

Ответ: 8.



Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

- 24 Биссектрисы углов В и С параллелограмма ABCD пересекаются в точке М, лежащей на стороне AD. Докажите, что М — середина AD.

Решение.

$$\angle ABM = \angle MBC \quad (\text{т.к. } BM - \text{ биссектриса})$$

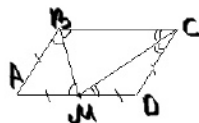
$$\angle CBM = \angle BMA \quad (\text{как накрестлежащие})$$

$\Rightarrow \angle ABM = \angle BMA \Rightarrow AB = AM$  т.к. в треугольнике напротив равных углов лежат равные стороны.

Аналогично в  $\triangle MCD$   $\angle MCD = \angle CMD$  и  $MD = DC$

$AB = DC$  (по свойству параллелограмма)  $\Rightarrow AM = MD \Rightarrow M$  — середина AD.

Что и требовалось доказать.



Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

- 25 Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки  $AM = 4$  и  $MB = 8$ . Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

Решение.

1) Рассмотрим  $\triangle DBC$  и  $\triangle DAC$ :

$$\angle DBC = \frac{1}{2} \cup AC \quad (\text{как вписанный угол})$$

$$\angle ACD = \frac{1}{2} \cup AC \quad (\text{как угол между касательной и хордой, проведёнными из одной точки})$$

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle DBC$$

$\angle D$  — общий

$$\Rightarrow \triangle DBC \sim \triangle DAC: \frac{BD}{CD} = \frac{DC}{DA} = \frac{CB}{AC}$$

2) Т.к. биссектриса угла треугольника делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BM}{AM} = \frac{8}{4} = 2$$

3) Следовательно:

$$\frac{DC}{DA} = \frac{BD}{CD} = 2$$

$$\text{Значит: } DC = 2DA; DA = \frac{1}{2}DC; BD = 2DC$$

$$4) BD = DA + AM + MB = DA + 4 + 8$$

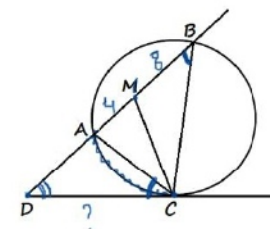
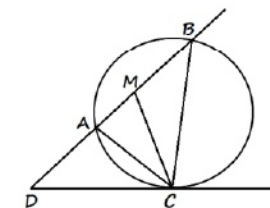
$$BD = DA + 12$$

$$2DC = \frac{1}{2}DC + 12$$

$$1.5DC = 12$$

$$DC = 8$$

Ответ: 8.



Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл