

1

Найдите корень уравнения $\log_7(1-x) = \log_7 5$.

586EF2

$$1-x = 5$$

$$x = -4$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2020
 Досрочная волна 2017

ОТВЕТ: - 4

2

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Биолог» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Биолог» начнёт игру с мячом все три раза.



A203F4

В В В

В В П

В П В

В П П

П П П

П П В

П В П

П В В

$$P = \frac{1}{8} = 0,125$$

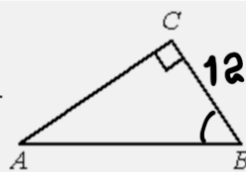
Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2019
 Досрочная волна 2017

ОТВЕТ: 0,125

3

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 12$, $\cos B = \frac{3}{5}$.



Найдите AB .

D74EE5

Источники:

ФИПИ (старый банк)

$$\cos B = \frac{3}{5} = \frac{12}{AB}$$

$$AB = \frac{12 \cdot 5}{3} = 20$$

ОТВЕТ: 20

4

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[15]{5} \cdot 5 \cdot \sqrt[10]{5}}{\sqrt[6]{5}}$.

D818A9

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Досрочная волна 2017

Досрочная волна 2015

СВОЙСТВА КОРНЕЙ

1 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

2 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

3 $(\sqrt{a})^2 = a$

4 $\sqrt{a^2} = |a|$

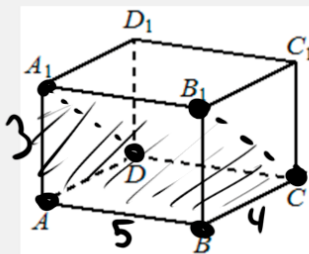
5 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$5^{\frac{1}{15} + 1 - \frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{30} + \frac{30}{30} - \frac{5}{30}} = 5^{\frac{27}{30}} = 5^{\frac{9}{10}}$$

ОТВЕТ: 5

5

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 5$, $BC = 4$, $AA_1 = 3$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1 .



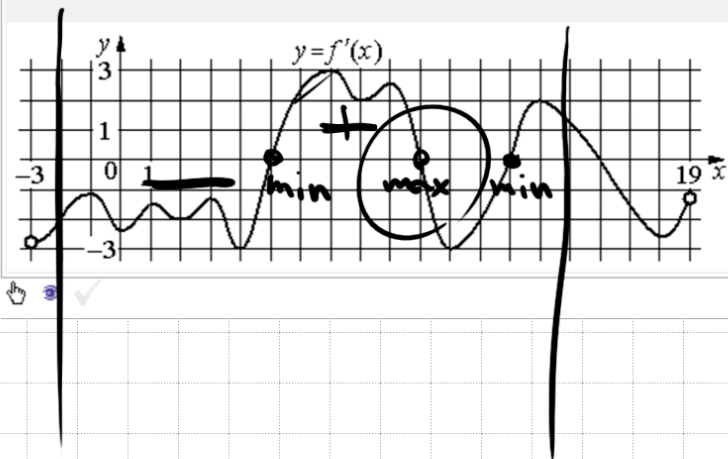
32AF22

$$V_{\text{иск.}} = \frac{1}{2} \cdot V_{\text{пар}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 30$$

ОТВЕТ: 30

6

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 15]$.



25CE62

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Досрочная волна 2017

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Основная волна 2021

Основная волна 2018

Основная волна 2017

ОТВЕТ: 1

7

В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой составляет $R_1 = 60$ Ом. Параллельно с ней в розетку предполагается подключить электрообогреватель, сопротивление которого R_2 (в Ом).

При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление вычисляется по формуле $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 10 Ом. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 электрообогревателя. Ответ дайте в омах.



2B06C4

$$R_{\text{общ}} \geq 10$$

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \geq 10$$

$$\frac{60 \cdot R_2}{60 + R_2} - \frac{10(60 + R_2)}{1} \geq 0$$

$$\frac{60R_2 - 600 - 10R_2}{60 + R_2} \geq 0$$

$$\frac{50R_2 - 600}{60 + R_2} \geq 0 \quad | \cdot (60 + R_2)$$

$$50R_2 - 600 \geq 0$$

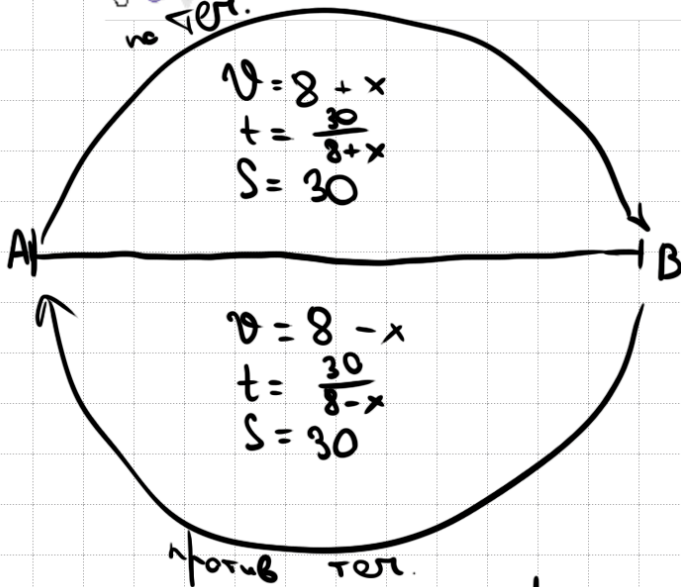
$$R_2 \geq 12$$

ОТВЕТ: 1 2

8

Баржа в 10 : 00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 4 часа, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 22 : 00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 8 км/ч.

↑ нет течения.



$$512 - 8x^2 = 480$$

$$32 = 8x^2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

C169EB

$$t_{\rightarrow} + t_{\text{стоянка}} + t_{\leftarrow} = 12$$

$$\frac{30}{8-x} + \frac{30}{8+x} = 12 - 4$$

$$\frac{240 - 30x + 240 + 30x}{64 - x^2} = \frac{8}{1}$$

ОТВЕТ: 2

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2021

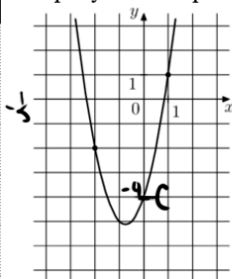
Источники:

ФИПИ (старый банк)

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Найдите $f(-5)$.

Источники:

Mathege



① $f(x) = 2x^2 + bx - 4$
подставим $c = -4$

② Берём точку $(1; 1)$
 $x = 1$
 $y = 1$

$$1 = 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 4$$

$$b = 3$$

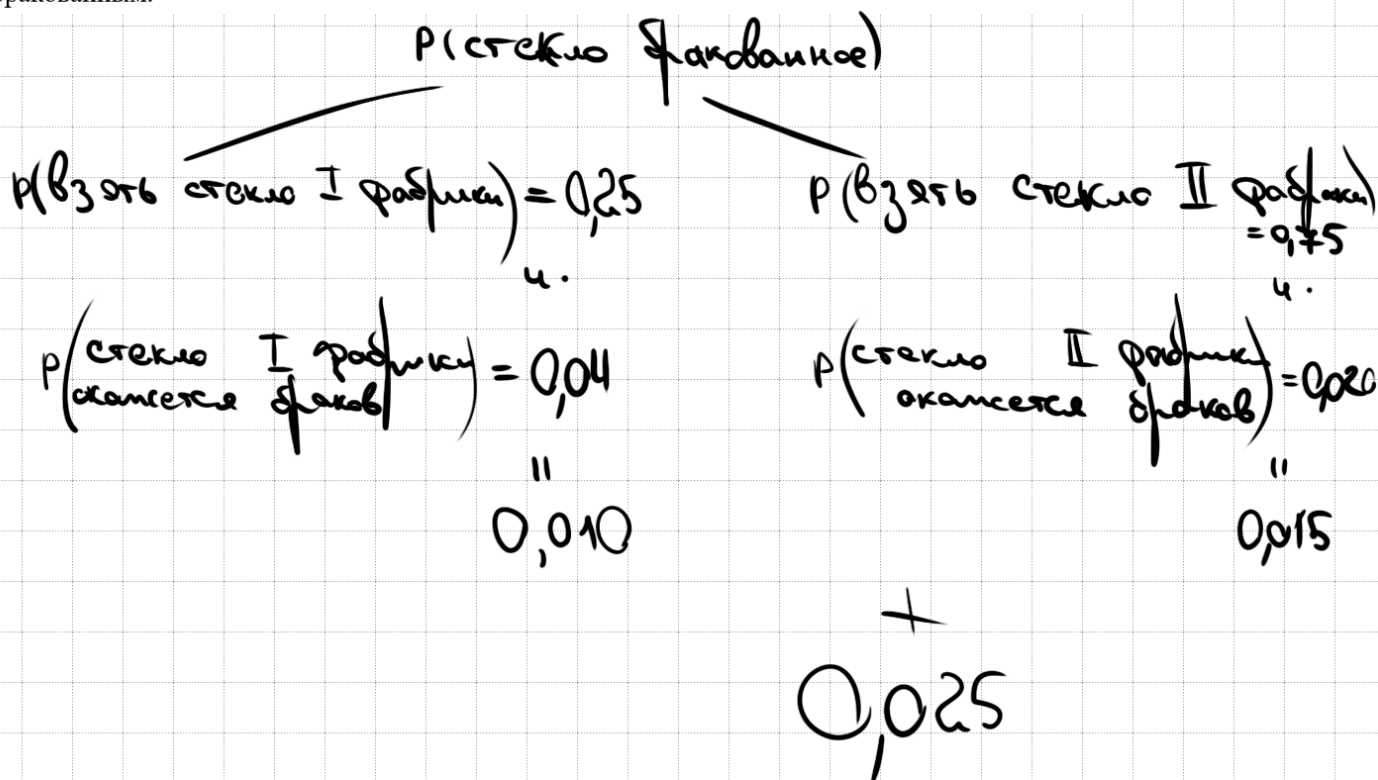
③ $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
 $f(-5) = 2 \cdot (-5)^2 - 15 - 4 = 31$

ОТВЕТ: 3 1

10 Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25% этих стекол, вторая – 75%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стекол, а вторая – 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Источники:

Mathege



ОТВЕТ: 0 , 0 2 5

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y' &= e^{2x} \cdot (2x)' - 4 \cdot e^x \\ &= 2 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x = 0 \\ &e^{2x} \cdot (2e^x - 4) = 0 \\ &e^x = 0 \\ &\emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^x &= 2 \\ e^x &= e^{\log_2 2} \\ x &= \log_2 e^2 = \ln 2 \approx 0.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad y(-1) &= \dots \\ y(\ln 2) &= e^{2 \log_2 2} - 4 \cdot e^{\log_2 2} + 4 = 4 - 4 \cdot 2 + 4 = 0 \\ y(2) &= \dots \end{aligned}$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
Пробный ЕГЭ 2018
Досрочная волна 2013

ПРОИЗВОДНЫЕ

1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$$a^{\log_a b} = b$$

$$0 \approx 2.7$$

ОТВЕТ: 0

а) Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} + \frac{2}{1} = 0.$$

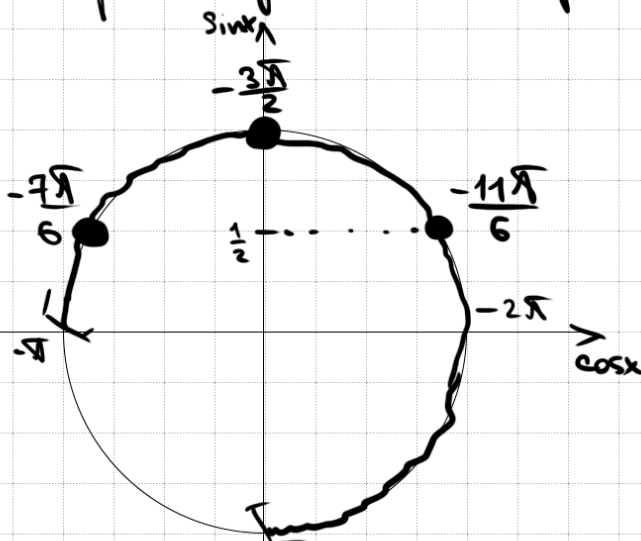
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

$$\text{а) } \frac{1 - 3 \sin x + 2 \sin^2 x}{\sin^2 x} = 0$$

$$\begin{aligned} \sin x &= 1 \\ x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{aligned}$$

б) Отберём корни с помощью окр-ти.



Получим ещё:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{3\pi}{2} \\ x_2 &= -\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6} \\ x_3 &= -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6} \end{aligned}$$

ОТВЕТ:

$$\begin{aligned} \text{а) } &\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \text{б) } &-\frac{7\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{11\pi}{6} \end{aligned}$$

Источники:

Основная волна (Резерв) 2020
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018
Основная волна (Резерв) 2014

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

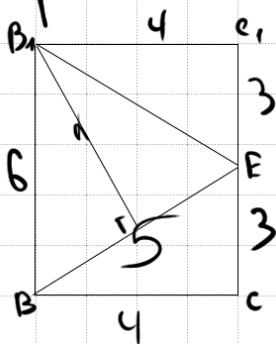
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6, AB = 4$.

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Горлин #14 2019
 Досрочная волна 2017

- а) Построение сеч.
 ① Пусть $A_1 S = A_1 B_1$
 $B_1 C_1 = C_1 F$
 Тогда $SF \parallel AC$
 $D_1 \in SF$
 ② Построим SB
 $SB \cap AA_1 = K$
 ③ Построим BF
 $BF \cap CC_1 = E$
 ④ Построим KD_1 и $D_1 E$
 $\Rightarrow D_1 E B K$ — сечение

ОТВЕТ: $\arctg \frac{5}{3}$

Рассмотрим $\triangle BB_1 E$:



$$S_{BB_1 E} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h = \frac{3+6}{2} \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$\frac{5}{2} \cdot h = \frac{24}{2} \quad h = 4,8$$

$BK = KD_1$ (т.к. сечение ромб)

$A_1 K$ — ср. линия $\triangle SB_1 B_1$
 $\Rightarrow K$ — середина $A_1 B_1$

Пусть $BK = y = KD_1$
 $A_1 K = x = AK$

Тогда $A_1 D_1 = \sqrt{y^2 - x^2} = AB$
 $\Rightarrow AB = A_1 D_1 = AD$
 $\Rightarrow ABCD$ — квадрат

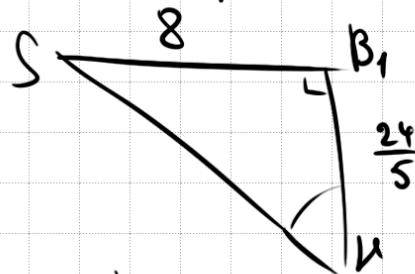
д) BE — прямая пересеч. на. с. α

Пусть $B_1 M$ — перп. к прямой BE

$B_1 M$ — проекция нормали SM на (BCC_1)

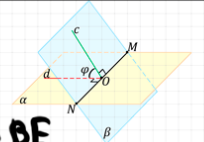
$\Rightarrow SM \perp BE$ (по ттп)

$\Rightarrow \angle SMB_1$ — искомым $\triangle SB_1 M$ — прямоугольн.



$$\tg \alpha = \frac{5}{3}$$

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ (СПОСОБ #1)



Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в этих плоскостях

$$\frac{1}{3^x - 1} + \frac{9^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x+3} + 3}{3^x - 9} \geq 3^{x+1}$$

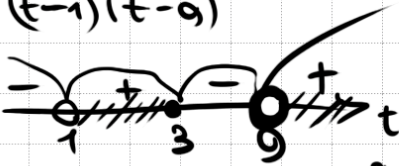
$$\frac{1}{3^x - 1} + \frac{9^x \cdot 9^{\frac{1}{2}} - 3^x \cdot 3^3 + 3}{3^x - 9} - 3^x \cdot 3 \geq 0$$

Пусть $3^x = t$ ($t > 0$)

$$\frac{1}{t-1} + \frac{3t^2 - 27t + 3}{t^2 - 9} - \frac{3t}{1} \geq 0$$

$$\frac{t-9 + 3t^2 - 27t + 3 - 3t(t^2 - 9)}{(t-1)(t-9)} \geq 0$$

$$\frac{4t - 12}{(t-1)(t-9)} \geq 0$$



$$\begin{cases} 1 < t \leq 3 \\ t > 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 3^0 < 3^x \leq 3^1 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x > 3^2 \\ x > 2 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(0; 1] \cup (2; +\infty)$

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

$$\cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг	1 = 1000 тыс	0,6 = 600 тыс	0,4	0,3	0,2	0,1	0
(в млн рублей)							

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

A25D53

Пусть r — % — число — день

Дата	сумма долга
15 янв	1 млн = 1000 тыс
1 ф	$1000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 1000 + 10r$
7 ф	\Rightarrow сб. в $400 + 10r$
15 ф	600 тыс
1 м	$600 + 6r$
7 м	\Rightarrow сб. $200 + 6r$
15 м	400 тыс
1 а	$400 + 4r$ \Rightarrow сб. $100 + 4r$
7 а	\Rightarrow сб.
15 а	300 тыс

1 м	300 + 3r
7 м	\Rightarrow сб. $100 + 3r$
15 м	200 тыс
1 а	200 + 2r
7 а	\Rightarrow сб. $100 + 2r$
15 а	100 тыс
1 июл	100 + 1r
7 июл	\Rightarrow сб. $100 + r$
15 июл	0

$$O.C.B. < 1200 \text{ тыс.}$$

$$\begin{aligned} 1000 + 26r &< 1200 \\ 26r &< 200 \\ 13r &< 100 \end{aligned}$$

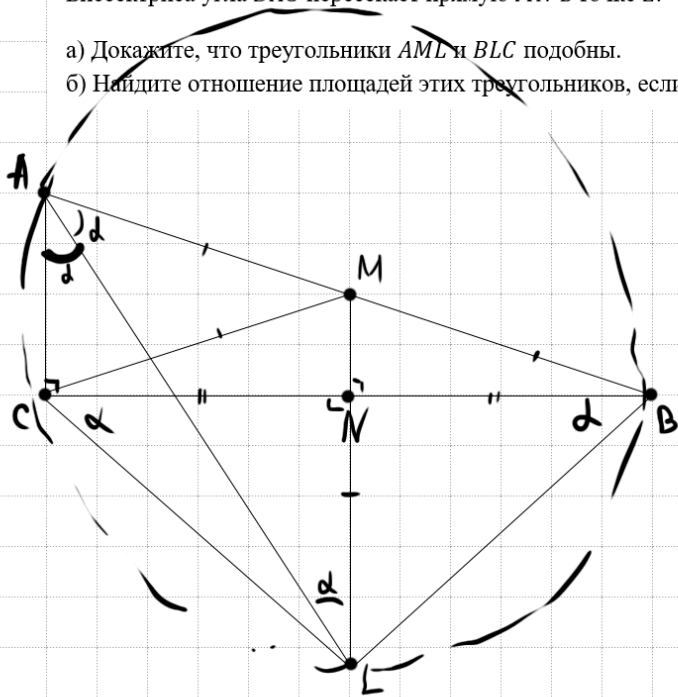
$$\begin{aligned} r &< 7 \frac{9}{13} \\ r_{\text{max}} &= 7 \end{aligned}$$

ОТВЕТ: 7

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L .

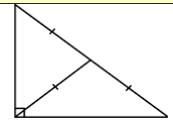
а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos \angle BAC = \frac{7}{25}$.



- а) ① MN — ср. линия $\triangle ABC$
 $\Rightarrow ML \parallel AC$
 $\Rightarrow \angle CAL = \angle ALM = \alpha$
 $\Rightarrow \triangle AML$ — равноб.

ОТВЕТ: $\frac{25}{36}$



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

$$\Rightarrow AM = BM = ML$$

- ② CM — медиана в прямоугольном $\triangle ABC$
 $\Rightarrow CM = AM = BM = ML$
 \Rightarrow Можно построить окр-ть, проходящую через точки A, B, L, C

- ③ $\angle CAL = \angle CBL$ (инф. на одну дугу)

- ④ $\triangle BCL$ — равноб. (т.к. LN — высота медианы)

$$\Rightarrow \angle BCL = \alpha$$

$$\Rightarrow \triangle AML \sim \triangle BLC \text{ по 2 углам } (\alpha \text{ и } \alpha)$$

б) ① $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$

$$1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{7}{25}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

② $k = \frac{AM}{BL} = \frac{\frac{1}{2}AB}{BL} = \frac{AB}{2BL}$

③ $\triangle ABL$ — прямоугольный, т.к. $\angle ALB$ инф. на диаметр

$$\sin \alpha = \frac{BL}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AB}{2BL} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2BL} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{S_{AML}}{S_{BLC}} = k^2 = \frac{25}{36}$$

17

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a-x+2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

Источники:

ФИПИ (старый банк)
Досрочная волна 2013

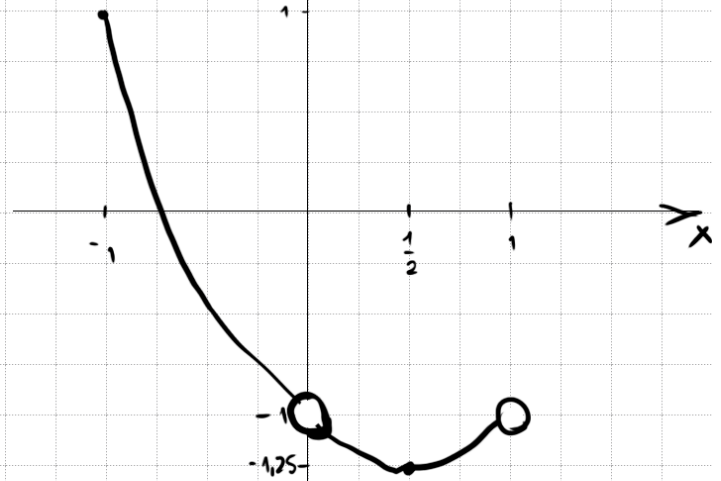
$$\begin{cases} (1-x)^2 = a-x+2 \\ 1-x > 0 \\ 1-x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + x - 2 = a \\ x < 1 \\ x \neq 0 \\ a = x^2 - x - 1 \end{cases} \quad \left(x_0 = \frac{1}{2} \quad a_0 = -1,25 \right)$$

ОТВЕТ:

$$[-1,25; -1) \cup (-1; 1]$$

8072AD



Если $a < -1,25$

$$\begin{aligned} a &= -1,25 \\ -1,25 < a < -1 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 < a \leq 1 \\ a > 1 \end{aligned}$$

нет корней
1 к.
2 к.
нет корней
1 к.
нет корней

18

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке убывания. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Яшенко 2018
Яшенко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2017
Основная волна 2013

а) Задуманные

1 1 1 1 1 1
1 2 4
1 1 2 3

Набор

1 2 3 4 5 6 7

б) Задуманные

① Среди задуманных точно есть 7 9 11

② 14 можно получить двумя способами

7 7 7 9 11

7 9 11 14

③ 16 среди задуманных нет, т.к. сумма будет лишь больше и 18 = 20 и т.д.

д) 1 - первое задуманное
22 - сумма всех задуманных
⇒ 21 - сумма всех задуманных, кроме первого, но в наборе числа 21 нет
⇒ не существует

ОТВЕТ:

а) 1 1 1 1 1 1

б) нет

в) 7 7 7 9 11 или 7 9 11 14

D3A30F