Критерии и ответы к диагностической работе

Ответы

вариант	1	2	3	4	5	6	7
1	А+Б+ В−Г−	а) DEF б) ABC	$CD = 7$ $OA = 12$	$\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$	2	а) $2x + 3y - 12 = 0$ б) $x + 3y - 6 = 0$ в) 40	800
2	А−Б+ В−Г+	а) ADF б) CDE	$CD = 27$ $OA = 18$	$\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c}$	2	а) $5x + 2y - 20 = 0$ б) $5x + 4y - 20 = 0$ в) 41	700

вариант	1	2	3	4	5	6	7
3	А−Б+ В−Г+	$OC = 4$ $BE = 6$	18	$3:7$	$\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b}$	а) $2x - 3y - 6 = 0$ б) $5x + y + 11 = 0$	7,5
4	А+Б+ В−Г−	$OB = 8$ $CD = 10$	36	$2:3$	$\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b}$	а) $5x + y - 5 = 0$ б) $x + 6y + 7 = 0$	12,5

Критерии

В задаче 2 вариантов 1 и 2 каждый из пунктов стоит 2 балла, порядок вершин неважен.

В задаче 3 вариантов 1 и 2 и задаче 2 вариантов 3 и 4 нахождение первого из двух отрезков оценивается в 2 балла, нахождение второго — в 1 балл.

В задаче 6 вариантов 1 и 2 за пункты а) и б) по 2 балла, в) — 1 балл.
В задаче 6 вариантов 3 и 4 за пункты а) и б) по 2 балла.

В задачах на уравнение прямой ответ считать верным с точностью до домножения на коэффициент.

Во всех задачах принимается ответ в любой форме, если он правильный.

Решения письменной части вариантов 1 и 2

Задача 8.

Ответы:
вариант 1 $\quad 7$;
вариант 2 $\quad 5$.

Решение для варианта 1. Обозначим отрезок BC через x и запишем теорему косинусов для треугольника ABC:

$$8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 120^\circ = 13^2.$$

Сводим его к квадратному уравнению $x^2 + 8x - 105 = 0$. Его корнями являются числа 7 и -15. Очевидно, второй из них не может быть длиной отрезка, значит ответом является 7.

Критерии. За правильно написанную теорему косинусов 2 балла.
Полное решение — 4 балла.
Для варианта 2: уравнение из т. косинусов

$$3 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 120^\circ = 7^2$$

Сводится к квадратному уравнению $x^2 + 3x - 40 = 0$, корни которого 5 и -8.

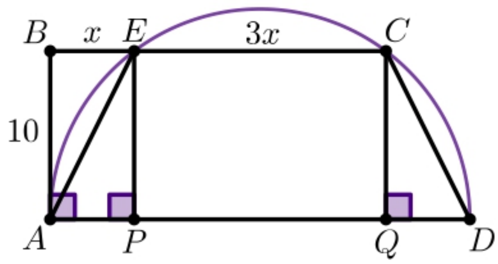
Задача 9.

Решение. 1) $\angle BAC = \angle DAC$, как опирающиеся на равные хорды.
2) $\angle BCA = \angle BDA$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.
3) Треугольники ABC и APD подобны по первому признаку подобия.
Значит, равны отношения их соответственных сторон $AB : BC = AP : PD$.

Критерии. Если отмечены нужные вписанные углы, приводящие к подобию — 1 балл.
Подобие треугольников ABC и APD — 2 балла.
Подобие треугольников ABP и DCP — 2 балла.
Полное решение — 5 баллов.

Для варианта 2:
Подобие DAB и DQC — 2 балла.
Подобие DAQ и CBQ — 2 балла.

Задача 10.

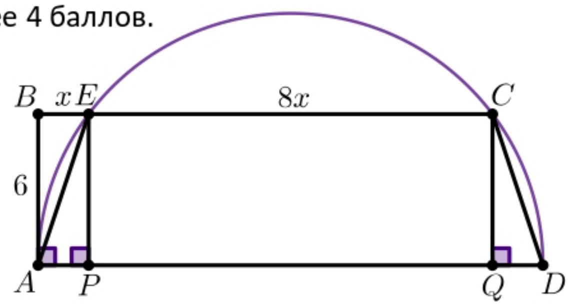


Ответы:
Вариант 1 225;
Вариант 2 114.

Решение.
Пусть $BE = x$. Тогда $BC = 4x$.
1) Прямая AB касается проведённой окружности, так как $\angle BAD = 90^\circ$, а AD — диаметр.
2) По теореме о секущей и касательной $AB^2 = BE \cdot BC$.
Значит, $100 = 4x^2$. Получаем, что $BE = 5$, $BC = 20$.
3) Трапеция $AECD$ вписана в окружность, а значит, она равнобокая. Проведём в этой трапеции высоты EP и CQ. Понятно, что $QD = AP = BE = 5$. Значит, $AP = 25$.
4) $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot AB = \frac{20+25}{2} \cdot 10 = 225$.

Критерии. Если доказано, что AB — касательная к окружности — 1 балл.
Найдены отрезки BE и EC — 3 балла.
Найдены оба основания трапеции — 4 балла.
Если в конце допущена арифметическая ошибка — 5 баллов.
Неверная формула площади трапеции — не более 4 баллов.
Полное решение — 6 баллов.

Для варианта 2: $BE = 2$, $EC = 16$.



Решения письменной части вариантов 3 и 4

Задача 8.

Ответы:

вариант 3 нельзя;

вариант 4 можно.

Решение.

1) Для того, чтобы около четырёхугольника $ABCD$ можно было описать окружность необходимо и достаточно, чтобы угол ABC был равен $120°$, то есть $\cos\angle ABC = -\frac{1}{2}$.

2) Найдём $\cos\angle ABC$ из теоремы косинусов в треугольнике ABC:

$$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos\angle ABC$$
$$36 = 9 + 16 - 24\cdot\cos\angle ABC$$
$$\cos\angle ABC = -\frac{11}{24} \neq -\frac{1}{2}$$

Значит, около четырёхугольника $ABCD$ нельзя описать окружность.

Критерии.

Полное решение — 4 балла.

В конце допущена арифметическая ошибка — 3 балла.

Верно написана теорема косинусов для угла B, но решение не доведено — 2 балла.

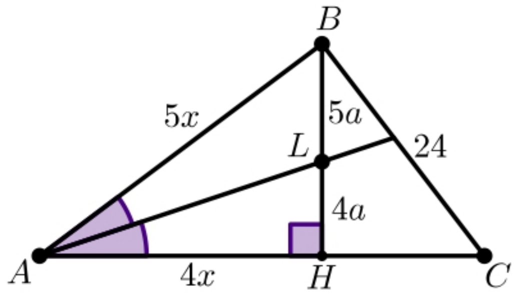
Неверно написана теорема косинусов, но есть правильный план решения — 1 балл.

Для варианта 4:

Теорема косинусов

$$13^2 = 7^2 + 8^2 - 2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos\angle ABC$$
$$\cos\angle ABC = -\frac{1}{2}$$

Задача 9.



Ответы:

вариант 3 20;

вариант 4 13.

Решение.

1) Введём обозначения, как на рисунке. По свойству биссектрисы имеем $AB : AH = BL : LH = 5 : 4$. Значит, $\cos\angle BAC = AH : AB = 0{,}8$.

2) Пользуясь основным тригонометрическим тождеством и тем, что $\angle BAC < 180°$, найдём $\sin\angle BAC = \sqrt{1-\sin^2\angle A} = \sqrt{1-0{,}8^2} = 0{,}6$.

3) Радиус описанной окружности треугольника ABC тогда можно найти по формуле

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{24}{0{,}6} = 40 \Rightarrow R = 20.$$

Критерии.

Полное решение — 5 баллов.

Использовано замечательное свойство биссектрисы — 1 балл.

Найден $\cos\angle BAC$ — 2 балла.

Найден диаметр вместо радиуса — 4 балла.

Для варианта 4:

$$\cos\angle BAC = \frac{12}{13} \quad \sin\angle BAC = \frac{5}{13}$$

Задача 10

Решение.
1) Поскольку стороны угла симметричны относительно биссектрисы этого угла, то точка P лежит на прямой OD, а точка Q — на прямой OA, причём $OA = OP$, $OD = OQ$.
2) Известно, что диагонали трапеции делятся точкой их пересечения в равных отношениях, а значит, $\frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OA}$, то есть $OC \cdot OD = OB \cdot OA$.
3) Значит, $OC \cdot OQ = OC \cdot OD = OB \cdot OA = OB \cdot OP$, то есть около четырёхугольника $QBCP$ можно описать окружность.
4) Тогда $\angle ACP = \angle QCP = \angle PBQ = \angle DBQ$, как вписанные, опирающиеся на одну дугу.

Критерии.
Полное решение — 6 баллов.
Получена вписанность четырёхугольника $QBCP$ — 3 балла.