ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА
ВАРИАНТ 1 (ОСНОВНОЙ)

В задачах 1-7 достаточно указать ответ.

1. **(3 балла)** Какие утверждения верны?
   А. Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.
   Б. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяли соответственно точки M и K, причем M — середина стороны AB, а длина отрезка MK равна половине длины стороны AC. Тогда MK — средняя линия треугольника ABC.
   В. Если углы трапеции, взятые последовательно, относятся как 2 : 3 : 3 : 4, то трапеция равнобокая.
   Г. Дан параллелограмм $ABCD$, AH — высота к стороне BC, BN высота к стороне CD. Тогда $AH : BN = CD : BC$.

   Ответ: А, Г

   Критерии: 3б – указаны верные ответы;
   1б – одна ошибка (два верных + один неверный/1 верный + 1 неверный);
   0б – в остальных случаях.

2. **(3 балла)** Найдите острый угол параллелограмма, если сумма двух его углов втрое больше суммы двух других его углов.

   Ответ: 45°
   Критерии: 3б – указан верный ответ;
   0б – в остальных случаях.

3. **(3 балла)** Найдите среднюю линию трапеции, если известно, что она в полтора раза меньше большего основания и на 3 см больше меньшего.

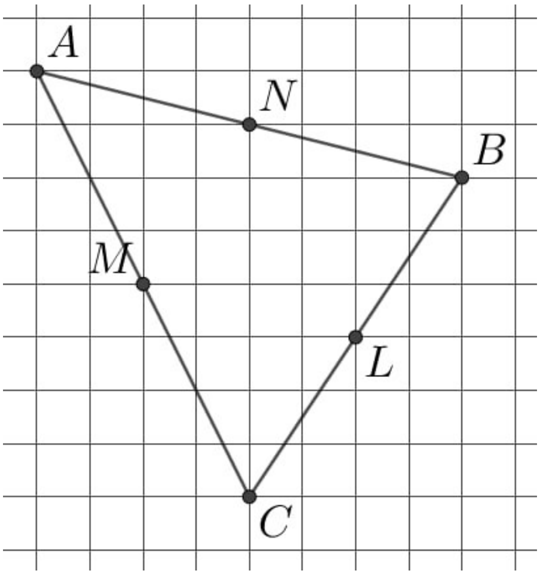
   Ответ: 6 см
   Критерии: 3б – указан верный ответ;
   0б – в остальных случаях.

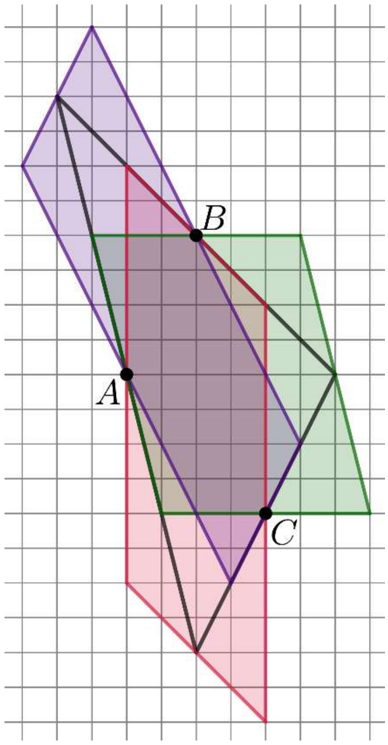
4. **(по 2 балла за каждый пункт)** Дан треугольник ABC, $AB = 10$, $AC = 13$, BH — высота и ее длина равна 7. Найдите:
   а) площадь треугольника ABC; **б)** длину высоты, проведенной к стороне AB.
   а) Ответ: 45,5 **б) Ответ: 9,1.**
   Критерии: 2б – указан верный ответ;
   0б – в остальных случаях.

5. **(по 2 балла за каждый пункт) а)** На рисунке слева отметьте точки A, B, C в узлах сетки так, чтобы данные точки L, M, N были серединами сторон треугольника ABC.

б) На рисунке справа отметьте точки P, Q, R, S в узлах сетки так, чтобы данные точки A, B, C были серединами сторон параллелограмма $PQRS$.

В каждом из пунктов достаточно привести один пример.





Критерии: 2б – фигура построена верно;
0б – в остальных случаях.

6. **(4 балла)** Треугольник со сторонами 36, 48, 64 подобен треугольнику со сторонами 18, 24, x. Чему может быть равно значение x?

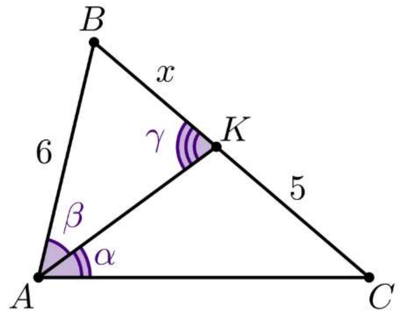
Ответ: 32 или 13,5
Критерии: 4б – верно указаны оба ответа;
2б – указан только один из двух случаев;
2б – указаны 2 ответа, один из которых верный;
0б – в остальных случаях.

Старая версия. Треугольник со сторонами 4, 10, 25 подобен треугольнику со сторонами 2, 5, x. Чему может быть равно значение x?
Ответ: 0,8 или 12,5
Критерии: 4б – верно указаны оба ответа;
4б – указано, что такого треугольника не существует
2б – указан только один из двух случаев;
2б – указаны 2 ответа, один из которых верный;
0б – в остальных случаях.

7. **(4 балла)** На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки P, Q и R соответственно таким образом, что $PQ \parallel AC$, а $QR \parallel AB$. Найдите отрезок AP, если $BP = 5$, $AR = 8$, $RC = 4$.

Ответ: 2,5
Критерии: 4б – указан верный ответ;
0б – в остальных случаях.

В задачах 8-10 необходимо записать решение.



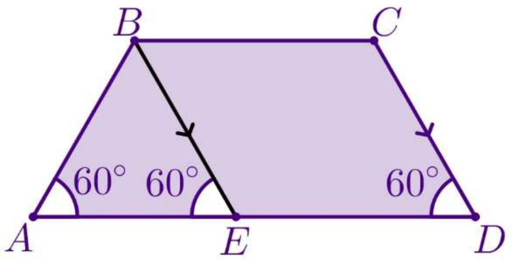
8. **(4 балла)** На рисунке справа $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$. Найдите x.

Ответ:4. Решение.

1. $\angle\gamma = \angle ACK + \angle\alpha$, т.к. является внешним углом ΔACK
2. $\angle\gamma = \angle\alpha + \angle\beta$ по условию, следовательно, $\angle\beta = \angle ACK$
3. $\Delta ABC \sim \Delta KBA$ по двум углам:
   $\angle\beta = \angle ACK$ (п.2);
   $\angle B$ – общий.
   Следовательно, $\frac{AB}{KB} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{x+5}{6} \Rightarrow x^2 + 5x = 36 \Rightarrow x_1 = -9$ – посторонний корень, $x_2 = 4 \Rightarrow x = 4$

Критерии: 4б – решение верное;
2б – доказано, что треугольники подобны, далее решение неверно или отсутствует
0б – в остальных случаях.

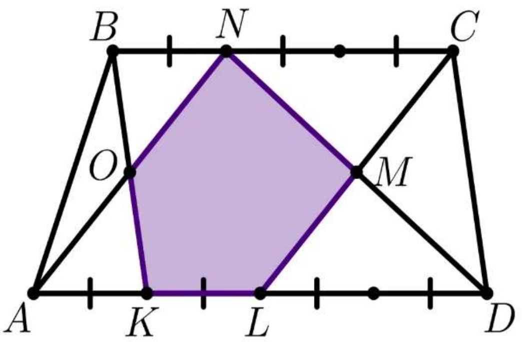
9. **(4 балла)** В равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $\angle A = 60°$. Докажите, что $BC = AD - CD$.



Решение.

1. Проведем BE параллельно CD, E – точка на AD.
2. $\angle BEA = \angle CDA = 60°$ как соответственные углы при параллельных прямых BE и CD и секущей AD
3. $BCDE$ – параллелограмм по определению, т.к. $BC \| ED$ как основания трапеции, $BE \| CD$ по построению (п. 1). Следовательно, $BC = ED$, $BE = CD = AB$ по свойству параллелограмма и из условия.
4. Рассмотрим ΔABE: $\angle BEA = 60°$ по п.2, $BE = AB$ по п.3.
   Следовательно, ΔABE – равносторонний, то есть $AE = AB = CD$.
5. $AD = AE + ED = CD + BC$ (п. 3-4), следовательно. $BC = AD - CD$. *ч.т.д.*

Критерии: 4б – полностью верное решение;
3б – решение в целом верное, но не все переходы обоснованы;
1б – сделано верное дополнительное построение дальнейших продвижений нет или решение не верно;
0б – в остальных случаях.



10. **(4 балла)** На рисунке справа верхнее основание разбито на три равные части, а нижнее на четыре такие же части. Площадь трапеции $ABCD$ равна 28. Найдите площадь закрашенного пятиугольника.

Ответ: 10. Решение.

1. $ABNK$ – параллелограмм ($BN \| AK$, $BN = AK$), следовательно $S_{AOK} = S_{AOB} = S_{BON} = S_{NOK} = S$.
2. Из п.1 следует, что $S_{AKN} = S_{AOK} + S_{NOK} = 2S$
3. $S_{AKN} = S_{KNL} = 2S$ ($\Delta\, AKN$ и $\Delta\, KNL$ – имеют общую высоту, проведенную к равным сторонам)
4. $NCDL$ – параллелограмм ($DL \| NC$, $DL = NC$), следовательно, $S_{NLM} = S_{MLD} = S_{MNC} = S_{CMD}$.
5. $S_{NLD} = 2S_{KNL} = 4S$ ($\Delta\, NLD$ и $\Delta\, KNL$ – имеют общую высоту, проведенную к сторонам $LD = 2KL$)
6. Из п.4-5 следует, что $S_{NLM} = S_{NLD}/2 = 2S$, а $S_{NCDL} = 4S_{NLM} = 8S$

7. $S_{NOKLM} = 5S$, $S_{ABCD} = S_{ABNK} + S_{KLN} + S_{NLCD} = 4S + 2S + 8S = 14S = 28$. $S = 2$, а $S_{NOKLM} = 5S = 10$.

Указание. *Также возможно решение, аналогичное решению задачи 10 в 3-4 вариантах.*

Критерии: 4б – полностью верное решение;

3б – решение в целом верное, но не все переходы обоснованы;

3б – решение в целом верное, но допущена одна арифметическая ошибка;

1б – замечено, что ABNK и *NCDL* – параллелограммы, диагонали разбивают их на равные по площади части, но далее решение неверно или отсутствует*;*

0б – в остальных случаях.

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА ВАРИАНТ 2 (ОСНОВНОЙ)

В задачах 1-7 достаточно указать ответ.

1. **(3 балла)** Какие утверждения верны?
   А. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.
   Б. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции и параллельный её основаниям равен полусумме этих оснований.
   В. Если в четырехугольнике две стороны параллельны, а две другие равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.
   Г. Если в одном прямоугольном треугольнике катеты имеют длины 1 см и 2 см, а в другом прямоугольном треугольнике катеты имеют длины 2 см и 4 см, то эти треугольники подобны.

   Ответ: А, Г
   Критерии: 3б – указаны верные ответы;
   1б – одна ошибка (два верных + один неверный/1 верный+1 неверный);
   0б – в остальных случаях.

   Замечание. *В старой версии пункты В, Г были в обратном порядке!!! Для нее верный ответ: А, В.*

2. **(3 балла)** Найдите тупой угол параллелограмма, если сумма двух его углов в пять раз меньше суммы двух других его углов.

   Ответ: 150°
   Критерии: 3б – указан верный ответ;
   0б – в остальных случаях.

3. **(3 балла)** Найдите среднюю линию трапеции, если известно, что она в 2,5 раза больше меньшего основания и на 6 см меньше большего.

   Ответ: 10.
   Критерии: 3б – указан верный ответ;
   0б – в остальных случаях.

4. **(по 2 балла за каждый пункт)** Дан треугольник ABC, $AB = 10$, $AC = 11$, BH — высота и ее длина равна 9. Найдите:
   а) площадь треугольника ABC; б) длину высоты, проведенной к стороне AB.

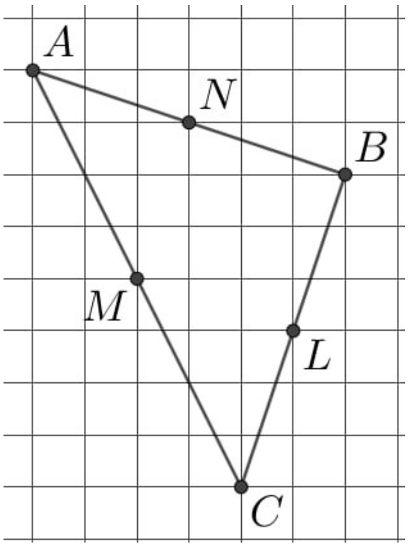
   а) Ответ: 49,5 **б) Ответ: 9,9**

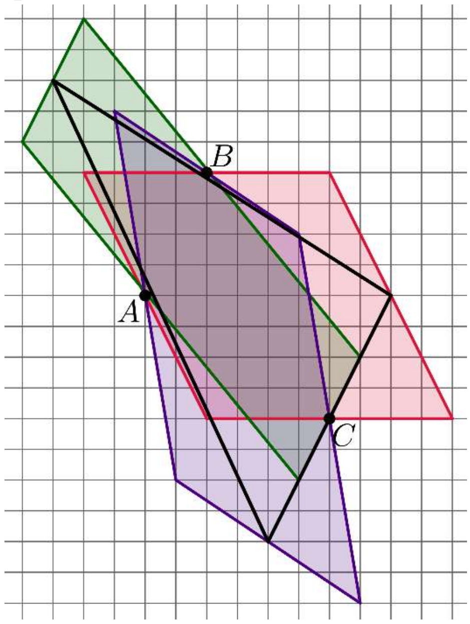
   Критерии: 2б – указан верный ответ;
   0б – в остальных случаях.

5. **(по 2 балла за каждый пункт) а)** На рисунке слева отметьте точки A, B, C в узлах сетки так, чтобы данные точки L, M, N были серединами сторон треугольника ABC.

   б) На рисунке справа отметьте точки P, Q, R, S в узлах сетки так, чтобы данные точки A, B, C были серединами сторон параллелограмма $PQRS$.

   В каждом из пунктов достаточно привести один пример.





Критерии: 2б – фигура построена верно;
0б – в остальных случаях.

6. **(4 балла)** Треугольник со сторонами 16, 20, 25 подобен треугольнику со сторонами 8, 10, x. Чему может быть равно значение x?

   Ответ: 12,5 или 6,4.

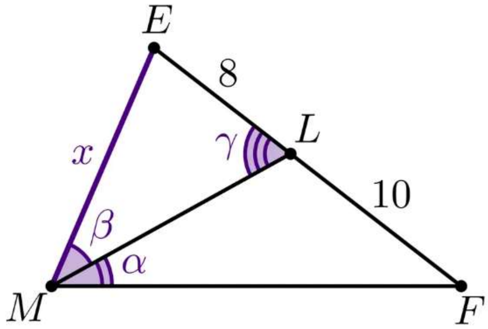
   Критерии: 4б – верно указаны оба ответа;
   2б – указан только один из двух случаев;
   2б – указаны 2 ответа, один из которых верный;
   0б – в остальных случаях.

7. **(4 балла)** На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки K, L и M соответственно таким образом, что $KL \parallel AC$, $LM \parallel AB$. Найдите отрезок AK, если $BK = 5$, $AM = 4$, $MC = 6$.

   Ответ: 7,5
   Критерии: 4б – указан верный ответ;
   0б – в остальных случаях.

В задачах 8-10 необходимо записать решение.

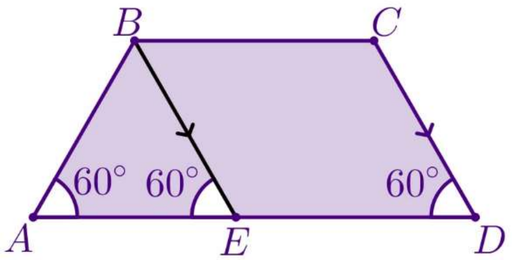
8. **(4 балла)** На рисунке справа $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$. Найдите x.
   Ответ:12. Решение.
   1. $\angle\gamma = \angle MFL + \angle\alpha$, т.к. является внешним углом ΔMFL
   2. $\angle\gamma = \angle\alpha + \angle\beta$ по условию, следовательно, $\angle\beta = \angle MFL$
   3. $\Delta MEF \sim \Delta LEM$ по двум углам:
      $\angle\beta = \angle MFL$ (п.2);
      $\angle E$ – общий.



Следовательно, $\frac{ME}{LE} = \frac{EF}{ME} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{18}{x} \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$

Критерии: 4б – решение верное;
2б – доказано, что треугольники подобны, далее решение неверно или отсутствует
0б – в остальных случаях.

9. **(4 балла)** В равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $BC = AD - CD$. Докажите, что $\angle A = 60°$.

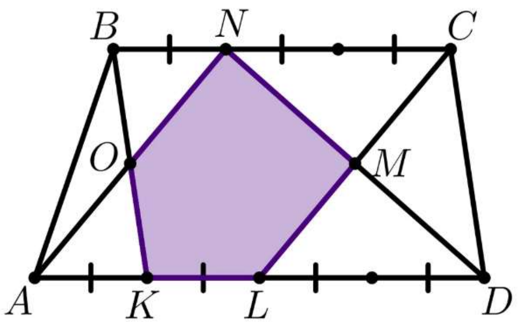


Решение.

1. Проведем *BE* параллельно *CD, E* – точка на *AD.*
2. *BCDE* – параллелограмм по определению, т.к. *BC*||*ED* как основания трапеции, *BE*||*CD* по построению (п. 1). Следовательно, *BC* = *ED, BE* = *CD* = *AB* по свойству параллелограмма и из условия.
3. *BC* = *AD* – *CD,* следовательно *AD* = *CD* + *BC* = *ED* + *CD* = *ED* + *BE* = *ED* + *AB*
4. Получаем, что *AB* = *BE* = *AE*, т.е. Δ*ABE* – равносторонний, то есть $\angle A = 60°$, ч.*т.д.*

Критерии: 4б – полностью верное решение;
3б – решение в целом верное, но не все переходы обоснованы;
1б – сделано верное дополнительное построение дальнейших продвижений нет или решение не верно;
0б – в остальных случаях.

10. **(4 балла)** На рисунке справа верхнее основание разбито на три равные части, а нижнее на четыре такие же части. Площадь трапеции *ABCD* равна 14. Найдите площадь закрашенного пятиугольника.



Ответ: 5. Решение.

1. *ABNK* – параллелограмм (*BN* || *AK*, *BN* = *AK*), следовательно $S_{AOK} = S_{AOB} = S_{BON} = S_{NOK} = S$.
2. Из п.1 следует, что $S_{AKN} = S_{AOK} + S_{NOK} = 2S$
3. $S_{AKN} = S_{KNL} = 2S$ ($\Delta\, AKN$ и $\Delta\, KNL$ – имеют общую высоту, проведенную к равным сторонам)
4. *NCDL* – параллелограмм (*DL* || *NC*, *DL* = *NC*), следовательно, $S_{NLM} = S_{MLD} = S_{MNC} = S_{CMD}$.
5. $S_{NLD} = 2S_{KNL} = 4S$ ($\Delta\, NLD$ и $\Delta\, KNL$ – имеют общую высоту, проведенную к сторонам *LD* = 2*KL*)
6. Из п.4-5 следует, что $S_{NLM} = S_{NLD}/2 = 2S$, а $S_{NCDL} = 4S_{NLM} = 8S$
7. $S_{NOKLM} = 5S$, $S_{ABCD} = S_{ABNK} + S_{KLN} + S_{NLCD} = 4S + 2S + 8S = 14S = 14$. $S = 1$, а $S_{NOKLM} = 5S = 5$.

Указание. *Также возможно решение, аналогичное решению задачи 10 в 3-4 вариантах.*

Критерии: 4б – полностью верное решение;
3б – решение в целом верное, но не все переходы обоснованы;
3б – решение в целом верное, но допущена одна арифметическая ошибка;
1б – замечено, что ABNK и *NCDL* – параллелограммы, диагонали разбивают их на равные по площади части, но далее решение неверно или отсутствует*;*
0б – в остальных случаях.

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА
ВАРИАНТ 3 (ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ)

В задачах 1-7 достаточно указать ответ.

1. **(3 балла)** Какие утверждения верны?
   А. Если диагонали четырёхугольника равны и перпендикулярны, то это квадрат.
   Б. Средняя линия трапеции делит её площадь пополам.
   В. Серединный перпендикуляр к гипотенузе отсекает от прямоугольного треугольника треугольник, подобный исходному.
   Г. Если прямая разбивает одну боковую сторону трапеции на отрезки 10 см и 15 см, а другую боковую сторону трапеции на отрезки 8 см и 12 см, то эта прямая обязательно параллельна основаниям трапеции.

   Ответ: В

   Критерии: 3б – указан верный ответ;
   1б – одна ошибка (1 верный+1 неверный);
   0б – в остальных случаях.

2. **(4 балла)** В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 6. Из вершин B и C проведены биссектрисы углов, пересекающие сторону AD в точках X и Y соответственно. Найдите длину AD, если $XY = 2$. Разберите все случаи.

   Ответ: 10 или 14

   Критерии: 4б – верно указаны оба ответа;
   2б – указан только один из двух случаев;
   2б – указаны 2 ответа, один из которых верный;
   0б – в остальных случаях.

3. **(3 балла)** Дан четырёхугольник, сумма диагоналей которого равна 18. Найдите периметр четырёхугольника с вершинами в серединах сторон данного.

   Ответ: 18

   Критерии: 3б – указан верный ответ;
   0б – в остальных случаях.

4. **(по 2 балла за каждый пункт)** Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 10$, $BC = 13$, BH — высота и ее длина равна 7. Найдите:
   а) площадь параллелограмма $ABCD$;
   б) длину высоты, проведенной к стороне AB.

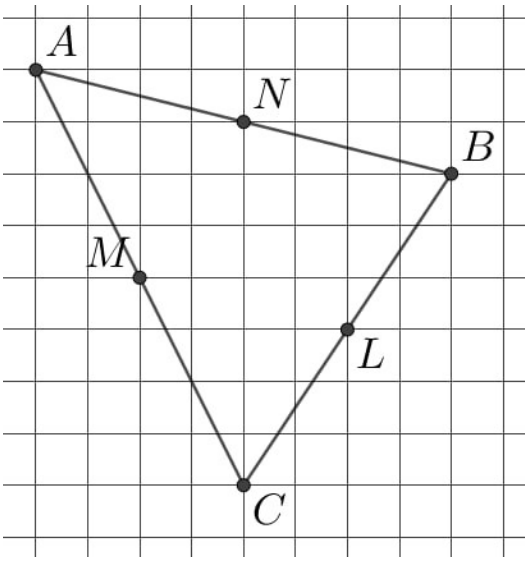
   а) Ответ: 91 или 70, **б) Ответ: 9,1 или 7**

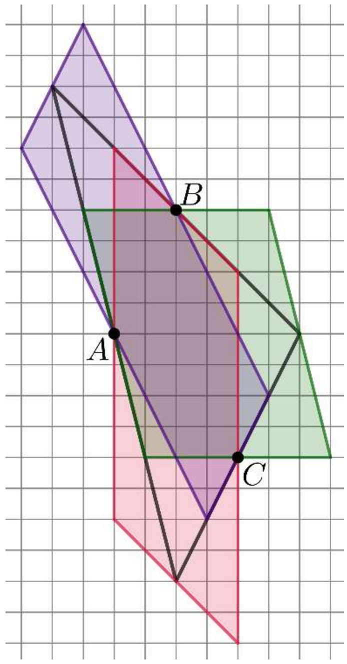
   Критерии: 2б – указан верный ответ;

   1б – указан один из ответов;
   0б – в остальных случаях.

5. **(по 2 балла за каждый пункт) а)** На рисунке слева отметьте точки A, B, C в узлах клеток так, чтобы данные точки L, M, N были серединами сторон треугольника ABC.
б) На рисунке справа отметьте точки P, Q, R, S в узлах сетки так, чтобы данные точки A, B, C были серединами сторон параллелограмма $PQRS$.

В каждом из пунктов достаточно привести один пример.





Критерии: 2б – фигура построена верно;
0б – в остальных случаях.

6. **(4 балла)** Треугольник со сторонами 16, 20, 25 подобен треугольнику со сторонами 8, 10, x. Чему может быть равно значение x?

Ответ: 12,5 или 6,4.

Критерии: 4б – верно указаны оба ответа;
2б – указан только один из двух случаев;
2б – указаны 2 ответа, один из которых верный;
0б – в остальных случаях.

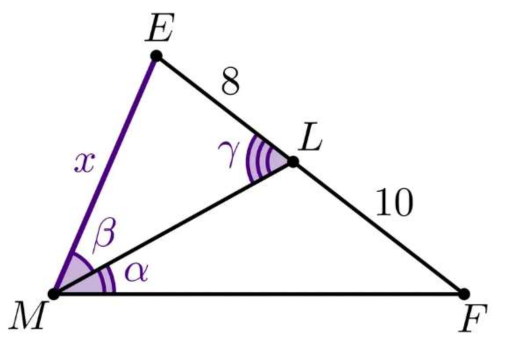
7. **(4 балла)** На сторонах AC и AB треугольника ABC выбраны точки D и E таким образом, что $AD : DC = 1 : 2$, $AE : EB = 1 : 5$. Найдите BC, если $AD = 3$ и угол AED — прямой.

Ответ: 9

Критерии: 4б – указан верный ответ;
0б – в остальных случаях.

В задачах 8-10 необходимо записать решение.

8. **(4 балла)** На рисунке справа $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$. Найдите x.



Ответ:12. Решение.

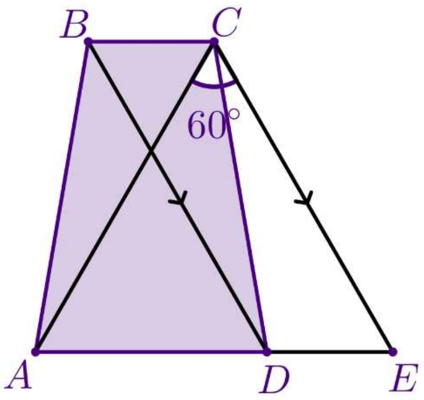
1. $\angle\gamma = \angle MFL + \angle\alpha$, т.к. является внешним углом ΔMFL
2. $\angle\gamma = \angle\alpha + \angle\beta$ по условию, следовательно, $\angle\beta = \angle MFL$
3. $\Delta MEF \sim \Delta LEM$ по двум углам:
   $\angle\beta = \angle MFL$ (п.2);
   $\angle E$ – общий.

Следовательно, $\frac{ME}{LE} = \frac{EF}{ME} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{18}{x} \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$

Критерии: 4б – решение верное;
2б – доказано, что треугольники подобны, далее решение неверно или отсутствует
0б – в остальных случаях.

9. **(4 балла)** В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке О. Известно, что $AC = AD + BC$, а $\angle AOD = 60°$. Докажите, что трапеция равнобокая.

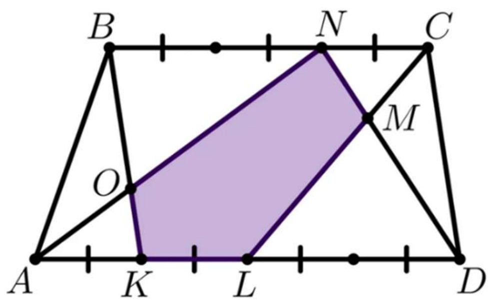
Решение.



1. Проведем через точку C прямую $CE \parallel BD$ (E – точка пересечения этой прямой с продолжением AD)
2. $BCED$ – параллелограмм по определению ($CE \parallel BD$ по построению, $BC \parallel AD$ как основания трапеции). Следовательно, по свойству параллелограмма $BC = DE$ и $BD = CE$.
3. $\angle AOD = \angle ACE = 60°$ как соответственные углы при параллельных прямых CE и BD и секущей AC.
4. Рассмотрим ΔACE:
$AC = AD + BC$ по условию
$AE = AD + DE = AD + BC$ (п.2)
$\angle ACE = 60°$.
Следовательно, ΔACE – равнобедренный треугольник с углом при основании 60°, то есть этот треугольник является равносторонним. Следовательно, $AC = CE$.
5. $AC = CE$ (п. 4) и $BD = CE$ (п.2). Следовательно, $AC = BD$, следовательно, трапеция является равнобокой. *ч.т..д.*

Критерии: 4б – полностью верное решение;
3б – решение в целом верное, но не все переходы обоснованы;
1б – сделано верное дополнительное построение дальнейших продвижений нет или решение не верно;
0б – в остальных случаях.

10. **(4 балла)** На рисунке справа верхнее основание разбито на три равные части, а нижнее на четыре такие же части. Площадь трапеции $ABCD$ равна 21. Найдите площадь закрашенного пятиугольника.



Ответ: 7. Решение.

1. Пусть $NC = x$, а высота трапеции равна h. Тогда $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2}h = \frac{7x}{2}h = 21$. Следовательно, $xh = 6$.
2. $S_{AND} = \frac{AD}{2}h = 2xh = 12$.
3. $S_{KBCL} = \frac{BC+KL}{2}h = \frac{4x}{2}h = 12 = S_{AND}$.
4. $\Delta AOK \sim \Delta NOB$ (по двум углам) $k = \frac{AK}{NB} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{S_{AOK}}{S_{NOB}} = \frac{1}{4}$ и $\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$, где h_1 и h_2 – высоты треугольников ΔAOK и ΔNOB соответственно. $h_1 = \frac{h}{3}, h_2 = \frac{2h}{3}$.
5. $\Delta NMC \sim \Delta DML$ (по двум углам) $k = \frac{NC}{DL} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{S_{NMC}}{S_{DML}} = \frac{1}{4}\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$, где h_3 и h_4 – высоты треугольников ΔNMC и ΔDML соответственно. $h_3 = \frac{h}{3}, h_4 = \frac{2h}{3}$.
6. Из п. 4-5 следует, что $h_1 = h_3$ и $h_2 = h_4$, $S_{NMC} = S_{AOK}$.
7. $S_{AOK} = \frac{AK \cdot h_1}{2} = \frac{x \cdot h/3}{2} = 1$, а $S_{NOB} = S_{DML} = 4S_{AOK} = 4$.
8. $S_{ONMLR} = S_{AND} - (S_{AOK} + S_{LMD}) = 12 - 5 = 7$.

Указание. *Также возможно решение, аналогичное решению задачи 10 в 1-2 вариантах.*
Критерии: 4б – полностью верное решение;
3б – решение в целом верное, но не все переходы обоснованы;
3б – решение в целом верное, но допущена одна арифметическая ошибка;
1б – замечено, что ABNK и NCDL – трапеции и части, прилегающие к их боковым сторонам, имеют равные площади, но далее решение неверно или отсутствует*;*
0б – в остальных случаях.

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА
ВАРИАНТ 4 (ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ)

В задачах 1-7 достаточно указать ответ.

1. **(3 балла)** Какие утверждения верны?
   А. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то это квадрат.
   Б. Перпендикуляр, опущенный из середины гипотенузы на катет, отрезает от прямоугольного треугольника треугольник, подобный исходному.
   В. Существует трапеция, диагональ которой делит её площадь пополам.
   Г. Если три прямые высекают на одной стороне угла два равных между собой отрезка и на другой стороне высекают два равных между собой отрезка, то эти прямые параллельны.

   Ответ: Б

   Критерии: 3б – указан верный ответ;
   1б – одна ошибка (1 верный+1 неверный);
   0б – в остальных случаях.
   ***Замечание.** В старой версии пункты Б, В были в обратном порядке!!! Для нее верный ответ: В.*

2. **(4 балла)** В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 5. Из вершин B и C проведены биссектрисы углов, пересекающие сторону AD в точках X и Y соответственно. Найдите длину AD, если $XY = 3$. Разберите все случаи.

   Ответ: 7 или 13

   Критерии: 4б – верно указаны оба ответа;
   2б – указан только один из двух случаев;
   2б – указаны 2 ответа, один из которых верный;
   0б – в остальных случаях.

3. **(3 балла)** Дан четырёхугольник. Середины его сторон образуют четырехугольник, периметр которого равен 10. Найдите сумму длин диагоналей исходного четырехугольника.

   Ответ: 10

   Критерии: 3б – указан верный ответ;
   0б – в остальных случаях.

4. **(по 2 балла за каждый пункт)** Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 12$, $BC = 15$, BH — высота и ее длина равна 6. Найдите:
   а) площадь параллелограмме $ABCD$;
   б) длину высоты, проведенной к стороне AB.

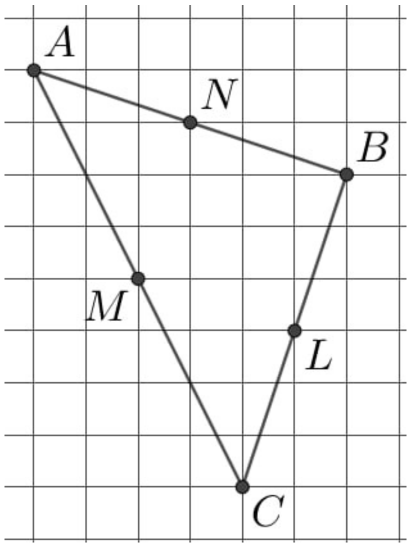
   а) Ответ: 90 или 72,
   б) Ответ: 7,5 или 6

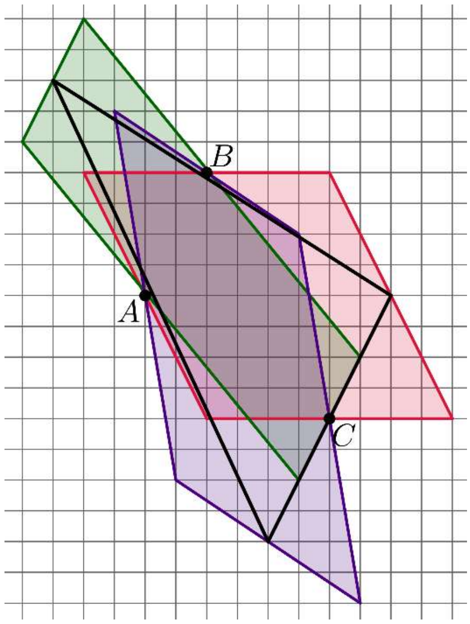
   Критерии: 2б – указан верный ответ;
   1б – указан один из ответов;
   0б – в остальных случаях.

5. **(по 2 балла за каждый пункт) а)** На рисунке слева отметьте точки A, B, C в узлах клеток так, чтобы данные точки L, M, N были серединами сторон треугольника ABC.

б) На рисунке справа отметьте точки P, Q, R, S в узлах сетки так, чтобы данные точки A, B, C были серединами сторон параллелограмма $PQRS$.

В каждом из пунктов достаточно привести один пример.





Критерии: 2б – фигура построена верно;
0б – в остальных случаях.

6. **(4 балла)** Треугольник со сторонами 36, 48, 64 подобен треугольнику со сторонами 18, 24, x. Чему может быть равно значение x?

Ответ: 32 или 13,5

Критерии: 4б – верно указаны оба ответа;
2б – указан только один из двух случаев;
2б – указаны 2 ответа, один из которых верный;
0б – в остальных случаях.

Старая версия. Треугольник со сторонами 4, 10, 25 подобен треугольнику со сторонами 2, 5, x. Чему может быть равно значение x?

Ответ: 0,8 или 12,5

Критерии: 4б – верно указаны оба ответа;
4б – указано, что такого треугольника не существует
2б – указан только один из двух случаев;
2б – указаны 2 ответа, один из которых верный;
0б – в остальных случаях.

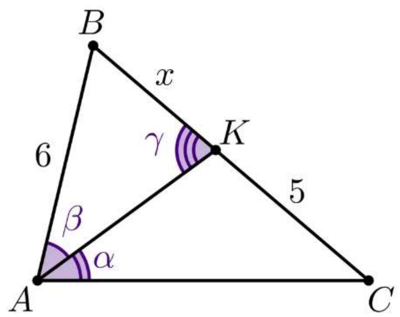
7. **(4 балла)** На сторонах AC и AB треугольника ABC выбраны точки D и E таким образом, что $AD : DC = 1 : 3$, $AE : EB = 1 : 7$. Найдите BC, если $AD = 4$ и угол AED — прямой.

Ответ: 16

Критерии: 4б – указан верный ответ;
0б – в остальных случаях.

В задачах 8-10 необходимо записать решение.

8. **(4 балла)** На рисунке справа $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$. Найдите x.



Ответ:4. Решение.

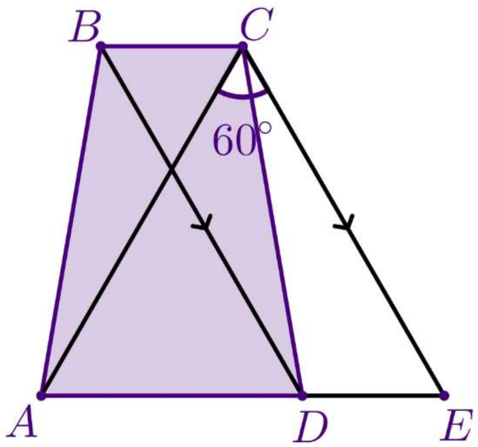
1. $\angle\gamma = \angle ACK + \angle\alpha$, т.к. является внешним углом ΔACK
2. $\angle\gamma = \angle\alpha + \angle\beta$ по условию, следовательно, $\angle\beta = \angle ACK$
3. $\Delta ABC \sim \Delta KBA$ по двум углам:
   $\angle\beta = \angle ACK$ (п.2);
   $\angle B$ – общий.
   Следовательно, $\frac{AB}{KB} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{x+5}{6} \Rightarrow x^2 + 5x = 36 \Rightarrow x_1 = -9$ — посторонний корень, $x_2 = 4 \Rightarrow x = 4$

Критерии: 4б – решение верное;

2б – доказано, что треугольники подобны, далее решение неверно или отсутствует
0б – в остальных случаях.

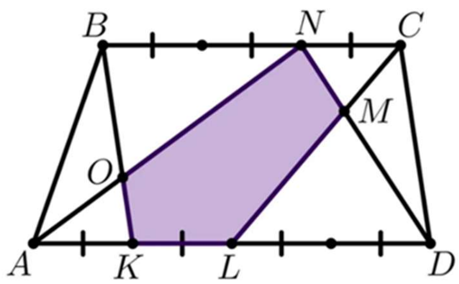
9. **(4 балла)** В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке О. Известно, что $AC = AD + BC$, а $\angle AOB = 120°$. Докажите, что трапеция равнобокая.

Решение.



1. $\angle AOB = 120°$, значит, $\angle AOD = 60°$.
2. Проведем через точку C прямую $CE \parallel BD$ (E – точка пересечения этой прямой с продолжением AD)
3. $BCED$ – параллелограмм по определению ($CE \parallel BD$ по построению, $BC \parallel AD$ как основания трапеции). Следовательно, по свойству параллелограмма $BC = DE$ и $BD = CE$.
4. $\angle AOD = \angle ACE = 60°$ как соответственные углы при параллельных прямых CE и BD и секущей AC.
5. Рассмотрим ΔACE:
   $AC = AD + BC$ по условию
   *$AE = AD + DE = AD + BC$ (*п.2*)*
   $\angle ACE = 60°$.
   Следовательно, ΔACE – равнобедренный треугольник с углом при основании 60°, то есть этот треугольник является равносторонним. Следовательно, $AC = CE$.
6. $AC = CE$ (п. 4) и $BD = CE$ (п.2). Следовательно, $AC = BD$, следовательно, трапеция является равнобокой. *ч.т..д.*

10. **(4 балла)** На рисунке справа верхнее основание разбито на три равные части, а нижнее на четыре такие же части. Площадь трапеции $ABCD$ равна 42. Найдите площадь закрашенного пятиугольника.



Ответ: 14. Решение.

1. Пусть $NC = x$, а высота трапеции равна h. Тогда $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2}h = \frac{7x}{2}h = 42$. Следовательно, $xh = 12$.
2. $S_{AND} = \frac{AD}{2}h = 2xh = 24$.
3. $S_{KBCL} = \frac{BC+K}{2}h = \frac{4x}{2}h = 24 = S_{AND}$.
4. $\Delta AOK \sim \Delta NOB$ (по двум углам) $k = \frac{AK}{NB} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{S_{AOK}}{S_{NOB}} = \frac{1}{4}$ и $\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$, где h_1 и h_2 – высоты треугольников ΔAOK и ΔNOB соответственно. $h_1 = \frac{h}{3}, h_2 = \frac{2h}{3}$.

5. $\Delta NMC \sim \Delta DML$ (по двум углам) $k = \frac{NC}{DL} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{S_{\text{NMC}}}{S_{\text{DML}}} = \frac{1}{4}\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$, где h_3 и h_4 – высоты треугольников ΔNMC и ΔDML соответственно. $h_3 = \frac{h}{3}$, $h_4 = \frac{2h}{3}$.
6. Из п. 4-5 следует, что $h_1 = \ \ h_3$ и $h_2 = \ \ h_4$, $S_{NMC} = S_{AO}$.
7. $S_{AOK} = \frac{AK \cdot h_1}{2} = \frac{x \cdot h/3}{2} = 2$, а $S_{NOB} = S_{\text{DML}} = 4S_{AOK} = 8$.
8. $S_{ONMLR} = S_{AND} - (S_{AOK} + S_{LMD}) = 24 - 10 = 14$.

Указание. *Также возможно решение, аналогичное решению задачи 10 в 1-2 вариантах.*

Критерии: 4б – полностью верное решение;

3б – решение в целом верное, но не все переходы обоснованы;

3б – решение в целом верное, но допущена одна арифметическая ошибка;

1б – замечено, что ABNK и *NCDL* – трапеции и части, прилегающие к их боковым сторонам, имеют равные площади, но далее решение неверно или отсутствует*;*

0б – в остальных случаях.