Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

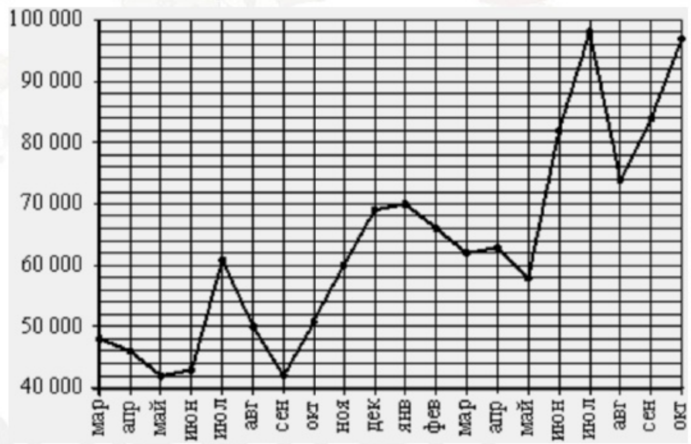
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Рост человека 5 футов 4 дюйма. Выразите его рост в сантиметрах, если в 1 футе 12 дюймов, а в 1 дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

Ответ: ___________________________.

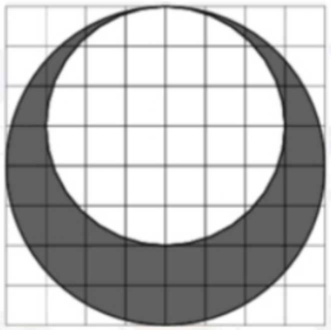
2 На рисунке жирными точками показано количество запросов со словом ЖАРА, сделанных на поисковом сайте во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – количество запросов. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшее месячное количество запросов со словом ЖАРА в период с июня по октябрь 2009 года.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 210329

3 На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 9. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: ___________________________.

4 В волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,7 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 6 сентября погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 9 сентября в Волшебной стране будет отличная погода.

Ответ: ___________________________.

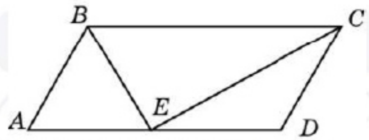
5 Найдите корень уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{\pi(x+2)}{3}=-\sqrt{3}.$$

В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

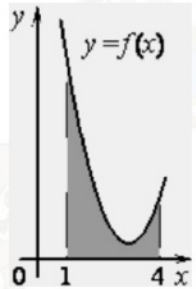
Ответ: ___________________________.

6 Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 10. Найдите его большую сторону.



Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.
Функция $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 14x - 10$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 210329

8 Куб вписан в шар радиуса $\sqrt{3}$. Найдите объем куба.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9 Найдите

$p(x)+p(8-x)$, если $p(x)=\dfrac{x(8-x)}{x-4}$ при $x\neq 4$.

Ответ: ___________________________.

10 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h=5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,2 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,1 с? Ответ выразите в метрах.

Ответ: ___________________________.

11 Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 22 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции

$y=-\dfrac{x}{x^2+225}$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 210329

Для записи решений и ответов на задания* 13–19 *используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания* (13, 14 *и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

14 На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 10$, а $B_1Q = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.
б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости A_1PQ.

15 Решите неравенство

$4\log_4^2(\sin^3 x) + 8\log_2(\sin x) \geq 1.$

16 В треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что AC и KN параллельны.
б) Найдите расстояние от точки N до прямой AC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $6\sqrt{6}$, $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 105°$.

17 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» - 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 10a - 24, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

19 Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.
Три числа назовём отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	163	
2	74000	
3	7	
4	0,468	
5	-3	
6	20	
7	6	
8	8	
9	0	
10	1,15	
11	33	
12	-15	
13	а) $2\pi n, \pm\arccos\left(\frac{1}{6}\right)+2\pi n;\ n\in Z$ б) $-2\pi;\ -2\pi\pm\arccos\left(\frac{1}{6}\right)$	
14	$\frac{36\sqrt{41}}{41}$	
15	$\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\pi+2\pi n\right);\ n\in Z$	
16	18	
17	86 000	
18	$(2;4)\cup(6;+\infty)$	
19	а) да, например 1 2 4 8 16 б) нет в) 20	

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 210329

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

а) $6\cdot(1-\cos^2 x) + 7\cos x - 7 = 0$

$6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 7 = 0$

$-6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

Пусть $\cos x = t$ $\quad -1\le t\le 1$

$-6t^2 + 7t - 1 = 0$

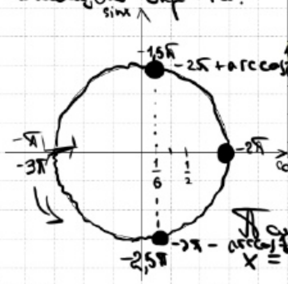
$D = 49 - 24 = 25$

$t = \dfrac{-7 \pm 5}{-12}$

$t_1 = 1$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$

$t_2 = \frac{1}{6}$, $\cos x = \frac{1}{6}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{6} + 2\pi n, n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окр-ти:



Получим числа:

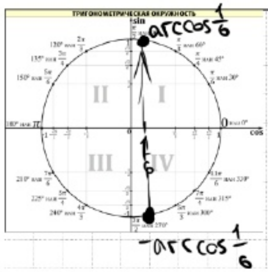
$x = -2\pi$

$x = -2\pi \pm \arccos\frac{1}{6}$

Ответ: а) $2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{6} + 2\pi n; n\in Z$

б) -2π; $-2\pi \pm \arccos\frac{1}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Источники:

Ященко 2020 (10 вар)
Ященко 2020 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
Ященко 2019 (14 вар)
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

1	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2	$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
3	$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
4	$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

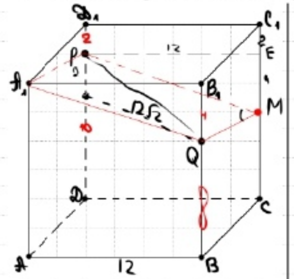
14 На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 10$, а $B_1Q = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости A_1PQ.

Источники:

Основная волна (Резерв) 2016



а) Построение сечения:

① A_1P

② A_1Q

③ Построим PM такую, что $PM \parallel A_1Q$

т.к. плоскость сеч. пересек. параллельные грани по пар. прямым

④ Построим QM

$\Rightarrow A_1QMP$ – сечение

PD_1C_1E – прямоугольник $\Rightarrow C_1E = 2$

$\triangle PEM = \triangle A_1B_1Q \Rightarrow EM = B_1Q = 4$

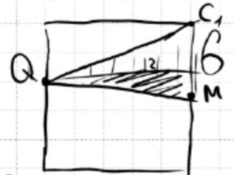
$\Rightarrow C_1M = 2 + 4 = 6$

$\Rightarrow M$ – середина CC_1

б) $V_{C_1PMQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{PQM} \cdot h$

$V_{C_1PMQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{C_1QM} \cdot PE$

Найдём S_{C_1QM}.



$S_{C_1QM} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$

Найдём S_{PQM}.

$PM = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

$QM = \sqrt{12^2 + 2^2} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$

$PQ = \sqrt{2^2 + (12\sqrt{2})^2} = \sqrt{292} = 2\sqrt{73}$

по т. cos $\cos \angle PMQ = \frac{160 + 148 - 292}{2 \cdot 4\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{37}} = \frac{16}{16\sqrt{370}} = \frac{1}{\sqrt{370}}$

$\sin \angle PMQ = \frac{\sqrt{369}}{\sqrt{370}} = \frac{3\sqrt{41}}{\sqrt{370}}$

$S_{PQM} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{37} \cdot \frac{3\sqrt{41}}{\sqrt{370}} = 12\sqrt{41}$

Получаем: $\cancel{\frac{1}{3}} \cdot \cancel{12}\sqrt{41} \cdot h = \cancel{\frac{1}{3}} \cdot 36 \cdot \cancel{12}$

$h = \frac{36}{\sqrt{41}} = \frac{36\sqrt{41}}{41}$

Ответ: $\frac{36\sqrt{41}}{41}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$4\log_4^2(\sin^3 x) + 8\log_2(\sin x) \geq 1$

Источники:

Ященко 2020 (36 вар)

Ященко 2019 (36 вар)

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ	
1	$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$
2	$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
4	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$
5	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$4 \cdot \left(\log_{2^2} \sin^3 x\right)^2 + 8\log_2(\sin x) \geq 1$

$4 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \log_2(\sin x)\right)^2 + 8 \cdot \log_2(\sin x) \geq 1$

$\cancel{4} \cdot \frac{9}{\cancel{4}} \left(\log_2(\sin x)\right)^2 + 8\log_2(\sin x) - 1 \geq 0$

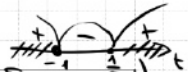
Пусть $\log_2(\sin x) = t$

$9t^2 + 8t - 1 \geq 0$

$D = 64 + 36 = 100$

$t = \frac{-8 \pm 10}{18}$

$t = -1 \qquad t = \frac{1}{9}$



$\left[\begin{array}{l} t \leq -1 \\ t \geq \frac{1}{9} \end{array}\right.$

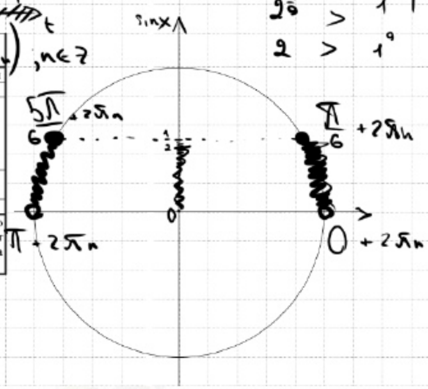
$\log_2(\sin x) \leq -1 \qquad \log_2(\sin x) \geq \frac{1}{9}$

$\log_2(\sin x) \leq \log_2 \frac{1}{2} \qquad \log_2(\sin x) \geq \log_2 2^{\frac{1}{9}}$

$\boxed{0 < \sin x \leq \frac{1}{2}} \qquad \sin x \geq 2^{\frac{1}{9}}$ нет решений

Сравним $2^{\frac{1}{9}} > 1 \qquad 1^9$

$2 > 1^9$



Ответ: $\left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

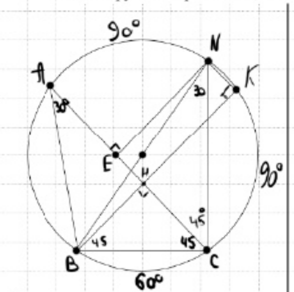
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

16 В треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что AC и KN параллельны.
б) Найдите расстояние от точки N до прямой AC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $6\sqrt{6}$, $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 105°$.

Источники:
Ященко 2020 (36 вар)



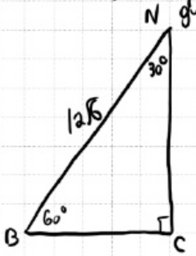
а) $BK \perp KN$ (т.к. $\angle BKN$ опир. на диаметр)

$BK \perp AC$ (т.к. BH – высота $\triangle ABC$)

$\Rightarrow KN \parallel AC$ ■

б) NE – ?

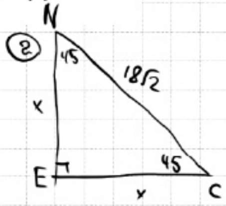
① $\smile BC = 60°$
$\angle BNC = 30°$
$\angle BCN = 90°$ (опир. на диаметр)



$\cos 30° = \dfrac{CN}{12\sqrt{6}}$

$CN = 12\sqrt{6} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{2}$

②



$(18\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2$

$x = 18$

Ответ: 18

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» - 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Источники:
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018

$\frac{2000}{27}$ – ст-ть $1 м^2$ ст. номера

$\frac{4000}{45}$ – ст-ть $1 м^2$ люкса

$\Rightarrow$ строить „люксы" выгоднее

$981 : 45 = 21\frac{36}{45}$ (люкс) максимально может вместиться.

1 вариант – Построить 21 люкс
$21 \cdot 4000 = 84\,000$

2 вариант – Построить 21 люкс + 1 ст. номер
$21 \cdot 4000 + 2000 = 86\,000$ р.

Вариантов с 21 люксом и более не существует

3 вариант – Построить 20 люксов и 3 ст. ном.

$20 \cdot 4000 + 3 \cdot 2000 = 86000$

Дальнейшее уменьш. кол-ва люксов в пользу ст. номеров невыгодно.

Ответ: 86 000

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 10a - 24, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Источники:
osfipi
Основная волна 2018

При $a<0$ нет реш.

При $a=0$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 10\cdot 0 - 24 \\ x^2+y^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -24 \\ 0=0 \end{cases}$$ нет решений

При $a>0$

$$\begin{cases} (x^2-y^2)(x^2+y^2) = 10a-24 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2-y^2)\cdot a = 10a - 24 \\ x^2+y^2=a \end{cases} \Big| :a, \text{ т.к. } a>0$$

$$\begin{cases} ①\ x^2-y^2 = 10 - \frac{24}{a} \\ ②\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

① + ② $2x^2 = a + 10 - \frac{24}{a}$

$x^2 = \frac{1}{2}a + 5 - \frac{12}{a}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}a+5-\frac{12}{a}}$

② − ① $2y^2 = a - 10 + \frac{24}{a}$

$y^2 = \frac{1}{2}a - 5 + \frac{12}{a}$

$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}a-5+\frac{12}{a}}$

$(x_1;y_1)$ $(x_1;y_2)$
$(x_2;y_1)$ $(x_2;y_2)$

Чтобы система имела 4 решения, нужно

$$\begin{cases} ①\ \frac{1}{2}a+5-\frac{12}{a} > 0 \quad |\cdot 2 \\ ②\ \frac{1}{2}a-5+\frac{12}{a} > 0 \quad |\cdot 2 \end{cases}$$

① $\frac{a}{1} + \frac{10}{1} - \frac{24}{a} > 0$

$\frac{a^2+10a-24}{a} > 0$

$-$ $+$ $-$ $+$
-12 0 2

② $a - 10 + \frac{24}{a} > 0$

$\frac{a^2-10a+24}{a} > 0$

$-$ $+$ $-$ $+$
0 4 6 a

Найдём пересечение:

-12 0 2 4 6 a

Ответ: $(2;4) \cup (6;+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовём *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

2C01D5

Источники:
FIPI
osfipi
Ященко 2018
Основная волна 2015

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

в любом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны

Пример:

$3+4>5$
$3+5>4$
$4+5>3$

а) 1 2 4 7 12

10 10^2 10^3 10^4 10^5

б) Пусть $a<b<c<d$

Тогда гипотенузой может быть c или d

① $c^2=a^2+b^2$
② $d^2=a^2+b^2$
③ $d^2=a^2+c^2$
④ $d^2=b^2+c^2$

Из уравнений ① и ② следует, что $c=d$ $\Rightarrow$ уравнения ① и ② не могут вып. одновр.

Из уравнений ③ и ④ следует, что $a=b$ $\Rightarrow$ уравнения ③ и ④ не могут вып. одновр.

Получаем

$$\begin{cases} c^2=a^2+b^2 \\ d^2=a^2+c^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Не может, т.к. их максимум две

в) $a<b<c<d<e<f<g<h<i<j$

c может быть гипотен. в одном треуг.

j может быть гипотенузой max в 4 треуг.

i может быть гипотен. max в 4 треуг.

h может в 3 треуг.

g в 3

f в 2

e в 2

d в 1

c в 1

$\Rightarrow$ 20 – наибол. возможное кол-во отличных троек

Пример:

$\sqrt{1}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{10}$

Ответ:
а) Да, например 1 2 4 7 12
б) нет
в) 20

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 210329

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.