РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КООРДИНАТНО – ВЕКТОРНЫМ МЕТОДОМ

ПОЛЕЗНАЯ ИНФОРМАЦИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

1. **Признак параллельности прямой и плоскости**:
   Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна и самой плоскости;
2. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости:**
   Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости;
3. **Признак перпендикулярности плоскостей**:
   Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны;
4. **Признак скрещивающихся прямых**:
   Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся;
5. **Угол между скрещивающимися прямыми** a **и** b – это угол между пересекающимися прямыми a_1 и b_1 соответственно параллельными данным прямым, т.е. такими, что $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$
6. **Угол между прямой и плоскостью** – это угол между данной прямой и её проекцией на данную плоскость;
7. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой p. Угол, образованный перпендикулярами к прямой p, исходящими из одной точки и лежащими в плоскостях α и β, называется **линейным углом двугранного угла**;
8. Иногда угол между плоскостями выгодно заменить равным ему углом между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям;
9. **Теорема о трёх перпендикулярах**: Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной;
10. **Расстояние от точки М до плоскости треугольника АВС** можно находить методом вспомогательного объёма $V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h_{ABC} = \frac{1}{3} S_{ABM} \cdot h_{ABM}$;
11. **Расстояние между скрещивающимися прямыми АВ и СD**:
    $h = \dfrac{6V_{ABCD}}{|AB| \cdot |CD| \cdot \sin\varphi}$, где φ – угол между прямыми АВ и СD;

12. Через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой, и притом только одну. Расстояние между этими плоскостями равно расстоянию между данными скрещивающимися прямыми;
13. **Расстояние между скрещивающимися прямыми** a и b равно расстоянию от прямой a до плоскости β такой, что $b \subset \beta$ и $a \parallel \beta$;
14. **Расстояние от прямой** a **до параллельной ей плоскости** β равно расстоянию от любой точки этой прямой до данной плоскости;
15. **Площадь ортогональной проекции многоугольника** на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции: $S_{\perp} = S \cdot \cos\alpha$.

МЕТОД КООРДИНАТ

- ***Нахождение угла между двумя прямыми:*** $\cos\angle(a;b) = \left|\cos\angle\left(\overline{l_a};\overline{l_b}\right)\right| = \dfrac{\left|\overline{l_a}\cdot\overline{l_b}\right|}{\left|\overline{l_a}\right|\cdot\left|\overline{l_b}\right|}$,

  где $\overline{l_a}$ и $\overline{l_b}$ – направляющие векторы прямых a и b;
- ***Нахождение угла между двумя плоскостями:***

  $\cos\angle(\alpha;\beta) = \left|\cos\angle\left(\overline{n_\alpha};\overline{n_\beta}\right)\right| = \dfrac{\left|\overline{n_\alpha}\cdot\overline{n_\beta}\right|}{\left|\overline{n_\alpha}\right|\cdot\left|\overline{n_\beta}\right|}$, где $\overline{n_\alpha}$ и $\overline{n_\beta}$ – нормальные векторы к плоскостям α и β;
- ***Нахождение угла между прямой и плоскостью:***

  $\sin\angle(a;\alpha) = \left|\cos\angle\left(\overline{l_a};\overline{n_\alpha}\right)\right| = \dfrac{\left|\overline{l_a}\cdot\overline{n_\alpha}\right|}{\left|\overline{l_a}\right|\cdot\left|\overline{n_\alpha}\right|}$, где $\overline{l_a}$ – направляющий вектор прямой a и $\overline{n_\alpha}$ – нормальный вектор к плоскости α;
- ***Уравнение плоскости***: $ax+by+cz+d=0$, где $\overline{n}(a,b,c)$ – нормальный вектор к плоскости;
- ***Расстояние от точки*** $M(x_0, y_0, z_0)$ ***до плоскости, заданной уравнением***

  $ax+by+cz+d=0$: $\qquad h = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$;
- ***Скалярное произведение векторов*** $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$ ***и*** $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$ ***:***

  $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$; $\qquad \overline{a}\cdot\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
- ***Модуль вектора*** $\overline{p}(a,b,c)$ ***:*** $\qquad |\overline{p}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

УПРАЖНЕНИЕ:

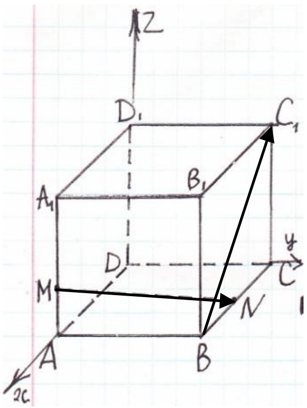

Рисунок 1

Ребро куба равно 6. Точка N – середина ребра BC, а точка M лежит на ребре AA_1, причём $AM : MA_1 = 1 : 2$.

Определите:

1) Угол между прямыми MN и BC_1
2) Угол между прямой MN и плоскостью BC_1D_1
3) Угол между плоскостями D_1MN и $B_1C_1D_1$
4) Расстояние от точки N до плоскости BC_1D_1
5) Расстояние между прямыми MN и BC_1
6) Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки M,N и D_1

Решение: **1)** (рисунок 1)

Рассмотрим прямоугольную систему координат : Dxyz.

Воспользуемся формулой ***нахождения угла между двумя прямыми:***

$$\cos\angle(MN;BC_1) = \left|\cos\angle\left(\overline{MN};\overline{BC_1}\right)\right| = \frac{\left|\overline{MN}\cdot\overline{BC_1}\right|}{\left|\overline{MN}\right|\cdot\left|\overline{BC_1}\right|},$$

где $\overline{MN}$ и $\overline{BC_1}$ – направляющие векторы прямых MN и BC_1

Определим координаты точек:

$C_1(0;6;6)$, $B(6;6;0)$,

$$AM : MA_1 = 1:2 \Rightarrow AM = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2 \Rightarrow M(6;0;2)$$

$$BN = NC \Rightarrow NC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3 \Rightarrow N(3;6;0)$$

$$\overline{MN}(3-6;6-0;0-2) = \overline{(-3;6;-2)} \qquad \overline{BC_1}(0-6;6-6;6-0) = \overline{(-6;0;6)}$$

$$\cos\angle(MN;BC_1) = \frac{|-3\cdot(-6)+6\cdot 0+(-2)\cdot 6|}{\sqrt{(-3)^2+6^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+0^2+6^2}} = \frac{6}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{72}} = \frac{6}{42\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{14}$$

$$\Rightarrow \angle(MN;BC_1) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{14}$$

ОТВЕТ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{14}$

2) (рисунок 2)

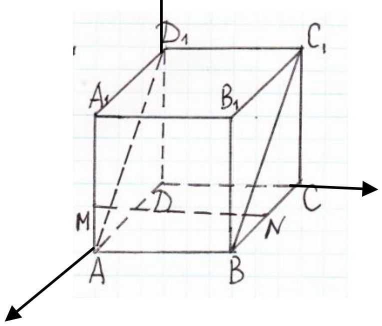

Рисунок 2

γ – угол между прямой MN и плоскостью BC_1D_1

Воспользуемся формулой ***нахождения угла между прямой и плоскостью:***

$$\sin\gamma = \left|\cos\angle\left(\overline{MN};\bar{n}_{BC_1D_1}\right)\right| = \frac{\left|\overline{MN}\cdot\bar{n}_{BC_1D_1}\right|}{\left|\overline{MN}\right|\cdot\left|\bar{n}_{BC_1D_1}\right|},$$ где $\overline{MN}$ – направляющий вектор прямой MN и $\bar{n}_{BC_1D_1}$ – нормальный вектор к плоскости;

Составим уравнение плоскости (BC_1D_1): $ax+by+cz+d=0$

Точки $D_1(0;\,0;\,6)$, $C_1(0;\,6;\,6)$, $B(6;\,6;\,0)$ принадлежат плоскости, значит их координаты обращают уравнение плоскости в верное равенство. Таким образом, мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases}0\cdot a+0\cdot b+6\cdot c+d=0,\\0\cdot a+6\cdot b+6\cdot c+d=0,\\6\cdot a+6\cdot b+0\cdot c+d=0,\end{cases}\quad \begin{cases}c=-\dfrac{d}{6}.\\b=0,\\a=-\dfrac{d}{6}\end{cases}\Rightarrow\quad -\frac{d}{6}x+0y+\left(-\frac{d}{6}\right)z+d=0\,\Big|\times\left(-\frac{6}{d}\right)$$

$$x+z-6=0\quad \textit{уравнение плоскости}\,(BC_1D_1)$$

Значит вектор нормали к плоскости $\overline{n}_{BC_1D_1}(1;\,0;\,1)$

$$\sin\gamma=\frac{\left|\overline{MN}\cdot\overline{n}_{BC_1D_1}\right|}{\left|\overline{MN}\right|\cdot\left|\overline{n}_{BC_1D_1}\right|}=\frac{\left|-3\cdot1+6\cdot0+(-2)\cdot1\right|}{\sqrt{(-3)^2+6^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{5}{7\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{14}$$

ОТВЕТ: $\gamma=\arcsin\dfrac{5\sqrt{2}}{14}$

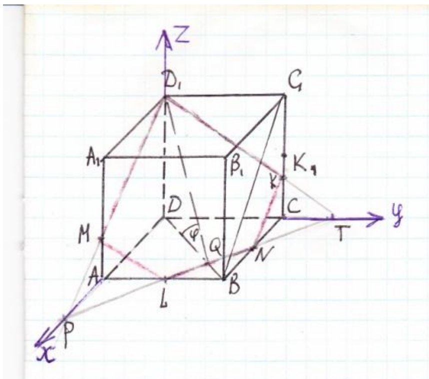

Рисунок 3

3) построим плоскость (для координатного метода строить полное сечение не обязательно, но в некоторых задачах №14 ЕГЭ профильного уровня необходимо умение строить сечение многогранника плоскостью, проходящей через три точки. Секущая плоскость пересекает грани куба по прямым, которые можно построить однозначно через две точки плоскости. Это значит, что мы сможем просто провести прямую MD_1

Остальные точки необходимо построить: в боковой грани (ADD_1A_1)прямые MD_1 и AD пересекаются в точке P.

В нижнем основании теперь можно провести прямую PN, которая пересекает AB в точке L, а DC – в точке T. Прямая TD_1 пересекает ребро CC_1в точке K, Т.о. сечение $(MLNKD_1)=\psi$ – искомое

Плоскость $(B_1C_1D_1)=\beta$ – верхнее основание

Воспользуемся формулой ***нахождения угла между двумя плоскостями:***

$$\cos\angle(\psi;\beta)=\left|\cos\angle\left(\overline{n_\psi};\overline{n_\beta}\right)\right|=\frac{\left|\overline{n_\psi}\cdot\overline{n_\beta}\right|}{\left|\overline{n_\psi}\right|\cdot\left|\overline{n_\beta}\right|},$$

где $\overline{n_\psi}$ и $\overline{n_\beta}$ – нормальные векторы к плоскостям ψ и β;

$(B_1C_1D_1)=\beta$ – верхнее основание. Вектор её нормали $\overline{DD_1}(0;\,0;\,6)\Rightarrow\left|\overline{DD_1}\right|=6$

Составим уравнение плоскости $(MLNKD_1)=\psi$. проходящей через точки $D_1(0;\,0;\,6)$, $M(6;\,0;\,2)$, $N(3;\,6;\,0)$ и получим систему:

$$\begin{cases}0\cdot a+0\cdot b+6\cdot c+d=0,\\6\cdot a+0\cdot b+2\cdot c+d=0,\\3\cdot a+6\cdot b+0\cdot c+d=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-\dfrac{d}{6}.\\b=-\dfrac{d}{9},\\a=-\dfrac{d}{9}\end{cases}$$

$$-\frac{d}{9}x-\frac{d}{9}y+\left(-\frac{d}{6}\right)z+d=0\,\Big|\times\left(-\frac{18}{d}\right)$$

$$2x+2y+3z-18=0\quad \textit{уравнение плоскости}\,(MND_1)$$

Значит, нормальный вектор $\overline{n}_{MND_1}(2;2;3) \Rightarrow \left|\overline{n}_{MND_1}\right| = \sqrt{17}$

$$\cos\angle(\psi;\beta) = \frac{\left|\overline{n_\psi}\cdot\overline{n_\beta}\right|}{\left|\overline{n_\psi}\right|\cdot\left|\overline{n_\beta}\right|} = \frac{|2\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 6|}{\sqrt{17}\cdot 6} = \frac{18}{6\sqrt{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$$

$$\angle(\psi;\beta) = \arccos\frac{3\sqrt{17}}{17}$$

ОТВЕТ: $\angle(\psi;\beta) = \arccos\frac{3\sqrt{17}}{17}$

4) Для решения этой задачи воспользуемся формулой **расстояния от точки** $N(x_0, y_0, z_0)$ **до плоскости** (BC_1D_1), заданной уравнением $x+0y+z-6=0$ (см. пункт 2):

$$h = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|3\cdot 1+6\cdot 0+0\cdot 1+(-6)|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

ОТВЕТ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

5) Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми можно найти, как расстояние от любой точки одной прямой, до плоскости, содержащей вторую прямую и параллельную первой прямой: $\rho(MN, BC_1) = \rho(BC_1,(MNK_1)) = \rho(B,(MNK_1))$, где K_1 – середина CC_1;

Уравнение плоскости, проходящей через точки $K_1(0;6;3)$, $M(6;0;2)$, $N(3;6;0)$

$$\begin{cases} 0\cdot a+6\cdot b+3\cdot c+d=0, \\ 6\cdot a+0\cdot b+2\cdot c+d=0, \\ 3\cdot a+6\cdot b+0\cdot c+d=0, \end{cases} \quad \begin{cases} c=-\frac{d}{8}. \\ b=-\frac{5d}{48}, \\ a=-\frac{d}{8} \end{cases} \Rightarrow -\frac{d}{8}x-\frac{5d}{48}y-\frac{d}{8}z+d=0 \quad \Big| \times\left(-\frac{48}{d}\right)$$

примет вид

$$6x+5y+6z-48=0 \quad \text{уравнение плоскости}(KMN) \Rightarrow \rho(B,(KMN)) = \frac{|36+30+0-48|}{\sqrt{36+25+36}} = \frac{18}{\sqrt{97}}$$

ОТВЕТ: $\frac{18}{\sqrt{97}}$

6) Используем **формулу площади ортогональной проекции**

$$S_\perp = S\cdot\cos\varphi \Rightarrow S_{сеч} = \frac{S_\perp}{\cos\varphi}, \textit{ где } \varphi = \angle DQD_1 - \textit{угол между сечением и её проекцией}$$

$$S_\perp = S_{осн} - S_{LBN} = 6^2 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = 36-4{,}5 = \frac{63}{2}; \cdot \cos\varphi = \cos\angle(\psi;\beta) = \frac{3}{\sqrt{17}} \Rightarrow S_{сеч} = \frac{31{,}5}{\frac{3}{\sqrt{17}}} = \frac{21\sqrt{17}}{2},$$

ОТВЕТ: $\frac{21\sqrt{17}}{2}$,