

13. а) Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Ответ: а) $\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \frac{\pi}{4} + 2\pi n; k, n, m \in Z$; б) $-3\pi; -\frac{9\pi}{4}; -2\pi$

14. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 10, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины ребер AB и AC соответственно. Точка K лежит на отрезке CM, причем CK:KM=1:2.

А) Докажите, что треугольник SNK равнобедренный.

Б) Точка E – середина BC. Найдите угол между прямыми AE и SN.

Ответ: б) $\arccos \frac{5\sqrt{3}}{72}$

15. Решите неравенство $\log_4^2(16 + 14x - x^2) + 5 \cdot \log_{0,25}(16 + 14x - x^2) + 6 > 0$

Ответ: $(7 - \sqrt{65}; 0), (6; 8), (14; 7 + \sqrt{65})$

16. Дана трапеция ABCD с основаниями AD и BC. Окружность, описанная около треугольника ABC, пересекает боковую сторону CD в точке E, а основание AD в точке F, причем AB=FD.

А) Докажите, что $\angle EAD = \angle EDA$

Б) Найдите площадь трапеции ABCD, если AB=5, BC=3, а прямые AE и CF перпендикулярны.

Ответ: $20\sqrt{3}$

17. Строительство завода стоит 101,5 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $(0,5x^2 + x + 7)$ млн рублей в год. Если продукцию завода продавать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, каждый год фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки завода цена продукции $p = 9$ тыс. рублей за единицу, каждый следующий год цена продукции увеличивается на 1 тыс. рублей за единицу. За сколько лет окупиться строительство завода?

Ответ: 3

18. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - a} = \sqrt{y^2 + 1 - a} \\ x^2 + y^2 = 8x + 6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $2 < a \leq 10$

19. Назовем натуральное число *интересным*, если предпоследняя цифра в его десятичной записи равна 9. Например, числа 90, 193 и 2090 интересные, а 9, 919 и 2020 – нет.

А) Можно ли представить число 3170 в виде суммы четырех интересных чисел?

Б) Можно ли представить число 2121 в виде суммы четырех интересных чисел?

В) Сумма n интересных чисел равна 2121. Найдите наименьшее значение n .

Ответ: а) да; б) нет; в) 8