

ВАРИАНТ 216

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right)^4 - \frac{1}{4}$.

2. Футболист Федот сыграл в трёх матчах на чемпионате. Премияльная выплата Федота за второй матч в связи с отличной игрой была на n процентов больше, чем за первый. В третьем же матче Федот не сумел показать хорошую игру и его премия за этот матч оказалась на n процентов меньше, чем за второй матч. Найдите n , если известно, что премия за третий матч составила 64% от премии за первый матч.

3. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x = \frac{2}{3} \cos x$.

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x-1}} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 5} \leq 2$.

5. Окружность Ω_1 с центром O_1 пересекает окружность Ω_2 с центром O_2 в точках A и B . При этом точки O_1 и O_2 лежат вне Ω_2 и Ω_1 соответственно. Касательная к окружности Ω_2 в точке A пересекает Ω_1 в точках A и C . Касательная к окружности Ω_1 в точке A пересекает Ω_2 в точках A и D . Найдите угол между прямыми O_1C и O_2D , если известно, что $\angle AO_1B = 36^\circ$ и $\angle AO_2B = 64^\circ$.

6. Найдите все пары действительных чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(1 + \log_2(x^2 + y^2)\right) = 1 + \log_2(xy).$$

7. Дан параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ с основаниями $ABCD$, $A' B' C' D'$ и боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' , DD' . Все рёбра параллелепипеда равны. Плоские углы при вершине B также равны. Известно, что центр сферы, описанной около тетраэдра $AB'CD'$, лежит в плоскости $AB'C$. Радиус этой сферы равен 2. Найдите длину ребра параллелепипеда.

ВАРИАНТ 215

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\frac{27^{1/3}}{25^{1/2}} + \frac{\log_5 25}{3\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4}} + \frac{41}{15}$.
2. Любитель коктейлей Игнат смешал 300 мл морковного сока с 200 мл сливок. Тщательно перемешав полученную смесь, Игнат попробовал её на вкус и решил, что сливок оказалось слишком много. Игнат налил в полулитровый графин 200 мл морковного сока, а оставшиеся 300 мл заполнил приготовленной смесью. Каково процентное содержание сливок в полученном напитке?
3. Решите уравнение $4 \sin 2x \cos 3x - 2 \sin 5x = \operatorname{tg} 2x$.
4. Решите неравенство $\log_{x-1} \left(4^{\log_3 x} - 6x^{\log_3 2} + 10 \right) \leq 0$.
5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD . Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD , касаются диагонали AC в одной и той же точке. При этом точка касания первой окружности со стороной BC делит эту сторону пополам. Найдите отношение, в котором точка касания второй окружности со стороной AD делит эту сторону, считая от точки A .
6. Найдите все пары действительных чисел (x, y) с наименьшим возможным значением y , удовлетворяющие неравенству

$$\log_{x^2-y} \left(x - y^2 + \frac{7}{4} \right) \geq 1.$$
7. Сфера касается всех рёбер тетраэдра $ABCD$. Известно, что произведения длин скрещивающихся рёбер равны. Известно также, что $AB = 3$, $BC = 1$. Найдите AC .

ВАРИАНТ 214

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)^2$.
2. Бобр доплывает от своей норы вниз по реке до основной роши за три минуты. Подкрепившись, он плывёт обратно к своей норе, на что у него уходит четыре минуты. Во сколько раз собственная скорость бобра превышает скорость течения? (Собственную скорость бобра считать постоянной).
3. Решите уравнение $\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.
4. Решите неравенство $\log_2 x + \log_3 x \leq \log_2 3 \cdot \log_x 6$.
5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Известно, что $AB = BC = 1$, что площади треугольничков AKC и BCL равны и что около четырёхугольника $AKML$, где M — точка пересечения отрезков BL и CK , можно описать окружность. Найдите все возможные значения AC .
6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\left(\sqrt{3+2x-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3+2x-x^2}\right) = 0$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на AB , что плоскости ABC и ABD перпендикулярны и что $AD = DC = CB$. Найдите угол между прямыми AD и CB .

ВАРИАНТ 213

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{3 \sin \frac{\pi}{2}}{\log_2 16} - \sqrt{\frac{4}{9}}\right)^{-1}$.
2. Автовладелец Авдей продал автосалону свой автомобиль за 60% его первоначальной стоимости. Автосалон выставил на продажу этот автомобиль за цену, на 20% большую уплаченной Авдею. Какова доля получившейся цены по отношению к первоначальной?
3. Решите уравнение $2 \cdot \frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sqrt{3} \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 x)$.
4. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+1) - \log_{\sqrt{x+1}}(x-1) \geq 1$.
5. В четырёхугольник $ABCD$ площади 2 вписана окружность, касающаяся сторон AB и CD в точках K и L соответственно. Отрезок KL пересекает диагональ AC в точке M . Найдите BD , если известно, что $AM = MC = 1$.
6. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\sin^6 x + \cos^6 x + a \cdot \sin 2x \geq a^2$$

выполняется для всех действительных x .

7. Вписанная в треугольную пирамиду $ABCD$ сфера касается граней BCD , ACD , ABD и ABC в точках A_1 , B_1 , C_1 и D_1 соответственно. Известно, что D_1 является точкой пересечения высот треугольника ABC , что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC в четыре раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите отношение, в котором сфера делит отрезок DD_1 , считая от вершины D .

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{2}{9}} \cdot \log_4 64 \cdot \log_8 64$.
2. Студент Савелий избегает вверх по неподвижному эскалатору за 30 секунд, а по движущемуся (вверх же) — за 20 секунд. За сколько секунд Савелий поднялся бы по движущемуся эскалатору, если бы нашёл в себе силы стоять на месте? (Собственную скорость бегущего Савелия считать постоянной).
3. Решите уравнение $2\sqrt{2} + \sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x - \sin x)$.
4. Решите неравенство $6^{x^2} + 6^{2x} \leq 2^{x^2+2x} + 3^{x^2+2x}$.
5. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает диагональ BD и сторону BC в точках K и L соответственно. Найдите площадь треугольника DKL , если известно, что площадь параллелограмма равна 8 и что $AD = 3 \cdot AB$.
6. Найдите все значения параметра a , при которых наименьшее (по x) значение выражения

$$\log_2^2(ax) + \log_2^2\left(\frac{1-a}{x}\right)$$

максимально.

7. Дан параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ объёма 1 с основаниями $ABCD$, $A' B' C' D'$ и боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' , DD' . На рёбрах AB , $B'C'$, CD и $A'D'$ отмечены точки K , L , M и N соответственно. Известно, что $AK : KB = CM : MD = 1 : 3$ и $B'L : LC' = D'N : NA' = 1 : 2$. Найдите объём тетраэдра $KLMN$.

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{25}{16}\right)^{-1/2} + \frac{\log_3(9^3)}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15}}$.

2. Добрыня Никитич в полтора раза старше Алёши Поповича и в полтора раза младше Ильи Муромца. Сколько лет Добрыне Никитичу, если Илья Муромец старше Алёши Поповича на 20 лет?

3. Решите уравнение $\sin x - \cos 2x + \sin 3x = 1$.

4. Решите неравенство $\log_2 x + \log_2 3 \cdot \log_x 3 + \log_{\sqrt{2}} 3 < 0$.

5. В окружность вписан выпуклый восьмиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Известно, что

$$\angle A_1A_4A_7 = \frac{1}{2}\angle A_4A_7A_2 = \frac{1}{3}\angle A_7A_2A_5 = \frac{1}{4}\angle A_2A_5A_8 = \frac{1}{5}\angle A_5A_8A_3 = \frac{1}{6}\angle A_8A_3A_6 = \frac{1}{7}\angle A_3A_6A_1.$$

Найдите угол $\angle A_6A_1A_4$.

6. Найдите наибольшее значение, которое может принимать выражение $x + 7y$, если известно, что x и y удовлетворяют равенству

$$\sqrt{xy} + \sqrt{(1-x)(1-y)} = \sqrt{7x(1-y)} + \frac{\sqrt{y(1-x)}}{\sqrt{7}}.$$

7. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основаниями ABC , $A'B'C'$ и боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' . Через точки B , C проходит плоскость, делящая объём призмы пополам. Эта плоскость пересекает прямую AA' в точке D . Найдите отношение $AA' : A'D$.