

ВАРИАНТ 201

1. Известно, что $f(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x} - \frac{1}{24}$. Найдите $f\left(\frac{3}{5}\right)$.

2. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 105, которые делятся на 3, но не делятся на 5.

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x = 2 \cos 2x \operatorname{ctg} x$.

4. Решите неравенство $\log_{2x} 16 - \log_{4x} 8 \leq 1$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC проведены биссектрисы AD и CE . Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Найдите DE , если $AC = 12$ и $KL = 9$.

6. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' . На диагоналях AB' , BC' , CA' отмечены точки D , E , F соответственно. Найдите отношение, в котором плоскость DEF делит отрезок AA' , если $AD : DB' = 1 : 1$, $BE : EC' = 1 : 2$, $CF : FA' = 1 : 3$.

7. Найдите все положительные значения параметра a , при которых уравнение

$$\log_{2-x} (a^{2+x} + 2a^{1-x} + x - 1) + \log_{2+x} (a^{2-x} + 2a^{1+x} - x - 1) = 2$$

имеет ровно одно решение (относительно x).

ВАРИАНТ 202

1. Известно, что $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-3}} + \frac{19}{x}$. Найдите $f(12)$.

2. Дана возрастающая геометрическая прогрессия b_1, b_2, b_3, \dots , состоящая из положительных чисел. Известно, что сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна второму члену, умноженному на $10/3$. Найдите отношение $b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10}$ к $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$.

3. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$.

4. Решите неравенство $\log_{|2x - \frac{1}{2}|} \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) \geq \log_{|2x - \frac{1}{2}|} \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

5. На высоте AH остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Найдите отношение $BH : HC$, если $BD : DA = 2 : 1$ и $AE : EC = 3 : 1$.

6. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $AB = BC = CD = 5$ и $CA = AD = DB = 6$. Найдите косинус угла между рёбрами BC и AD .

7. Найдите все пары положительных чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению

$$\log_{2x^2y+1}(x^4+y^2+1) = \log_{y^4+x^2+1}(2xy^2+1).$$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 203.

1. Найдите целое число, задаваемое выражением:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2.$$

2. Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма первых десяти членов этой прогрессии равна 9, а сумма последних десяти членов равна 11. Найдите сумму $a_6 + a_7 + \dots + a_{14} + a_{15}$.

3. Решите уравнение:

$$\cos x \cdot (2 \cos x - \cos 3x) = 1.$$

4. Решите неравенство:

$$3^x - 2^{x+1} \leq \sqrt{2 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 2^{2x+3}}.$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса AL и высота CH . Найдите косинус угла $\angle BAC$, если $HL \parallel AC$.

6. Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' . Найдите объем многогранника с вершинами, являющимися серединами ребер $AB, AD, AA', CC', C'B', C'D'$, если известно, что ребро куба равно 1.

7. Найдите все значения параметра a из промежутка $[0, 2\pi)$, при которых уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2} = x \cos a + y \sin a$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) , отличное от $(0, 0)$.

ВАРИАНТ 204

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)$.
2. Дана арифметическая прогрессия. Её двадцатый член равен 1, а член с номером 2000 равен 199. Найдите член этой прогрессии с номером 2020.
3. Решите уравнение $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$.
4. Решите неравенство $\log_x(\log_{\sqrt{x}}(10x - 4 - 4x^2)) \geq \log_{\sqrt{x}}(\log_x(10x - 4 - 4x^2))$.
5. Окружность, проходящая через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, пересекает сторону BC в точке E , а диагональ AC — в точке F . Найдите площадь четырёхугольника $ABEF$, если $BE = 8$, $EC = 4$, а точки D , F , E лежат на одной прямой.
6. Дана правильная треугольная пирамида. Известно, что центр сферы, описанной около этой пирамиды, равноудалён от боковых рёбер и от плоскости основания пирамиды. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, если длина ребра её основания равна 12.
7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$2x^2y^2 + x^2y + xy^2 + (1-a)(x^2 + y^2) - a(x + y + 2) = 0$$

имеет ровно одно решение (относительно (x, y)).

ВАРИАНТ 205

1. Найдите целое число, ближайшее к числу $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$.
2. Дана геометрическая прогрессия. Её четвёртый член равен 5, а член с номером 54 равен 160. Найдите член этой прогрессии с номером 64.
3. Решите уравнение $9 \operatorname{tg}^2 x - 2 \cos 2x = 2$.
4. Решите неравенство $8 + \log_{\sqrt{x}} 8 \leq 4 \log_x \sqrt{17x^2 - 2}$.
5. Произведение оснований трапеции равно 18. Найдите периметр трапеции, если известно, что в неё вписана окружность, а диагонали делят среднюю линию на три равные части.
6. В основании четырёхугольной пирамиды $ABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребре SB отмечена точка E , так что $SE : EB = 2 : 1$. На ребре SD отмечена точка F , так что $SF : FD = 1 : 2$. Найдите отношение, в котором плоскость AEF делит объём пирамиды.
7. Найдите все положительные значения параметра a , при которых сумма различных корней уравнения

$$\log_2(ax) + \log_2(1-x) = \cos((x-x^2)a\pi)$$

максимальна.

ВАРИАНТ 206

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{\frac{4^3 + 3^4}{3^4 - 4^3}}$.
2. Сумма первых ста членов арифметической прогрессии равна 750. Найдите член этой прогрессии с номером 99, если известно, что второй член этой прогрессии равен 7.
3. Решите уравнение $\sin x \cos 3x = \sin 3x \cos 5x$.
4. Решите неравенство $2^{\frac{3+5x}{1+2x}} + 2^{\frac{1+3x}{1+2x}} \leq 6\sqrt{2}$.
5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Точки B, C, E, D лежат на одной окружности. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADC , если известно, что $\angle CDE = \angle BAC$ и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 1.
6. Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD' . Найдите расстояние между прямой, проходящей через середины рёбер AB и AA' , и прямой, проходящей через середины рёбер BB' и $B'C'$, если ребро куба равно 1.
7. Найдите произведение корней уравнения

$$\sin \frac{x^2 + x + 1}{2x} + \cos \frac{x^2 - x + 1}{2x} = \frac{x^2 - 4x + 1}{x} \cdot \cos \frac{\pi - 2}{4}.$$