Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного математического образования

LXXXIV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
18 апреля 2021 года

Задачи и решения подготовили:

Е. В. Бакаев, А. Д. Блинков, М. А. Волчкевич, Т. И. Голенищева-Кутузова, А. В. Грибалко, С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, А. А. Заславский, О. А. Заславский, Т. А. Казицына, В. А. Клепцын, Т. А. Корчемкина, А. К. Кулыгин, Н. Ю. Медведь, Г. С. Минаев, В. Ю. Радионов, М. А. Раскин, И. В. Раскина, Н. А. Солодовников, А. В. Хачатурян, М. А. Хачатурян, А. В. Шаповалов, И. В. Ященко

Задачи, решения, списки победителей и призеров Математического праздника и «Математического праздника в Математической вертикали» публикуются на сайте `https://mccme.ru/matprazdnik`

В проведении Математического праздника участвуют

Московский физико-технический институт

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

НИТУ «МИСиС»

РТУ МИРЭА

школы г. Москвы

6 класс

Задача 1. а) Впишите в клеточки четыре различные цифры, чтобы произведение дробей равнялось $\frac{20}{21}$:

$$\frac{\square}{\square}\times\frac{\square}{\square}=\frac{20}{21}.$$

Решите эту задачу для трёх других арифметических действий:

б) деления;

в) вычитания;

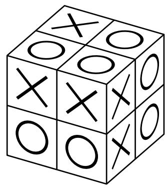
г) сложения. **[*4 балла*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ.

$$\frac{4}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{20}{21},\quad \frac{4}{3}:\frac{7}{5}=\frac{20}{21},\quad \frac{9}{7}-\frac{1}{3}=\frac{20}{21},\quad \frac{4}{6}+\frac{2}{7}=\frac{20}{21}.$$

Есть и другие примеры. Интересно, что в последнем задании не удаётся обойтись несократимыми дробями.

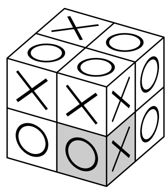
Задача 2. а) Мальвина разбила каждую грань куба $2\times2\times2$ на единичные квадраты и велела Буратино в некоторых квадратах написать крестики, а в остальных нолики так, чтобы каждый квадрат граничил по сторонам с двумя крестиками и двумя ноликами. На рисунке показано, как Буратино выполнил задание (видно только три грани). Докажите, что Буратино ошибся.



б) Помогите Буратино выполнить задание правильно. Достаточно описать хотя бы одну верную расстановку.

[*5 баллов*] (*М. А. Евдокимов*)

Решение. а) Представим себе, что кубик сложен из восьми единичных кубиков, и посмотрим на закрашенный на рисунке кубик. Что бы Буратино ни написал на его нижней грани, требование Мальвины будет нарушено. Если там будет крестик, то нолик на его передней грани будет граничить



с тремя крестиками. Если там будет нолик, то крестик на боковой грани будет граничить с тремя ноликами.

б) Существуют (с точностью до поворотов куба) три различные расстановки крестиков и ноликов. Можно (рис. 1) на верхней грани нарисовать нолики, на нижней крестики, а боковые грани разметить «слоями». Второй способ (рис. 2) заключается в том, чтобы представить себе куб сложенным из восьми единичных кубиков (на четырёх из которых нарисованы только крестики, а на четырёх только нолики) в шахматном порядке. Наконец, третий способ представлен на рисунке 3. Невидимые грани будут размечены «противоположно» видимым: в клетках, симметричных относительно центра кубика клеткам с крестиками, стоят нолики, и наоборот.

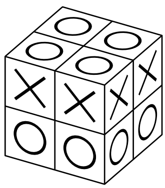


Рис. 1

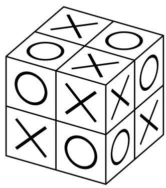


Рис. 2

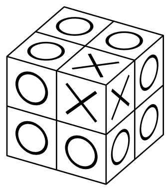


Рис. 3

Задача 3. Братья Петя и Вася решили снять смешной ролик и выложить его в интернет. Сначала они сняли, как каждый из них идёт из дома в школу — Вася шёл 8 минут, а Петя шёл 5 минут. Потом пришли домой и сели за компьютер монтировать видео: они запустили одновременно Васино видео с начала и Петино видео с конца (в обратном направлении); в момент, когда на обоих роликах братья оказались в одной и той же точке пути, они склеили Петино видео с Васиным. Получился ролик, на котором Вася идёт из дома в школу, а потом в какой-то момент вдруг превращается в Петю и идёт домой задом наперёд. А какой длительности получился ролик? **[*5 баллов*]**

(*И. В. Ященко*)

Ответ. 5 минут.

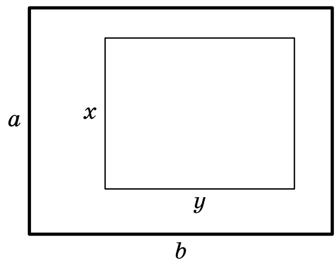
Решение. Давайте на одном мониторе запустим получившийся ролик, а на другом — Петино видео целиком с конца. Тогда мониторы будут показывать разное, пока братья не окажутся в одной точке пути, а после этого они будут показывать одно и то же. Поэтому длительности таких двух видео равны.

Задача 4. Внутри клетчатого прямоугольника периметра 50 клеток по границам клеток вырезана прямоугольная дырка периметра 32 клетки (дырка не содержит граничных клеток). Если разрезать эту фигуру по всем горизонтальным линиям сетки, получится 20 полосок шириной в 1 клетку. А сколько полосок получится, если вместо этого разрезать её по всем вертикальным линиям сетки? (Квадратик 1×1 — это тоже полоска!) **[*6 баллов*]**

(*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 21.

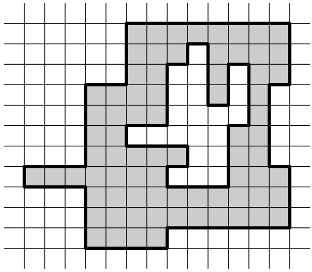
Первое решение. Пусть прямоугольник занимает a клеток по вертикали и b по горизонтали, $a+b=50:2=25$. Аналогично пусть размеры дырки — x клеток по вертикали и y по горизонтали, $x+y=32:2=16$.



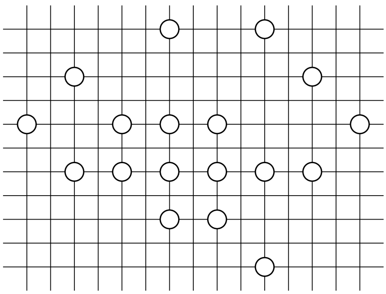
Если бы дырки не было, было бы a горизонтальных полосок. Дырка разрезает x из них на две части, так что всего горизонтальных полосок $a+x$, что по условию равно 20. Аналогично вертикальных полосок будет $b+y$. Но $a+b+x+y=25+16=41$ и $a+x=20$. Значит, $b+y=41-20=21$.

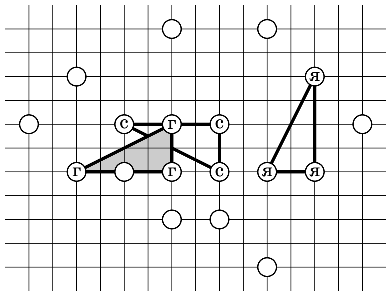
Второе решение. Для каждой горизонтальной полоски отметим её левую и правую стороны, а для каждой вертикальной — верхнюю и нижнюю. Ясно, что мы по одному разу отметили все границы клеток на контуре прямоугольника и контуре дырки, т. е. $50+32=82$ границы. Каждая полоска давала нам по две границы, так что всего полосок $82:2=41$. Горизонтальных среди них 20, значит, вертикальных 21.

Комментарий. Второе решение более общее — оно работает и в том случае, когда фигура и дырка имеют сложную многоугольную форму (см. рис.).



Задача 5. Царь пообещал награду тому, кто сможет на каменистом пустыре посадить красивый фруктовый сад. Об этом узнали два брата. Старший смог выкопать 18 ям (см. рис. слева). Больше нигде не удалось, только все лопаты сломал. Царь рассердился и посадил его в темницу. Тогда младший брат Иван предложил разместить яблони, груши и сливы в вершинах равных треугольников (см. рис. справа), а остальные ямы засыпать.





Царь ответил так:

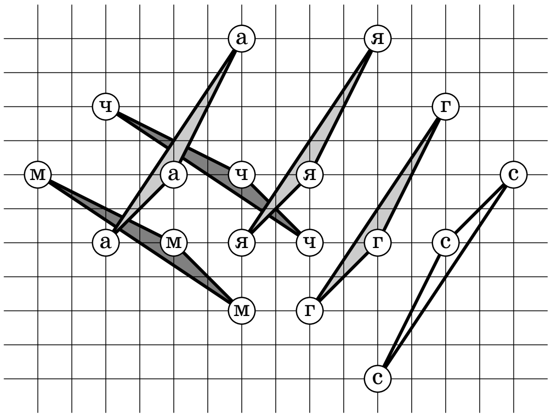
— Хорошо, если деревьев каждого вида будет ровно по три и они будут расти в вершинах равных треугольников, выйдет красиво. Но три вида — слишком мало. Если кроме яблонь, груш и слив будут ещё и абрикосы — отпущу брата. Если добавишь пятый вид — черешню — заплачу за работу. Мне ещё миндаль нравится, но шесть треугольников ты тут не сможешь разместить.

— А если смогу?

— Тогда проси чего хочешь!

Иван задумался, не получить ли заодно и полцарства. Подумайте и вы: разместите как можно больше видов деревьев в вершинах равных треугольников. (Равенство треугольников означает равенство всех его сторон и углов, то есть точное совпадение при наложении; треугольники можно поворачивать и переворачивать. В одной яме может расти только одно дерево.) **[*7 баллов*]** (*Е. В. Бакаев*)

Решение. Иван может спасти брата, заработать денег и даже (если царь сдержит слово) получить полцарства, посадив все 6 видов деревьев как на рисунке.



Других способов посадить все 6 видов деревьев не существует; а вот посадить только 4 или 5 видов деревьев можно многими различными способами.

Задача 6. На витрине ювелирного магазина лежат 15 бриллиантов. Рядом с ними стоят таблички с указанием масс, на которых написано 1, 2, ..., 15 карат. У продавца есть чашечные весы и четыре гирьки массами 1, 2, 4 и 8 карат. Покупателю разрешается только один тип взвешиваний: положить один из бриллиантов на одну чашу весов, а гирьки — на другую и убедиться, что масса на соответствующей табличке указана верно. Однако за каждую взятую гирьку нужно заплатить продавцу 100 монет. Если гирька снимается с весов и в следующем взвешивании не участвует, продавец забирает её. Какую наименьшую сумму придётся заплатить, чтобы проверить массы всех бриллиантов? **[*8 баллов*]**

(*А. В. Грибалко*)

Ответ. 800 монет.

Решение. *Пример*.

Какие гири покупаем	Что взвешиваем	Сколько монет мы заплатили
1	$1=\mathbf{1}$	100
2	$1+2=\mathbf{3}$, $2=\mathbf{2}$	200
4	$2+4=\mathbf{6}$	300
1	$1+2+4=\mathbf{7}$, $1+4=\mathbf{5}$, $4=\mathbf{4}$	400
8	$4+8=\mathbf{12}$	500
1	$1+4+8=\mathbf{13}$	600
2	$1+2+4+8=\mathbf{15}$, $2+4+8=\mathbf{14}$, $2+8=\mathbf{10}$	700
1	$1+2+8=\mathbf{11}$, $1+8=\mathbf{9}$, $8=\mathbf{8}$	800

Оценка. Переходя к каждому взвешиванию, мы либо покупаем одну или несколько гирек, либо отдаём их продавцу. Поэтому мы в сумме купили и отдали $N \geqslant 15$ гирек. При этом после последнего взвешивания у нас на руках есть хотя бы одна гирька, так что мы купили больше, чем отдали. Это значит, что мы купили более половины от N, т. е. как минимум 8 гирек, а значит, заплатили жадному продавцу не менее 800 монет.

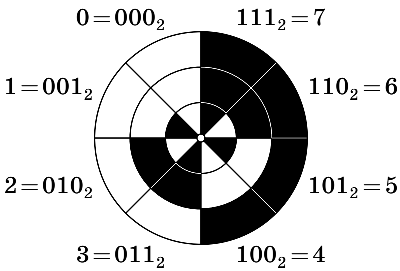
Оценка (другой способ). Представим себе, что плата за каждую гирьку разделена на две части: 50 монет покупатель платит, когда берёт гирьку, а ещё 50 — когда отдаёт. Если считать, что в конце все гирьки возвращаются продавцу, то при таком способе расчёта суммарная плата не изменится.

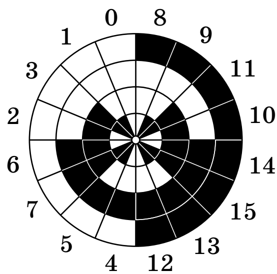
Рассмотрим 16 моментов: начало, когда покупатель берёт первые гирьки, 14 интервалов между взвешиваниями, и конец, когда покупатель отдаёт оставшиеся гирьки. В каждый из этих моментов покупатель производит какое-нибудь действие (что-то берёт или что-то отдаёт), поэтому должен заплатить не менее 50 монет, а всего ему придётся заплатить не менее $50 \cdot 16 = 800$ монет.

Комментарий. Из решения видно, что оптимальный порядок взвешивания перебирает все возможные наборы гирек, причём соседние наборы отличаются добавлением или удалением ровно одной гирьки. Такая последовательность наборов называется *кодом Грея*.

Зачем были придуманы коды Грея? Представьте себе, что нам почему-то хочется знать положение вращающегося диска. Если его хочется знать совсем приблизительно, то можно покрасить одну половину диска в чёрный цвет, а другую в белый и поставить фотодатчик. Теперь мы всегда знаем, какой половиной диск повёрнут к датчику.

Но пусть мы хотим большей точности. Можно поставить несколько фотодатчиков и покрасить на диске несколько колец, а в каждом секторе написать его номер чёрными и белыми полосами как двоичным кодом (см. рис. слева).



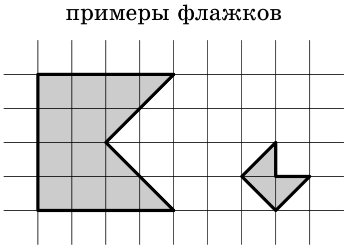


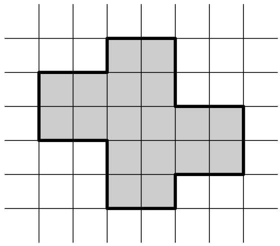
Но тогда на границе секторов датчики могут сработать не совсем одновременно, и между 001 и 010 мы «увидим» 011 или 000. Для такой ситуации и были придуманы коды Грея: если на границе двух секторов меняется цвет только одного из колец, то в любом случае получить можно только код одного из этих секторов.

Любое оптимальное решение задачи оказывается кодом Грея для 4 колец и 16 секторов (на рис. справа использован код Грея из решения задачи).

7 класс

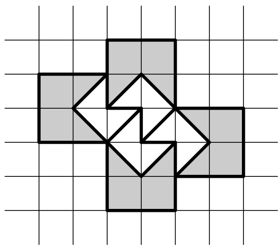
Задача 1. Будем называть *флажком* пятиугольник, вершины которого — вершины некоторого квадрата и его центр. Разрежьте фигуру ниже справа на флажки (не обязательно одинаковые). **[*3 балла*]**





(*М. А. Волчкевич, Т. А. Казицына*)

Ответ.



Задача 2. См. задачу 3 для 6 класса. **[*5 баллов*]**

Задача 3. См. задачу 4 для 6 класса. **[*7 баллов*]**

Задача 4. Фокусник научил Каштанку лаять столько раз, сколько он ей тайком от публики покажет. Когда Каштанка таким способом правильно ответила, сколько будет дважды два, он спрятал вкусный кекс в чемодан с кодовым замком и сказал:

— Восьмизначный код от чемодана — решение ребуса УЧУЙ = КЕ $\times$ КС. Надо заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные разными так, чтобы получилось верное равенство. Пролай нужное число раз на каждую из восьми букв, и получишь угощение.

Но тут случился конфуз. Каштанка от волнения на каждую букву лаяла на 1 раз больше, чем надо. Конечно, чемодан не открылся. Вдруг раздался детский голос: «Нечестно! Собака правильно решила ребус!» И действительно, если каждую цифру решения, которое имел в виду фокусник, увеличить на 1, получится ещё одно решение ребуса!

Можно ли восстановить: а) какое именно решение имел в виду фокусник; б) чему равнялось число УЧУЙ в этом решении? **[*7 баллов*]**

(*А. К. Кулыгин, Т. А. Корчемкина, И. В. Раскина*)

Ответ. а) Нет. б) Да, УЧУЙ $=2021$.

Решение. а) Заметим, что КЕ и КС заменяют разные числа, но от их перестановки произведение УЧУЙ не изменится. Значит, для каждого решения ребуса есть парное, где цифры, соответствующие Е и С, поменяны местами. Поэтому однозначно восстановить решение, задуманное фокусником, не получится.

б) После увеличения всех цифр на 1 получилось снова решение ребуса, значит,

$$\text{УЧУЙ}+1111=(\text{КЕ}+11)(\text{КС}+11)=$$
$$=\text{КЕ}\cdot\text{КС}\ +11\cdot\text{КЕ}+11\cdot\text{КС}+11\cdot 11.$$

Поскольку при этом УЧУЙ $=$ КЕ $\cdot$ КС, получаем, что

$$1111=11\cdot\text{КЕ}+11\cdot\text{КС}+11\cdot 11,$$
$$101=\text{КЕ}+\text{КС}+11,$$
$$\text{КЕ}+\text{КС}=90,$$

то есть

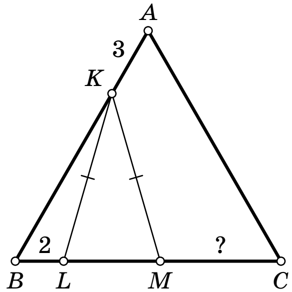
$$10\cdot\text{К}+\text{Е}+10\cdot\text{К}+\text{С}=90,$$
$$20\cdot\text{К}+\text{Е}+\text{С}=90.$$

Заметим, что $\text{Е}+\text{С}$ — это число от 1 до 17, а значит, $20\cdot\text{К}$ — число от 73 до 89, которое делится на 20. Тогда $20\cdot\text{К}=80$ и $\text{К}=4$, а $\text{Е}+\text{С}=10$.

Цифры Е и С — разные, ни одна из них не равна 4, а также ни одна из них не равна 9 (иначе бы при добавлении 1 к каждой цифре произошёл бы переход через десяток, который изменит ровно одну из цифр на месте букв У или К, и итог не будет решением ребуса). Тогда для равенства $\text{Е} + \text{С} = 10$ остаётся только два варианта: $2 + 8$ и $3 + 7$.

Тогда $\text{КЕ} \cdot \text{КС} = 42 \cdot 48 = 2016$ или $\text{КЕ} \cdot \text{КС} = 43 \cdot 47 = 2021$. Но в слове УЧУЙ совпадают первая и третья буква, а значит, подходит только вариант $\text{УЧУЙ} = 2021$.

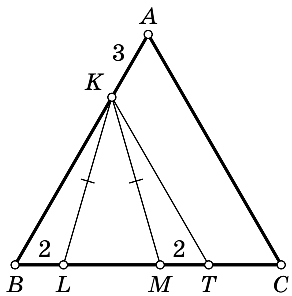
Задача 5. Дан правильный треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка K, на стороне BC — точки L и M (L лежит на отрезке BM) так, что $KL = KM$, $BL = 2$, $AK = 3$. Найдите CM. **[*7 баллов*]**



(*Е. В. Бакаев*)

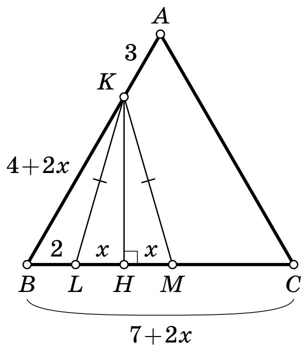
Ответ. 5.

Решение. Отметим на продолжении отрезка LM за точку M такую точку T, что $MT = 2$. Углы BLK и TMK равны, так как они смежные с равными углами равнобедренного треугольника KLM. Значит, треугольники BLK и TMK равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда равны их соответствующие углы: $\angle KTM = \angle KBL = 60^\circ$.



В треугольнике KBT два угла по 60°, поэтому он равносторонний, и $BK = BT$. Так как треугольник ABC тоже равносторонний и $BA = BC$, то $CT = BC - BT = BA - BK = AK = 3$ (и точка T лежит именно на стороне BC, а не на её продолжении). Тогда $CM = CT + MT = 3 + 2 = 5$.

Второе решение. Проведём высоту KH равнобедренного треугольника KLM. Она также является его медианой, поэтому $LH = HM$. Обозначим $LH = HM = x$. Треугольник KBH — прямоугольный с углом B, равным 60°, а значит, его гипотенуза KB в 2 раза больше его катета BH. Так как $BH = 2 + x$, то $KB = 2BH = 4 + 2x$, а тогда $BA = BK + KA = 4 + 2x + 3 = 7 + 2x$. Треугольник ABC равносторонний, поэтому $BC = BA = 7 + 2x$. А значит, $MC = BC - BM = (7 + 2x) - (2 + 2x) = 5$.



Задача 6. Пять друзей подошли к реке и обнаружили на берегу лодку, в которой могут поместиться все пятеро. Они решили покататься на лодке. Каждый раз с одного берега на другой переправляется компания из одного или нескольких человек. Друзья хотят организовать катание так, чтобы каждая возможная компания переправилась ровно один раз. Получится ли у них это сделать?

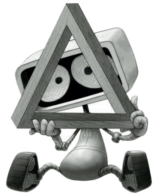
[*9 баллов*] (*А. В. Грибалко*)

Ответ. Не получится.

Решение. Предположим, что друзьям удастся осуществить желаемое. Давайте посчитаем, сколько всего возможных компаний можно составить из пяти человек (и, соответственно, сколько раз переплывёт лодка с одного берега на другой). Каждый человек может либо войти, либо не войти в компанию, то есть для каждого есть два варианта, поэтому всего вариантов $2^5 = 32$. В том числе мы посчитали вариант, когда никто не попал в компанию. Однако лодка пустая не плавает, значит, всего компаний $32 - 1 = 31$. Так как это число нечётно, то друзья должны переплыть реку нечётное количество раз, поэтому в итоге лодка окажется на противоположном берегу. Следовательно, хотя бы один из друзей завершит катание на другом берегу, пусть это будет Вася.

Посмотрим, сколько раз он мог переправиться. Каждый из его друзей может либо плыть, либо не плыть с ним, поэтому Вася входит в $2^4 = 16$ различных компаний (в том числе он может плыть и один). Но это число чётно, значит, после катания Вася должен вернуться на исходный берег. Полученное противоречие доказывает, что покататься требуемым образом не получится.

ЖУРНАЛ
КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ



Ежемесячный научно-познавательный журнал для школьников 5-8 классов

В журнале вы найдёте интересные статьи и задачи по математике, лингвистике, физике, химии, биологии и другим естественным наукам, сможете принять участие в конкурсах по математике и русскому языку.

Победителей конкурсов ждут дипломы и призы!

Знаете ли вы:

- **Как древние греки измерили Землю?**
- **Откуда лифт приезжает чаще — сверху или снизу?**
- **Как доказать теорему Пифагора с помощью велосипеда?**
- **Можно ли сжечь Землю гигантской линзой?**
- **Как сделать игральный кубик из монетки?**
- **Были ли у динозавров перья?**
- **Как измерить яркость звёзд?**

Ответы на эти и многие другие вопросы ищите в журнале «Квантик»!

Кроме журнала, редакция выпускает альманахи, календари загадок, плакаты, а также серию книг «Библиотечка журнала «Квантик».
Вышли в свет три выпуска библиотечки:

- М. Евдокимов «Сто граней математики»
- С. Федин «Перепутаница»
- К. Кохась «Как Бусенька что-то-там. Математические сказки»

Всю продукцию «Квантика» можно купить в магазине «Математическая книга», по адресу: г. Москва, Большой Власьевский переулок, д. 11 (сайт: **biblio.mccme.ru**), а также в интернет-магазине **kvantik.ru**

На журнал «Квантик» можно подписаться	
на почте по Объединённому каталогу «Пресса России»: индекс **11348** (на год) индекс **11346** (на полгода или несколько месяцев)	*онлайн на сайте агентства «АРЗИ»:* **www.akc.ru/itm/kvantikgodovay_a/** (на год) **www.akc.ru/itm/kvantik/** (на полгода или несколько месяцев)

ВСЕ ПОДРОБНОСТИ О ЖУРНАЛЕ — НА САЙТЕ KVANTIK.COM