Система оценивания экзаменационной работы по матем
(профильный уровень)

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными в
экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или
десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оце
баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	9
2	-2
3	288
4	0,55
5	4,5
6	118
7	0,25
8	12
9	14
10	6000
11	10
12	4
13	а) $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in Z$ б) $-3{,}5\pi;\ -4\pi$
14	120
15	$\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right] \cup (1; +\infty)$
16	9:55
17	20,25 млн
18	$(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$
19	а) да, например 18 красных и 14 синих б) нет в) 33

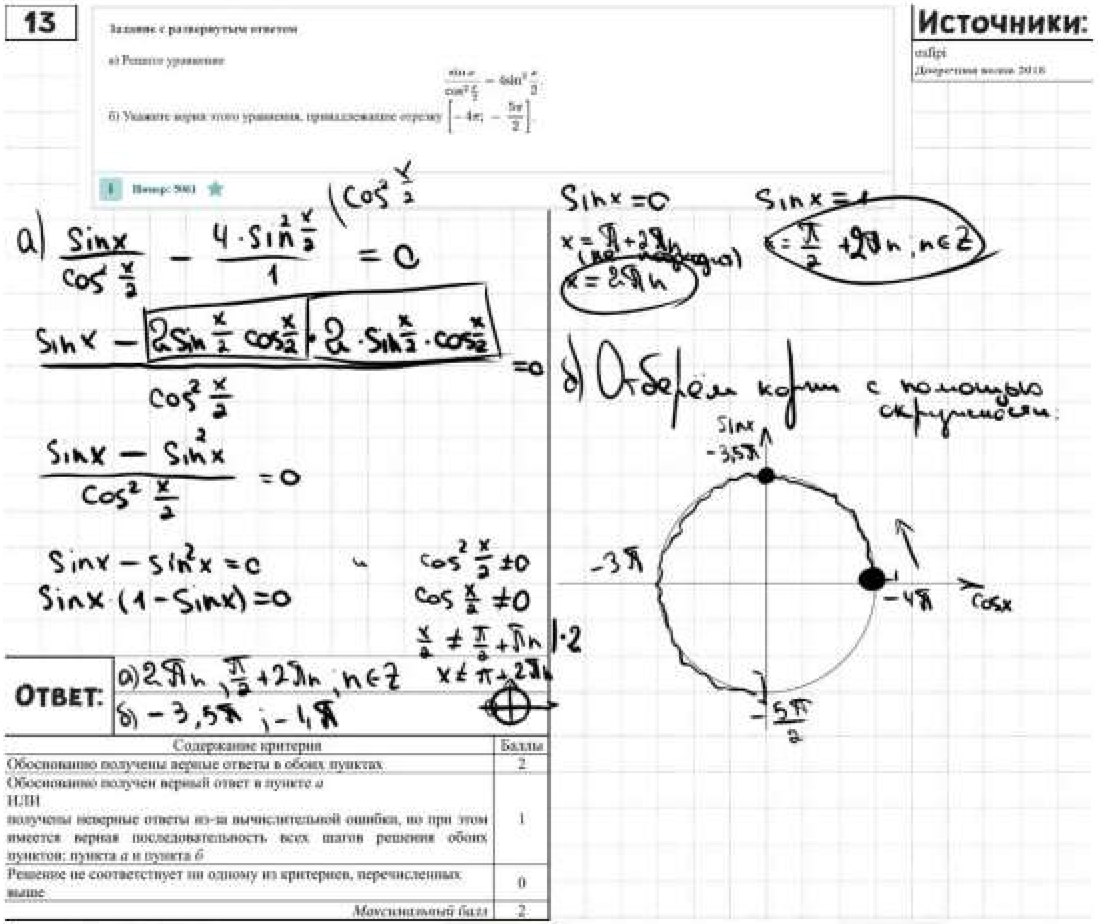
Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



13

Задание с развернутым ответом

а) Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}} = 4\sin^2\frac{x}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Номер: 5061

Источники:

Досрочная волна 2018

а) $\frac{\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}} - \frac{4\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{1} = 0$ $\left(\cos^2\frac{x}{2}\right.$

$\frac{\sin x - \boxed{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\cdot\boxed{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}}{\cos^2\frac{x}{2}} = 0$

$\frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2\frac{x}{2}} = 0$

$\sin x - \sin^2 x = 0$ и $\cos^2\frac{x}{2} \neq 0$

$\sin x\,(1-\sin x) = 0$ $\quad \cos\frac{x}{2} \neq 0$

$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \;|\cdot 2$

$x \neq \pi + 2\pi n$

$\sin x = 0$

$x = \pi + 2\pi n$ (не подходит)

$x = 2\pi n$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности:

Ответ: а) $2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in Z$

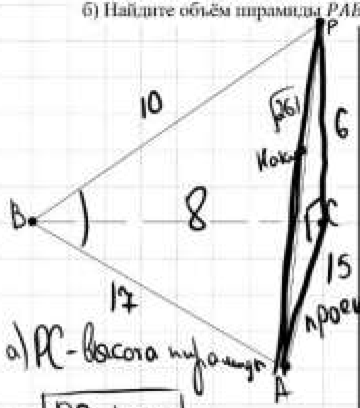
б) $-3{,}5\pi;\ -4\pi$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos\angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды $PABC$.



а) PC - высота пирамиды

$\Rightarrow \boxed{PC \perp BC}$

$PC \perp AC$

$PC \perp AB$

1 способ

$\begin{cases} BC \perp PC \\ BC \perp PA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (PCA)$

$\Rightarrow BC \perp AC$ ■

2 способ

$PA \perp BC$
наклонная

проекция $\Rightarrow$

$AC \perp BC$
проекция по ТТП

б) ① $\triangle ABP$:

$AP = \sqrt{10^2 + 17^2 - 2 \cdot 10 \cdot 17 \cdot \frac{32}{85}}$

$= \sqrt{261}$

② $\triangle ABC$: ① $17^2 = AC^2 + BC^2$

$\triangle BPC$: ② $10^2 = PC^2 + BC^2$

$\triangle APC$: ③ $261 = AC^2 + PC^2$

① - ②

$189 = AC^2 - PC^2$

$+\begin{cases} 189 = AC^2 - PC^2 \\ 261 = AC^2 + PC^2 \end{cases}$

$450 = 2AC^2$

$AC^2 = 225$

$AC = 15$

③ $V_{PABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 15}{2} \cdot 6 = 120$

Ответ: 120

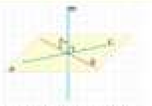
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Источники:

Горняк #11 2019

Основная волна (Резерв) 2017

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

Если $\begin{cases} m \perp b \\ m \perp c \\ b \cap c \end{cases}$, то $m \perp \alpha$

15 Решите неравенство $(2 - 3x) \cdot \log_{2x-1}(x^2 - 2x + 2) \leq 0$.

$(2-3x) \cdot (\log_{2x-1}(x^2-2x+2) - \log_{2x-1} 1) \leq 0$

① $(2-3x) \cdot (2x-1-1) \cdot (x^2-2x+2-1) \leq 0$

② $2x-1 \neq 1$

③ $2x-1 > 0$

④ $x^2-2x+2 > 0$

① $(2-3x) \cdot (2x-2) \cdot (x^2-2x+1) \leq 0$

② $x \neq 1$

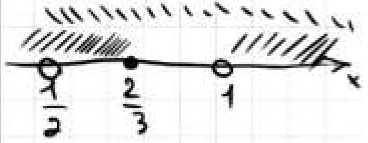
③ $x > \frac{1}{2}$

④ $x^2 - 2x + 1 + 1 > 0$

$(x-1)^2 + 1 > 0$

x - любое

Найдём пересечение



Ответ: $(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}] \cup (1; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

Источники:

ФИПИ

mlfipi

Ященко 2018

Досрочная волна 2016

МЕТОД ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ

Было	Стало
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

16

Задание с развернутым ответом

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

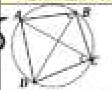
б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 3$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4.

1 Номер: 4383

Источники:

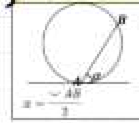
osfipi
Ященко 2016 (36 вар)
Семёнов 2015
Основная волна 2014
Материалы для экспертов ЕГЭ

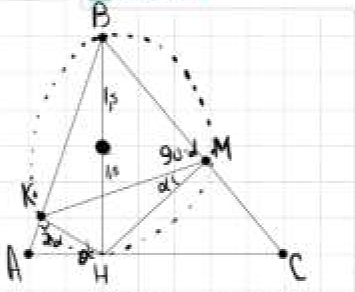
ПРИЗНАК ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА



Если два равных угла опираются на один отрезок, то около четырёхугольника можно описать окружность

УГОЛ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ХОРДОЙ





а) ① $\angle BKH = 90^\circ$, $\angle BMH = 90^\circ$ – эти углы опир. на отрезок BH

$\Rightarrow$ около BMHK можно описать окр-ть с диаметром BH

② Пусть $\angle KMH = \alpha$

$\smile KH = 2\alpha$

$\angle AHK = \frac{1}{2} \smile KH = \alpha$

$\angle A = 90 - \alpha$

$\angle BMK = 90 - \alpha$

① $\triangle MBK \sim \triangle ABC$ по углам

($\angle BMK = \angle A = 90 - \alpha$)

$\angle B$ – общий

б) ① $R_{MBK} = 1{,}5$

$R_{ABC} = 4$

$\Rightarrow k = \frac{4}{1{,}5} = \frac{8}{3}$

② $\frac{S_{ABC}}{S_{MBK}} = \frac{64x}{9x}$

$\Rightarrow S_{AKMC} = 55x$

$\frac{S_{MBK}}{S_{AKMC}} = \frac{9x}{55x} = \frac{9}{55}$

Ответ: 9 : 55

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года; ·1,25

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; на $\frac{9}{n}$

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

Источники:

FIPI
osfipi
Основная волна 2019

n – срок кредита
март – месяц платежа

Дата	Сумма долга
и 21	9
я 22	9 · 1,25
м 22	⇒ была выплата 3,25
и 22	$9 - 1 \cdot \frac{9}{n} = 8$
я 23	8 · 1,25
м 23	⇒ была выплата 3
и 23	$9 - 2 \cdot \frac{9}{n} = 7$
я 24	7 · 1,25 = 8,75
м 24	⇒ была выплата 2,75
и 24	$9 - 3 \cdot \frac{9}{n} = 6$

8 я м и

9 я м и ⇒ была выплата $\boxed{\frac{9}{n} \cdot 1{,}25} = 1{,}25$ млн

$\frac{9}{n} = 1$

$\frac{9}{n} \cdot 1{,}25$

0

Выплаты образуют убыв. арифм. прогр.

$\Rightarrow \frac{9}{n} \cdot 1{,}25 = 1{,}25$

$n = 9$

$О.С.В. = \frac{1 вып. + 9 вып.}{2} \cdot 9$

$= \frac{3{,}25 + 1{,}25}{2} \cdot 9 = 20{,}25$ млн

Ответ: 20,25 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$|\sin^2 x + 2\cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень.

Источники:
ФИПИ
Основная волна (Резерв) 2013

$$\left[\begin{array}{l} ① \begin{cases} \sin^2 x + 2\cos x + a \geq 0 \\ \cancel{\sin^2 x} + 2\cos x + a = \cancel{\sin^2 x} + \cos x - a \end{cases} \\ ② \begin{cases} \sin^2 x + 2\cos x + a < 0 \\ -\sin^2 x - 2\cos x - a = \sin^2 x + \cos x - a \end{cases} \end{array}\right.$$

1 случай

$$\begin{cases} \cos x = -2a \text{ на } \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right] \\ \sin^2 x + 2\cos x + a \geq 0 \end{cases}$$

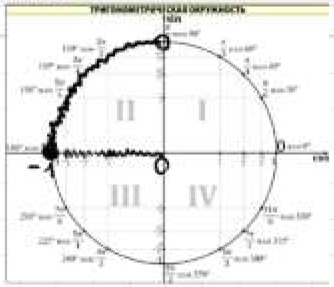
$1 - \cos^2 x + 2\cos x + a \geq 0$

$1 - (-2a)^2 + 2\cdot(-2a) + a \geq 0$

$-4a^2 - 3a + 1 \geq 0$

$4a^2 + 3a - 1 \leq 0$

$+ \quad -1 \quad - \quad \frac{1}{4} \quad + \quad a$



$-1 \leq \cos x < 0$

$-1 \leq -2a < 0$

$0 < a \leq \frac{1}{2}$

Найдём пересечение:

$-1 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad a$

2 случай

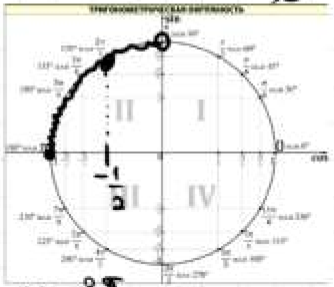
$$\begin{cases} 2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \\ \sin^2 x + 2\cos x + a < 0 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$2\cdot(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$

$-2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\cancel{\cos x = 2}$



$x_2 = \frac{2\pi}{3}$

Подставим в нер-во:

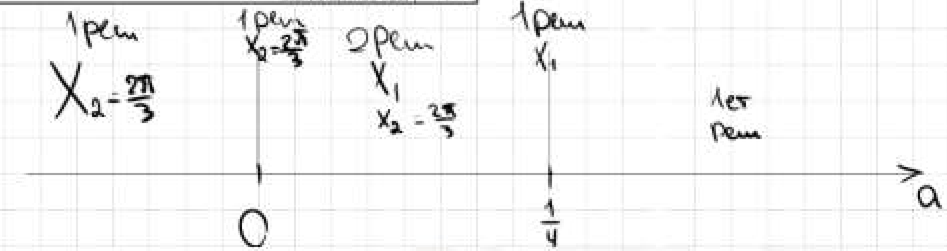
$\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + a < 0$

$a < -\frac{3}{4} + 1$

$a < \frac{1}{4}$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



19 Красный карандаш стоит 17 рублей, синий – 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?
б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?
в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

Источники:
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
СтатГрад 2015

а) Пусть x - число красных карандашей

$32 - x$ - число синих

$x\cdot 17 + (32 - x)\cdot 13 \leq 495$

$17x + 416 - 13x \leq 495$

$4x \leq 79$

$x \leq 19{,}75$

Если $x = 19$ (красных), то $32 - x = 13$ (синих)

$x = 18$ $\quad$ $32 - x = 14$

Проверка

$18\cdot 17 + 14\cdot 13 = 488$ ✓

б) $17x + 13\cdot(35 - x) \leq 495$

$4x \leq 495 - 455$

$4x \leq 40$

$x \leq 10$

Если $x = 10$ (красных), то $35 - x = 25$ (синих)

Разница 15

Если $x = 9$, то $35 - x = 26$

разница 17

Разница кол-ва синих и красных ≥ 15

$\Rightarrow$ нет

в) Проверим 33

$17x + 13\cdot(33 - x) \leq 495$

$4x \leq 66$

$x \leq 16{,}5$

Если $x = 16$, то $33 - x = 17$ ✓

$16\cdot 17 + 17\cdot 13 = 493$ ✓

Проверим 34

$17x + 13\cdot(34 - x) \leq 495$

$4x \leq 53$

$x \leq 13{,}25$

Если $x = 13$, то $34 - x = 21$

$x = 12$ $\quad$ 22

$\Rightarrow$ разница ≥ 8

При числе карандашей ≥ 34 разница между синими и красными будет ≥ 8, либо неравенство не будет иметь решений

Ответ:
а) Да
б) Нет
в) 33

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.