

# ХIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

## Решения заданий регионального этапа, 2 день

6. У уголка из трёх клеток центральной назовём клетку, соседнюю по стороне с двумя другими. Существует ли клетчатая фигура, которую можно разбить на уголки из трех клеток тремя способами так, чтобы каждая ее клетка в одном из разбиений была центральной в своем уголке? (Д. Демин)

**Ответ.** Существует. **Решение.** Вырежем у квадрата  $4 \times 4$  угловые клетки. Легко проверить, что получившуюся фигуру можно разбить на уголки ровно тремя способами, и условие задачи для них выполняется.

7. Точка  $M$  — середина стороны  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$ . Точки  $P$  и  $R$  на отрезках  $AM$  и  $BC$  соответственно выбраны так, что  $AP = BR$ . Найдите сумму углов  $ARM$ ,  $PBM$  и  $BMR$ . (С. Берлов)

**Ответ.**  $60^\circ$ . **Решение.** Пусть отрезки  $AR$  и  $BM$  пересекаются в точке  $Q$ . Так как треугольники  $ABP$  и  $BAR$  равны по первому признаку,  $\angle BAR = \angle ABP = \alpha$ . Тогда  $\angle ARM + \angle BMR = 180^\circ - \angle AQB = 2\alpha + \angle PBM$  (здесь первое равенство — теорема о внешнем угле для треугольника  $MQR$ , а второе — теорема о сумме углов для треугольника  $AQB$ ), откуда  $\angle ARM + \angle BMR + \angle PBM = 2(\alpha + \angle PBM) = 2\angle ABM = 60^\circ$ .

8. Сначала Саша прямолинейными разрезами, каждый из которых соединяет две точки на сторонах квадрата, делит квадрат со стороной 2 на 2020 частей. Затем Дима вырезает из каждой части по кругу. Докажите, что Дима всегда может добиться того, чтобы сумма радиусов этих кругов была не меньше 1. (А. Кузнецов)

**Решение.** Впишем в квадрат круг радиуса 1 и проведем первый разрез. Если он не заденет вписанный круг, вырежем любой круг из части квадрата, не содержащей исходного круга. В противном случае разрез делит исходный круг на два сегмента. Заменим исходный круг двумя вписанными в эти сегменты кругами. Точки их касания с границей исходного круга — концы его диаметра, содержащего середину общей хорды сегментов, где вписанные в сегменты круги касаются друг друга. Теперь проведем второй разрез, рассмотрим пересеченные им части квадрата, получившиеся после первого разреза, и применим к каждой из них описанный выше алгоритм. Далее проделаем то же самое для третьего разреза и т. д. Очевидно, сумма радиусов выбранных кругов при этом не убывает, и после 2020-го разреза она будет не меньше 1.

9. Дано натуральное число  $n$ , большее 2. Докажите, что если число  $n! + n^3 + 1$  — простое, то число  $n^2 + 2$  представляется в виде суммы двух простых чисел. (Д. Демин)

**Решение.** Как известно,  $n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1)$ . Так как оба сомножителя в правой части тут меньше, чем  $(n+1)^2$ , если один из них — составное число, то у него есть делитель  $d$ , больший 1, но не больший  $n$ . Но тогда и число  $n! + n^3 + 1$  делится на  $d$ , что противоречит его простоте. Значит, числа  $n^2 - n + 1$  и  $n+1$  — простые, а в сумме они как раз дают  $n^2 + 2$ .

10. В квадратной таблице  $2021 \times 2021$  стоят натуральные числа. Можно выбрать любой столбец или любую строку в таблице и выполнить одно из следующих действий: 1) Прибавить к каждому выбранному числу 1. 2) Разделить каждое из выбранных чисел на какое-нибудь натуральное число. Можно ли за несколько таких действий добиться того, чтобы каждое число в таблице было равно 1? (М. Дидин)

**Ответ.** Можно. **Решение.** Докажем, что можно сделать первые  $k$  столбцов одинаковыми, индукцией по  $k$ . База —  $k = 1$ . Переход. Пусть первые  $k$  столбцов одинаковы. Будем прибавлять к  $(k+1)$ -ому столбцу 1 до тех пор, пока каждое число в нём не станет больше, чем соседнее число в  $k$ -ом столбце. Теперь рассмотрим  $m$ -ую строку. Пусть на пересечении её с  $k$ -ым столбцом стоит  $a$ , а на пересечении с  $(k+1)$ -ым столбцом —  $b > a$ . Пусть  $a$  при делении на  $b-a$  дает остаток  $r$ . Прибавим к  $m$ -ой строке  $b-a-r$  единиц. Теперь первые  $k+1$  чисел в ней делятся на  $b-a$ . Далее прибавим к каждому из столбцов, начиная с  $(k+2)$ -го, по несколько единиц так, чтобы все оставшиеся числа  $m$ -ой строки тоже стали делиться на  $b-a$ , после чего разделим  $m$ -ую строку на  $b-a$ . Заметим, что в итоге первые  $k$  чисел  $m$ -ой строки остались равными, а  $(k+1)$ -ое ее число стало на единицу больше каждого из них. Проведем такую операцию с каждой строкой таблицы. Поскольку к первым  $k+1$  столбцам на каждом этапе 1 добавляется одинаковое количество раз, окажется, что первые  $k$  столбцов, по-прежнему равны, а  $(k+1)$ -ый — на 1 больше. Прибавив по 1 к первым  $k$  столбцам, завершим переход индукции. Когда все столбцы таблицы равны и в каждой строке все элементы одинаковы, завершаем решение делением каждой строки на её элемент.