

ХІІІ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *Натуральное число, большее 1000000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 125. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде сотен?* (Н. Агаханов)

Решение. Пусть n — данное число, t — его остаток от деления на 40 и от деления на 125. Тогда число $n-t$ делится на $40 = 5 \cdot 8$ и на 125, то есть делится на 1000. Значит, разность $n-t$ оканчивается тремя нулями. А остаток $t < 40$. Поэтому в разряде сотен стоит 0.

2. *Числа x и y , не равные 0, удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy (укажите все возможности)?* (Н. Агаханов)

Ответ. Знак плюс. **Первое решение.** Сложив данные неравенства, получим: $x+y < 0$ (*). Перемножив их (это можно делать, так как правые части неотрицательны) получим: $xy(1-x-y) > x^2y^2$. Стало быть, $xy(1-x-y) > 0$. Выражение в скобках положительно в силу неравенства (*), поэтому и произведение xy положительно.

Второе решение. Пусть одно из чисел (для определенности x) положительно. Тогда из первого неравенства в условии получаем $x^2 > x^2 - x > y^2 \geq 0$ и, значит, $x > |y|$. Следовательно, по второму неравенству из условия $y^2 + x > y^2 + |y| \geq y^2 - y > x^2$, поэтому $y^2 > x^2 - x$, что противоречит первому неравенству. Таким образом, наше предположение неверно и среди чисел x и y нет положительных. А значит, они оба отрицательны и $xy > 0$.

3. *В группе из 79 школьников у каждого не более 39 знакомых, причем у любого мальчика есть знакомая девочка, а у любой девочки — знакомый мальчик. Может ли оказаться, что все девочки из этой группы имеют в ней поровну знакомых мальчиков, а все мальчики — поровну знакомых девочек? Все знакомства — взаимные.* (С. Берлов)

Ответ. Не может. **Решение.** Предположим противное. Пусть в группе x мальчиков и каждый знает y девочек. Тогда всего в группе будет xy знакомств. У всех девочек должно быть поровну из всех этих знакомств, значит xy делится на $79-x$. Можно считать, что $x \leq 39$ (иначе поменяем мальчиков и девочек ролями). Так как x взаимно просто с $79-x$, на $79-x$ должно делиться число y . Но $79-x \geq 40$, а y по условию не больше 39. Противоречие.

4. *Петя и Вася играют в игру. Вася кладёт в ряд 150 монет: некоторые «орлом» вверх, некоторые — «решкой». Петя своим ходом может показать на любые три лежащие подряд монеты, после чего Вася обязан перевернуть какие-то две монеты из этих трёх по своему выбору. Петя хочет, чтобы как можно больше монет лежали «решкой» вверх, а Вася хочет ему помешать. При каком наибольшем k Петя сможет независимо от действий Васи добиться того, чтобы хотя бы k монет лежали «решкой» вверх?* (С. Берлов, Н. Власова)

Ответ. 74. **Решение.** Покажем, как Петя может обеспечить 74 «решки». Разобьем все монеты на пары идущих подряд. На k -ом шаге ($1 \leq k \leq 74$) Петя смотрит на монеты в паре $(2k-1, 2k)$. Если среди них есть хотя бы одна решка, то переходит к следующему шагу. Если среди них нет решки, то Петя указывает на тройку $(2k-1, 2k, 2k+1)$, после чего в этой паре появляется хотя бы одна решка. Таким образом, через 74 шага в каждой паре монет, кроме последней, будет хотя бы одна решка, то есть решек будет не менее 74.

Покажем, как Вася может помешать положить больше 74 «решек». Вначале он кладет орлом вверх все монеты с нечетными номерами, а также монету 150, а все остальные монеты — решкой. Далее он разбивает монеты с номерами 2-149 на пары подряд идущих. Среди любых трех монет, на которые может указать Петя, две монеты обязательно будут из одной пары. Именно их Вася и переворачивает. При такой игре Васи монеты 1 и 150 всегда будут лежать орлом вверх, а в каждой его паре будет ровно один орел и одна решка.

5. *CL — биссектриса треугольника ABC . $CLBK$ — параллелограмм. Прямая AK пересекает отрезок CL в точке P . Оказалось, что точка P равноудалена от диагоналей параллелограмма $CLBK$. Докажите, что $AK \geq CL$.* (С. Берлов)

Первое решение. Обозначим через T точку пересечения диагоналей параллелограмма $CLBK$. В силу свойства биссектрисы и теоремы Фалеса $BC/KL = CT/TL = CP/PL = KP/PA = BL/LA = BC/CA$, откуда $AC = KL$. Но тогда $ACKL$ либо параллелограмм, либо равнобедренная трапеция. Во втором случае $AK = CL$. В первом случае $LB = CK = AL$, поэтому $AC = CB$ и CL — общий перпендикуляр к параллельным прямым CK и AB , а тогда он короче наклонной AK . **Второе решение.** Из условия следует, что точка P равноудалена от прямых KL , BC и AC . Если прямые AC и KL пересекаются (в точке X), то прямая XP — биссектриса угла AXL . По свойству трапеции $ACKL$ эта прямая проходит через середины оснований AL и KC . Поэтому $AX = XL$, трапеция равнобокая и $AK = CL$. Если же $AC \parallel KL$, то $ACKL$ — параллелограмм, $AL = KC = BL$, и биссектриса CL треугольника ABC является медианой. Поэтому она же — и высота, то есть $CL \perp AB$, и расстояние между параллельными прямыми AB и CK равно CL . Следовательно, отрезок AK , соединяющий точки на этих прямых, не короче CL .