Номер задания	Правильный ответ
1	7
2	12
3	12
4	0,04
5	2
6	30
7	5
8	5
9	-24
10	30
11	10
12	-21
13	а) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n;\ n \in Z$ б) $-\frac{9\pi}{2}; -\frac{21\pi}{4}$
14	$\sqrt{15}$
15	$(1;2) \cup (2;3] \cup (6;+\infty)$
16	60
17	7
18	$\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$
19	а) 2, 12, 18, 18 б) да в) 70

13 а) Решите уравнение

$$\cos x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x + 1)} = 0$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$

Источники:

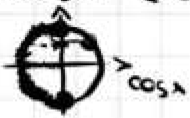
Ященко 2020 (10 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
Ященко 2019 (14 вар)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ	
1	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2	$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
3	$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
4	$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

а) $\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(\sin x+1)} = -\cos x$

$$\begin{cases} ① \ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x+1) = (-\cos x)^2 \quad |\cdot 2 \\ ② \ -\cos x \geq 0 \quad |\cdot(-1) \end{cases}$$

② $\cos x \leq 0$



① $(2-\sqrt{2})\cdot(\sin x+1) = 2\cos^2 x$

$2\sin x + \cancel{2} - \sqrt{2}\cdot\sin x - \sqrt{2} = \cancel{2} - 2\sin^2 x$

$2\sin^2 x + 2\sin x - \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2} = 0$

$2\sin x\cdot(\sin x+1) - \sqrt{2}\cdot(\sin x+1) = 0$

$(\sin x+1)\cdot(2\sin x - \sqrt{2}) = 0$

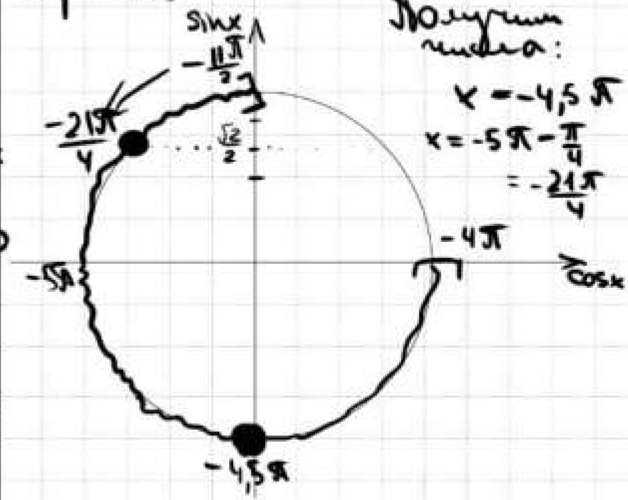
$\sin x = -1$ или $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ (не подходит)

$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окр-ти



Получим числа:

$x = -4{,}5\pi$

$x = -5\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{21\pi}{4}$

ОТВЕТ:	
	а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in Z$
	б) $-4{,}5\pi; \ -5{,}25\pi$

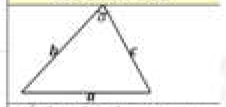
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA. Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M.

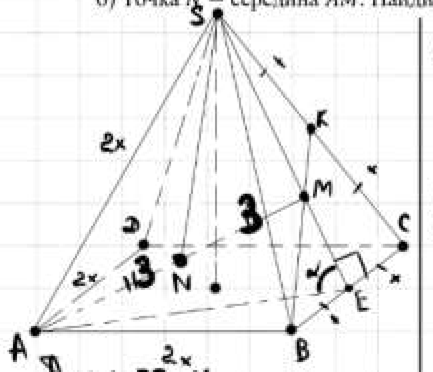
а) Докажите, что $AM = AD$.
б) Точка N – середина AM. Найдите SN, если $AD = 6$.

Источники:
Основная волна 2017

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



1	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
2	$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$



Пусть $BF = x$

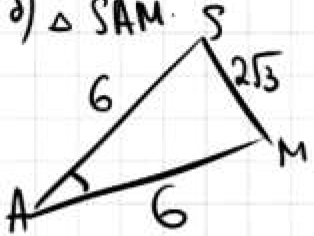
а) $\triangle ABE$: $AE = \sqrt{5}\cdot x$
$\triangle SEC$: $SE = \sqrt{3}\cdot x$
$ME = \frac{1}{3}\cdot SE = \frac{\sqrt{3}}{3}x$
(т.к. M – точка пересеч. медиан)

$\triangle ASE$: $\cos\alpha = \frac{3x^2+5x^2-4x^2}{2\cdot\sqrt{3}x\cdot\sqrt{5}x} = \frac{2}{\sqrt{15}}$

$\triangle AME$: $AM = \sqrt{\frac{3}{9}x^2 + 5x^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}x\cdot\sqrt{5}x\cdot\frac{2}{\sqrt{15}}}$

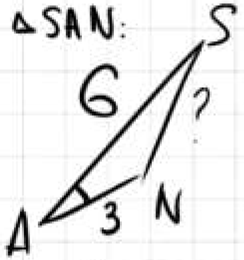
$AM = 2x = AD$

б) $\triangle SAM$:



$\cos\angle SAM = \frac{36+36-12}{2\cdot 36} = \frac{60}{72} = \frac{5}{6}$

$\triangle SAN$:



$SN = \sqrt{6^2+3^2-2\cdot 6\cdot 3\cdot\frac{5}{6}} = \sqrt{15}$

ОТВЕТ: $\sqrt{15}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство
$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\frac{x}{6}} \geq -1$$

Источники:
Ященко 2020 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

МЕТОД ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ

Было	Стало
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

$\frac{1}{\log_{(x-1)}\frac{x}{6}} + \frac{1}{1} \geq 0$

$\frac{1 + \log_{(x-1)}\frac{x}{6}}{\log_{(x-1)}\frac{x}{6}} \geq 0$

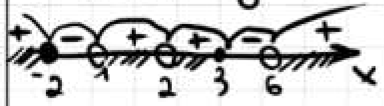
$\frac{\log_{(x-1)}\frac{x}{6} - \log_{(x-1)}\frac{1}{(x-1)}^{(-1)}}{\log_{(x-1)}\frac{x}{6} - \log_{(x-1)}1} \geq 0$

① $\frac{(x-1-1)\cdot\left(\frac{x}{6} - \frac{1}{x-1}\right)}{(x-1-1)\cdot\left(\frac{x}{6}-1\right)} \geq 0$

② $x-1 \neq 1$
③ $x-1 > 0$
④ $\frac{x}{6} > 0$ $|\cdot 6$
⑤ $\log_{x-1}\frac{x}{6} \neq 0$

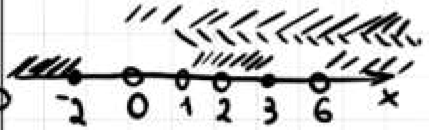
③ $x > 1$
④ $x > 0$
⑤ $\frac{x}{6} \neq 1$
$x \neq 6$

① $\frac{(x-2)\cdot\frac{x^2-x-6}{6(x-1)}}{(x-2)\cdot\frac{x-6}{6}} \geq 0$



② $x \neq 2$

Найдём пересечение



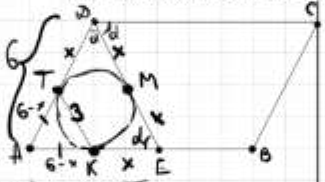
ОТВЕТ: $(1;2)\cup(2;3]\cup(6;+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

16 Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что $KT \parallel DE$.
б) Найдите угол BAD, если сторона $AD = 6$ и $KT = 3$.



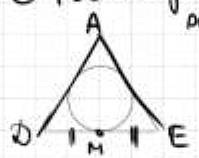
а) ① $\angle CDE = \angle DEA = \alpha$ (накрест леж.)

② $AT = AK$ (по св-ву кас)

③ $\triangle ADE$ - равноб.
$\triangle ATK$ - равноб.

$\angle A$ - общий
$\angle ADE + \angle AED = \angle ATK + \angle AKT$
$\alpha + \alpha = \angle ATK + \angle AKT$
$\Rightarrow \angle ATK = \alpha$
$\angle AKT = \alpha$
$\Rightarrow KT \parallel DE$ ■

б) ① Рассмотрим $\triangle ADE$ равноб.



M - середина DE

② Пусть
$DM = x = ME$

③ $DM = DT = x$
$ME = EK = x$
$AK = AT = 6 - x$
по свойству кас.

④ $\triangle ATK \sim \triangle ADE$
$\frac{3}{2x} = \frac{6-x}{6}$
$18 = 12x - 2x^2$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
$x = 3$
$\Rightarrow \triangle ADE$ - равност.
$\Rightarrow \angle BAD = 60°$

Ответ: 60

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Источники:

Гордин #16 2019
Семёнов 2015

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

17 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

Пусть Январь 2021 - месяц открытия вклада
Декабрь - месяц начисл. %
x - фиксированная сумма пополнения вклада

	Дата	Сумма вклада
1 год	янв 21	10 млн
	дек 21	$10 \cdot 1{,}1$
2 год	янв 22	— | — | —
	дек 22	$10 \cdot 1{,}1^2$
3 год	янв 23	$10 \cdot 1{,}1^2 + x$
	дек 23	$10 \cdot 1{,}1^3 + 1{,}1 \cdot x$
4 год	янв 24	$10 \cdot 1{,}1^3 + 1{,}1 \cdot x + x$
	дек 24	$10 \cdot 1{,}1^4 + 1{,}1^2 \cdot x + 1{,}1x \geq 30$

$14{,}641 + 1{,}21 \cdot x + 1{,}1x \geq 30$
$2{,}31 \cdot x \geq 15{,}359$
$x \geq \frac{15{,}359}{2{,}31}$
$x \geq \frac{15359}{2310}$

$15359 \mid 2310$
$-13860 \quad 6$
1499

$x \geq 6 \frac{1499}{2310}$

Ответ: 7

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

Источники:

Ященко 2018 (36 вар)
Досрочная волна 2016
Основная волна (Резерв) 2016

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(x^2+x+2a^2+1)^2 = 8a^2(x^2+x+1)$$

имеет ровно один корень.

Источники:

Ященко 2020 (10 вар)
Ященко 2020 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2010 (50 вар)
Ященко 2010 (14 вар)

Пусть $x^2+x+1=t$

$(t+2a^2)^2 = 8a^2\cdot t$

$t^2+4a^2t+4a^4-8a^2\cdot t=0$

$t^2-4\cdot a^2\cdot t+4a^4=0$

$(t-2a^2)^2=0$

$t-2a^2=0$

$x^2+x+1-2a^2=0$

$D=0$

$1-4\cdot(1-2a^2)=0$

$1-4+8a^2=0$

$8a^2=3$

$a^2=\frac{3}{8}$

$a=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из четырёх членов, сумма которых равна 50.
б) Может ли такая последовательность состоять из шести членов и содержать два одинаковых числа?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n=10$?

Источники:

Основная волна 2018

а) 7 12 15 16

3 10 16 21

2 12 18 18

б) 2 12 18 18 12 2

в) 70

1 5 8 10 11 11 10 8 5 1

d=4 d=3 d=2 d=1 d=0 d=-1 d=-2 d=-3 d=-4

① Нужно „зеркальное отражение"

② по краям единицы

③ $a_n > \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \,\Big|\cdot 2$

$2a_n > a_{n-1}+a_{n+1}$

$a_n-a_{n-1} > a_{n+1}-a_n$

$\overline{a_{n-1}}$ $\overline{a_n}$ $\overline{a_{n+1}}$

Ответ:
а) 2 12 18 18
б) Да, пример приведен
в) 70

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4