Задача 1.7.1. Бег по кругу (10 баллов). С линии старта одновременно в одну сторону по круговой дорожке стадиона побежали два спортсмена *A* и *B*. Бегун *A* первую половину каждого круга бежал со скоростью 2υ, а вторую – со скоростью υ. Бегун *B* первую половину времени, затраченного на прохождение круга, бежал со скоростью υ, а вторую – со скоростью 2υ. Известно, что бегун *A* пробегал полный круг за T_A = 90 с.

Через какое время *t* один спортсмен догнал другого первый раз после старта?

Через какое время *T* один из бегунов обогнал другого ровно на один круг?

Возможное решение (А. Аполонский). Пусть *S* – длина одного круга на стадионе. На преодоление первой половины круга бегун *A* затратил время

$$t_{A1} = \frac{S/2}{2u} = \frac{1}{4}\frac{S}{u}.$$

Вторую половину круга он пробежал за

$$t_{A2} = \frac{S/2}{u} = \frac{1}{2}\frac{S}{u}.$$

На преодоление всего круга ему потребовалось $T_A = t_{A1} + t_{A2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\frac{S}{u} = \frac{3}{4}\frac{S}{u} = 90\,\text{с}.$

Отсюда $S/u = 120\,\text{с}$; $t_{A1} = 30\,\text{с}$; $t_{A2} = 60\,\text{с}$.

Пусть бегун *B* пробегал круг за время T_B. Длина первого участка, который он пробегал за время $T_B/2$, равна $S_{B1} = u\cdot\frac{T_B}{2}$. Длина второго участка $S_{B2} = 2u\cdot\frac{T_B}{2} = uT_B$.

Поскольку $S = S_{B1} + S_{B2} = \frac{3}{2}uT_B$, то $T_B = \frac{2}{3}\frac{S}{u} = 80\,\text{с}$.

Бегун *B* пробежал первый круг быстрее бегуна *A* на $\Delta t = T_A - T_B = 10\,\text{с}$. Так как скорости спортсменов отличаются в 2 раза, первая встреча бегунов произойдёт через время $t = T_B - \Delta t = 70\,\text{с}$.

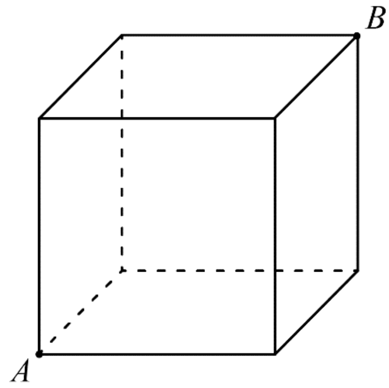
Пусть бегуны поравнялись на линии старта после того, как спортсмен *A* пробежал *N* кругов. Бегун *B* пробежал на круг больше:

$$NT_A = (N+1)T_B \quad \text{или} \quad N\frac{3}{4}\frac{S}{u} = (N+1)\frac{2}{3}\frac{S}{u}.$$

Отсюда находим $N = 8$. Это случится через время $T = NT_A = 8\cdot 90\,\text{с} = 720\,\text{с}$.

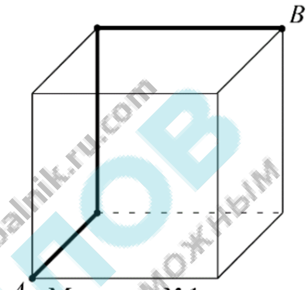
№	Задача 1.7.1. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Найдено отношения $S/u = 120\,с$	2
2	Найдено время $T_B = 80\,с$ за которое бегун B пробегал полный круг	2
3	Найдено время $\Delta t = 10\,с$ на которое бегун B опережал бегуна A за 1 круг	1
4	Найдено время $t = 70\,с$ до первой встречи	2
5	Записано уравнение относительно N	1
6	Найдено число N полных кругов, которые пробежал A до встречи с B	1
7	Найдено время T до этой встречи: $T = NT_A = 720\,с$	1

Задача 1.7.2. Как ни крути (10 баллов). Муравей направился из вершины A куба, стоящего на горизонтальной поверхности, к вершине B (см. рис), перемещаясь только по рёбрам этого куба, причем движение по горизонтальным и вертикальным рёбрам обязательно чередовались, и он не побывал ни в какой вершине дважды. Скорость перемещения муравья по вертикальным ребрам вверх была равна υ, вниз – 3υ, а по горизонтальным – он двигался с одинаковой скоростью.

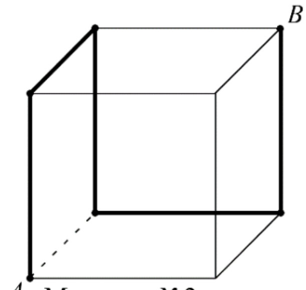


Определите скорость муравья по горизонтальным рёбрам, если средняя скорость его движения от A к B не зависела от маршрута?

Возможное решение (Д. Подлесный). Возможны два варианта движения муравья с соблюдением ограничений, описанных в условии (см. рис.).



Маршрут №1



Маршрут №2

Пусть искомая скорость превышает скорость υ в k раз, т. е. равна $k\upsilon$, а длина ребра куба равна a.
Время движения по маршруту №1:

$$t_1=\frac{a}{k\upsilon}+\frac{a}{\upsilon}+\frac{a}{k\upsilon}=\frac{k+2}{k}\frac{a}{\upsilon},$$

а средняя скорость:

$$u_1=\frac{3a}{t_1}=\frac{3k}{k+2}\upsilon.$$

Аналогично, время движения и средняя скорость на маршруте №2:

$$t_2=\frac{a}{\upsilon}+\frac{a}{k\upsilon}+\frac{a}{3\upsilon}+\frac{a}{k\upsilon}+\frac{a}{\upsilon}=\frac{7k+6}{3k}\frac{a}{\upsilon},$$

$$u_2=\frac{5a}{t_2}=\frac{15k}{7k+6}\upsilon.$$

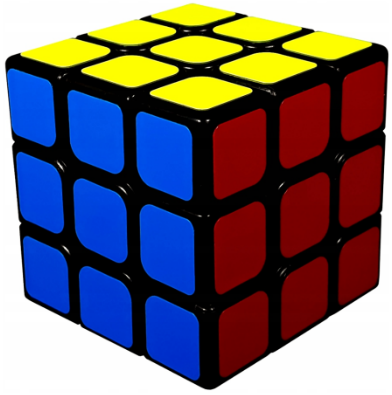
Поскольку по условию задачи $u_1=u_2$, приходим к уравнению: $\frac{3k}{k+2}=\frac{15k}{7k+6}$, решая которое, находим $k=2$. По горизонтальным рёбрам муравей перемещается со скоростью 2υ.

№	**Задача 1.7.2. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1	Указано, что может быть два варианта движения муравья	2
2	Найдена средняя скорость u_1 для маршрута из трёх участков	2
3	Найдена средняя скорость u_2 для маршрута из пяти участков	2

4	Записано уравнение, учитывающее равенство $u_1 = u_2$,	2
5	Найдена скорость перемещения муравья по горизонтальному участку	2

Примечание: необоснованный ответ 2υ не оценивается.

Задача 1.7.3. Кубик Рубика (10 баллов). Кубик Рубика с ребром a не имеет пустот и сложен из одинаковых кубиков плотностью r_1 с ребром $a/3$. Если все мелкие кубики, не видимые на рисунке, заменить на другие, такие же по размеру, но с плотностью ρ_2, то средняя плотность кубика Рубика увеличится в $n = 3$ раза. Чему равно отношение плотностей r_2/r_1?



Возможное решение (С. Кармазин). На рисунке видно 19 из 27 мелких кубиков. Мы не видим 8 маленьких кубиков, один из которых находится в центре большого кубика. Средняя плотность кубика Рубика вначале равна

$$r_{ф1} = r_1, \tag{1}$$

так как все мелкие кубики в этом случае одинаковые.
Во втором случае средняя плотность большого Кубика:

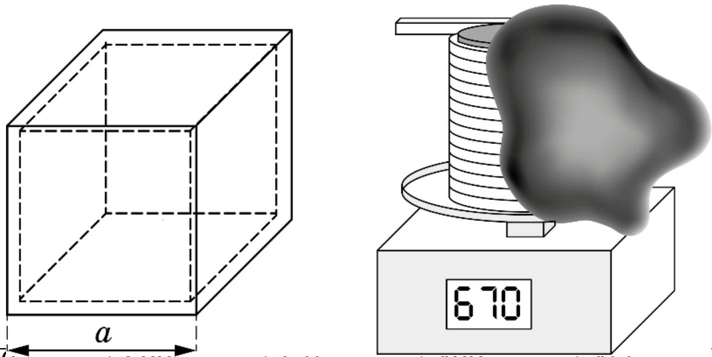
$$r_{ф2} = \frac{\frac{V}{27}19r_1 + \frac{V}{27}8r_2}{V} = \frac{19r_1 + 8r_2}{27}, \tag{2}$$

где V – объем кубика Рубика.
По условию $r_{ф2}/r_{ф1} = 3$.
(3)
Из (1) – (3) находим $k = r_2/r_1 = 7{,}75$.

№	Задача 1.7.3. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Указано, что видно 19 и не видно 8 кубиков	2
2	Указано, что $r_{ф1} = r_1$	1
3	Получено выражение (2) для $r_{ф2}$ через r_1 и r_2	4
4	Получено значение k	3

Примечание: Если неправильно указано количество видимых и невидимых кубиков но расчет отношения плотностей проведен верно, задача оценивается максимум в 4 балла.

Задача 1.7.4. 3D принтер (20 баллов). На 3D принтере идет печать полого кубика с внешней стороной a = 10 см. Катушка с пластиковым прутком квадратного сечения стоит на весах. Показания m весов с начала и до окончания печати вместе с длиной L прутка, оставшегося на катушке, заносятся в таблицу.



m, г	670	600	575	490	455	380	310
L, м	125	110	98	80	68	55	35

Определите:

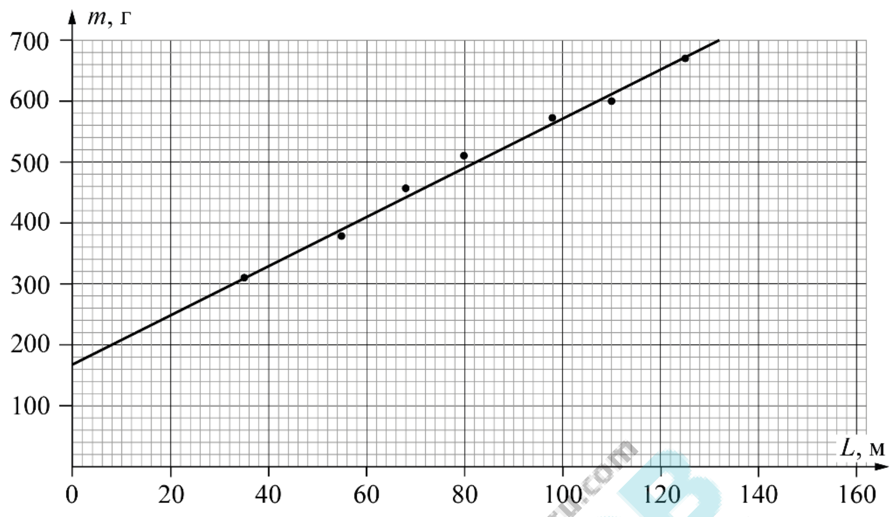
1) массу m_0 пустой катушки;
2) линейную плотность λ прутка (массу одного метра);
3) плотность ρ материала прутка;

4) объем полости V в получившемся кубике.

Примечание: На рисунке ТОЛЬКО пруток изображен в масштабе 1:1, а размер кубика и весов даны условно. Для измерения необходимых размеров прутка можно использовать свою линейку или миллиметровую бумагу.

Возможное решение (А. Вергунов, Д. Логинов).

По таблице построим график зависимости показаний весов от длины оставшегося прутка.



Экстраполируя линейную зависимость до пересечения с осью ординат, получим массу пустой катушки $m_0 \approx 170$ г.

По мере изменения показаний весов при раскручивании катушки (по угловому коэффициенту наклона графика) найдем линейную плотность прутка:

$$\lambda = \frac{(650 - 250)\,\text{г}}{(120 - 20)\,\text{м}} = 4{,}0\ \text{г/м}.$$

С помощью метода рядов (проводя измерения не менее чем для 10 витков) определим толщину прутка: d = 1,5 мм.

Таким образом, поперечное сечение прутка равно s = 2,25 мм^2, а объемная плотность пластика $\rho = \lambda / s \approx 1{,}78\ \text{г/см}^3 = 1{,}78\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3$.

Длина прутка, израсходованного на печать кубика, равна $L_1 = 125\ \text{м} - 35\ \text{м} = 90\ \text{м}$.

Следовательно, суммарный объем стенок составляет:

$V_1 = sL_1 = 2{,}25\cdot 10^{-2}\cdot 9\,000\ (\text{см}^3) = 202{,}5\ \text{см}^3$;

а объем полости $V = a^3 - V_1 = 10^3 - 202{,}5 \approx 797\ \text{см}^3$.

№	Задача 1.7.4. Критерии оценивания (20 баллов)	Баллы
1	Построен график $m(L)$	4
	Подписаны оси и указаны единицы измерения 1 балл	
	Выбран разумный масштаб координатных осей 1 балл	
	Нанесены все экспериментальные точки 1 балл	
	Проведена прямая (не ломаная!) 1 балл	
2	Из графика получена масса пустой катушки $m_0 \approx 170$ г	2
3	По угловому коэффициенту наклона графика найдена γ	3
4	С помощью метода рядов определена толщина прутка	3
	За измерение толщины только одного витка баллы за п. 4 не ставить	
5	Найдена объемная плотность пластика ρ	2
6	Из таблицы определена длина прутка, израсходованного на печать кубика	2
7	Найден объем пластика, пошедшего на печать стенок кубика	2
8	Найден объем полости кубика	2

Примечание: Без графика учитываются только пункты 4 – 8 критериев оценивания.

Задача 1.8.1. «Часы» (10 баллов). На часах в некоторый момент времени угол между часовой и минутной стрелками составил $\alpha = 60^\circ$. Определите, через сколько минут угол между стрелками в следующий раз может снова оказаться равным α? Положение стрелок на рисунке – условное.

Решение (В. Яворский). Минутная стрелка за час (60 минут) повернётся на угол 360°, а за минуту – на $360^\circ/60$ мин $= 6^\circ$. Часовая стрелка за 12 часов совершит полный оборот, т.е. повернётся на угол 360°, а за час на $360^\circ/12$ ч $= 30^\circ$. За минуту она повернётся на $0{,}5^\circ$.
Таким образом, минутная стрелка поворачивается в **12 раз** быстрее, чем часовая.

Заметим, что в условии не сказано, какая из стрелок изначально находится «впереди». Следовательно, возможны два варианта решения, когда А) часовая стрелка опережает минутную и Б) минутная стрелка опережает часовую. Рассмотрим эти варианты.

А) Часовая стрелка опережает минутную на угол $\alpha = 60^\circ$. Пусть часовая стрелка повернулась на угол β. Тогда минутная стрелка повернётся на угол $\varphi = \alpha + \beta + \alpha$.

$$2\alpha + \beta = 12\beta.$$

$$\beta = 2\alpha/11 = 2\cdot 60^\circ/11 \approx 11^\circ.$$

В результате получим $\varphi \approx 2\cdot 60^\circ + 11^\circ = 131^\circ$. На это минутной стрелке потребуется время $t_1 \approx 131^\circ/(6^\circ/\text{мин}) \approx 22$ мин.

Б) Минутная стрелка опережает часовую на угол $\alpha = 60^\circ$. Пусть часовая стрелка повернулась на угол β. Тогда минутная стрелка повернулась на угол $\varphi = 360^\circ - 2\alpha + \beta$.

$$360^\circ - 2\cdot 60^\circ + \beta = 12\beta.$$

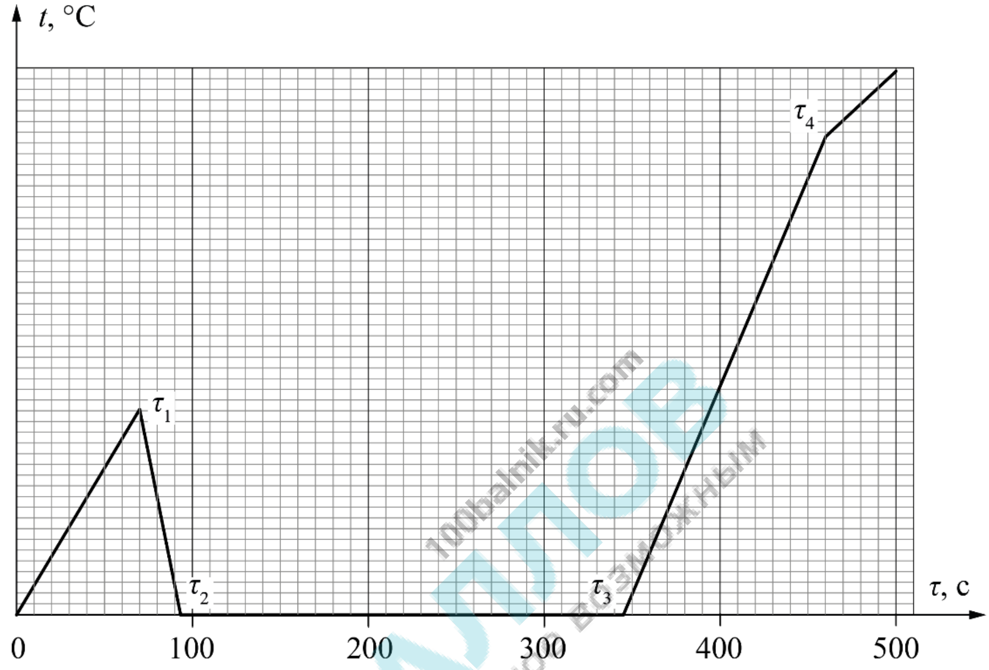
$$\beta = 240^\circ/11 \approx 22^\circ.$$

Итак, минутная стрелка повернулась на угол $360^\circ - 120^\circ + 22^\circ \approx 262^\circ$ за время $t_2 \approx 262^\circ/(6^\circ/\text{мин}) \approx 44$ мин.

№	Задача 1.8.1. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Показано, что минутная стрелка поворачивается в **12 раз** быстрее, чем часовая	2
2	А) Учтено, что минутная стрелка повернётся на угол $\varphi = \alpha + \beta + \alpha$	3
	Найдено время $t_1 \approx 131^\circ/(6^\circ/\text{мин}) \approx 22$ мин.	1
3	Б) Учтено, что минутная стрелка повернётся на угол $\varphi = 360^\circ - 2\alpha + \beta$	3

4	Найдено время t_2 □ 262□/(6□/мин) □ 44 мин.	1

Задача 1.8.2. Соревнование калориметров (10 баллов). В два калориметра положили по куску льда и в течение $t_к$ =10 минут стали нагревать их содержимое с одинаковой мощностью. Известно, что первый кусок льда легче второго на Dm =100 г. На рисунке приведена зависимость разности температур t в калориметрах от времени τ.



К сожалению, шкала оси разности температур не сохранились, а изломам графика соответствуют времена τ_1, τ_2, τ_3, τ_4.

Объясните, какие физические процессы соответствуют каждому линейному участку графика.

Определите:

1) мощность P нагревателя;
2) массы m_1 и m_2 кусков льда;
3) начальные и конечные температуры кусков льда;
4) разность температур Dt в момент времени τ_1.

Справочные данные: удельная теплоемкость льда $c_л$ =2 100 Дж/кг°С, удельная теплоемкость воды $c_в$ =4 200 Дж/кг°С, удельная теплота плавления льда 7=330 КДж/кг.

Решение (А. Евсеев). Из графика находим: $\tau_1 = 70\,\text{с}, \tau_2 = 93\,\text{с}, \tau_3 = 345\,\text{с}, \tau_4 = 460\,\text{с}$. Поскольку график начинается из нуля, температуры кусков льда вначале равны. Первые 70 с разность температур растет. Потом, более легкий кусок начинает плавиться, и разность температур уменьшается в течение 23 с. Третий участок графика соответствует плавлению обоих кусков льда, когда их температура неизменна (0°С). Это происходит в течение 252 с. Четвертый участок соответствует нагреву воды в том калориметре, где был кусок меньшей массы, а в другом – продолжает плавится лед (115 с). На пятом – в обоих калориметрах нагревается вода.

Разница во времени плавления обусловлена разницей в массе кусков льда. Т.е. время, которое ушло на плавление дополнительных 100 г льда – это [(τ_4 – τ_2) – (τ_3 - τ_1)] = 91,7 с. Отсюда мощность нагрева: $P = \dfrac{\lambda \Delta m}{\tau} \approx 360\,\text{Вт}$.

Разница во времени нагрева до температуры плавления обусловлена разницей в массе кусков льда. Т. е. дополнительные 23,3 с – это время, которое ушло на нагрев 100 г льда от температуры вначале до 0°С. Откуда, $t_{01} = t_{02} = t_0 = \dfrac{-P\tau_1}{c_л \Delta m} = -40\,^\circ\text{C}$.

За 70 с легкий кусок льда нагревается до 0°С. Значит его масса: $m_1 = \dfrac{-P\tau_1}{c_л t_0} \approx 0{,}3\,\text{кг}$. Масса второго куска $m_2 \approx 0{,}4\,\text{кг}$.

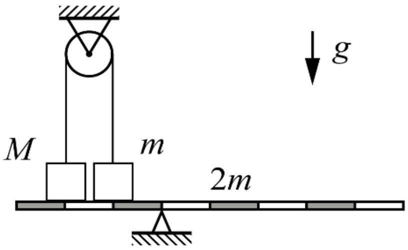
За те же 70 с второй кусок успеет нагреться до $t_{21} = \dfrac{c_л m_2 t_0 + P\tau_1}{c_л m_2} \approx -10\,^\circ\text{C}$, то есть температуры кусков льда будут отличаться от Δt = 10 °С.

К концу нагрева в первом калориметре установится температура:

$$t_{1к} = \frac{P(\tau_к - \tau_3)}{c_в m_1} \approx 73\,^\circ\text{C}, \text{ а во втором } t_{2к} = \frac{P(\tau_к - \tau_4)}{c_в m_2} \approx 30\,^\circ\text{C}.$$

№	**Задача 1.8.2. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1	Верно интерпретирован график:	2
	указано, что происходит в каждом калориметре на участках от 0 до τ_2 (1 балл)	
	указано, что происходит в каждом калориметре на участках после τ_3 (1 балл)	
2	Указано, что начальная температура кусков льда одинакова	0,5
3	Определена мощность нагревателя	2

4	Определена начальная температура в калориметрах	1,5
5	Определены исходные массы кусков льда (по 0,5 за каждую массу)	1
6	Определена разность температур в момент времени τ_1	1
7	Определены конечные температуры в калориметрах (по 1 баллу за каждую)	2



Задача 1.8.3. Неразрывность (10 баллов). При каких значениях масс груза M возможно равновесие системы, приведенной на рисунке, если m = 4,0 кг? Горизонтальный рычаг массой $2m$ разделен на 8 одинаковых участков. Нить выдерживает максимальное натяжение T_0 = 25 Н. g = 10 Н/кг.

Возможное решение (М. Замятнин). Если груз M очень легкий, то связанный с ним нитью груз m перевешивает и касается рычага. Но вращающего момента груза m относительно точки опоры недостаточно, чтобы уравновесить момент силы тяжести самого рычага. Рычаг начинает проворачиваться по часовой стрелке. Нить провисает, и оба груза m и M «встают» на рычаг. Для равновесия системы необходимо, чтобы выполнилось правило моментов относительно точки опоры:

$$Mg2l + mgl = 2mgl, \tag{1}$$

где l – длина одного участка рычага.

Тогда минимальное значение M для равновесия системы равно $M = m/2$. Нить при этом не натянута.

Рассмотрим случай больших масс M. При $M > m$ перевешивает груз M и он начинает давить на рычаг, а груз m повисает на нити. Для равновесия системы теперь достаточно выполнения условия:

$$(M - m)g2l = 2mgl, \text{ откуда } M = 2m. \tag{2}$$

Если не было бы ограничения на силу натяжения нити, равновесие системы наступило при $m/2 < M < 2m$, или 2,0 кг < M < 8,0 кг. Но при больших значениях M груз m оказывается подвешенным, и сила натяжения становится 40 Н. Нить обрывается.

Рассмотрим случай, когда нить натянута до предельного значения T_0, но грузы не отрываются от рычага. Правило моментов принимает вид:

$$(Mg - T_0)2l + (mg - T_0)l = 2mgl, \tag{3}$$

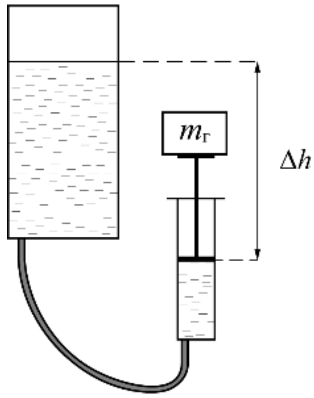
откуда $M = 0{,}5(m + 3T_0/g) = 5{,}75$ кг.

Таким образом, равновесие системы возможно при 2,0 кг < M < 5,75 кг.

№	Задача 1.8.3. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Учет нескольких возможных сценариев нарушения равновесия	1

2	Анализ случая малых значений M и правило моментов (1)	1,5
3	Нахождение нижней границы: $M > 2{,}0\,\text{кг}$	1
4	Анализ случая больших значений M и правило моментов (2)	1,5
5	Нахождение верхней границы $M < 8{,}0\,\text{кг}$	1
6	Учет предельного значения силы натяжения	1
7	Правило моментов (3)	2
8	Явно указан **правильный** диапазон допустимых значений M, а не только его границы	1

Задача 1.8.4. Физика в медицине (20 баллов). Для измерения некоторых технических характеристик медицинского шприца экспериментатор Глюк собрал установку, изображенную на рисунке. Исследуемый шприц он закрепил в вертикальном положении. Вместо иглы к нему присоединил тонкую гибкую трубку, второй конец которой соединил с отверстием в дне цилиндрического сосуда. Затем Глюк измерил разность уровней Δh воды в сосуде и шприце, при которой поршень шприца начинал двигаться вверх в процессе плавного подъема сосуда. Оказалось, что величина Δh зависит от массы $m_г$ груза, закрепленного на верхнем упоре поршня. Результаты измерений зависимости $\Delta h(m_г)$ он представил в таблице, в которой также приведена $\Delta h_х$ для груза неизвестной массы $m_х$.



Примечания: массой поршня можно пренебречь; воздушная прослойка между поршнем и водой в шприце отсутствует; плотность воды $r = 1{,}0\times10^3$ кг/м^3; $g = 10$ Н/кг,

Определите площадь S поршня и силу трения скольжения $F_{тр}$ между поршнем и стенкой шприца. Для этого:

1. Выведите теоретическую зависимость $\Delta h(m_г)$.
2. Постройте график экспериментальной зависимости $\Delta h(m_г)$
3. С помощью графика определите $F_{тр}$ и S.
4. Чему равна неизвестная масса $m_х$ груза в шестой строке таблицы?

№	$m_г$, г	Δh, м
1	15	1,36
2	24	1,47
3	37	1,53
4	52	1,72
5	64	1,76
6	$m_х$	1,90
7	100	2,08

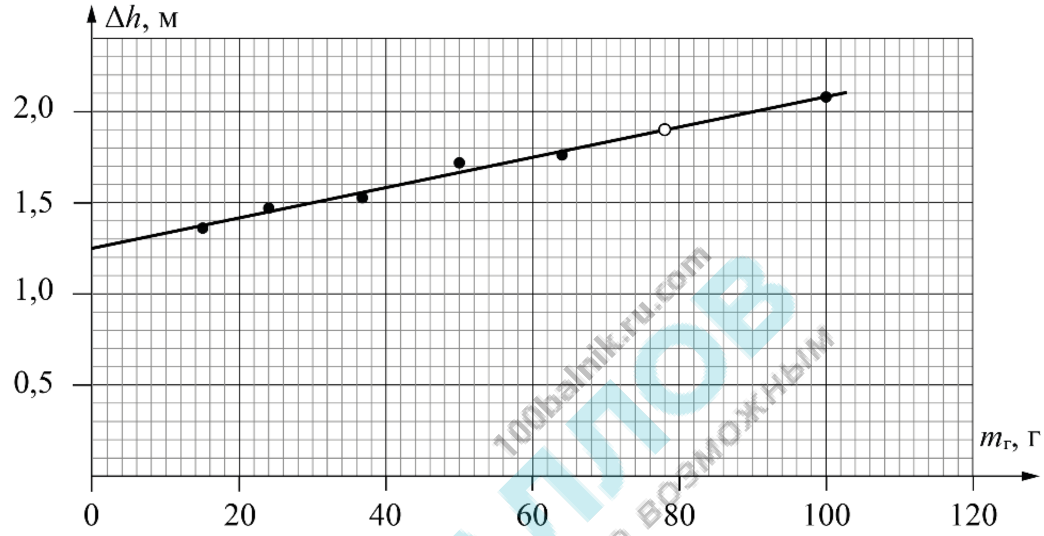
Решение (М. Чжан, С. Кармазин).

1. При равномерном движении поршня вверх сила тяжести груза и сила трения между поршнем и стенкой шприца уравновешены силой давления столба воды высотой Δh (атмосферное давление можно не учитывать):

$$m_г g + F_{тр} = \rho g S \Delta h,$$

откуда

$$\Delta h = \frac{F_{тр}}{\rho g S} + \frac{1}{\rho S} m_г. \qquad (1)$$



2. Мы видим, что Δh линейно зависит от $m_г$ (см. график).

3. Для вычисления углового коэффициента прямой линии на графике удобно использовать точку $m_{г1}$ = 6 г, Δh_1 = 1,3 м, а также $m_{г2}$ = 90 г, Δh_2 = 2 м.

Из формулы (1) и графика вычисляем угловой коэффициент

$$k = \frac{1}{\rho S} = \frac{\Delta h_2 - \Delta h_1}{\Delta m_г} = \frac{0{,}7}{0{,}084}\left(\frac{м}{кг}\right) = 8{,}33\left(\frac{м}{кг}\right)$$

и находим площадь поршня $S = \frac{1}{k\rho} = \frac{1}{8330}\,м^2 = 1{,}2\,см^2$.

Из графика видно, что при $m_г$ = 0 прямая линия пересекает вертикальную ось в точке Δh_0 = 1,25 м. в соответствие с (1) находим $F_{тр} = \rho g S \Delta h_0 = 10^3 \cdot 10 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}25\ Н = 1{,}5\ Н$.

4. Из графика видно, что при Δh_x = 1,9 м масса груза должна быть равной m_x = 78 г.

№	**Задача 1.8.4. Критерии оценивания (20 баллов)**	**Баллы**
1	Получена зависимость (1)	5
2	Построен график зависимости $\Delta h(m_г)$	5
	Указаны единицы измерения по обоим осям (1 балл)	
	Выбран разумный масштаб осей (1 балл)	
	Нанесены значения у делений осей (1 балл)	
	Нанесены экспериментальные точки (1 балл)	
	Через экспериментальные точки проведена прямая (1 балл)	
3	Найдена площадь поршня S I (1,15 см^2 – 1,25см^2)	4
	S I (1,10 см^2 – 1,14 см^2) или (1,26 см^2 – 1,30 см^2) (2 балла)	
	S I (1,00 см^2 – 1,09 см^2) или (1,31 см^2 – 1,40 см^2) (1 балл)	
4	С помощью графика определена $F_{тр}$: $F_{тр}$ I (1,45 Н – 1,55 Н)	4
	$F_{тр}$ I (1,40 Н – 1,44 Н) или (1,56 Н – 1,60 Н) (2 балла)	
	$F_{тр}$ I (1,30 Н – 1,39 Н) или (1,61 Н – 1,70 Н) (1 балл)	
5	Найдена масса груза m_x: m_x I (76 г – 80 г)	2
	m_x I (73 – 75 г) или (81 – 83 г) (1 балл)	

Задача 1.9.1. Леопольд атакует (10 баллов). Кот Леопольд, находясь на крыше дома, два раза выстрелил в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями камушками из рогатки. Перед падением на землю скорости камушков были направлены перпендикулярно друг другу. Определите высоту h дома, если известно, что суммарное время полёта камушков $t_0 = 3$ с, а времена их движения отличаются в два раза. С какой скоростью υ камушки были выпущены из рогатки? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Возможное решение (фольклор). Скорости камушков при падении на землю одинаковы (это следует, например, из закона сохранения энергии) и равны u. Суммарная траектория камушков представляет собой параболу из симметрии которой следует, что они упали на землю под углом 45° к горизонту.

Суммарное время полёта камушков

$$t_0 = \frac{2u\sin 45^\circ}{g}. \qquad (1)$$

Время полёта камушка, двигавшегося меньшее время $t_1 = t_0/3$, а его вертикальное перемещение

$$h = u t_1 \sin 45^\circ - \frac{g t_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Подставляя u из (1), получим

$$h = \frac{g t_0^2}{9} = 10 \text{ м}.$$

Из кинематики равноускоренного движения следует

$$u^2 = \upsilon^2 + 2gh,$$

Откуда следует $\upsilon = g t_0 \sqrt{\frac{5}{18}} \approx 15{,}8$ м/с.

№	Задача 1.9.1. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Обосновано, что камушки упали на землю под углом 45° к горизонту	2
2	Формула для суммарного времени полёта камушков	2
3	Формула для высоты дома	2
4	Дан числовой ответ для h	1
5	Формула для начальной скорости	2
6	Дан числовой ответ для υ	1

Задача 1.9.1. Леопольд атакует (10 баллов). Кот Леопольд, находясь на крыше дома, два раза выстрелил в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями камушками из рогатки. Перед падением на землю скорости камушков были направлены перпендикулярно друг другу. Определите высоту h дома, если известно, что суммарное время полёта камушков $t_0 = 3$ с, а времена их движения отличаются в два раза. С какой скоростью υ камушки были выпущены из рогатки? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Возможное решение (фольклор). Скорости камушков при падении на землю одинаковы (это следует, например, из закона сохранения энергии) и равны u. Суммарная траектория камушков представляет собой параболу из симметрии которой следует, что они упали на землю под углом 45° к горизонту.

Суммарное время полёта камушков

$$t_0 = \frac{2u\sin 45^\circ}{g}. \qquad (1)$$

Время полёта камушка, двигавшегося меньшее время $t_1 = t_0/3$, а его вертикальное перемещение

$$h = ut_1\sin 45^\circ - \frac{gt_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Подставляя u из (1), получим

$$h = \frac{gt_0^2}{9} = 10 \text{ м}.$$

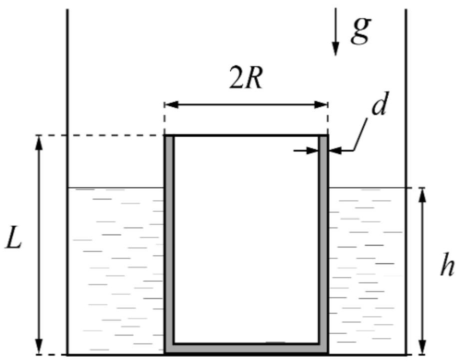
Из кинематики равноускоренного движения следует

$$u^2 = \upsilon^2 + 2gh,$$

Откуда следует $\upsilon = gt_0\sqrt{\frac{5}{18}} \approx 15{,}8$ м/с.

№	Задача 1.9.1. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Обосновано, что камушки упали на землю под углом 45° к горизонту	2
2	Формула для суммарного времени полёта камушков	2
3	Формула для высоты дома	2
4	Дан числовой ответ для h	1
5	Формула для начальной скорости	2
6	Дан числовой ответ для υ	1

Задача 1.9.2. Тяжелый стакан (10 баллов). Внешний радиус цилиндрического стакана, находящегося в высоком аквариуме с шероховатым дном, равен R, высота L, толщина стенок и дна d (см. рис.). Сверху стакан герметично закрыт тонким легким диском радиуса R. Плотность жидкости в аквариуме ρ, плотность материала стакана 20ρ.



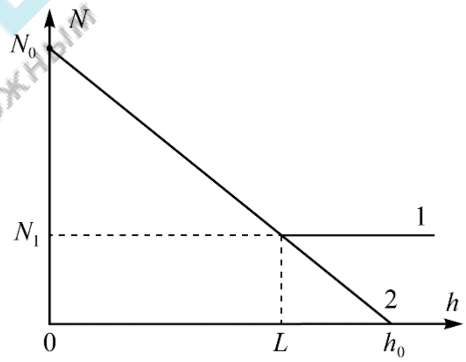
1. Получите зависимость силы реакции N, с которой стакан действует на дно аквариума, от уровня h налитой в аквариум жидкости. Постройте график зависимости $N(h)$. Укажите на графике характерные точки, выразив их через величины, заданные в условии.
2. При каком соотношении между d и L стакан может всплыть? Считайте, что R фиксировано и выполняется условие $0 < d \le 0{,}040R$.

Возможное решение (С. Кармазин). На стакан массы m вниз действует сила тяжести, а вверх – сила Архимеда $F_A = \rho g\pi hR^2$ и сила реакции опоры, равная силе N, с которой стакан давит на дно аквариума. Следовательно, $N = mg - F_A$.

1. Учитывая, что толщина стенки мала по сравнению с радиусом стакана, вычислим ее объем упрощенно – как объем листа, из которого свернут цилиндр высотой L. Объем дна также запишем упрощенно – как произведение внешней площади дна стакана на его толщину. При этом мы дважды учтем тонкое кольцо квадратного сечения $d\cdot d$ и радиуса R, которое находится на стыке дна и стенки. Однако, оценка показывает, что при самой толстой из допустимых по условию стенок стакана объем этого кольца не превысит 8% от объема дна, рассчитанного точно с использованием площади внутреннего сечения стакана. С учетом суммарного объема стенок и дна стакана вносимая указанными упрощениями погрешность будет заметно меньше 8%.

Итак, $$N = 20\pi\rho g dR(2L + R) - (\pi\rho g R^2)h. \quad (1)$$

2. График зависимости $N(h)$ приведён на рисунке.



Проанализируем равенство (1) и график.

Угловой коэффициент $\frac{\Delta N}{\Delta h} = \pi\rho g R^2$ прямой на графике не зависит ни от d, ни от L.

Обозначения на графике:

$N_0 = 20\pi\rho g dR(2L + R)$

$$h_0 = \frac{20d(2L + R)}{R} \quad (2)$$

$N_1 = \pi g R\rho(40dL + 20dR - RL)$.

Если уровень воды в аквариуме достигает верха стакана, а стакан к этому моменту еще не всплыл, то зависимость изображается на графике линией 1. Условие реализации такого сценария $L < h_0$. Казалось бы, что для всплытия стакана (прямая 2 на графике) достаточно увеличивать L. Но при этом будут возрастать и N_0 и h_0, т. к. как угловой коэффициент прямой остаётся постоянным. Возможность всплытия стакана будет определяться тем, какая величина, L или h_0, при увеличении L будет быстрее смещаться вправо по оси h. Стакан всплывет, если L превысит h_0. Для этого должно выполняться условие

$$L \geq h_0 \text{ или } L \geq \frac{20d(2L + R)}{R}$$

Окончательно, после преобразований, условие плавания стакана примет вид:

$$L \geq \frac{20dR}{R - 40d}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что если второе слагаемое в знаменателе равно или больше R, то не существует такого L, при котором стакан мог бы всплыть. При увеличении L всплытие возможно лишь в том случае, если

$$d < \frac{R}{40} \text{ или } d < 0{,}025R \quad (4)$$

Данное неравенство подтверждает допустимость сделанных в начале решения упрощений.
Ответы по пунктам:

1. $N = 20\pi\rho g d R(2L + R) - (\pi\rho g R^2)h$
   Характерные точки:
   - $N_0 = 20\pi\rho g d R(2L + R)$
   - $h_0 = \dfrac{20d(2L + R)}{R}$,
   - $N_1 = \pi g R\rho(40dL + 20dR - RL)$.

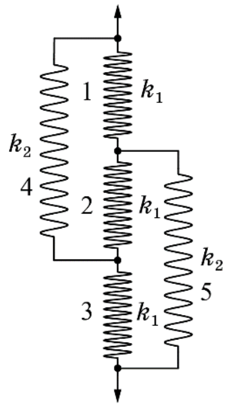
График 1 реализуется в случае, если $L < h_0$, или $L < \dfrac{20dR}{R - 40d}$ т.е. для не очень высоких стаканов.

3. Всплытие стакана может произойти, если $L \geq \dfrac{20dR}{R - 40d}$, но это возможно лишь при достаточно тонких стенках стакана $d < 0{,}025R$.

№	Задача 1.9.2. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Получена зависимость $N(h)$	2
2	Представлен график (по 1 баллу за каждую ветвь из двух возможных)	2
3	Указаны значения характерных точек (по 1 баллу за каждую из 3 точек (N_0, N_1, h_0), равенства (2))	3
4	Сформулировано условие плавания стакана (3)	1
5	Указано, что плавание стакана возможно лишь при выполнении условия (4)	2

Задача 1.9.3. Пять пружинок (10 баллов). Пять пружинок соединены так, как показано на рисунке, и в исходном состоянии ни одна из них не деформирована. Коэффициенты жесткости трех пружин равны k_1, а двух оставшихся – k_2.

1) Чему равен эффективный коэффициент жесткости системы пружин?
2) Систему растягивают, прикладывая к ее концам одинаковые силы. При каком соотношении k_1 и k_2 пружина 2 окажется сжатой?



Возможное решение. Пусть удлинение пружин 1 и 3 равно x (из симметрии следует, что удлинения одинаковы), а пружины 2, соответственно, y. Тогда пружины 4 и 5 растянуты на $x+y$. Рассмотрим силы, приложенных к точке соединения пружин 1, 2 и 5:

$$F_1 = F_2 + F_5; \text{ или } k_1 x = k_1 y + k_2 (x+y). \qquad (1)$$

Отсюда

$$y = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} x. \qquad (2)$$

Если при положительных x удлинение $y<0$, то это означают, что пружина 2 сжата. Это возможно при $k_2 > k_1$. Если $k_2 < k_1$, то пружина 2 растянута. При $k_2 = k_1$ пружина не деформирована.

Общее увеличение длины системы пружин $\Delta l = 2x + y = \frac{3k_1 + k_2}{k_1 + k_2} x$.

Приложенная к концам системы сила

$$F = F_1 + F_4 = k_1 x + k_2 (x+y) = k_1 x + k_2 \frac{2k_1}{k_1 + k_2} x = k_1 \frac{k_1 + 3k_2}{k_1 + k_2} x.$$

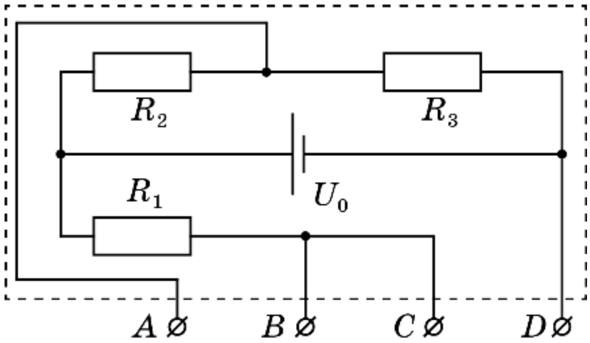
Эффективный коэффициент жесткости

$$k = \frac{F}{\Delta l} = k_1 \frac{k_1 + 3k_2}{3k_1 + k_2}.$$

№	Задача 1.9.3. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Отмечено, что удлинение пружин 1 и 3 одинаково	1
2	Условия равновесия точек соединения трёх пружин	2
3	Связь удлинений крайних и пружины 2 – уравнение (2)	2
4	Сделан вывод о соотношении k_1 и k_2 при котором пружина 2 сжата	2
5	Определен коэффициент жесткости всей системы	3
	Записано условие $F = F_1 + F_4$ (1 балл)	
	Учтена кинематическая связь $\Delta l = 2x + y$ (1 балл)	

	Записан ответ (1 балл)	

Задача 1.9.4. «Серый ящик» (20 баллов). В «сером» ящике собрана электрическая цепь схема которой приведена на рисунке. К клеммам *AB* ящика подключают идеальный вольтметр, а к клеммам *CD* – различные резисторы, сопротивления которых в *n* раз больше, чем у резистора R_1. Зависимость показаний вольтметра *U* от *n* представлена в таблице.



U, В	2,2	3,9	5,0	5,4	6,2	6,5	6,9
n	1	2	3	4	5	7	8

Задание:

1. Выведите формулу теоретической зависимости $U(n)$.
2. Постройте график зависимости $U(n)$ по данным таблицы.
3. Определите напряжение U_0 источника и отношение $k = R_3/R_2$. Для этого можете либо:
   - осуществить линеаризацию зависимости $U(n)$, т.е. найти такую функцию $z(n)$, для которой зависимость $U(z)$ является линейной и построить её график, по которому определить U_0 и k. (За такой вариант решения этого пункта вы получите до 12 баллов).
   - использовать две пары значений из таблицы и уравнение, полученное в пункте 1 задания. Выбор значений *U* и *n* для расчета необходимо обосновать с помощью графика, построенного в пункте 2 задания. (За такой вариант решения этого пункта вы получите до 8 баллов).

Примечание: баллы за разные способы решения пункта 3 не суммируются!

Возможное решение (С. Кармазин).

Сила тока через резисторы R_2 и R_3 равна $I_1 = U_0/(R_2+R_3)$. Напряжение на резисторе R_3 (напряжение между точками 0 и 1) равно

(1) $$U_{01} = I_1 R_3 = \frac{U_0 R_3}{R_2+R_3} = \frac{kU_0}{1+k}.$$

Аналогично, напряжение на резисторе nR_1 (между точками 0 и 2) равно

(2) $$U_{02} = \frac{nR_1 U_0}{R_1+nR_1} = \frac{nU_0}{1+n}.$$

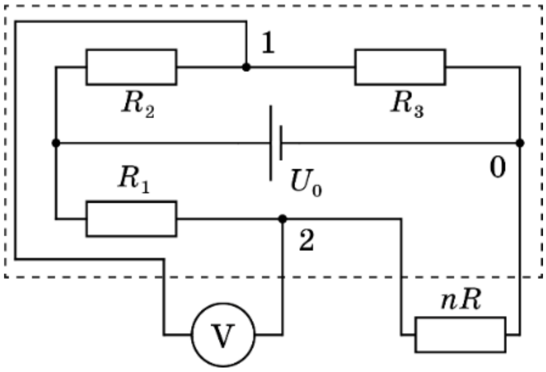


Рис. 1

Показание U вольтметр (напряжение между точками 1 и 2), равно разности U_{02} и U_{01}. Знак этой разности не имеет значения (всегда можно поменять полярность подключения вольтметра).

(3) $$U = \frac{nU_0}{1+n} - \frac{kU_0}{1+k}.$$

1. График зависимости $U(n)$ представлен на рис.2.

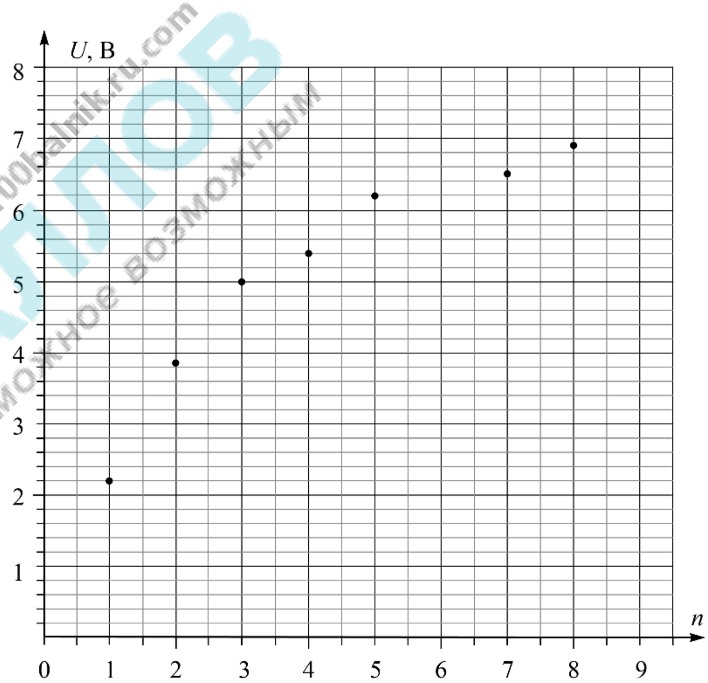


Рис. 2

2. Визуальный анализ графика на рис. 2 позволяет предположить, что точки при n = 4 и n = 7 лежат несколько ниже общего тренда зависимости $U(n)$. Вычислим искомые величины, используя, например, значения U для n = 2 и n = 5.

С помощью (3) и табл.1 получаем 2 линейных уравнения с двумя неизвестными:

(4) $$3{,}85\ \text{В} = \frac{2}{3}U_0 - \frac{kU_0}{1+k}.$$

(5) $$6{,}20\ \text{В} = \frac{5}{6}U_0 - \frac{kU_0}{1+k}.$$

Решая совместно уравнения (4) и (5) находим: $U_0 \approx 14\ \text{В}$; $k \approx 0{,}7$.

3. Проводить сложные математические преобразования для линеаризации зависимости $U(n)$ нет необходимости. Из (3) видно, что функция $z(n)$ имеет вид $z = n/(1+n)$.

Для построения зависимости $U(z)$ дополним таблицу в условии значениями $n/(1+n)$.

U, В	2,20	3,85	5,00	5,40	6,20	6,50	6,90
n	1	2	3	4	5	7	8
$\frac{n}{1+n}$	0,5	0,67	0,75	0,8	0,83	0,88	0,89

4. Строим график $U\left(\frac{n}{1+n}\right)$.

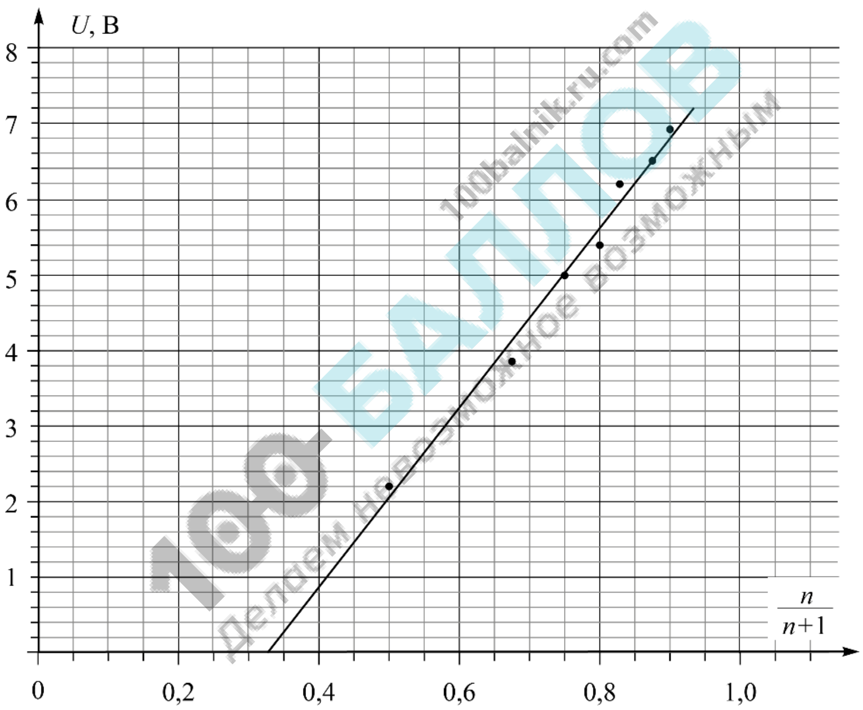


Рис. 3

5. Возьмем две «хорошие» точки на графике, в которых прямая линия проходит через перекрестия линий графической бумаги. Например, $\frac{n}{1+n}$ = 0,38; U = 0,6 В и $\frac{n}{1+n}$ = 0,88; U = 6,6 В. Тогда

$$U_0 = \frac{\Delta U}{\Delta\left(\frac{n}{1+n}\right)} = 12 \text{ В}.$$

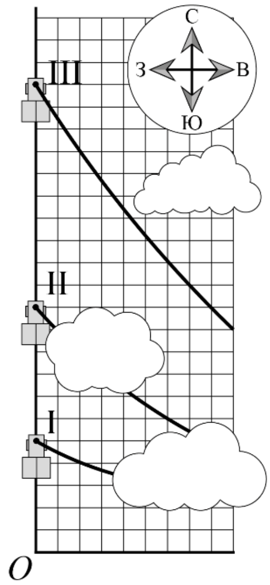
График зависимости $U\left(\frac{n}{1+n}\right)$ пересекает горизонтальную ось в точке $\frac{n}{1+n}$ = 0,33. В этой точке U = 0, следовательно $\frac{k}{1+k}$ = 0,33 и k = 0,5.

№	Задача 1.9.4. Критерии оценивания (20 баллов)	Баллы
1	Вывод уравнения (3)	5
2	Построен график зависимости $U(n)$	3
	Указаны единицы измерения по осям (0,5 балла)	
	Выбран разумный масштаб (0,5 балла)	
	Оцифрованы оси (0,5 балла)	
	Нанесены экспериментальные точки (0,5 балла)	
	Через экспериментальные точки проведена линии (1 балл)	
3а	Осуществлена линеаризация зависимости $U(n)$	5
	Получена функция $z = n/(1+n)$ (2 балла)	
	Указание на то, что $U\left(\frac{n}{1+n}\right)$ – линейная функция (2 балла)	
	Таблица дополнена значениями $z = n/(1+n)$ (1 балл)	
4а	Построен график $U\left(\frac{n}{1+n}\right)$	3
	Указаны единицы измерения по осям (0,5 балла)	
	Выбран разумный масштаб (0,5 балла)	
	Оцифрованы оси (0,5 балла)	
	Нанесены экспериментальные точки (0,5 балла)	
	Через экспериментальные точки проведена прямая линия (1 балл)	
3б	Обоснование выбора точек для расчета (использование для расчёта точек, лежащих на кривой) (2 балла)	4
	Решение системы уравнений и получение значений U_0 и k (2 балла)	
5	Численные значения U_0 и k	4
	Результат $U_0 = (12 \pm 1)$ В (узкие ворота) (2 балла)	

	Результат $U_0 = (12 \pm 2)$ В (широкие ворота) (1 балл)	
	Результат $k = (0{,}50 \pm 0{,}05)$ (узкие ворота) (2 балла)	
	Результат $k = (0{,}5 \pm 0{,}1)$ (широкие ворота) (1 балл)	

Примечание: баллы за пункт 3б не суммируются с баллами пунктов 3а и 3б (и наоборот)

Задача 1.10.1. Разгон паровоза (15 баллов). На трех фотоснимках одного участка местности, сделанных с равными интервалами времени τ, запечатлен игрушечный паровоз и фрагменты шлейфа дыма от него. Наложенные друг на друга фотографии приведены на рисунке.



Зная, что, тронувшись с места, паровоз поехал на север с постоянным ускорением a = 0,4 м/с^2, и что в этот день дул западный ветер со скоростью u = 4 м/с, найдите интервал времени τ и на каком расстоянии от точки O находилась труба неподвижного паровоза.

Цены делений шкал сетки по вертикали и горизонтали равны.

Возможное решение (М. Замятнин). Пусть цена деления шкалы расстояний равна s. Далее возможны разные варианты рассуждений.

Вариант №1.

Обозначим скорость в конце первого участка (от начала движения до первого снимка) за u_1, в конце второго (от первого снимка до второго) – u_2 и в конце третьего – u_3. Так как снимки делались через равные промежутки времени τ, то $u_2 = u_1 + at$; $u_3 = u_1 + 2at$.

Найдём средние скорости на втором и третьем участках. С одной стороны, их можно выразить как среднее арифметическое скоростей в начале и в конце участка, с другой – как отношение пройденного пути ко времени.

$$\begin{cases} u_{2ср} = \dfrac{u_1 + u_2}{2} = u_1 + \dfrac{1}{2}at = \dfrac{6s}{t}; \\ u_{2ср} = \dfrac{u_2 + u_3}{2} = u_1 + \dfrac{3}{2}at = \dfrac{10s}{t}. \end{cases}$$

Отсюда $at = \dfrac{4s}{t}$; $u_1 = \dfrac{4s}{t}$; $\Rightarrow$ $u_1 = at$. Это означает, что паровоз начал движение за τ секунд до того, как был сделан первый снимок. Тогда путь, пройденный им на первом участке, равен $u_{1ср}t = \dfrac{0 + u_1}{2}t = \dfrac{2s}{t}t = 2s$. Значит паровоз начал движение из точки, расположенной на $3s$ выше точки O.

Рассмотрим третий участок движения паровоза. $u_{3ср} = u_1 + \dfrac{3}{2}at = \dfrac{5}{2}at = \dfrac{10s}{t} \Rightarrow at^2 = 4s$. Из рисунка видно, что пока паровоз проезжал третий отрезок дым, выпущенный в самом конце второго отрезка, сдвинулся на восток на расстояние $8s = u\tau$. Тогда $ut = 2at^2; \Rightarrow t = \dfrac{u}{2a} = 5$ с.

Цена деления шкалы расстояний $s = \dfrac{a\tau^2}{4} = 2{,}5$ м, следовательно изначально паровоз находился на 7,5 метров севернее точки O.

Вариант №2

Пусть t_0 – время движения паровоза от старта до момента выполнения первого снимка, а s_0 – его начальное расстояние от точки O.

Тогда можем записать:

$$\begin{cases} 5s = s_0 + \dfrac{at_0^2}{2}; \\ 11s = s_0 + \dfrac{a(t_0+t)^2}{2}; \\ 21s = s_0 + \dfrac{a(t_0+2t)^2}{2}. \end{cases}$$

Вычтем из третьего уравнение второе, а из второго первое.

$$\begin{cases} 10s = \dfrac{a(t_0+2t)^2}{2} - \dfrac{a(t_0+t)^2}{2}; \\ 6s = \dfrac{a(t_0+t)^2}{2} - \dfrac{at_0^2}{2}. \end{cases}$$

Поделим верхнее уравнение на нижнее

$$\frac{5}{3} = \frac{(t_0+2t)^2 - (t_0+t)^2}{(t_0+t)^2 - t_0^2} = \frac{3t^2 + 2t_0t}{t^2 + 2t_0t}.$$

Получаем $t_0 = t$, тогда $6s = \dfrac{3}{2}at^2; \Rightarrow \dfrac{at^2}{2} = 2s.$

Подставим в уравнение $5s = s_0 + \dfrac{at_0^2}{2} = s_0 + 2s; \Rightarrow s_0 = 3s$. Значит паровоз начал движение из точки, расположенной на $3s$ выше точки O.

Рассмотрим третий отрезок движения паровоза.

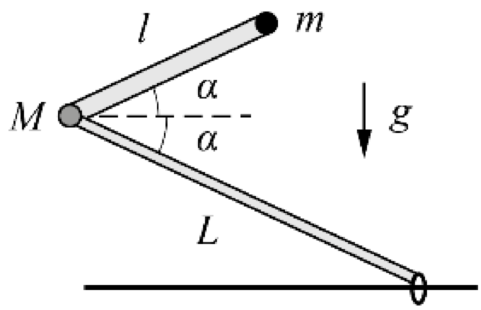
$$10s = \frac{a(t_0+2t)^2}{2} - \frac{a(t_0+t)^2}{2} = \frac{5}{2}at^2; \Rightarrow at^2 = 4s.$$

Из рисунка видно, что пока паровоз проезжал третий отрезок дым, выпущенный в самом конце второго отрезка, сдвинулся на восток на расстояние $8s = u\tau$. Тогда $ut = 2at^2; \Rightarrow t = \dfrac{u}{2a} = 5$ с.

Найдём $s = \dfrac{a\tau^2}{4} = 2{,}5$ м, следовательно изначально паровоз находился на 7,5 метров севернее точки O.

Возможны и другие варианты решений.

№	**Задача 1.10.1. Критерии оценивания (15 баллов)**	**Баллы**
1	Записаны верные уравнения, связывающие перемещения паровоза или средние скорости для 2 и 3 участков, либо аналогичные.	1+1
2	Показано, что время от начала движения до первого снимка равно τ (в явном виде может не присутствовать, но если следует из промежуточных выкладок, то балл ставится)	1
3	Найдена точка старта ($3s$)	3
4	Верно записана связь между перемещением паровоза и соответствующим ему перемещением дыма. (Если использовались неудобные точки, координаты которых невозможно точно определить, то за пункт ставится только половина баллов)	3
5	Получено верное значение $t = 5\,\text{с}$ (формула + число)	2+1
6	Получено верное значение расстояния 7,5 м от точки старта до точки O (формула + число). В качестве формулы может быть засчитана верная формула для размера s одной клеточки	2+1



Задача 1.10.2. Шарнир и колечко (15 баллов). В вертикальной плоскости находятся два невесомых стержня, соединённых шарниром массы M. На свободном конце верхнего стержня закреплён груз массы m, а на свободном конце нижнего стержня закреплено лёгкое колечко, которое может скользить по гладкой горизонтальной закреплённой спице. Длина верхнего стержня l, длина нижнего стержня $L > l$. Изначально стержни составляют углы α с горизонтом и удерживаются неподвижно. Затем их отпускают.

Найдите:

1) Ускорения шарнира $a_{ш0}$ и грузика $a_{г0}$ сразу после начала движения.
2) Ускорение колечка $a_к$ в момент времени, когда шарнир, груз и колечко окажутся на одной прямой.

Считайте, что стержни и спица тонкие и все тела могут пролетать мимо друг друга не соударяясь. Ускорение свободного падения g.

Возможное решение (А. Уймин). Рассмотрим нижний стержень. Так как он невесомый, то векторная сумма сил, действующих на него, должна быть равна нулю. На стержень действует сила реакции опоры со стороны спицы, направленная вертикально вверх, и некоторая сила со стороны шарнира M. Значит сила, действующая с стороны шарнира, должна быть направлена вертикально вниз. Если стержень лёгкий, то нулю также должна равняться и сумма моментов действующих на него сил. Вместе с предыдущим условием это означает, что сила реакции опоры со стороны спицы, как и сила, действующая на стержень со стороны шарнира равны нулю.

Рассмотрим теперь верхний стержень вместе с шарниром и грузом. На него действуют две силы тяжести и сила со стороны нижнего стержня. Последняя по третьему закону Ньютона противоположна силе, с которой шарнир действует на нижний стержень, а она равна нулю. Тогда на верхний стержень, шарнир и груз действуют только силы тяжести, значит они двигаются вертикально вниз с постоянным ускорением $a_{ш0} = a_{г0} = g$, а стержень сохраняет ориентацию в пространстве.

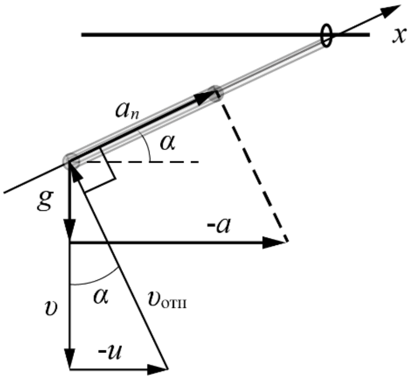
Шарнир кольцо и груз окажутся на одной прямой, когда верхний стержень опустится ниже спицы и нижний стержень опять будет составлять угол α с горизонтом.

Запишем закон сохранения энергии и выразим скорость короткого стержня в этот момент времени. К этому времени он переместился по вертикали на расстояние $\Delta h = 2L\sin\alpha$, поэтому

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = (M+m)g2L\sin\alpha; \Rightarrow u^2 = 4gL\sin\alpha .$$

Пусть u – скорость колечка в интересующий нас момент времени.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с колечком. В этой СО шарнир движется по окружности радиуса L.



Его скорость $\vec{\upsilon}_{отн} = \vec{\upsilon} - \vec{u}$ и направлена перпендикулярно стержню, поэтому $u_{отн} = u/\cos\alpha$.

Направим ось x так, как показано на рисунке. Найдём нормальную составляющую ускорения шарнира в этой СО.

$$a_n = g_x - a_x = -g\sin\alpha + a_к\cos\alpha = \frac{u_{отн}^2}{L}.$$

Тогда

$$a_к = \frac{u_{отн}^2}{L\cos\alpha} + g\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4gL\sin\alpha}{L\cos^3\alpha} + g\,\mathrm{tg}\,\alpha = g(5 + 4\,\mathrm{tg}^2\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

№	Задача 1.10.2. Критерии оценивания (15 баллов)	Баллы
1	Силы, действующие на большой стержень, равны нулю.	2
2	Малый стержень движется равноускоренно и не меняет ориентацию в пространстве.	2
3	Найдены начальные ускорения груза и шарнира.	1
4	Найдено расположение стержней в момент времени, соответствующий второму вопросу.	2
5	Найдена скорость стержня	2
6	Записан достаточный набор верных уравнений для определения ускорения колечка	3
7	Найдено ускорение колечка	3

Задача 1.10.3. Воздушный шар (10 баллов). Оболочка воздушного шара изготовлена из нерастяжимой плотной ткани с массовой поверхностной плотностью σ (масса 1 м^2 поверхности оболочки численно равна σ). Если оболочку полностью заполнить газом, то она приобретает форму сферы радиусом r. В пустую оболочку закачивают некоторое количество гелия.

1) При каких значениях массы m гелия шар будет подниматься?
2) Какому соотношению должны удовлетворять параметры шара, чтобы его подъём был возможен?

Молярная масса гелия $M_{\text{Не}}$, воздуха – $M_{\text{в}}$, атмосферное давление p_0, температура – T. Объем шара $V = 4\pi r^3/3$, площадь сферы $S = 4\pi r^2$.

Возможное решение (А. Аполонский). В зависимости от количества закачанного гелия объем шара V таков, что $V \le 4\pi r^3/3$.

Пока оболочка не раздулась до максимального объёма, давление гелия внутри равно атмосферному. Максимальное значение объёма достигается при массе закачанного гелия

$m_0 = \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{p_0 M_{\text{Не}}}{RT}$. При массе гелия $m < m_0$ объем шара $V = \frac{m}{M_{\text{Не}}}\frac{RT}{p_0}$.

Здесь R – универсальная газовая постоянная.

Для того, чтобы при этой массе гелия шар начал подниматься, необходимо, чтобы сила Архимеда была больше силы тяжести:

$$\rho_{в} V g > mg + 4\pi r^2 \sigma g. \qquad (1)$$

Здесь $\rho_{в} = p_0 M_{\text{в}}/(RT)$ – плотность воздуха. Подставляя выражения для V и $\rho_{в}$ в условие (1), получаем $m\left(\frac{M_{\text{в}}}{M_{\text{Не}}} - 1\right) > 4\pi r^2 \sigma$ или

$$m > \frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{Не}}}{M_{\text{в}} - M_{\text{Не}}}. \qquad (2)$$

Если масса гелия $m > m_0$, то условие (1) выглядит так:

$$\frac{4\pi r^3}{3}\frac{p_0 M_{\text{в}}}{RT} > m + 4\pi r^2 \sigma \quad \text{или} \quad m < 4\pi r^2\left(\frac{p_0 M_{\text{в}} r}{3RT} - \sigma\right). \qquad (3)$$

С учётом (2) и (3) условие для массы гелия, при которой шар поднимет сам себя

$$\frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{Не}}}{M_{\text{в}} - M_{\text{Не}}} < m < 4\pi r^2\left(\frac{p_0 M_{\text{в}} r}{3RT} - \sigma\right).$$

Если левая часть этого неравенства больше правой, то шар не поднимется ни при каких массах. Это произойдёт, если

$\frac{\sigma M_{\text{Не}}}{M_{\text{в}} - M_{\text{Не}}} > \frac{p_0 M_{\text{в}} r}{3RT} - \sigma$, или $r < \frac{3RT\sigma}{p_0\left(M_{\text{в}} - M_{\text{Не}}\right)}$.

Окончательный ответ на вопрос задачи:

При $r > \dfrac{3RT\sigma}{p_0\left(M_{\text{в}} - M_{\text{He}}\right)}$ условие на полёт:

$$\frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{He}}}{M_{\text{в}} - M_{\text{He}}} < m < 4\pi r^2\left(\frac{p_0 M_{\text{в}} r}{3RT} - \sigma\right).$$

При $r < \dfrac{3RT\sigma}{p_0\left(M_{\text{в}} - M_{\text{He}}\right)}$ шар не взлетит.

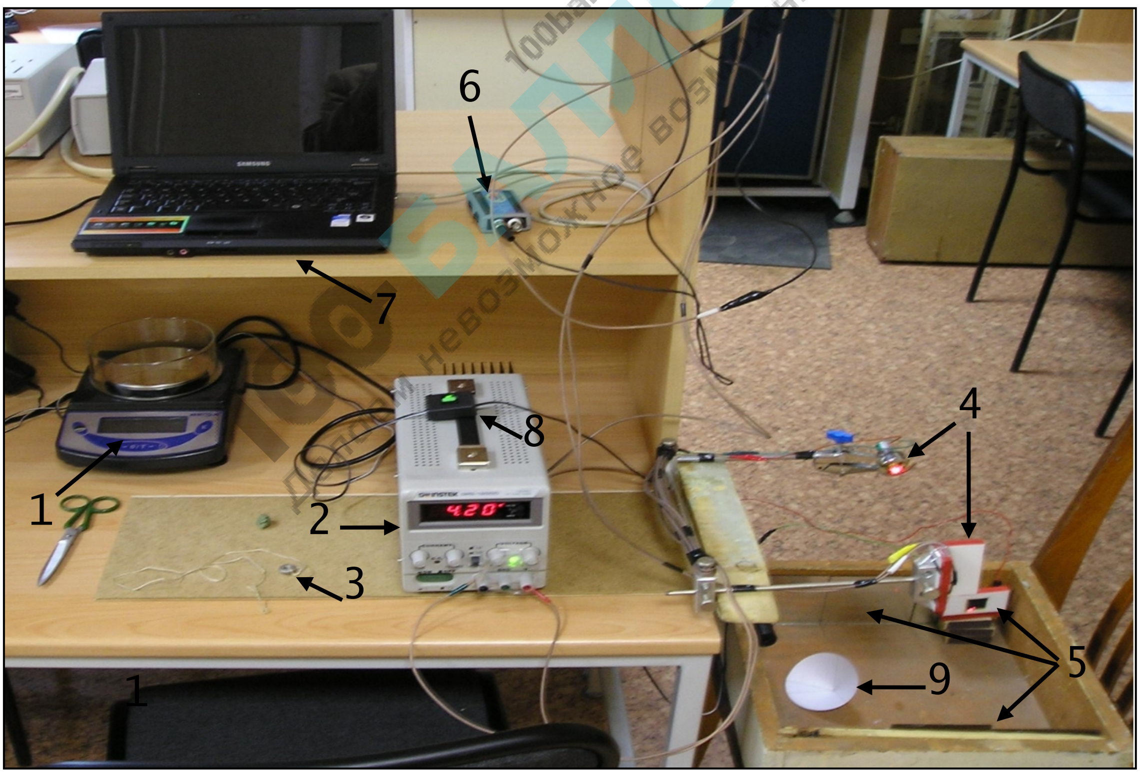
№	**Задача 1.10.3. Критерии оценивания (10 баллов).**	**Баллы**
1	Отмечено, что при малых значениях массы гелия, закачанного в оболочку, его давление будет атмосферным, а объем $V = \frac{m}{M_{Не}}\frac{RT}{p_0}$.	1
2	Определена масса гелия $m_0 = \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{p_0 M_{Не}}{RT}$, превышение которой не приведёт к изменению объема шара	1
3	Получено выражение для плотности воздуха $\rho_в = \frac{p_0 M_в}{RT}$	1
4	Записано условие плавания шара $\rho_в V g > mg + 4\pi r^2 \sigma g$.	1
5	Найдена нижняя граница массы гелия $\frac{4\pi r^2 \sigma M_{Не}}{M_в - M_{Не}}$	2
6	Найдена верхняя граница массы гелия $4\pi r^2 \left(\frac{p_0 M_в r}{3RT} - \sigma\right)$.	2
7	Указано, что шар взлетит, если $r > \frac{3RT\sigma}{p_0 (M_в - M_{Не})}$	2

Задача 1.10.4. Псевдоэксперимент «Вязкое трение» (10 баллов). Известно, что при падении бумажного конуса на него действует сила $F_{сопр}$ вязкого трения о воздух, зависящая от скорости движения конуса: $F_{сопр} = ku^n$. Изучите падение бумажного конуса при его разных массах и определите значения коэффициента n. Погрешность оценивать не нужно.

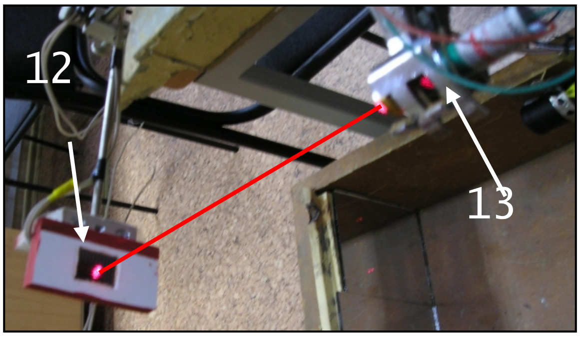
Примечание: в математике часто используется функция логарифма, которая является обратной к функции возведения в степень. По свойствам данной функции если $F_{сопр} = ku^n$, то $\ln(F_{сопр}) = \ln(k) + n\ln(u)$. Значение логарифма от некоторого числа можно вычислить на калькуляторе.

Оборудование. Два сборных фотодатчика, блок питания, электронные весы, USB-осциллограф, ноутбук, отвес, линейка, ножницы, клей, выкройка для конуса, пластилин, салфетка, миллиметровка для построения графиков.

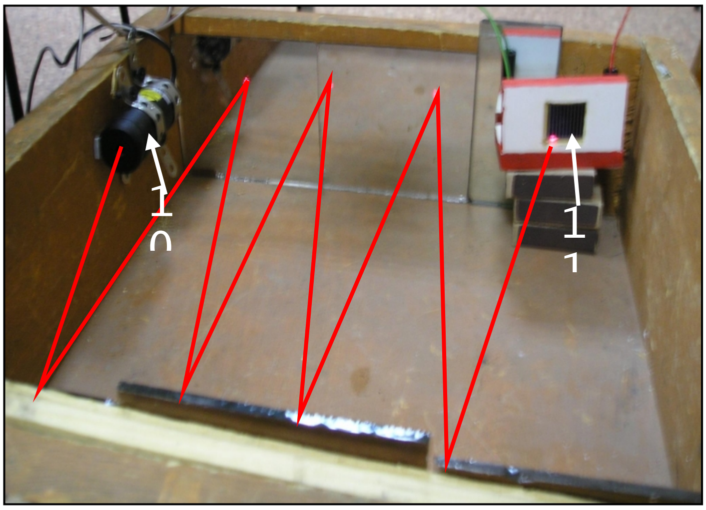
Описание установки.



Установка позволяет с большой точностью определять время свободного падения бумажного конуса на участке, где движение конуса является равномерным. Для измерения времени движения конуса используется система из двух сборных фотодатчиков (верхнего 4 и нижнего 5), сигнал с которых через USB-осциллограф 6 поступает в ноутбук 7.



Верхний сборный фотодатчик состоит из лазера 13 и фотоэлемента 12. При пересечении конусом луча лазера напряжение на фотоэлементе изменяется.



Нижний сборный фотодатчик представляет собой квадратный ящик к двум противоположным стенкам которого изнутри приклеены плоские зеркалама. На боковой стенке ящика закреплен лазер 10, луч которого, многократно отразившись от зеркал, попадает на фотоэлемент 11, двигаясь все время в одной горизонтальной плоскости. При падении конуса внутрь ящика луч лазера гарантированно перекрывается и напряжение на фотоэлементе изменяется.

Расстояние от луча верхнего лазера, до плоскости, образуемой лучами нижнего лазера, равно $(23{,}0 \pm 0{,}5)$ см.

Фотоэлементы 11 и 12 соединены в электрическую цепь последовательно друг с другом и подключены к USB-осциллографу, который преобразует значение суммарного напряжения на фотоэлементах в цифровой вид и передает в ноутбук 7. На ноутбуке установлена программа, отображающая график зависимости напряжения от времени с точностью до 0,5 мс. С помощью полученного графика можно определить время движения конуса между двумя пересечениями лучей лазеров.

Для определения массы конуса 9 используются электронные весы 1. Для изменения массы конуса внутрь него помещают небольшие кусочки пластилина.

Порядок проведения измерений.

1. Внутрь конуса помещается некоторое количество пластилина и на электронных весах определяется общая масса конуса с пластилином.

2. Конус размещают острием вниз на расстоянии примерно 60-70 см над верхним лазером и отпускают. Расстояние в 60-70 см гарантирует, что при подлете конуса к верхнему лазеру его движение будет практически равномерным.
3. В окне программы по зависимости суммарного напряжения от времени определяются и заносятся в таблицу 7 параметров:
   - $T1$, $T2$ – времена начала и окончания первого провала;
   - $T3$, $T4$ – времена начала и окончания второго провала;
   - U_0 – постоянный уровень напряжения;

- $U1$, $U2$ – уровни напряжений, соответствующие первому и второму

провалам.

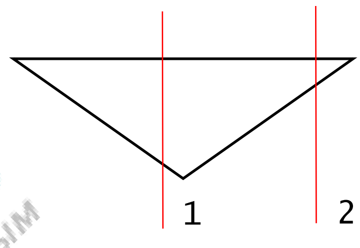
4. Опыты повторяются с другой массой пластилина внутри конуса. Полученные данные

масса конуса с пластилином, мг	T_1, мс	T_2, мс	T_3, мс	T_4, мс	U_0, В	U_1, В	U_2, В
533	161	181	372	386	0,450	0,123	0,406
600	128	143	331	341	0,450	0,136	0,407
700	192	198	372	381	0,450	0,127	0,402
790	546	552	715	723	0,450	0,123	0,410
894	133	149	289	301	0,450	0,126	0,402
990	120	131	257	277	0,450	0,122	0,392
1125	570	576	694	709	0,450	0,122	0,403

Возможное решение (М. Карманов). Для начала разберемся какие данные нам нужны и как их обрабатывать. В условии сказано, что после запуска конуса его движение на участке между датчиками можно считать равномерным. В этом случае действующая на конус сила тяжести уравновешивается силой сопротивления, значит можем записать $F_{сопр} = mg$, где m – масса конуса с пластилином.

Так как движение равномерное то скорость можно вычислить как $u = L/t$, где L – расстояние между датчиками, а t – время полета между датчиками. Из условия $L = (23{,}0 \pm 0{,}5)$ см.

Осталось разобраться со временем. В таблице приведены 4 временные отметки и нужно понять какие из них нам нужны.

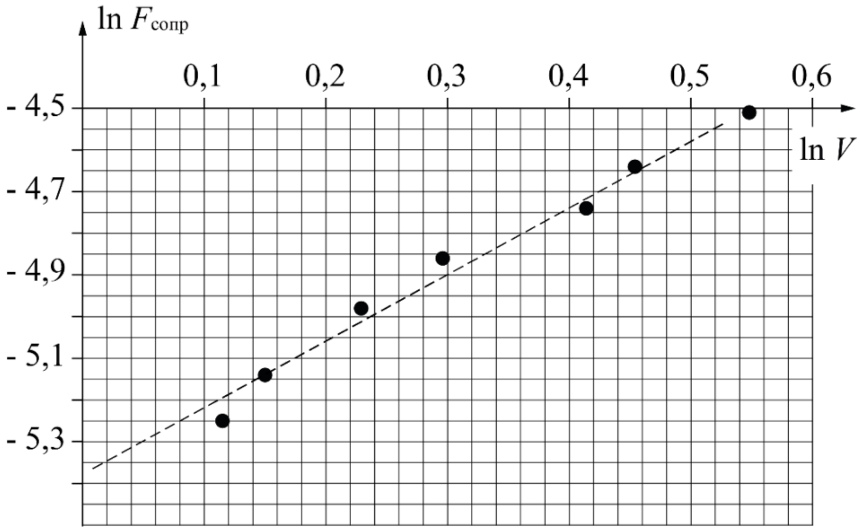


Рассмотрим конус и то, как он пересекает луч лазера. На рисунке представлен конус (вид сбоку) и две возможные траектории луча лазера относительно конуса. Как видно из рисунка невозможно определить на какой высоте находился конус, когда он перекрыл луч лазера, а вот определить, когда луч лазера перестает перекрываться конусом, положение конуса задано однозначно. Значит нам нужны времена T_2 и T_4. Тогда $u = L/(T_4 - T_2)$.

m, мг	T_2, мс	T_4, мс	$F_{сопр}$, 10^{-3} Н	u, м/с	ln($F_{сопр}$)	Ln(u)
533	181	386	5,22	1,122	-5,25	0,115
600	143	341	5,88	1,162	-5,14	0,150
700	198	381	6,86	1,257	-4,98	0,229
790	552	723	7,74	1,345	-4,86	0,296
894	149	301	8,76	1,513	-4,74	0,414
990	131	277	9,70	1,575	-4,64	0,454
1125	576	709	11,03	1,729	-4,51	0,548

Из условия известно, что $F_{сопр} = ku^n$, тогда $\ln(F_{сопр}) = \ln(k) + n\ln(u)$.

Для определения параметра n построим график в логарифмических координатах.



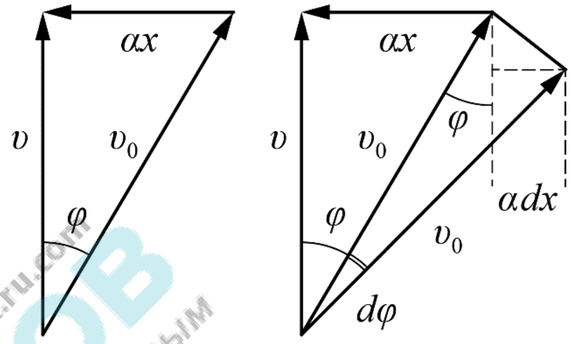
Из графика найдем угловой коэффициент (и координату точки пересечения с вертикальной осью). Получаем n = 1,64.

№	**Задача 1.10.4. Критерии оценивания (10 баллов).**	**Баллы**
1	Для определения скорости выбраны времена T_2 и T_4	1
2	Выбор в п. 1 обоснован	1
3	Из условия установившегося движения сделан вывод о равенстве сил сопротивления силе тяжести	1
4	Вычислена сила сопротивления для всех опытов	1
5	Вычислена скорость для всех опытов	1
6	Выполнена линеаризация зависимости	1
7	Построен график для определения параметров эксперимента	2
8	Найдено значение $n = 1{,}65 \pm 0{,}10$	2
	$n \in (1{,}45 \div 1{,}55) \cup (1{,}75 \div 1{,}85)$ (1 балл)	

Задача 1.11.1. Переправа (12 баллов). Лодка переплывает реку по прямой, перпендикулярной берегам. Её скорость относительно воды равна υ_0. До середины реки скорость течения изменяется по закону $u = \alpha x$ от нуля до $\upsilon_0/2$ – скорости воды на середине реки, где α – известный коэффициент, x – расстояние от берега. После середины реки скорость уменьшается до нуля у другого берега по тому же закону.

Определите зависимость от времени угла между вектором скорости лодки относительно воды и направлением движения относительно берега. Через какое время лодка окажется на другом берегу?

Возможное решение (А. Уймин).
(способ 1)



В треугольнике скоростей скорость течения $u = \alpha x$, скорость лодки относительно берега $\upsilon = dx/dt$, а её скорость υ_0 относительно воды направлена под углом φ с нормалью к берегу. Тогда $\upsilon = \upsilon_0 \cos\varphi$.

За малое время dt лодка перемещается в направлении противоположного берега на расстояние dx, а направление вектора скорости лодки изменяется на угол $d\varphi$. При этом

$$\alpha dx = \alpha \upsilon dt = \alpha \upsilon_0 \cos\varphi\, dt. \qquad (1)$$

Выразим отрезок αdx через длину дуги с углом $d\varphi$ окружности радиуса υ_0

$$\alpha dx = \upsilon_0 d\varphi \cos\varphi. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем, что $d\varphi = \alpha dt$ или $\varphi = \alpha t$. Вектор относительной скорости поворачивается с постоянной угловой скоростью!

На середине реки $u = \upsilon_0/2$, и тогда $\varphi = \pi/6$, а время $t = \pi/(6\alpha)$.

От этой середины до другого берега вектор относительной скорости поворачивается с той же угловой скоростью, но в противоположную сторону. Из симметрии полное время $T = 2t = \pi/(3\alpha)$.

№	Задача 1.11.1. Критерий (12 баллов)	Баллы
1	Треугольник скоростей с углом поворота	1
2	Приращение скорости течения за dt (уравнение 1)	1
3	Приращение скорости течения через $d\varphi$ (уравнение 2)	3
4	Нахождение угловой скорости ($d\varphi/dt = \alpha$ или $\varphi = \alpha t$)	2,5

***24 января** на портале http://abitu.net/vseros **будет проведён онлайн-разбор решений задач первого тура.** Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
***26 января состоится онлайн-разбор решений заданий второго тура.** Начало разбора:*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.

5	Нахождение $j=p/6$ на середине реки	1
6	Нахождение времени плавания до середины реки	2,5
7	«Симметрия» второй половины и ответ $T=p/(3a)$.	1

***24 января** на портале http://abitu.net/vseros **будет проведён онлайн-разбор решений задач первого тура.** Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
***26 января состоится онлайн-разбор решений заданий второго тура.** Начало разбора:*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.

Решение (способ 2).

Построим треугольник скоростей для лодки (см. рисунок выше). Из теоремы Пифагора

$$u_x^2 + (\alpha x)^2 = u_0^2.$$

После дифференцирования по времени получим: $2a_x u_x + 2\alpha^2 x u_x = 0$.

$a_x = -\alpha^2 x$ – уравнение гармонических колебаний.

Из начальных условий $(x = 0;\ u_x = u_0)$ находим решение

$$u_x = u_0 \cos(\alpha t).$$

Также из треугольника скоростей видим, что $u_x = u_0 \cos\varphi$, откуда $\varphi = \alpha t$.

В момент достижения середины реки $u_x = u_0\sqrt{3}/2$, $\tau = \pi/(6\alpha)$. Общее время движения $T = 2\tau = \pi/(3\alpha)$.

№	Задача 1.11.1. Критерии оценивания (12 баллов)	Баллы
1	Треугольник скоростей с углом поворота	1
2	Доказано, что движение гармоническое	2,5
3	Из начальных условий определена зависимость $u_x(t)$	2,5
4	Найдена зависимость $\varphi = \alpha t$	2,5
5	Нахождение времени плавания до середины реки	2,5
6	«Симметрия» второй половины и ответ $T = \pi/(3\alpha)$.	1

***24 января** на портале http://abitu.net/vseros **будет проведён онлайн-разбор решений задач первого тура.** Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
***26 января состоится онлайн-разбор решений заданий второго тура.** Начало разбора:*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.

Решение (способ 3).

Из теоремы Пифагора следует

$$u_x^2 + (\alpha x)^2 = u_0^2.$$

Отсюда скорость лодки

$u_x = \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{u_0^2 - (\alpha x)^2}$, а время $dt = \dfrac{dx}{u_x} = \dfrac{dx}{\sqrt{u_0^2 - (\alpha x)^2}}$.

Время, которое необходимо для преодоления некоторого расстояния x_1,

$$t_1 = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{u_0^2 - (\alpha x)^2}} = \frac{1}{\alpha} \arcsin\left(\frac{\alpha x_1}{u_0}\right).$$

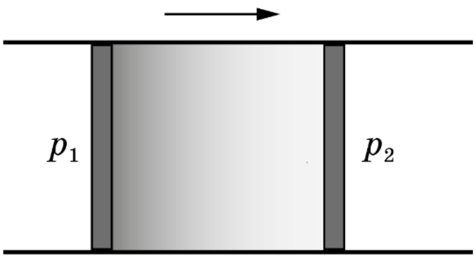
В частности, при $x = u_0/(2\alpha)$ (середина реки), время $t = \pi/(6\alpha)$. Общее время движения $T = \pi/(3\alpha)$.

Для определения искомого угла заметим, что из треугольника скоростей $\sin\varphi = \alpha x/u_0$, откуда $\varphi = \alpha t$.

№	**Задача 1.11.1. Критерии оценивания (12 баллов)**	**Баллы**
1	Треугольник скоростей с углом поворота	1
2	Найдена связь между временем и координатой $t_1 = (1/\alpha)\arcsin(\alpha x_1/u_0)$	5
3	Найдена зависимость $\varphi = \alpha t$	2,5
4	Нахождение времени плавания до середины реки	2,5
5	«Симметрия» второй половины и ответ $T = \pi/(3\alpha)$.	1

24 января *на портале* http://abitu.net/vseros ***будет проведён онлайн-разбор решений задач первого тура.*** *Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
26 января состоится онлайн-разбор решений заданий второго тура. *Начало разбора:*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.

Задача 1.11.2. Доставка воды пневмопочтой (12 баллов). Где-то в Космосе, вдали от звезд, движется по инерции фабрика-звездолет. В технологических процессах используется вода, которая доставляется к нужному месту порциями с массой $m = 288$ г по гладким трубам, площадь поперечного сечения которых постоянна и равна $S = 50$ см^2. Каждая порция содержится между двумя одинаковыми поршнями, масса каждого из которых тоже равна m.



Температура порции T при движении в установившемся режиме (колебания поршней относительно друг друга отсутствуют) остается неизменной. Движение поршней и порции воды по трубе обеспечивается давлением сжатого газа: «позади» них давление газа p_1 всегда в 1,5 раза больше, а «перед» ними (p_2) – в два раза меньше, чем давление насыщенного водяного пара при температуре T.

Какая часть массы воды в порции при движении в установившемся режиме находится в жидком состоянии? Каково в этом режиме расстояние между поршнями?

Плотность насыщенного водяного пара при температуре T составляет $\varepsilon = 6\%$ от плотности жидкой воды, которая при этой температуре равна $\rho = 0{,}72$ г/см^3.

В вычислениях для простоты можно считать воду совершенно несжимаемой, а водяной пар – почти идеальным газом. Ответ для расстояния между поршнями выразите в см с точностью до целого значения.

Возможное решение (К. Парфёнов). В установившемся режиме поршни и вода движутся равноускоренно, причем величина ускорения $a=\frac{(p_1-p_2)S}{3m}=\frac{(1{,}5p_н-0{,}5p_н)S}{3m}=\frac{p_н S}{3m}$, где $p_н$ – давление насыщенного водяного пара при температуре T. Из уравнения движения поршня 1 («позади» порции воды) следует, что давление воды на него $p'=p_1-\frac{ma}{S}=\frac{7}{6}p_н$. Из этого ясно, что у поверхности этого поршня вода находится в жидком состоянии. Аналогично из уравнения движения поршня 2 находим, что на у его поверхности давление воды $p''=p_2+\frac{ma}{S}=\frac{5}{6}p_н$, то есть здесь вода является паром. На границе раздела фаз давление равно $p_н$, и, поскольку вода несжимаема, то из уравнения движения для слоя жидкой воды находим толщину этого слоя: $\rho Sh\,a=(p'-p_н)S\Rightarrow h=\frac{m}{2\rho S}$. Поэтому масса жидкой воды $m_ж=\rho Sh=\frac{m}{2}$, то есть в жидком состоянии находится половина (50%) массы воды.

Теперь в области, занятой водяным паром, выделим слой пара толщиной Δx и запишем уравнение движения для него (под действием сил давления): $\rho_п S\Delta x\,a=-\Delta pS$, где плотность пара, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, равна $\rho_п=\frac{\mu p}{RT}$. Таким образом, толщина слоя, на котором давление убывает на величину $\Delta p<0$, равна $\Delta x=-\frac{3mRT}{\mu p_н S}\frac{\Delta p}{p}=-\frac{3m}{\alpha\rho S}\frac{\Delta p}{p}$. Здесь учтено, что $\frac{\mu p_н}{RT}=\rho_н=\alpha\rho$. На всем участке пара давление падает не очень значительно – от $p_н$ до $p''=\frac{5}{6}p_н$. Поэтому толщина слоя пара может быть приближенно вычислена по этой формуле с $-\Delta p=\frac{1}{6}p_н$ и средней величиной давления $p=\frac{1}{2}\left(p_н+\frac{5}{6}p_н\right)=\frac{11}{12}p_н$. Таким образом, $H=\frac{6m}{11\alpha\rho S}\approx 73\text{см}$. Значит, расстояние между поршнями $L=H+h=\frac{m}{2\rho S}\left(1+\frac{12}{11\alpha}\right)\approx 77\text{см}$. Допустимо также использовать среднее значение <u>обратного</u> давления $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_н}+\frac{6}{5p_н}\right)=\frac{11}{10p_н}$. В этом случае $H=\frac{11m}{20\alpha\rho S}\approx 73\text{см}$ и $L=\frac{m}{2\rho S}\left(1+\frac{11}{10\alpha}\right)\approx 77\text{см}$. Ясно, что эти выражения дают для искомой величины оценки «сверху» и «снизу», поэтому разумно взять их среднее: $H=\frac{241m}{440\alpha\rho S}\approx 73\text{см}$ и $L=\frac{m}{2\rho S}\left(1+\frac{241}{220\alpha}\right)\approx 77\text{см}$. Поскольку в рамках требуемой точности все эти подходы дают одинаковый ответ, все они являются допустимыми.

ОТВЕТ: 50% (половина), $L=\frac{m}{2\rho S}\left(1+\frac{241}{220\varepsilon}\right)=\frac{1271m}{132\rho S}\approx 77$см.

Примечание 1. Участники, знакомые с интегрированием, могут вычислить H и L более аккуратно: толщина слоя пара $H=\frac{3m}{\varepsilon\rho S}\int_{5p_н/6}^{p_н}\frac{dp}{p}=\frac{3m}{\varepsilon\rho S}\ln\left(\frac{6}{5}\right)$, и расстояние между поршнями

$L=H+h=\frac{m}{2\rho S}\left(1+\frac{6}{\varepsilon}\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right)\approx 77$см. Такие ответы также засчитываются как полностью правильные. Нетрудно заметить, что по точной (76,93 см) и приближенной (77,03 см) формулам разность ответов менее 0,14% (примерно 0,1 см).

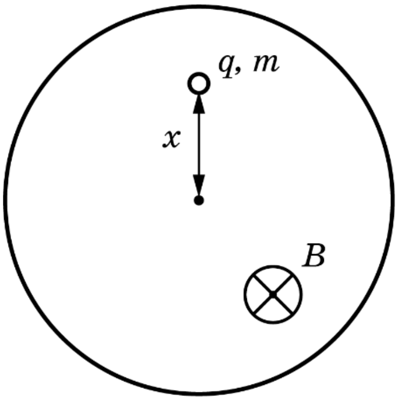
Примечание 2. Отметим также, что пренебрежением объемом жидкой воды дает ошибку более 5% (толщина слоя жидкой воды равна 4 см). Использование при вычислении толщины слоя пара «крайних» значений давления ($p_н$ или $5p_н/6$) вместо среднего вносит ошибку более 8%. Поэтому эти ошибки существенны на заданном уровне точности, и в этом случае баллы за решение несколько снижаются.

Примечание 3. указанные плотности воды и водяного пара имеют место при температуре около +295˚С.

№	**Задача 1.11.2. Критерии оценивания (12 баллов)**	**Баллы**
1	Указано, что поршни и вода движутся равноускорено	0,5
2	Определена величина ускорения	0,5
3	Указано (используется в решении), что у поршня 1 вода находится в жидком состоянии (**0,5 балла**), а у поршня 2 – в газообразном (**0,5 балла**)	1
4	Указано (используется в решении), что на границе раздела фаз давление равно $p_н$	1
5	Найдено, что в жидком состоянии находится половина массы воды	2
6	Найдена толщина слоя жидкой воды (формула или число)	1
7	Записано уравнение, связывающее разность давлений для слоя пара с толщиной этого слоя ($\Delta x=-\left(3m/(\varepsilon\rho S)\right)(\Delta p/p)$ или эквивалентное) (Если в коэффициенте остались неизвестные величины – только **1 балл**!)	3
8	Найдена толщина слоя водяного пара (формула или число) (При использовании «крайних» значений давления вместо	2

	среднего – только **1 балл**!)	
9	Получен правильный численный ответ для расстояния между поршнями (За ответ без учета слоя жидкой воды (73 см) – только **0,5 балла**! Также за ответы с использованием «крайних» значений давления (71 см или 84 см) – **0,5 балла**! Если допущены обе погрешности – баллы за этот пункт не ставятся.)	1

Задача 1.11.3. Полетели (12 баллов). В вакууме в невесомости между круглыми полюсами электромагнита на расстоянии x от оси магнита покоится частица массы m и заряда q. Сначала магнитное поле равно нулю. Затем, за малый промежуток времени, индукция магнитного поля увеличивается до значения B_0 и поддерживается постоянной в течение времени $t<pm/(qB_0)$, после чего очень быстро уменьшается до нуля.



1) Почему частица приходит в движение? Опишите качественно траекторию частицы.
2) С какой скоростью движется частица после включения магнитного поля?
3) С какой скоростью движется частица после выключения магнитного поля?
4) На каком минимальном расстоянии от оси магнита проходит траектория частицы?
5) Через какое время от момента включения поля частица окажется на минимальном расстоянии от оси магнита?

Магнитное поле в пределах полюсов можно считать однородным. Перемещением частицы за время включения и выключения поля можно пренебречь.

Возможное решение (А. Аполонский). При включении изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое, которое действует на частицу и сообщает ей некоторую скорость. Из соображений симметрии ясно, что силовые линии этого вихревого поля – концентрические окружности с центром на оси магнита. Согласно закону электромагнитной индукции, вектор $\vec{E}_{вихр}$ направлен (при указанном на рисунке направлении магнитного поля) по часовой стрелке при включении поля и против нее – при выключении. Определим величину напряженности вихревого электрического поля $E_{вихр}$ в месте расположения частицы. Величина ЭДС индукции $\mathcal{E}$ в контуре радиуса x определяется скоростью изменения магнитного потока

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \pi x^2 \frac{dB}{dt}.$$

С другой стороны $\mathcal{E} = 2\pi x E_{вихр}$. Отсюда

$$E_{вихр} = \frac{x}{2}\frac{dB}{dt}.$$

Поскольку $m\dfrac{du}{dt} = qE_{вихр}$, за малый промежуток времени dt изменение скорости частицы

$$du = \frac{qE_{вихр}dt}{m} = \frac{qxdB}{2m}.$$

За все время установления постоянного значения B_0 изменение скорости составит

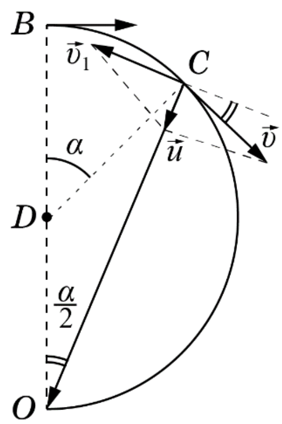
$$u = \frac{qxB_0}{2m}.$$

Эта скорость сонаправлена с $\vec{E}_{вихр}$, т. е. направлена «по часовой стрелке» перпендикулярно радиусу, проведенному от оси полюсов электромагнита. Поэтому далее, в течение времени τ частица движется (под действием силы Лоренца) по окружности радиуса

$$R = \frac{um}{qB_0} = \frac{x}{2}$$

с периодом обращения

$$T = \frac{2\pi R}{u} = \frac{2\pi m}{qB_0}.$$



Отметим, что окружность проходит через ось O полюсов электромагнита, а по условию $t < \dfrac{\pi m}{qB_0} = \dfrac{T}{2}$, то есть до момента выключения магнитного поля частица успевает пролететь менее половины этой окружности. На рис. 1 B – точка, в которой находилась частица в начальный момент времени, C – точка, в которой будет частица через время τ в момент выключения поля, D – центр окружности, по которой движется частица. Рис.1

Положение частицы на окружности в момент времени τ задается углом

$$\alpha = 2\pi\frac{\tau}{T} = \frac{\tau q B_0}{m},$$

а расстояние $|OC|$ до оси O магнита при этом равно $x_1 = 2R\cos(\alpha/2) = x\cos(\alpha/2)$.

При выключении магнитного поля из-за действия вихревого электрического поля скорость частицы изменится на величину $\upsilon_1 = \frac{q x_1 B_0}{2m} = \upsilon\cos(\alpha/2)$, причем вектор $\vec{\upsilon}_1$ направлен перпендикулярно отрезку OC, в то время, как вектор $\vec{\upsilon}$ перпендикулярен DC (см. рис. 1). После выключения поля результирующая скорость частицы $\vec{u} = \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_1$.

Нетрудно заметить, что составляющая вектора $\vec{\upsilon}$, перпендикулярная CO, равна по величине $\upsilon_\perp = \upsilon\cos(\alpha/2)$, то есть $\vec{\upsilon}_\perp + \vec{\upsilon}_1 = 0$. Значит, вектор $\vec{u}$ направлен вдоль отрезка CO, проходящего через ось электромагнита. Вдоль этого отрезка и движется частица после выключения магнитного поля. Скорость u ее движения при этом

$$u = \upsilon\sin(\alpha/2) = \frac{q x B_0}{2m}\sin(\alpha/2).$$

Таким образом, траектория BCO движения частицы представляет собой дугу окружности, переходящую в луч, проходящий через ось магнита. Минимальное расстояние от оси магнита при любых значениях τ и x равно нулю.

Время от момента включения поля до момента пролета через центр магнита

$$\Delta t = \tau + \frac{x_1}{u} = \tau + \frac{x\cos(\alpha/2)}{\frac{q x B_0}{2m}\sin(\alpha/2)} = \tau + \frac{2m}{q B_0}\operatorname{ctg}(\alpha/2),$$

где $\frac{\alpha}{2} = \tau\frac{q B_0}{2m}$.

№	Задача 1.11.3. Критерии оценивания (12 баллов)	Баллы
1	Указано, что частица приходит в движение под действием силы со стороны вихревого электрического поля	0,5
2	Записано выражение для ЭДС индукции в контуре радиуса x: $\mathcal{E} = \pi x^2 \dfrac{dB}{dt}$.	0,5
3	Получено выражение для напряженности вихревого электрического поля в зависимости от расстояния x от оси магнита: $E_{вихр} = \dfrac{x}{2}\dfrac{dB}{dt}$.	2
4	Получено выражение для скорости частицы после включения магнитного поля $u = qxB_0/(2m)$.	2
5	Указано, что в интервале времени между включением и выключением магнитного поля частица летит по дуге окружности, а после выключения движется по прямой	0,5
	Приведены верные выражения для	
6	радиуса окружности R	0,5
7	периода обращения T	0,5
8	расстояния до оси (в момент выключения поля)	0,5
9	Получено выражение для модуля изменения скорости при выключении поля u_1	1
10	С учетом направлений скорости $\vec{u}$ и изменения скорости $\vec{u}_1$ доказано, что после выключения поля частица летит через центр системы	2
11	Определена скорость u частицы после выключения поля	1
12	Верно определено время Δt до пролета через центр магнита	1

Задача 1.11.4. Эффект Холла (14 баллов). Электроны являются носителями тока в металлах и полупроводниках n-типа. Если образец с током (в данном случае прямоугольный кусочек плёнки полупроводника n-типа) помещён в магнитное поле и через него протекает электрический ток, то на движущиеся электроны действует сила Лоренца $F = euB$, перпендикулярная скорости $\vec{u}$ электрона и вектору $\vec{B}$ магнитной индукции (рис. 1).

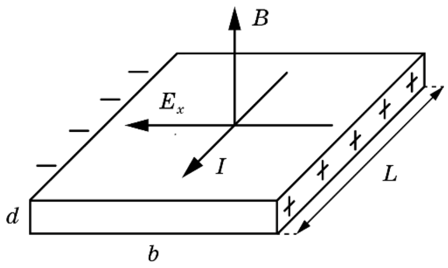


Рис. 1

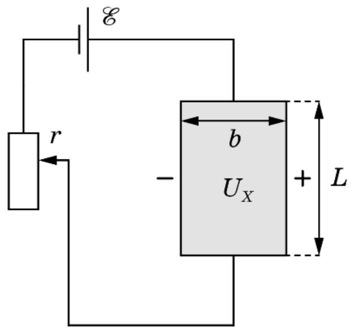
Здесь u – средняя скорость дрейфа электронов, связанная с проходящим током I и прямо пропорциональная напряженности электрического поля $\vec{E}$ в направлении этого тока: $u = \mu E$, где коэффициент пропорциональности μ называется подвижностью электронов.

Из-за действия на электроны силы Лоренца (на рисунке она направлена в сторону левой грани), происходит разделение зарядов и появляется поперечное электрическое поле с напряженностью E_x. Возникновении этого поля при протекании тока в образце, помещенном в магнитное поле, называют эффектом Холла. Перемещение электронов в направлении левой грани прекращается, когда силу Лоренца уравновешивает электрическая сила eE_x:

$$euB = eE_x.$$

В установившемся режиме напряжённость поперечного электрического поля $E_x = uB$.

Ниже описан эксперимент, в котором эффект Холла используется для исследования свойств полупроводника.



Ток создаёт источник с ЭДС $\mathcal{E}$ = 10 В и малым внутренним сопротивлением. Величина магнитной индукции B = 1,0 Тл. Для изменения тока применяют переменный резистор, а вольтметром измеряют напряжение U_X между боковыми гранями в направлении, перпендикулярном магнитному полю и направлению протекающего тока.

Рис. 2

Размеры полупроводникового образца: толщина d = 1,0 мкм, ширина b = 5,0 мм, длина L = 1,0 см. Заряд электрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

r, кОм	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	0,0
U_X, В	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1	2,5

В таблице представлена зависимость U_x от сопротивления r переменного резистора.

Задание

1. Выразите U_x через силу тока I в образце, концентрацию n электронов проводимости и физические величины, приведенные в описании эксперимента (□, B, d, b, L, e).

2. Выразите сопротивление R и удельное сопротивление ρ образца через его размеры, подвижность μ и концентрацию n электронов проводимости.

3. Используя уравнения, полученные в п.п. 1, 2, выразите U_x через концентрацию n и подвижность μ электронов проводимости, сопротивление r и физические величины, приведенные в описании эксперимента.

4. Используя выражение, полученное в п. 3, при помощи графического анализа экспериментальных данных определите для исследуемого полупроводника:

а) концентрацию n электронов проводимости;
б) их подвижность μ;
в) удельное сопротивление ρ.

Опишите выбранный для этого способ обработки данных.

Внимание! Из-за ограниченного времени выполнения задания погрешность определения n, μ и ρ оценивать не требуется, однако точность полученных вами промежуточных и конечных результатов будет учитываться при выставлении баллов.

Возможное решение (С. Кармазин).

1. Выразим U_x через силу тока I в образце. Заметим, что при скорости дрейфа υ за единицу времени через сечение образца bd проходит заряд электронов проводимости из объёма ubd, что при концентрации n электронов проводимости создаёт силу тока $I = enubd$. Для разности потенциалов $U_x = buB$, поэтому

$$U_x = \frac{IB}{end}. \qquad (1)$$

2. Выразим сопротивление R образца между гранями, отстоящими друг от друга на расстоянии L, через подвижность μ и концентрацию n электронов проводимости. Так как $u = mE$, где $E = U/L$ где U – напряжение между сечениями бруска, то скорость дрейфа электронов $u = mU/L$. Поскольку сила тока $I = enubd = \frac{enmUbd}{L}$, то из равенства $R = \frac{U}{I}$ имеем

$$R = \frac{L}{enmbd}. \qquad (2)$$

Соответственно, для удельного сопротивления получим

$$r = \frac{1}{enm}. \qquad (3)$$

3. Запишем закона Ома для замкнутой цепи $E = I(r + R)$, где R сопротивление образца. Подставляя в это уравнение выражение $I = \frac{U_x end}{B}$, следующее из (1), и выражение (2) для R, получим $r + R = \frac{EB}{U_x end}$ или

$$\frac{EB}{U_x} = end \times r + \frac{L}{mb}. \qquad (4)$$

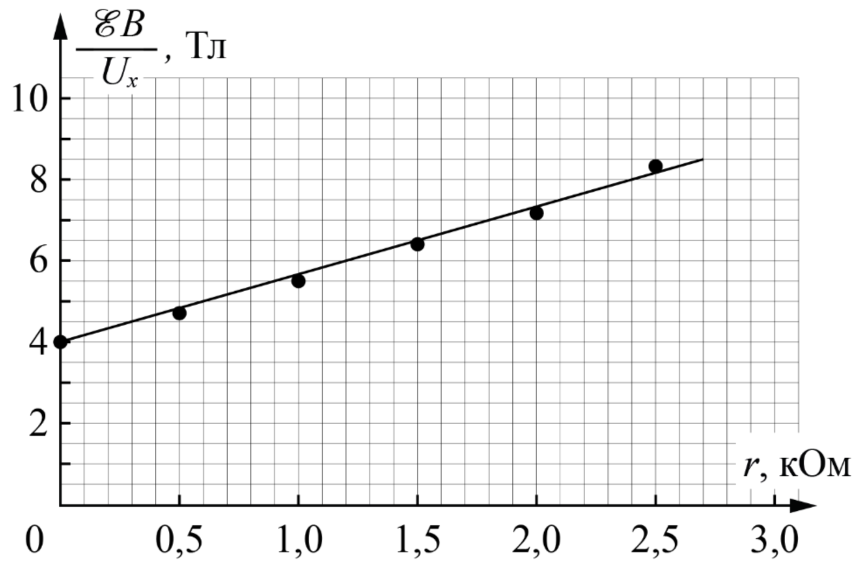
Мы получили, что обратное напряжение Холла **линейно** зависит от сопротивления переменного резистора *r.* Это позволяет применить графическую обработку (4).

По угловому коэффициенту *den* можно найти концентрацию *n*, а по свободному члену $\frac{L}{mb}$ – подвижность *μ.*

Таблицу из условия преобразуем к виду:

r, кОм	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
□B/U_x, Тл	4,0	4,8	5,6	6,3	7,1	8,3

Наносим на график с осями $\frac{\mathrm{E}B}{U_x}$ и r точки, отвечающие измерениям, и проводим наиболее близкую к ним прямую.



Для нашей прямой получаем $\frac{\mathscr{E}}{\mu b} = 4{,}1$ Тл, откуда

$$\mu = \frac{1{,}0\cdot 10^{-2}}{5{,}0\cdot 10^{-3}\cdot 4{,}1}\left(\frac{\text{м}^2}{\text{с}\cdot\text{В}}\right) = 4{,}9\cdot 10^{3}\left(\frac{\text{см}^2}{\text{с}\cdot\text{В}}\right).$$

Угловой коэффициент $end = \frac{8{,}2-4{,}0}{2{,}5\cdot 10^{3}}\left(\frac{\text{Тл}}{\text{Ом}}\right) \approx 1{,}7\cdot 10^{-3}\left(\frac{\text{Тл}}{\text{Ом}}\right)$, откуда

$$n = \frac{1{,}7\cdot 10^{-3}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}0\cdot 10^{-6}}\text{ м}^{-3} = 1{,}06\cdot 10^{22}\text{ м}^{-3}, \qquad \rho = \frac{1}{en\mu} = 1{,}2\cdot 10^{-3}\text{ Ом}\cdot\text{м}.$$

№	Задача 1.11.4. Критерии оценивания (14 баллов)	Баллы
1	Полный вывод выражения для напряжения Холла: $U_x = B\upsilon b = BI/(end)$. При неполном выводе	2
а)	Выражена скорость дрейфа через силу тока: $\upsilon = I/(bden)$ (1 балл)	
б)	Выражение для напряжения Холла: $U_x = B\upsilon b = BI/(den)$ (1 балл)	
2	Выражение для сопротивления $r + R = \mathcal{E}/I$ (0,5 балла) и $r + R = \mathcal{E}B/(U_x den)$ (0,5 балла)	1
3	Выражение сопротивления и удельного сопротивления через подвижность и концентрацию	3
а)	Записано соотношение $\upsilon = \mu E = \mu U/L$ (1 балл)	
б)	Записано соотношение $I = en\upsilon bd = en\mu Ebd = en\mu Ubd/L$ (1 балл)	
в)	Получение выражения для $R = L/en\mu bd$ (0,5 балла)	
г)	Получение выражение для удельного сопротивления $\rho = 1/en\mu$ (0,5 балла)	
4	Сделан вывод о линейной зависимости r и $1/U_x$ из постоянства R как основы метода нахождения характеристик полупроводника	0,5
5	Получение соотношения (или любой аналог) $\mathcal{E}B/U_x = denr + L/(\mu b)$	0,5
6	Преобразование таблицы 1 в таблицу 2 с величиной, пропорциональной $1/U_x$, как функции r.	1
7	Указано, что по коэффициенту при переменной и свободному члену в линейной зависимости можно найти n и μ (алгебраически или по графику)	1
8	Установление параметров линейной зависимости (свободного члена $L/\mu b$)	1
9	Установление параметров линейной зависимости (коэффициента den)	1
10	Подвижность μ попала в интервале (0,47 ÷0,51)м²/с·В; в интервале (0,45 ÷0,53) м²/с (0,5 балла)	1
11	Концентрация n в интервале (0,8 ÷1,2) 10^{22} 1/м³ в интервале (0,6 ÷1,4) 10^{22} 1/м³ (0,5 балла)	1
12	ρ в интервале (1,1÷1,4)·10^{-3} Ом·м в интервале (0,9 ÷1,6)·10^{-3} Ом·м (0,5 балла)	1