МГУ им. Ломоносова

МФТИ

МЭИ

СПбГУ

МИРЭА

МИСиС

МГСУ

РЭА им. Плеханова

НГУ

МИЭМ

МГТУ «Станкин»

НИУ ВШЭ

М. И. Шабунин

Математика

Пособие для поступающих в вузы

М. И. Шабунин

Математика
Пособие для поступающих в вузы

7-е издание,
исправленное и дополненное
(электронное)

Шабунин М. И.

Математика [Электронный ресурс] : пособие для поступающих в вузы / М. И. Шабунин. — 7-е изд., испр. и доп. (эл.). — Электрон. текстовые дан.

Книга предназначена для всех, кто, обладая знаниями основ школьного курса математики, хочет систематизировать свои знания, а также стремится успешно сдать вступительные экзамены в вуз. Пособие окажется полезным студентам педагогических вузов, а также учителям средних школ.

Каждый раздел пособия содержит необходимый справочный материал и подробно разобранные примеры, взятые из практики вступительных экзаменов в вузы, предъявляющие достаточно высокие требования к математической подготовке абитуриентов. Кроме того, в пособие включены задачи для самостоятельной работы учащихся. Ко всем задачам даны ответы, а к некоторым наиболее трудным — краткие указания.

В пособие также включены образцы вариантов вступительных экзаменов в МФТИ 1998–2013 гг.

Оглавление

Предисловие автора

Книга предназначена для тех, кто, обладая знаниями основ школьного курса математики, стремится систематизировать эти знания и успешно сдать вступительные экзамены в вуз.

Каждый раздел пособия содержит необходимый справочный материал и подробно разобранные примеры, взятые из практики вступительных экзаменов в вузы, предъявляющие достаточно высокие требования к математической подготовке абитуриентов. Кроме того, в пособие включены задачи для самостоятельной работы учащихся, расположенные в порядке возрастания трудности. Ко всем этим задачам даны ответы, а к некоторым наиболее трудным — краткие указания. Для удобства пользования книгой ответы приводятся сразу после условий задач параграфа (главы).

В пособие также включены образцы вариантов вступительных экзаменов таких вузов, как МГУ, МФТИ, МГИЭМ, МИРЭА, и др.

Автор стремился подобрать примеры с тем расчетом, чтобы в каждом разделе пособия был предоставлен набор ключевых задач и методов их решения, имея в виду конечную цель: способствовать формированию умений и навыков, необходимых не только для успешной сдачи вступительных экзаменов, но и для повышения уровня математической культуры учащихся.

Работа над пособием, по мнению автора, окажется особенно эффективной, если учащийся сначала попытается самостоятельно решить разобранный в тексте пример, а затем сравнит свое решение с тем, которое приводится в книге.

В работе над пособием автор опирался на многолетний опыт создания учебников и учебных пособий для средней и высшей школы, участия в организации и проведении вступительных экзаменов в Московском физико-техническом институте, чтения лекций по телевидению для поступающих в вузы и на курсах повышения квалификации учителей средних школ.

В седьмое издание включены задачи МФТИ 2003–2013 гг., новые разделы — делимость целых чисел и элементы комбинаторики. Добавлены задачи в §§ 43 и 44 (задачи с параметрами), среди которых — задачи ЕГЭ.

М. И. Шабунин

Глава 1

Действительные числа

§ 1. Необходимые и достаточные условия. Целые и рациональные числа. Метод математической индукции

Справочные сведения

1. ***Прямые и обратные теоремы. Необходимые и достаточные условия.***

а) Формулировка каждой теоремы содержит условие теоремы и заключение. Поменяв местами в формулировке некоторой теоремы условие и заключение, получим формулировку теоремы, обратной данной.

б) Пусть A — некоторое высказывание, т. е. утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Тогда всякое высказывание B, из которого следует A, называется *достаточным условием* для A, а всякое высказывание C, которое следует из A, называется *необходимым условием* для A. В этих случаях пишут: $B \Rightarrow A$, $A \Rightarrow C$.

в) Если высказывания M и N таковы, что каждое из них следует из другого ($M \Rightarrow N$, $N \Rightarrow M$), то говорят, что каждое из этих высказываний является *необходимым и достаточным условием* другого, и пишут $M \Leftrightarrow N$. Тот факт, что $M \Leftrightarrow N$, выражают также следующими формулировками:

– для справедливости M *необходимо и достаточно*, чтобы имело место N;

– M справедливо *тогда и только тогда*, когда выполняется N;

– M имеет место *в том и только в том случае*, если справедливо N.

2. ***Делимость целых чисел.***

а) Множество натуральных чисел обозначают буквой $\mathbf{N}$, а множество целых чисел — буквой $\mathbf{Z}$. Если n — натуральное число, то пишут $n \in \mathbf{N}$, а если k — целое число, то пишут $k \in \mathbf{Z}$.

Натуральное число a записывают так:

$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$

или в виде суммы

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — цифры соответствующих разрядов.

б) Если r — остаток от деления натурального числа a на натуральное число m, то

$$a = mq + r,$$

где r может принимать одно из значений $0, 1, \ldots, m-1$; q — целое неотрицательное число.

В том случае, когда $r = 0$, говорят, что a делится на m.

в) Если r — остаток от деления натурального числа a на натуральное число m, то:

- остаток от деления на m числа na, где $n \in \mathbf{N}$, равен остатку от деления на m числа nr;
- остаток от деления на m числа a^k, где $k \in \mathbf{N}$, равен остатку от деления на m числа r^k.

г) Если r_1 и r_2 — остатки от деления на натуральное число m натуральных чисел a и b соответственно, то остатки от деления на m чисел $a+b$, $a-b$ и ab совпадают с остатками от деления на m чисел $r_1 + r_2$, $r_1 - r_2$ и $r_1 r_2$ соответственно.

д) Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, полученное из данного отбрасыванием всех цифр, кроме двух последних, делится на 4.

е) Натуральное число делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9).

3. *Метод математической индукции.*

Метод доказательства, называемый *методом математической индукции*, основан на следующем принципе, который является одной из аксиом арифметики натуральных чисел.

Предложение $A(n)$, зависящее от натуральной переменной n, считается истинным для всех $n \in \mathbf{N}$, если выполнены следующие два условия:

а) предложение $A(n)$ истинно для $n = 1$;

б) из предположения, что $A(n)$ истинно для $n = k$ (где k — *любое* натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения n, т. е. для $n = k + 1$.

Этот принцип называется *принципом математической индукции*.

Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства: во-первых, проверяют истинность высказывания $A(1)$, и, во-вторых, предположив истинность высказывания $A(k)$, пытаются доказать, что истинно высказывание $A(k+1)$. Если это удается доказать (при любом натуральном k), то предложение $A(n)$ считается истинным для всех значений n.

4. ***Рациональные числа.***

а) *Рациональное число* a можно записать в виде

$$a = \frac{p}{q}, \qquad \text{где} \quad p \in \mathbf{Z}, \quad q \in \mathbf{N},$$

а сумма и произведение рациональных чисел $a = \frac{p}{q}$ и $b = \frac{p_1}{q_1}$ определяются равенствами

$$a + b = \frac{pq_1 + qp_1}{qq_1}, \qquad ab = \frac{pp_1}{qq_1}.$$

б) Любое рациональное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби, используя алгоритм деления уголком. Например, $\frac{3}{8} = 0,375$; $-\frac{27}{11} = -2,4545\ldots = -2,(45)$.

Обратно, зная бесконечную периодическую десятичную дробь, можно найти соответствующее этой дроби рациональное число, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Например, $2,4(31) = 2,4 + \frac{31}{10^3} + \frac{31}{10^5} + \cdots = 2,4 + \frac{31}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} =$

$= 2\,\frac{427}{990} = \frac{2407}{990}$. Этот же результат можно получить и другим способом. Пусть $x = 2,4(31)$, тогда $10^3 x = 2431,(31)$, $10x = 24,(31)$, откуда $990x = 2431 - 24 = 2407$, $x = \frac{2407}{990}$.

Примеры с решениями

Пример 1. Сформулировать и доказать теорему, обратную теореме Пифагора.

Решение. Условие M теоремы Пифагора можно записать в виде следующего высказывания:

$$M \equiv \{\text{в треугольнике } ABC \text{ угол } C \text{ — прямой}\},$$

а заключение N этой теоремы формулируется так:

$$N \equiv \{c^2 = a^2 + b^2\},$$

где a, b, c — стороны, лежащие против углов A, B и C соответственно.

Справедлива также теорема, обратная теореме Пифагора: если $c^2 = a^2 + b^2$, то угол C — прямой.

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться либо теоремой косинусов, либо третьим признаком равенства треугольников (по трем сторонам).

Пример 2. Выяснить, какое из утверждений A и B следует из другого, используя символы $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$:

1) $A \equiv \{$четырехугольник Q — ромб$\}$,
$B \equiv \{$диагонали четырехугольника Q взаимно перпендикулярны$\}$;

2) $A \equiv \{$произведение чисел x и y равно нулю$\}$,
$B \equiv \{$хотя бы одно из чисел x, y равно нулю$\}$.

Решение. 1) Здесь $A \Rightarrow B$, но из B не следует A.
2) В этом случае $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, т. е. $A \Leftrightarrow B$.

Пример 3. Доказать, что число $a = n^3 + 17n$ делится на 6 при любом натуральном числе n.

Доказательство. Эту задачу можно решить, применив метод математической индукции. Приведем другой способ решения. Заметим, что натуральное число делится на 6 тогда и только тогда, когда на 6 делится число $a + 6k$, где k — целое число. В частности, число a делится на 6, если число $b = a - 18n = n^3 - n$ делится на 6. Но $b = n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых одно делится на 3 и по крайней мере одно делится на 2. Поэтому число b делится на 6, откуда следует, что число a также делится на 6.

Пример 4. Найти последнюю цифру числа $a = 432^{283}$.

Решение. Последняя цифра у числа a такая же, как и у числа 2^{283}. Выпишем последовательные степени двойки:

$$2^1 = 2,\ \ 2^2 = 4,\ \ 2^3 = 8,\ \ 2^4 = 16,\ \ 2^5 = 32,\ \ 2^6 = 64 \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что последние цифры этих чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра у числа 2^k такая же, как у числа 2^p, где p — одно из чисел 1, 2, 3, 4, а разность $k - p$ кратна четырем. Так как $283 = 280 + 3$, где 280 делится на 4, то последняя цифра числа 2^{283} — восьмерка ($2^3 = 8$).

Замечание. Если рассматривать последовательные натуральные степени числа 3 (или числа 7), то можно заметить, что последние цифры получаемых чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра у числа 3^{214} такая же, как у числа 3^2, т. е. девятка, так как $214 = 53 \cdot 4 + 2$.

Аналогично, последняя цифра числа 7^{365} — семерка, так как $365 = 91 \cdot 4 + 1$.

Пример 5. Доказать, что число $a = (x + 7y + 3)^5(5x + 3y + 2)^4$ делится на 16 при любых целых x и y.

Доказательство. Если числа x и y — оба четные или оба нечетные, то $5x + 3y + 2$ — четное число, и поэтому $(5x + 3y + 2)^4$ делится на $2^4 = 16$. Если же одно из чисел x, y — четное, а другое — нечетное, то $x + 7y + 3$ — четное число и поэтому $(x + 7y + 3)^5$ делится на 2^5 и, значит, делится на 16.

Пример 6. Найти остаток от деления числа a на m, если:

1) $a = 37^{51} \cdot 49^{15}$, $m = 3$;
2) $a = 2^{127} + 18^{21}$, $m = 17$.

Решение. 1) Заметим, что если натуральное число n не делится на 3, т. е. $n = 3p \pm 1$, где $p \in \mathbf{N}$, то $n^2 = 3q + 1$, где $q \in \mathbf{N}$. Поэтому остаток от деления на 3 числа n^2 равен 1, если n не делится на 3. Числа 37 и 49 не делятся на 3 и, следовательно, остаток от деления на 3 каждого из чисел $37^{50} = (37^2)^{25}$, 49^{14} равен 1, а остаток от деления на 3 числа a совпадает с остатком от деления на три числа $b = 37 \cdot 49 = (36 + 1)(48 + 1)$, т. е. равен 1.

2) Так как $2^4 = 16 = 17 - 1$, $18 = 17 + 1$, а $127 = 4 \cdot 31 + 3$, то остаток от деления на 17 числа a совпадает с остатком от деления на 17 числа $b = 2^3 \cdot (-1)^{31} + 1^{21} = -8 + 1 = -7$, т. е. равен 10, поскольку $-7 = 17(-1) + 10$.

Ответ. 1) 1; 2) 10.

Пример 7. Доказать, что натуральное число

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится сумма

$$s = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n,$$

т. е. сумма цифр этого числа, взятых с чередующимися знаками.

Доказательство. Остаток от деления на 11 чисел 10^{2k}, где $k \in \mathbf{N}$, равен 1, так как $10^{2k} = \underbrace{99\ldots99}_{2k \text{ цифр}} + 1$, а остаток от деления на 11 чисел 10^{2k+1}, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, равен -1, так как $10 = 11 - 1$, $10^{2k+1} = 10^{2k}(11 - 1)$, а остаток от деления на 11 числа 10^{2k} равен 1.

Итак, остаток от деления на 11 числа a равен s.

Пример 8. Доказать, что если число $a \in \mathbf{N}$ не делится на 5, то число $a^4 - 1$ делится на 5.

Доказательство. Пусть r — остаток от деления a на 5. Так как a не делится на 5, то $a = 5k + r$, где $k \in \mathbf{N}$, r — одно из чисел 1, 2, 3, 4. Из равенства $a^4 = (5k + r)^4 = 5p + r^4$, где $p \in \mathbf{N}$, следует, что остаток от деления a^4 на 5 равен остатку от деления r^4 на 5. Так как $1^4 = 1$, $2^4 = 5 \cdot 3 + 1$, $3^4 = 5 \cdot 16 + 1$, $4^4 = 5 \cdot 31 + 1$, то остаток от деления r^4 на 5 при $r = 1, 2, 3, 4$ равен 1. Поэтому остаток от деления $a^4 - 1$ на 5 равен нулю, т. е. число $a^4 - 1$ делится на 5, если a не делится на 5.

Пример 9. Методом математической индукции доказать равенство

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1}$$

Доказательство. При $n = 1$ равенство (1) является верным ($1 = 1$). Нужно доказать, что из предположения о том, что является верным равенство (1), следует справедливость равенства

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \tag{2}$$

полученного из (1) заменой n на $n + 1$.

Прибавляя к обеим частям (1) слагаемое $(n+1)^2$, имеем

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2. \tag{3}$$

Преобразуя правую часть (3), получаем

$$\frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Таким образом, равенство (2) является верным, и поэтому формула (1) доказана для любого $n \in \mathbf{N}$.

Дадим другое доказательство формулы (1), используя символ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, которым обозначается сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Воспользуемся тождеством

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1. \tag{4}$$

Полагая в (4) $x = 1, 2, \dots, n$ и складывая получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n. \tag{5}$$

Левая часть (5) равна $(n+1)^3 - 1$, а $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Поэтому из (5) получаем

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

откуда следует равенство (1).

Пример 10. Доказать, что для любых a, b и при любом $n \in \mathbf{N}$ справедлива *формула бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad (6)$$

где

$$C_n^0 = 1,$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}, \quad k = 1, 2\dots, n; \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k. \qquad (7)$$

Правую часть формулы (6) называют *разложением бинома*, числа C_n^k — *биномиальными коэффициентами*, слагаемое $C_n^k a^{n-k} b^k$ — *k-м членом разложения бинома.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ формула (6) верна, так как ее правая часть равна левой: $C_1^0 a + C_1^1 b = a + b$.

Предполагая справедливым равенство (6), докажем, что верна формула

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k. \qquad (8)$$

Умножая обе части равенства (6) на $(a+b)$, получаем

$$(a+b)^{n+1} = A_n + B_n,$$

где

$$A_n = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k,$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Следовательно,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}. \qquad (9)$$

Сравнивая правые части равенств (8) и (9), заключаем, что для доказательства формулы (8) достаточно показать, что

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \qquad (10)$$

Используя (7), находим

$$C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-2))}{(k-1)!} = \frac{kn(n-1)\cdots(n-(k-2))}{k!}.$$

Поэтому

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-2))}{k!}(n-(k-1)+k) = \\ = \frac{(n+1)((n+1)-1)\cdots((n+1)-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k.$$

Равенство (10) доказано и поэтому справедливо равенство (8). Итак, формула (6) верна при любом $n \in \mathbf{N}$.

Отметим, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))(n-k)!}{k!(n-k)!},$$

т. е.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{11}$$

Поэтому формулу (6) можно записать в виде

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k, \qquad \text{где} \quad 0! = 1.$$

Из (11) следует, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{12}$$

Задачи

1. Выяснить, какое из утверждений A и B следует из другого, используя символы $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$:

1) $A \equiv \{$каждое из чисел a, b делится на $5\}$, $B \equiv \{$сумма $a+b$ делится на $5\}$;

2) $A \equiv \{$последняя цифра числа a четная$\}$, $B \equiv \{$число a делится на $4\}$;

3) $A \equiv \{$треугольник ABC — равнобедренный$\}$, $B \equiv \{$две медианы треугольника ABC равны между собой$\}$;

4) $A \equiv \{$из отрезков, длины которых равны a, b, c, можно составить треугольник$\}$, $B \equiv \{$положительные числа a, b, c связаны неравенствами $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b\}$.

2. Натуральные числа a и b таковы, что a^2+b^2 делится на 3. Следует ли отсюда, что каждое из чисел a, b делится на 3?

3. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

4. Доказать, что при любом натуральном n сумма n^3+3n^2+2n делится на 6.

5. Доказать, что при любом натуральном n число a делится на m, если:

1) $a = 7^n + 3^{n+1}$, $m = 4$; 2) $a = 21^n + 4^{n+2}$, $m = 17$;

3) $a = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$, $m = 19$; 4) $a = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$, $m = 11$.

6. Доказать, что если натуральное число $\overline{abc}$ делится на 37, то и число $\overline{cab}$ делится на 37.

7. Пусть x и y — такие натуральные числа, что число $7x+5y$ делится на 13. Доказать, что число $41x+46y$ также делится на 13.

8. Найти последнюю цифру числа a, если:

1) $a = 2^{587}$; 2) $a = 3^{375}$;

3) $a = 7^{158}$; 4) $a = 26^{78} + 4^{50}$;

5) $a = 72^{129} + 43^{425}$; 6) $a = 43^{43} - 17^{17}$.

9. Доказать, что число $10^{25} + 10^{17} - 164$ делится на 18.

10. Найти остаток от деления числа a на m, если:

1) $a = 25^{26} + 29^{27}$, $m = 3$; 2) $a = 2^{367} + 43$, $m = 17$.

11. Доказать, что $n^5 - n$ делится на 5 при любом $n \in \mathbf{N}$.

12. Доказать, что произведение $(5m + 3n + 9)^3(m + 7n + 2)^4$ делится на 8 при любых натуральных m и n.

13. Представить рациональное число a в виде бесконечной периодической десятичной дроби, если:

1) $a = \dfrac{14}{99}$; 2) $a = \dfrac{601}{495}$.

14. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь a в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа, не имеющие общих делителей:

1) $a = 2,(13)$; 2) $a = 1,3(18)$.

15. Методом математической индукции доказать, что при всех $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство:

1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

2) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

Ответы

1. 1) $A \Rightarrow B$. 2) $B \Rightarrow A$; 3) $A \Leftrightarrow B$; 4) $A \Leftrightarrow B$. **2.** Да.
8. 1) 6; 2) 7; 3) 9; 4) 2; 5) 5; 6) 0. **10.** 1) 0; 2) 1. **13.** 1) 0,(15); 2) 1,2(14).
14. 1) $\frac{211}{99}$; 2) $\frac{29}{22}$.

§ 2. Действительные числа, степени и корни, логарифмы. Тождественные преобразования алгебраических выражений

Справочные сведения

1. ***Множество действительных чисел.***

а) *Иррациональное число* — бесконечная десятичная непериодическая дробь. Рациональные числа, представимые бесконечными периодическими десятичными дробями, и иррациональные числа образуют *множество действительных чисел* $\mathbf{R}$.

б) Арифметические действия и правила сравнения для действительных чисел определяются так, что свойства этих действий, а также свойства равенств и неравенств оказываются такими же, как и для рациональных чисел. Правила сравнения и операции над действительными числами подробно изучаются в курсе высшей математики.

в) *Модулем* действительного числа a называется неотрицательное число (обозначается $|a|$) такое, что

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

2. *Возведение в целую степень.*

а) Определение степени.

Если a — действительное число ($a \in \mathbf{R}$), n — натуральное число ($n \in \mathbf{N}$), то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}},$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a \neq 0,$$

$$a^0 = 1, \qquad a \neq 0.$$

б) Свойства степени.

Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, m и n — целые числа ($m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$), то

$$a^n a^m = a^{n+m}, \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$
$$(a^n)^m = a^{nm},$$
$$(ab)^n = a^n b^n, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

в) Степень суммы и разности.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$$
$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

г) Разность и сумма степеней.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$
$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \cdots + b^{2k}).$$

3. *Разложение многочлена на множители.*

а) Если $x = a$ — корень многочлена $P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, где $c_n \neq 0$, т. е. $P_n(a) = 0$, то $P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x)$, где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$.

б) Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, $a\neq 0$, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

4. *Производные пропорции.*

а) Если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{m_1a+m_2b}{n_1a+n_2b}=\dfrac{m_1c+m_2d}{n_1c+n_2d}$ при условии, что $n_1a+n_2b\neq 0$.

б) Если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{m_1a+m_2c}{m_1b+m_2d}$ при условии, что $m_1b+m_2d\neq 0$.

в) Если $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dots=\dfrac{a_n}{b_n}$, то $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{m_1a_1+m_2a_2+\dots+m_na_n}{m_1b_1+m_2b_2+\dots+m_nb_n}$ при условии, что $m_1b_1+m_2b_2+\dots+m_nb_n\neq 0$.

5. *Действия с корнями (радикалами).*

а) *Арифметический корень n-й степени из числа a* (обозначается $\sqrt[n]{a}$, $n\geqslant 2$) — неотрицательное число, n-я степень которого равна a, т. е. если $a\geqslant 0$, $n\in\mathbf{N}$ $(n\geqslant 2)$, то

$$\sqrt[n]{a}\geqslant 0,\qquad (\sqrt[n]{a})^n=a.$$

Если $n=2$, то арифметический корень из числа a обозначается $\sqrt{a}$ и называется *арифметическим квадратным корнем*.

б) Свойства арифметического корня $(n\in\mathbf{N},\ m\in\mathbf{N},\ n\geqslant 2,\ m\geqslant 2)$.

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b},\qquad a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0;$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\qquad a\geqslant 0,\quad b>0;$$

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m},\qquad a\geqslant 0;$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a},\qquad a\geqslant 0.$$

в) Для любого $a\in\mathbf{R}$ справедливо равенство

$$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$$

и, в частности,

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

г) Если $a<0$, то

$$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

д) Формула «сложного радикала». Если $a\geqslant 0$, $a^2-b\geqslant 0$, то

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

6. ***Степень с рациональным и действительным показателем.***

а) Степень с рациональным показателем определяется равенством

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad \text{где} \quad a > 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

б) Свойства степени с рациональным показателем (p, q — рациональные числа, $a > 0$, $b > 0$).

$$a^p a^q = a^{p+q},$$
$$a^p : a^q = a^{p-q},$$
$$(a^p)^q = a^{pq},$$
$$(ab)^p = a^p b^p,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

в) Степень с действительным иррациональным показателем x и основанием a, где $a > 0$, определяется как действительное число (обозначается a^x), являющееся пределом последовательности $\{a^{r_n}\}$, где $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. При этом для степени с любым действительным показателем справедливы те же свойства, которыми обладает степень с рациональным показателем. Это доказывается в курсе высшей математики.

7. ***Логарифмы.***

а) *Логарифм числа* b, где $b > 0$, *по основанию* a, где $a > 0$, $a \neq 1$ (обозначается $\log_a b$), — показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b, т. е.

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это равенство называют *основным логарифмическим тождеством*.

Логарифм числа a по основанию 10 называют *десятичным* и обозначают $\lg a$, а логарифм числа a по основанию e называют *натуральным* и обозначают $\ln a$.

б) Свойства логарифмов.

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $r \in \mathbf{R}$, то

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c,$$
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$
$$\log_a b^r = r \log_a b.$$

В частности,

$$\log_a a^r = r.$$

в) Формула перехода к новому основанию.

Если $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, то

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Эта формула называется *формулой перехода* от логарифма по основанию a к логарифму по основанию c. Частные случаи формулы перехода:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \qquad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad b \neq 1;$$

$$\log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b, \qquad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Примеры с решениями

Пример 1. Упростить выражение

$$A = \left(\frac{a^6 + b^6}{a^4 - b^4} + \frac{a^2b^4 - a^4b^2}{a^4 + b^4 - 2a^2b^2}\right) : (a - b) - b.$$

Решение. Используя формулы для суммы кубов, разности квадратов и квадрата разности, получаем $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$, $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$.

Сократив числитель и знаменатель первой дроби на $a^2 + b^2$, а второй дроби — на $a^2 - b^2$, находим

$$A = \left(\frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{a^2 - b^2} - \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2}\right) : (a - b) - b =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 - b^2)(a - b)} - b = (a + b) - b = a.$$

Ответ. a.

Пример 2. Упростить выражение

$$A = \frac{8}{1 + a^8} + \frac{4}{1 + a^4} + \frac{2}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 - a}$$

и найти его значение при $a = 2^{-\frac{1}{16}}$.

Решение. Сумма двух последних дробей равна $\dfrac{2}{1 - a^2}$, а сумма трех последних дробей равна $\dfrac{4}{1 - a^4}$. Следовательно, $A = \dfrac{8}{1 + a^8} + \dfrac{8}{1 - a^8} = \dfrac{16}{1 - a^{16}}$. Если $a = 2^{-\frac{1}{16}}$, то $A = \dfrac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32$.

Ответ. $\dfrac{16}{1 - a^{16}}$; 32.

Пример 3. Вычислить сумму

$$S = \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{97\cdot 99} + \frac{1}{99\cdot 101}.$$

Решение. В этой задаче речь идет не о приближенном значении суммы, которое можно получить с помощью таблиц или других вычислительных средств, а о точном значении суммы, т. е. о записи S в виде отношения двух натуральных чисел.

Ключевой момент решения задачи — представление дроби $\frac{1}{(2K+1)(2K+3)}$ в виде разности двух дробей, т. е. использование равенства

$$\frac{1}{(2K+1)(2K+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2K+1} - \frac{1}{2K+3}\right).$$

Применяя это равенство, получаем

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right).$$

Все слагаемые полученной суммы, за исключением первого и последнего, попарно взаимно уничтожаются и поэтому

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{101}\right) = \frac{98}{2\cdot 3\cdot 101} = \frac{49}{303}.$$

Ответ. $S = \frac{49}{303}$.

Замечание. Метод, использованный в этой задаче, можно применить для вычисления суммы

$$S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}},$$

где a_1, a_2, ..., a_{n+1} — последовательные отличные от нуля члены арифметической прогрессии.

Пример 4. Доказать, что равенство

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc, \tag{1}$$

где a, b, c — положительные числа, является верным тогда и только тогда, когда

$$a = b = c. \tag{2}$$

Решение. Воспользуемся равенством

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = a^3+b^3+c^3-3abc. \tag{3}$$

Это равенство справедливо для любых чисел a, b, c, в чем нетрудно убедиться, произведя действия в левой части (3).

Если a, b, c — положительные числа, то из (1) и (3) следует, что должно выполняться равенство

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0, \tag{4}$$

которое можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2\right] = 0. \tag{5}$$

Но равенство (5) для действительных чисел a, b и c выполняется (является верным) только в том случае, когда выполняются условия (2).

Замечание. Из (3)–(5) следует, что для любых чисел a, b, c справедливо равенство

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \\ = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right). \tag{6}$$

Если a, b, c — неотрицательные числа, то правая часть (6) — неотрицательное число, и поэтому

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc. \tag{7}$$

Полагая в (7) $a^3 = x$, $b^3 = y$, $c^3 = z$, получаем неравенство

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt{xyz},$$

связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое неотрицательных чисел x, y, z.

Пример 5. Доказать, что если три действительных числа a, b, c удовлетворяют условию

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}, \tag{1}$$

то по крайней мере два из этих чисел равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т. е. выполняется хотя бы одно из условий

$$a = -b, \qquad b = -c, \qquad c = -a. \tag{2}$$

Решение. Умножив обе части равенства (1) на $abc(a+b+c)$, приведем его к виду

$$(ab + bc + ac)(a + b + c) - abc = 0. \tag{3}$$

Раскрыв скобки в левой части (3), получим

$$a^2b + 2abc + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 = 0. \tag{4}$$

Разложим левую часть S равенства (4) на множители:

$$S = a^2(b+c) + ab(b+c) + ac(b+c) + bc(b+c) = \\ = (b+c)(a^2 + ab + ac + bc) = (b+c)(a+b)(a+c). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

и поэтому выполняется хотя бы одно из условий (2).

Замечание. Полученный результат позволяет сформулировать следующее утверждение: если действительные числа a, b, c связаны условием (1), то при любом натуральном k справедливо равенство

$$\frac{1}{a^{2k+1}}+\frac{1}{b^{2k+1}}+\frac{1}{c^{2k+1}}=\frac{1}{a^{2k+1}+b^{2k+1}+c^{2k+1}}\,.$$

Пример 6. Сократить дробь

$$A=\frac{a^3-3a-2}{a^3+a^2-4a-4}\,.$$

Решение. Так как числитель $P(a)$ и знаменатель $Q(a)$ дроби A обращаются в нуль при $a=-1$, то многочлены $P(a)$ и $Q(a)$ делятся на $a+1$. Разложим эти многочлены на множители. Получим $P(a)=a^3-a-2(a+1)=a(a-1)(a+1)-2(a+1)=(a+1)(a^2-a-2)=$ $=(a+1)(a-2)(a+1)$, $Q(a)=a^2(a+1)-4(a+1)=(a+1)(a-2)(a+2)$. Следовательно, $A=\dfrac{a+1}{a+2}$.

Ответ. $A=\dfrac{a+1}{a+2}$.

Пример 7. Упростить выражение

$$A=\sqrt{a+2-2\sqrt{a+1}}+\sqrt{a+5+4\sqrt{a+1}}.$$

Решение. Выражение имеет смысл при $a\geqslant -1$. Заметив, что $a+2-2\sqrt{a+1}=a+1-2\sqrt{a+1}+1=(\sqrt{a+1}-1)^2$, $a+5+4\sqrt{a+1}=$ $=(\sqrt{a+1}+2)^2$, и применив формулу $\sqrt{b^2}=|b|$, получим

$$A=|\sqrt{a+1}-1|+\sqrt{a+1}+2.$$

Если $\sqrt{a+1}\geqslant 1$, то $a\geqslant 0$ и тогда $A=2\sqrt{a+1}+1$. Если $0\leqslant a+1<1$, т. е. $-1\leqslant a<0$, то $A=1-\sqrt{a+1}+\sqrt{a+1}+2=3$.

Ответ.

$$A=\begin{cases}2\sqrt{a+1}+1, & \text{если } a\geqslant 0,\\ 3, & \text{если } -1\leqslant a<0.\end{cases}$$

Пример 8. Упростить выражение

$$A=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,.$$

Решение. Умножив числители и знаменатели дробей на $\sqrt{2}$, запишем A в следующем виде:

$$A=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}\,.$$

Так как $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$, $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$, то имеем $A = \dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} + \dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}$.

Приводя дроби к общему знаменателю, получаем

$$A = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) + (2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{2}.$$

Ответ. $\sqrt{2}$.

Замечание. Тот же результат можно получить, применив формулу «сложного» радикала, в силу которой имеет место $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$.

Пример 9. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}.$$

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{2} = a$, тогда $a^3 = 2$, $A = \dfrac{1}{1 + a + 2a^2} =$ $= \dfrac{1}{a^2 + (1 + a + a^2)}$. Умножая числитель и знаменатель полученной дроби на $a - 1$ и применяя формулу разности кубов, запишем A в следующем виде:

$$A = \frac{a-1}{a^2(a-1) + a^3 - 1} = \frac{a-1}{3-a^2} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{3-\sqrt[3]{4}}.$$

Снова применяя формулу разности кубов, получаем

$$A = \frac{(\sqrt[3]{2}-1)(9 + 3\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16})}{23} = \frac{7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 3}{23}.$$

Ответ. $\dfrac{7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 3}{23}$.

Пример 10. Доказать, что

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Доказательство. Пусть $a = 20 + 14\sqrt{2}$, $b = 20 - 14\sqrt{2}$, $A = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$. Применяя формулу куба суммы и учитывая, что $a + b = 40$, $ab = 400 - 196 \cdot 2 = 8$, получаем

$$A^3 = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^3 = a + b + 3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right) = 40 + 6A.$$

Таким образом, левая часть A рассматриваемого равенства является корнем уравнения

$$x^3 - 6x - 40 = 0.$$

Это уравнение имеет корень $x = 4$, а его левую часть можно записать в виде $(x-4)(x^2+4x+10)$. Так как уравнение $x^2+4x+10=0$ не имеет действительных корней, а левая часть равенства A — действительное число, то $A = 4$.

Пример 11. Вычислить:

$$1)\ A = 5^{2-\log_5 9}; \qquad 2)\ B = \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 8 - \log_{\frac{1}{3}} 12 + \log_{\frac{1}{3}} 54.$$

Решение. 1) Применяя свойства степени и основное логарифмическое тождество, получаем

$$A = 5^2 \cdot (5^{\log_5 9})^{-1} = \frac{25}{9}.$$

2) Используя свойства логарифмов, находим

$$B = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{8^{\frac{1}{3}} \cdot 54}{12}\right) = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -2.$$

Ответ. 1) $\frac{25}{9}$; 2) -2.

Пример 12. Доказать, что:

1) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, если $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ b \neq 1$;

2) $\dfrac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$, если $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1,$ $ab \neq 1;\ c \neq 1$.

Доказательство. 1) Пусть A и B — соответственно левая и правая части равенства. Тогда $\log_b A = \log_b c \cdot \log_b a$, $\log_b B = \log_b a \cdot \log_b c$. Так как $\log_b A = \log_b B$, то $A = B$.

2) Используя формулу перехода, получаем

$$\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = \frac{\log_c ab}{\log_c a} = 1 + \frac{\log_c b}{\log_c a} = 1 + \log_a b.$$

Следовательно, левая часть равенства совпадает с правой.

Пример 13. Выразить $\log_{600} 900$ через a и b, где $a = \log_5 2$, $b = \log_2 3$.

Решение. Применяя формулу перехода и свойства логарифмов, получаем

$$\log_{600} 900 = \frac{\log_2 900}{\log_2 600} = \frac{\log_2(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2)}{\log_2(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2)} = \frac{2 + 2\log_2 3 + 2\log_2 5}{3 + \log_2 3 + 2\log_2 5} =$$

$$= \frac{2\left(1 + b + \dfrac{1}{a}\right)}{3 + b + \dfrac{2}{a}} = \frac{2(1 + a + ab)}{2 + 3a + ab}.$$

Ответ. $\dfrac{2(1 + a + ab)}{2 + 3a + ab}$.

Задачи

1. Упростить выражение:

1) $\left(\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\right)\dfrac{(a^2-b^2)}{ab}$;

2) $\left(\dfrac{8}{a^2+2a}-\dfrac{a}{a^2-4}\right)\cdot\dfrac{a^2-2a}{a-4}+\dfrac{a+8}{a+2}$;

3) $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

2. Доказать равенство:

1) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$;
2) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(a-b)(a-c)(c-b)$;
3) $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3=24abc$;
4) $\dfrac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}=a+b+c$.

3. Доказать, что если a, b, c — попарно не равные между собой действительные числа, то значение выражения

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$

есть число, не равное нулю.

4. Упростить выражение:

1) $(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\ldots(a^{32}+1)$;
2) $(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)\ldots(a^{64}-a^{32}+1)$.

5. Доказать, что если $a\neq b$ и

$$\frac{a^2-bc}{a(1-bc)}=\frac{b^2-ac}{b(1-ac)},$$

то

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

6. Доказать, что если действительные числа a_1, $a_2,\ldots,$ a_n, b_1, $b_2,\ldots,$ b_n, p, q $(pq\neq 0)$ удовлетворяют условиям

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=p^2,\qquad b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=q^2,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=pq,$$

то $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, ..., $a_n=\lambda b_n$, где $\lambda=\dfrac{p}{q}$.

7. Сократить дробь:

1) $\dfrac{x^4+3x^2-4}{x^3+x^2-x-1}$; 2) $\dfrac{x^4+2x^3-x-2}{x^3+3x^2+3x+2}$;

3) $\dfrac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{x^3-4x^2+5x-2}$; 4) $\dfrac{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}{x^4-16}$.

8. Доказать равенство:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2.$$

9. Доказать равенство:

1) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=6$;

2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{49}+\sqrt{50}}=5\sqrt{2}-1$.

10. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$; 2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;

3) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$.

11. Упростить выражение:

1) $\left[\left(\dfrac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right):(a+\sqrt[6]{a^3b^2})-\sqrt[3]{b}\right]^2$;

2) $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a})^2}-\dfrac{2\sqrt[4]{ab}\cdot a^{\frac{1}{2}}(\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b})}{a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}}$;

3) $\left(\dfrac{8}{a+2\sqrt{a}-3}+\dfrac{2}{\sqrt{a}+3}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}+1}\right)^{-1}+\dfrac{(a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{2}}+1)}{(a^{\frac{3}{8}}-1)(a^{\frac{3}{8}}+1)}$;

4) $\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}$.

12. Упростить выражение

$$\sqrt{43+30\sqrt{2}}+\sqrt{43-30\sqrt{2}}.$$

13. Доказать, что $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$.

14. Вычислить:

1) $6^{3-\log_6 4}$; 2) $\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}27+\log_{\frac{1}{2}}24-2\log_{\frac{1}{2}}3$;

3) $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96}2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12}2}$.

15. Доказать тождество:

1) $\log_a x\cdot\log_b x+\log_b x\cdot\log_c x+\log_c x\cdot\log_a x=\dfrac{\log_a x\cdot\log_b x\cdot\log_c x}{\log_{abc}x}$;

2) $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}}=\log_b a$.

16. Выразить $\log_{300}120$ через a и b, если $a=\log_2 3$, $b=\log_3 5$.

17. Выразить $\log_{140}350$ через a и b, если $a=\log_7 5$, $b=\log_5 2$.

Ответы

1. 1) $a+b$; 2) $\dfrac{12}{a+2}$; 3) 0. **4.** 1) $\dfrac{a^{64}-1}{a-1}$, $a\neq 1$; 2) $\dfrac{a^{128}+a^{64}+1}{a^2+a+1}$.

7. 1) $\dfrac{x^2+4}{x+1}$; 2) $x-1$; 3) $\dfrac{x^2+1}{x-2}$; 4) $\dfrac{x-2}{x+2}$.

10. 1) $\dfrac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{7}$; 2) $\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 3) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\left(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4\right)$;

4) $\dfrac{\sqrt[3]{30}}{3}\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{15}\right)$.

11. 1) a; 2) $-\sqrt[4]{a^2b}$; 3) -1; 4) $\dfrac{a+b}{ab}$. **12.** 10.

14. 1) 54; 2) -3; 3) 3. **16.** $\dfrac{3+a+ab}{2+a+2ab}$. **17.** $\dfrac{1+2a+ab}{1+a+2ab}$.

§ 3. Последовательность. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Предел последовательности

Справочные сведения

1. ***Числовая последовательность.***

а) Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто последовательность)

$$x_1, x_2 \ldots, x_n, \ldots .$$

Кратко последовательность обозначают символом $\{x_n\}$ или (x_n), число x_n называют *членом* или *элементом* этой последовательности, n — номером члена x_n.

б) Числовая последовательность — это функция, заданная на множестве $\mathbf{N}$; совокупность чисел x_n, $n \in \mathbf{N}$, называют *множеством значений последовательности*.

в) Последовательность обычно задается либо формулой, с помощью которой можно вычислить каждый ее член по соответствующему номеру, либо *рекуррентной формулой*, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим.

2. ***Арифметическая прогрессия.***

а) *Арифметическая прогрессия* — последовательность $\{a_n\}$, определяемая рекуррентной формулой

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где a и d — заданные числа; число d называется *разностью* арифметической прогрессии.

б) Для n-го члена арифметической прогрессии справедлива формула

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

в) Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому его соседних членов, т. е. при $k \geqslant 2$ справедливо равенство

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

г) Если рассматривается совокупность первых n членов арифметической прогрессии, т. е. числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, то сумма каждой пары членов, равноотстоящих от крайних членов этой совокупности, равна сумме крайних членов, т. е. при $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливо равенство

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

д) Сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии выражается формулой

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

3. *Геометрическая прогрессия.*

а) *Геометрическая прогрессия* — последовательность $\{b_n\}$, определяемая рекуррентной формулой

$$b_{n+1} = b_n q,$$

где b_1 и q — заданные числа, отличные от нуля; число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

б) Для n-го члена геометрической прогрессии справедлива формула

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

в) Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению его соседних членов, т. е. при $k \geqslant 2$ справедливо равенство

$$b_k^2 = b_{k-1} b_{k+1}.$$

Если $b_k > 0$ при всех $k \in \mathbf{N}$ $(b_1 > 0,\ q > 0)$, то

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} b_{k+1}},$$

т. е. каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому его соседних членов.

г) Если рассматривается совокупность первых n членов геометрической прогрессии, т. е. числа $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$, то произведение каждой пары членов, равноотстоящих от крайних членов этой совокупности, равно произведению крайних членов, т. е. при $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливо равенство

$$b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n.$$

д) Сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии выражается формулой

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad \text{если} \quad q \neq 1.$$

4. *Предел последовательности.*

а) Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε такой, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Если a — предел последовательности $\{x_n\}$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

б) Свойства сходящихся последовательностей.

1°. Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ таковы, что для всех $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, а $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

2°. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ (при условии, что $b \neq 0$).

в) Примеры сходящихся последовательностей.

1°. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbf{N}.$

2°. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

3°. Если $x_n \geqslant 0$ при всех $n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$.

4°. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, где $e \approx 2,718281828$.

5. *Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.*

а) Геометрическая прогрессия, знаменатель которой удовлетворяет условию $|q| < 1$, называется *бесконечно убывающей*.

б) *Суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{b_n\}$ называется предел S последовательности $\{S_n\}$, где S_n — сумма первых n членов этой прогрессии. Эта сумма выражается формулой

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Примеры с решениями

Пример 1. Найти сумму шести первых членов арифметической прогрессии, если сумма ее первого и пятого членов равна 26, а произведение второго и четвертого членов равно 160.

Решение. По условиям задачи

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 26, \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d) = 160. \end{cases}$$

Исключая из этой системы a_1, где $a_1 = 13 - 2d$, получаем

$$(13 - d)(13 + d) = 160, \qquad d^2 = 9, \quad d = \pm 3.$$

Если $d = 3$, то $a_1 = 7$, а если $d = -3$, то $a_1 = 19$.

Искомую сумму S_6 можно вычислить по формуле

$$S_6 = 3(2a_1 + 5d).$$

Ответ. 87; 69.

Пример 2. Найти отношение суммы первых $2n$ членов арифметической прогрессии к сумме следующих $2n$ ее членов, если сумма первых $3n$ членов равна сумме следующих n членов, а разность d прогрессии не равна нулю.

Решение. По условию $S_{3n} = S_{4n} - S_{3n}$, откуда $2S_{3n} = S_{4n}$. Преобразуем это равенство, используя формулу $S_k = [2a_1 + (k-1)d]\frac{k}{2}$. Получим

$$3n[2a_1 + (3n-1)d] = 2n[2a_1 + (4n-1)d]$$

или

$$2a_1 + (n-1)d = 0.$$

Искомое отношение можно записать так:

$$\frac{S_{2n}}{S_{4n} - S_{2n}} = \frac{[2a_1 + (2n-1)d]\,n}{[2a_1 + (4n-1)d]\,2n - [2a_1 + (2n-1)d]\,n} =$$
$$= \frac{2a_1 + (n-1)d + nd}{2a_1 + (n-1)d + 5nd} = \frac{nd}{5nd} = \frac{1}{5}.$$

Ответ. $\frac{1}{5}$.

Пример 3. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия, все члены и разность d которой отличны от нуля. Доказать, что

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right). \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть S_n — левая часть равенства (1). Так как $a_{k+1} - a_k = d$ при любом k, то

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{a_{k+1} - a_k}{d a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right). \tag{2}$$

Полагая в (2) k равным $1, 2, \ldots, n$ и складывая получаемые равенства, находим

$$S_n = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right). \tag{3}$$

В сумме (3) взаимно уничтожаются все слагаемые, кроме первого и последнего, откуда следует равенство (1).

Пример 4. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если сумма ее первого и третьего членов равна 35, а сумма первых пяти членов в 49 раз больше суммы их обратных величин.

Решение. По условиям задачи

$$b_1 + b_1 q^2 = 35, \tag{1}$$

$$b_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = 49\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1 q} + \frac{1}{b_1 q^2} + \frac{1}{b_1 q^3} + \frac{1}{b_1 q^4}\right). \tag{2}$$

Так как $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \neq 0$ (иначе задача теряет смысл), то равенство (2), в котором правая часть равна $\frac{49}{b_1 q^4}(1 + q + q^2 + q^3 + q^4)$, можно записать в виде

$$b_1^2 q^4 = 49. \tag{3}$$

Из (3) следует, что либо $b_1 q^2 = 7$, либо $b_1 q^2 = -7$. Если $b_1 q^2 = 7$, то из (1) находим $b_1 = 28$, $q^2 = \frac{1}{4}$, откуда $q = \pm\frac{1}{2}$. Если $b_1 q^2 = -7$, то $b_1 = 42$, $q^2 = -\frac{1}{6}$. В этом случае теряет смысл второе условие задачи.

Ответ. $b_1 = 28$, $q = \pm\frac{1}{2}$.

Пример 5. Пусть S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии. Доказать, что

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть b_k — k-й член, q — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда

$$S_{m+k} = S_m + b_1 q^m + b_1 q^{m+1} + \ldots + b_1 q^{m+k-1},$$

откуда

$$S_{m+k} - S_m = q^m(b_1 + b_1 q + \ldots + b_1 q^{k-1}),$$

или

$$S_{m+k} - S_m = q^m S_k. \qquad (2)$$

Полагая в (2) сначала $m = 2n$, $k = n$, а затем $m = n$, $k = n$, получаем

$$S_{3n} - S_{2n} = q^{2n} \cdot S_n, \qquad S_{2n} - S_n = q^n \cdot S_n. \qquad (3)$$

Из равенств (3) следует равенство (1).

Пример 6. Найти числа x, y, z, t, если они являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа $x + 5$, $y + 2$, $z + 1$, $t + 4$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Решение. Пусть a_1 — первый член, d — разность арифметической прогрессии. Тогда $x = a_1$, $y = a_1 + d$, $z = a_1 + 2d$, $t = a_1 + 3d$. По свойству геометрической прогрессии $(y + 2)^2 = (x + 5)(z + 1)$, $(z + 1)^2 = (y + 2)(t + 4)$, т. е.

$$\begin{cases} (a_1 + d + 2)^2 = (a_1 + 5)(a_1 + 2d + 1), \\ (a_1 + 2d + 1)^2 = (a_1 + d + 2)(a_1 + 3d + 4). \end{cases} \qquad (1)$$

Систему (1) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{cases} d^2 - 6d - 2a_1 = 1, & (2) \\ d^2 - 6d - 4a_1 = 7. & (3) \end{cases}$$

Вычитая из (2) уравнение (3), находим $a_1 = -3$. Подставляя $a_1 = -3$ в уравнение (2), получаем $d^2 - 6d + 5 = 0$, откуда $d_1 = 5$, $d_2 = 1$. Если $d = 5$, то $x = -3$, $y = 2$, $z = 7$, $t = 12$, а если $d = 1$, то $x = -3$, $y = -2$, $z = -1$, $t = 0$. Значение $d = 1$ следует отбросить, так как числа $x + 5 = 2$, $y + 2 = 0$, $z + 1 = 0$, $t + 4 = 4$ не образуют геометрическую прогрессию.

Ответ. $x = -3$, $y = 2$, $z = 7$, $t = 12$.

Пример 7. Найти числа x, y, z и t, если они обладают следующими свойствами:

числа x, y и z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию;

числа y, z и t образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию;

$$x + t = 14, \qquad (1)$$

$$y + z = 12. \qquad (2)$$

Решение. По свойствам прогрессий

$$y^2 = xz, \qquad (3)$$

$$2z = y + t. \qquad (4)$$

Будем решать систему (1)–(4) методом исключения неизвестных. Из (1) и (4) следует, что

$$x = 14 + y - 2z, \tag{5}$$

а из (2) находим

$$z = 12 - y, \tag{6}$$

откуда получаем

$$x = 3y - 10. \tag{7}$$

Подставляя выражения для x и z из (6) и (7) в уравнение (3), приходим к уравнению

$$y^2 = (3y - 10)(12 - y).$$

Это уравнение можно записать в виде $2y^2 - 23y + 60 = 0$, откуда $y_1 = \frac{15}{2}$, $y_2 = 4$. Соответствующие значения z, x и t найдем из уравнений (6), (7) и (1).

Ответ. $\left(\frac{25}{2}; \frac{15}{2}; \frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $(2; 4; 8; 12)$.

Пример 8. Найти первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма этой прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192.

Решение. Пусть b_1 — первый член, q — знаменатель, S — сумма прогрессии, S_1 — сумма кубов ее членов. Тогда

$$S = \frac{b_1}{1 - q},$$

$$S_1 = \frac{b_1^3}{1 - q^3},$$

откуда

$$\frac{S^3}{S_1} = \frac{1 - q^3}{(1 - q)^3} = \frac{4^3}{192} = \frac{1}{3},$$

$3(1 + q + q^2) = 1 - 2q + q^2$, так как $q \neq 1$. Полученное уравнение, записанное в виде $2q^2 + 5q + 2 = 0$, имеет корни $q_1 = -2$, $q_2 = -\frac{1}{2}$. Первый корень следует отбросить, так как $|q| < 1$. Следовательно, $q = -\frac{1}{2}$, $b_1 = 4(1 - q) = 6$.

Ответ. $b_1 = 6$, $q = -\frac{1}{2}$.

Пример 9. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее второй член, удвоенное произведение первого члена на четвертый и третий член являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью, равной $\frac{1}{3}$.

Решение. Пусть b_1 — первый член, q — знаменатель, S — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Тогда

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \tag{1}$$

По условию,

$$\begin{cases} 2b_1 \cdot b_1 q^3 - b_1 q = \dfrac{1}{3}, & (2) \\ b_1 q^2 - 2b_1^3 q^3 = \dfrac{1}{3}. & (3) \end{cases}$$

Складывая уравнения (2) и (3), получаем $b_1(q^2 - q) = \frac{2}{3}$, откуда

$$b_1 = \frac{2}{3q(q-1)}. \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) для b_1 в уравнение (2), получаем уравнение $\dfrac{8q^3}{9q^2(q-1)^2} - \dfrac{2q}{3q(q-1)} = \dfrac{1}{3}$, которое можно преобразовать к виду $3q^2 - 8q - 3 = 0$, откуда $q_1 = -3$, $q_2 = -\frac{1}{3}$. Так как $|q| < 1$, то $q = -\frac{1}{3}$ и из (4) находим $b_1 = \frac{3}{2}$, а из (1) следует, что $S = \frac{9}{8}$.

Ответ. $\frac{9}{8}$.

Пример 10. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \dfrac{3n^3 + 2n^2 - 4}{4n^3 + 3n - 5}$;

2) $x_n = \dfrac{3 \cdot 4^n + 7 \cdot 3^n}{5 \cdot 4^n + 2 \cdot 3^n}$;

3) $x_n = \sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 - 5n + 7}$.

Решение. 1) Разделив числитель и знаменатель дроби на n^3, получим $x_n = \dfrac{3 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^3}}{4 + \frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^3}}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, то числитель имеет предел, равный 3, а предел знаменателя равен 4. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{4}$ в силу свойств пределов.

2) Разделив числитель и знаменатель дроби на 4^n, получим $x_n = \dfrac{3+7\left(\frac{3}{4}\right)^n}{5+2\left(\frac{3}{4}\right)^n}$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{5}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

3) Используя формулу $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, запишем x_n в следующем виде $x_n = \dfrac{8n-6}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-5n+7}}$. Разделив числитель и знаменатель на n, получим $x_n = \dfrac{8-\frac{6}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\alpha_n} = 1$, и поэтому предел знаменателя равен 2, а $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{8}{2} = 4$.

Ответ. 1) $\dfrac{3}{4}$; 2) $\dfrac{3}{5}$; 3) 4.

Задачи

1. Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 8, а сумма третьего и седьмого членов равна 14. Найти первый член и разность этой прогрессии.

2. Найти сумму первых 11 членов арифметической прогрессии, если сумма третьего и девятого ее членов равна 10.

3. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

4. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна 10,5, а разность первого и четвертого членов равна 31,5.

5. Найти четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, если сумма крайних ее членов равна 112, а сумма средних членов равна 48.

6. Все члены геометрической прогрессии положительны, сумма первых трех ее членов равна 14, а сумма их обратных величин равна $\dfrac{7}{8}$. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

7. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой отношение суммы первых 23 членов к сумме последних 23 членов равно $\dfrac{2}{5}$, а отношение суммы всех членов без первых семи к сумме всех членов без последних семи равно $\dfrac{10}{7}$.

8. Найти число членов геометрической прогрессии, у которой отношение суммы последних 14 членов к сумме первых 14 членов равно 9, а отношение суммы всех членов без первых семи к сумме всех членов без последних семи равно 3.

9. Сумма первых n членов арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, равна половине суммы следующих n членов этой прогрессии. Найти отношение суммы первых $3n$ членов прогрессии к сумме ее первых n членов.

10. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, S_n — сумма n первых членов этой прогрессии. Доказать, что:

1) если $S_m = S_n$, то $S_{m+n} = 0$;

2) если $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$, то $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$;

3) $S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n$;

4) $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

11. Найти четыре числа, первые три из которых составляют арифметическую прогрессию, а последние три — геометрическую, если сумма крайних чисел равна 11, а сумма средних чисел равна 10.

12. Три числа, сумма которых равна 78, составляют геометрическую прогрессию и являются также первым, третьим и девятым членами арифметической прогрессии. Найти эти числа.

13. Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

14. Три различных числа x, y, z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа $x+y$, $y+z$, $z+x$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найти знаменатель геометрической прогрессии.

15. Найти первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если второй ее член равен 6, а сумма этой прогрессии в 8 раз меньше суммы квадратов ее членов.

16. Все члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии положительны. Сумма первых трех членов равна 39, а сумма обратных величин этих членов равна $\dfrac{13}{27}$. Найти сумму прогрессии.

17. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой равна $\dfrac{16}{3}$, содержит член, равный $\dfrac{1}{6}$. Отношение суммы всех членов прогрессии, стоящих до него, к сумме всех членов, стоящих после него, равна 30. Определить порядковый номер этого члена прогрессии.

18. Найти первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой отношение суммы кубов всех членов к сумме квадратов всех членов равно 3, а отношение суммы всех членов к сумме квадратов всех членов равно $\dfrac{3}{7}$.

19. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма квадратов первых n членов равна сумме первых $2n$ членов, а сумма кубов первых n членов в три раза меньше суммы первых $3n$ членов.

20. Третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, произведение первого и четвертого членов и второй член являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью, равной $\dfrac{1}{8}$. Найти сумму геометрической прогрессии.

21. Доказать, что если положительные числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

22. Доказать, что если положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

23. Доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ не могут быть членами арифметической прогрессии.

24. Найти сумму

$$S_n(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n.$$

25. Найти сумму

$$6+66+666+\ldots+666\ldots6.$$

26. Доказать, что если $b_1, b_2, \ldots, b_n$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, то

$$(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{n-1}^2)(b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2)=(b_1b_2+b_2b_3+\ldots+b_{n-1}b_n)^2.$$

27. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — последовательные члены арифметической прогрессии, а $b_1, b_2 \ldots, b_n$ — последовательные члены геометрической прогрессии, то

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\frac{a_1b_1-a_{n+1}b_{n+1}}{1-q}+d\,\frac{b_2-b_{n+1}q}{(1-q)^2},$$

где d — разность арифметической прогрессии, q — знаменатель геометрической прогрессии, $q \neq 1$.

28. Последовательность $\{x_n\}$ при $n>2$ определяется рекуррентной формулой $x_{n+1}=2x_n-x_{n-1}+1$, где x_1, x_2 — заданные числа. Выразить x_n через x_1, x_2 и n.

29. Последовательность $\{x_n\}$ при $n>2$ определяется рекуррентной формулой $x_n=(\alpha+\beta)x_{n-1}-\alpha\beta x_{n-2}$, где x_1, x_2, α, β — заданные числа, причем $\alpha\neq\beta$. Выразить x_n через x_1, x_2, α, β.

30. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n=\dfrac{(n+2)^2}{n^2+3n+4}$; 2) $x_n=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}$;

3) $x_n=\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$; 4) $x_n=\dfrac{1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$;

5) $x_n=\dfrac{5\cdot7^n+2\cdot5^n}{4\cdot7^n+3\cdot5^n}$; 6) $x_n=\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-2n^2+3}$.

Ответы

1. $a_1=-1,\ d=2$. **2.** 55. **3.** $a_1=5,\ d=4$ или $a_1=13,\ d=-4$.
4. $b_1=3{,}5;\ q=-2$. **5.** 4; 12; 36; 108. **6.** $b_1=2,\ q=2$ или $b_1=8,\ q=\frac{1}{2}$.
7. 40. **8.** 28. **9.** 6. **11.** (2; 4; 6; 9), $\left(\frac{35}{4};\frac{25}{4};\frac{15}{4};\frac{9}{4}\right)$.

12. (6; 18; 54), (26; 26; 26). **13.** −2. **14.** −2. **15.** $b_1 = 3,\ q = \frac{1}{2}$.
16. 40,5. **17.** 5.
18. $b_1 = \frac{7}{2},\ q = \frac{1}{2}$. **19.** $\frac{1}{3}$. **20.** 2.
24. $S_n(x) = \dfrac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n-2}}{(1-x)^2}$ при $x \neq 1$, $S_n(1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
25. $\frac{2}{3}\left(\dfrac{10^{n+1}-10}{9} - n\right)$. **28.** $x_n = (n-1)x_2 - (n-2)x_1 + \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$.
29. $x_n = \dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}x_2 - \alpha\beta\dfrac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}x_1$.
30. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{5}{4}$; 6) $\frac{5}{3}$.

§ 4. Основные формулы тригонометрии. Арксинус, арккосинус и арктангенс числа

1. Основные формулы тригонометрии

Справочные сведения

1. ***Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла.***

Синус угла α (обозначается $\sin\alpha$) — ордината точки P_α, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α (рис. 4.1).

Косинус угла α (обозначается $\cos\alpha$) — абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α (рис. 4.1).

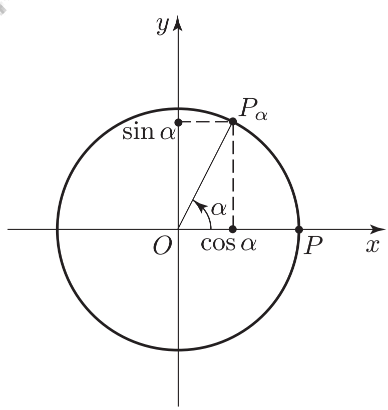

Рис. 4.1

Тангенс угла α (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$) — отношение синуса угла α к его косинусу, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Котангенс угла α (обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$) — отношение косинуса угла α к его синусу, т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

2. ***Основное тригонометрическое тождество***:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1}$$

3. ***Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом***:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

4. ***Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса*** (см. рис. 4.2):

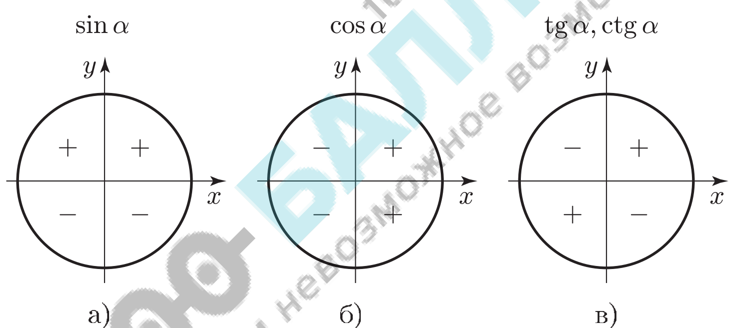

Рис. 4.2

5. ***Четность, нечетность и периодичность тригонометрических функций.***

Косинус — четная функция, а синус, тангенс и котангенс — нечетные функции аргумента α:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Синус и косинус — периодические с периодом 2π функции, а тангенс и котангенс — периодические с периодом π функции:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha, \qquad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Число 2π является наименьшим положительным периодом синуса и косинуса, а число π — наименьшим положительным периодом тангенса и котангенса.

Для любого целого n справедливы равенства

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha, \qquad \cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

6. ***Формулы сложения***:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{2}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \tag{3}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{4}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \tag{5}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{6}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{7}$$

7. ***Формулы двойного и тройного аргумента***:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{8}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{9}$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \tag{10}$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \tag{11}$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \tag{12}$$

8. ***Формулы понижения степени***:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}, \tag{13}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}. \tag{14}$$

9. ***Формулы приведения.***

Наиболее употребительными являются следующие формулы:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha,$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Любую из формул приведения можно получить, пользуясь следующими правилами:

а) если аргумент приводимой функции равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, а косинус — на синус; если же аргумент приводимой функции равен $\pi \pm \alpha$, то функция не меняет своего названия;

б) перед приведенной функцией ставится такой же знак, какой имеет приводимая функция, если считать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

10. ***Формулы суммы и разности синусов***:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{15}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{16}$$

11. ***Формулы суммы и разности косинусов***:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{17}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{18}$$

12. ***Формулы суммы и разности тангенсов***:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \tag{19}$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \tag{20}$$

13. ***Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму*** (***разность***):

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}, \tag{21}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}, \tag{22}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \tag{23}$$

14. ***Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного аргумента***:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{24}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{25}$$

Примеры с решениями

Пример 1. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Решение. Пользуясь формулой $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, находим $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$, откуда $|\cos\alpha| = \frac{4}{5}$. Так как $\cos\alpha < 0$ при $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, то $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Из равенства $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$ следует, что $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

Ответ. $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Пример 2. Найти $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ и $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Решение. 1) Так как $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$, то $\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{8}$. Пользуясь формулой для суммы кубов, получаем $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)\left(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\right) = \frac{11}{16}$.

2) Используя тождество

$1 = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 = \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$, находим $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - 2\,\frac{9}{64} = \frac{23}{32}$.

Ответ. 1) $\frac{11}{16}$; 2) $\frac{23}{32}$.

Пример 3. Вычислить без таблиц: 1) $\cos\frac{\pi}{12}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$; 3) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. 1) Так как $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

2) Пользуясь формулой для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$, получаем

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}.$$

3) По формуле тангенса разности получаем

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha < 0$ и поэтому

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9^2}{41^2}} = -\frac{\sqrt{41^2-9^2}}{41} = -\frac{\sqrt{50\cdot 32}}{41} = -\frac{40}{41}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-40+9}{-9-40} = \frac{31}{49}$.

Ответ. 1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; 2) $2+\sqrt{3}$; 3) $\frac{31}{49}$.

Пример 4. Выразить через $\cos 4\alpha$: а) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$; б) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$; в) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha$.

Решение. а) Используя тождество (1), а также формулы (8) и (14), получаем

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$
$$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = 1-\frac{1}{4}(1-\cos 4\alpha) = \frac{1}{4}(3+\cos 4\alpha).$$

б) Применяя формулу суммы кубов и равенство п. а), имеем

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = \left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right) =$$
$$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha = \frac{1}{8}(5+3\cos 4\alpha).$$

в) Аналогично находим

$$\sin^8\alpha+\cos^8\alpha = (\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)^2 + 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha =$$
$$= (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2 + \frac{1}{8}\sin^4 2\alpha = \cos^2 2\alpha + \frac{1}{32}(1-\cos 4\alpha)^2 =$$
$$= \frac{1+\cos 4\alpha}{2} + \frac{1}{32}(\cos^2 4\alpha - 2\cos 4\alpha + 1) =$$
$$= \frac{1}{32}(\cos^2 4\alpha + 14\cos 4\alpha + 17).$$

Ответ. 1) $\frac{1}{4}(3+\cos 4\alpha)$; 2) $\frac{1}{8}(5+3\cos 4\alpha)$;

3) $\frac{1}{32}(\cos^2 4\alpha+14\cos 4\alpha+17)$.

Пример 5. Доказать тождество

$$\cos 3\alpha\cos^3\alpha + \sin 3\alpha\sin^3\alpha = \cos^3 2\alpha.$$

Доказательство. Из равенств (11) и (12) следует, что

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4},$$
$$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}.$$

Применяя эти равенства и формулу для косинуса суммы, получаем

$$\cos 3\alpha \cos^3\alpha + \sin 3\alpha \sin^3\alpha =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\cos 3\alpha(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha) + \sin 3\alpha(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}(\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha) + \frac{3}{4}(\cos 3\alpha\cos\alpha + \sin 3\alpha\sin\alpha) =$$
$$= \frac{\cos 6\alpha + 3\cos 2\alpha}{4} = \cos^3 2\alpha.$$

Пример 6. Преобразовать в произведение тригонометрических функций сумму:

1) $S_1 = \cos 2\alpha - \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha$;
2) $S_2 = \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha + \sin 10\alpha$.

Решение. Воспользуемся формулами (15)–(18).

1) Так как

$$\cos 2\alpha - \cos 4\alpha = 2\sin 3\alpha\sin\alpha,$$
$$\cos 5\alpha - \cos 3\alpha = -2\sin 4\alpha\sin\alpha,$$

то $S_1 = 2\sin\alpha(\sin 3\alpha - \sin 4\alpha) = -4\sin\alpha\cos\frac{7}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$.

2) Так как

$$\sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 2\sin 5\alpha\cos\alpha,$$
$$\sin 8\alpha + \sin 10\alpha = 2\sin 9\alpha\cos\alpha,$$

то $S_2 = 2\cos\alpha(\sin 5\alpha + \sin 9\alpha) = 4\cos\alpha\sin 7\alpha\cos 2\alpha$.

Пример 7. Преобразовать в произведение сумму

$$S = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta).$$

Решение. Используя равенство $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ и формулу суммы косинусов, получаем

$$S = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} - \sin^2(\alpha+\beta) =$$
$$= \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + 1 - \sin^2(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) =$$
$$= 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta).$$

Пример 8. Доказать тождество

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Доказательство. Пусть S — левая часть тождества. Преобразуем S, пользуясь формулами (15)–(18). Имеем

$$S = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) =$$
$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Пример 9. Доказать тождества

$$\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right),$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

Доказательство. 1) Преобразуем правую часть A первого равенства, пользуясь формулами (23) и (21). Так как

$$2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \cos 2\alpha - \cos\frac{2\pi}{3} = \cos 2\alpha + \frac{1}{2},$$

то

$$A = 2\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha = \sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha = \sin 3\alpha.$$

2) Аналогично преобразуется правая часть B второго равенства. Так как

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + \cos 2\alpha = -\frac{1}{2} + \cos 2\alpha,$$

то $B = -\cos\alpha + 2\cos\alpha\cos 2\alpha = -\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos\alpha = \cos 3\alpha$.

Замечание. Тождества примера 9 можно доказать, используя формулы (11) и (12). Из доказанных тождеств следует, что

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

Пример 10. Доказать, что сумма

$$S = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$$

не зависит ни от α, ни от β.

Доказательство. Так как $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\beta = \frac{1+\cos 2\beta}{2}$, $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$, то

$$S = 1 + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) -$$
$$- [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta) = 1.$$

Пример 11. Выразить $\sin 5\alpha$ через $\sin\alpha$ и с помощью полученной формулы вычислить без таблиц $\sin\frac{\pi}{5}$.

Решение. Используя формулу для синуса суммы и равенства (8), (9), (11), (12), получаем

$$\begin{aligned}\sin 5\alpha &= \sin 3\alpha\cos 2\alpha + \cos 3\alpha \sin 2\alpha = \\ &= (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)(1 - 2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha(4\cos^2\alpha - 3) = \\ &= 3\sin\alpha - 10\sin^3\alpha + 8\sin^5\alpha + 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)(1-4\sin^2\alpha) = \\ &= 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha.$$

Полагая в этой формуле $\alpha = \frac{\pi}{5}$ и обозначая $t = \sin\frac{\pi}{5}$, получаем уравнение

$$16t^5 - 20t^3 + 5t = 0,$$

имеющее два положительных корня $t_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt5}{8}}$ и $t_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{8}}$. Так как $\frac{5+\sqrt5}{8} > \frac12$, то $t_1 > \frac{\sqrt2}{2}$ и поэтому $\sin\frac{\pi}{5} \neq t_1$. Следовательно $\sin\frac{\pi}{5} = t_2$, т. е. $\sin\frac{\pi}{5} = \frac12\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$.

Пример 12. Вычислить без таблиц $\sin 18^\circ$.

Решение. Так как $90^\circ = 2\cdot 18^\circ + 3\cdot 18^\circ$, то $\sin(2\cdot 18^\circ) = \cos(3\cdot 18^\circ)$. Отсюда, применяя формулы (8) и (12), получаем

$$2\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ,$$

откуда $2\sin 18^\circ = 4(1-\sin^2 18^\circ) - 3$. Полагая $\sin 18^\circ = t$, получаем уравнение $4t^2 + 2t - 1 = 0$, откуда $t = \frac{-1\pm\sqrt5}{4}$. Так как $\sin 18^\circ > 0$, то $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt5 - 1}{4}$.

Пример 13. Доказать, что если $\cos x\cos y\cos z \neq 0$, то справедливо равенство

$$\cos(x+y+z) = \cos x\cos y\cos z(1 - \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z\operatorname{tg} x).$$

Доказательство. Применяя формулы косинуса и синуса суммы (формулы сложения), получаем равенство

$$\begin{aligned}\cos(x+y+z) &= \cos(x+y)\cos z - \sin(x+y)\cos z = \\ &= \cos x\cos y\cos z - \cos z\sin x\sin y - \\ &\quad - \cos y\sin x\sin z - \cos x\sin y\sin z.\end{aligned}$$

Для завершения доказательства следует правую часть этого равенства умножить и разделить на $\cos x\cos y\cos z$.

Пример 14. Вычислить без таблиц произведение

$$P = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}.$$

Решение. Заметим, что аргументы $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$ увеличиваются последовательно вдвое. Поэтому, умножив и разделив P на $8\sin\frac{\pi}{9}$ и применив 3 раза формулу синуса двойного аргумента, получим

$$P\cdot 8\sin\frac{\pi}{9} = 2\sin\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{9}\cdot 4\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9} =$$
$$= 2\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot 2\cos\frac{4\pi}{9} =$$
$$= 2\sin\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9} = \sin\frac{8\pi}{9}.$$

Так как $\sin\frac{8\pi}{9} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) = \sin\frac{\pi}{9}$, то $P\cdot 8\sin\frac{\pi}{9} = \sin\frac{\pi}{9}$, откуда $P = \frac{1}{8}$.

Пример 15. Вычислить без таблиц суммы: 1) $S_1 = \cos 36^\circ + \cos 108^\circ$; 2) $S_2 = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$.

Решение. 1) Применяя формулу суммы косинусов, получаем $S_1 = 2\cos 36^\circ\cdot\cos 72^\circ$, откуда

$$S_1\cdot 2\sin 36^\circ = 2\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ\cdot 2\cos 72^\circ =$$
$$= 2\sin 72^\circ\cdot\cos 72^\circ = \sin 144^\circ = \sin 36^\circ.$$

Следовательно, $S_1 = \frac{1}{2}$.

2) Нетрудно убедиться в том, что применение формулы суммы косинусов не позволяет вычислить S_2. Преобразуем сумму S_2 в произведение. Рассмотрим равенство

$$S_2\cdot 2\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

и преобразуем правую часть этого равенства. Получим

$$S_2\cdot 2\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7},$$

откуда

$$S_2 = -\frac{1}{2}.$$

Пример 16. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $A = a\sin\alpha + b\cos\alpha$, если по крайней мере одно из чисел a, b не равно нулю, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Решение. Так как $a^2+b^2>0$, то умножив и разделив данное выражение на $\sqrt{a^2+b^2}$, запишем его в виде

$$A=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

Рассмотрим точку $M(a,b)$. Эта точка лежит на окружности радиуса $R=\sqrt{a^2+b^2}$ с центром в начале координат. Поэтому существует угол φ такой, что

$$\cos\varphi=\frac{a}{R}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi=\frac{b}{R}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда

$$A=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi).$$

Отсюда следует, что наибольшее значение выражения $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ равно $\sqrt{a^2+b^2}$, а наименьшее значение равно $-\sqrt{a^2+b^2}$.

Замечание. При решении этой задачи получено равенство

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi).$$

Метод, примененный при преобразовании выражения $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ к виду $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, называют *методом вспомогательного угла*.

Пример 17. Доказать тождество

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Доказательство. Пусть S_n — левая часть равенства. Умножим S_n на $2\sin\frac{x}{2}$ и воспользуемся формулой $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$. Получим

$$\begin{aligned}S_n\cdot 2\sin\frac{x}{2}&=2\sin\frac{x}{2}\sin x+2\sin\frac{x}{2}\sin 2x+\ldots+2\sin\frac{x}{2}\sin nx=\\&=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\ldots+\\&\quad+\cos\left(n-\frac{3}{2}\right)x-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\\&\quad+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x.\end{aligned}$$

В этой сумме взаимно уничтожаются все слагаемые, кроме первого и последнего. Поэтому

$$S_n\cdot 2\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}.$$

Если $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$, то из последнего равенства находим

$$S_n = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Задачи

1. Вычислить $\sin 2\alpha$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

2. Вычислить $\dfrac{4-5\sin\alpha}{2+3\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

3. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\beta = -\dfrac{5}{13}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$.

4. Вычислить без таблиц:

1) $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{5\pi}{12}$; 2) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{16}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{8}\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{16}$;

3) $\cos\dfrac{\pi}{8}$; 4) $\sin\dfrac{5\pi}{12}$; 5) $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{12}$.

5. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$;

2) $\dfrac{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$;

3) $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha$, если $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{3}$;

4) $\sin^5\alpha-\cos^5\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$;

5) $\sin 5\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

6) $\sin 3\alpha+\cos 3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Доказать тождество:

1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta) = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\sin^4\alpha = \dfrac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3)$;

3) $\cos^4\alpha = \dfrac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3)$;

4) $\sin^5\alpha = \dfrac{1}{16}(\sin 5\alpha - 5\sin 3\alpha + 10\sin\alpha)$;

5) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

6) $\sin^2\alpha + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right) = \dfrac{1}{4}$;

7) $\cos^3\alpha\sin 3\alpha + \sin^3\alpha\cos 3\alpha = \dfrac{3}{4}\sin 4\alpha$.

7. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;
2) $\dfrac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{4} + \alpha\right)$;

3) $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$;
4) $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

5) $\dfrac{\sin 4\alpha - \cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha$;
6) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{1 + \cos\alpha - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$;

7) $\dfrac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$;

8) $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha$;

9) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$;

10) $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg} 2\alpha + 4\operatorname{tg} 4\alpha + 8\operatorname{ctg} 8\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$.

8. Доказать тождество:

1) $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 12\alpha + \cos 14\alpha = 4\cos\alpha\cos 5\alpha\cos 8\alpha$;

2) $\sin\alpha\cos^3\alpha = \dfrac{1}{8}(2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$;

3) $\sin^4\alpha\cos^4\alpha = \dfrac{1}{128}(3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha)$;

4) $\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha = 8\cos 8\alpha\cos^3\alpha$;

5) $\cos\alpha + \sin\alpha + \cos 3\alpha + \sin 3\alpha = 2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$;

6) $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin^2\beta$;

7) $\sin^2\alpha - \cos^2(\alpha-\beta) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha$;

8) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha-\beta)$.

9. Доказать, что при всех допустимых значениях α, β, γ справедливо равенство:

1) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$.

2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha}$.

10. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то справедливо равенство:

1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

2) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

3) $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = -4\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{3\beta}{2}\cos\dfrac{3\gamma}{2}$;

4) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2$.

11. Доказать, что если α, β, γ — внутренние углы треугольника, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$$

12. Доказать, что

1) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{8}$;

2) $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{8}$;

3) $\cos 18^\circ=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$;

4) $\operatorname{tg}^2 36^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 72^\circ=5$;

5) $\cos 36^\circ-\cos 72^\circ=\frac{1}{2}$;

6) $\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

13. Вычислить без таблиц:

1) $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ$;

2) $\operatorname{tg}10^\circ\cdot\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}10^\circ$;

3) $\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ$;

4) $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ$;

5) $\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ$;

6) $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$;

7) $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$;

14. Доказать, что если $\sin\frac{x}{2}\neq 0$, то справедливо равенство

$$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

15. Доказать, что если $\sin\alpha\neq 0$, то справедливо равенство:

1) $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha=\frac{n}{2}+\frac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}$;

2) $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\ldots+\sin^2 n\alpha=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}$.

Ответы

1. $\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$. **2.** $\frac{112}{41}$. **3.** $\frac{33}{65}$.

4. 1) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; 5) $-2-\sqrt{3}$.

5. 1) 2; 2) $\frac{13}{17}$; 3) $\frac{5}{27}$; 4) $\frac{79}{128}$; 5) $\frac{29\sqrt{3}}{64}$; 6) $-\sqrt{2}$.

13. 1) 4; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\sqrt{3}$; 5) 1; 6) 4; 7) $\frac{1}{32}$; 8) $\frac{3}{2}$.

2. Арксинус, арккосинус и арктангенс числа

Справочные сведения

1. ***Арксинус.***

а) *Арксинус числа* $a \in [-1; 1]$ (обозначается $\arcsin a$) — такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad \sin(\arcsin a) = a.$$

б) Если $a \in [0; 1]$, то $0 \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}$, а если $a \in [-1; 0)$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a < 0$. Если $|a| > 1$, то выражение $\arcsin a$ не имеет смысла.

в) Для любого $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\sin(\arcsin a) = a. \tag{1}$$

г) Равенство

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha \tag{2}$$

является верным только при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, хотя выражение $\arcsin(\sin \alpha)$ имеет смысл при всех $\alpha \in \mathbf{R}$.

д) Для любого $a \in [-1; 1]$ верно равенство

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a. \tag{3}$$

2. ***Арккосинус.***

а) *Арккосинус числа* $a \in [-1; 1]$ (обозначается $\arccos a$) — такое число $\alpha \in [0; \pi]$, косинус которого равен a, т. е.

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi, \qquad \cos(\arccos a) = a.$$

б) Если $a \in [0; 1]$, то $0 \leqslant \arccos a \leqslant \frac{\pi}{2}$, а если $a \in [-1; 0)$, то $\frac{\pi}{2} < \arccos a \leqslant \pi$. Если $|a| > 1$, то выражение $\arccos a$ не имеет смысла.

в) Для любого $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\cos(\arccos a) = a. \tag{4}$$

г) Равенство

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha \tag{5}$$

является верным только при $\alpha \in [0; \pi]$, хотя выражение $\arccos(\cos \alpha)$ имеет смысл при всех $\alpha \in \mathbf{R}$.

д) Для любого $a \in [-1; 1]$ верно равенство

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \qquad (6)$$

е) Для любого $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}. \qquad (7)$$

ж) Таблица значений арксинуса и арккосинуса:

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

3. *Арктангенс.*

а) *Арктангенс числа* $a \in \mathbf{R}$ (обозначается $\operatorname{arctg} a$) — это такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a, т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a.$$

б) Для любого $a \in \mathbf{R}$ справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a. \qquad (8)$$

в) Равенство

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha. \qquad (9)$$

является верным только при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

г) Для любого $a \in \mathbf{R}$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a. \qquad (10)$$

д) Таблица значений арктангенса:

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Примеры с решениями

Пример 1. Вычислить:

1) $A = 2\arcsin 1 - 3\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$;

2) $B = \arccos 0 + 3\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 6\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $C = 4\,\mathrm{arctg}\,1 - \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) - 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. 1) Используя таблицу значений арксинуса, получаем

$$A = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 3\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}.$$

2) С помощью таблицы значений арккосинуса находим

$$B = \frac{\pi}{2} + 3\cdot\frac{2\pi}{3} - 6\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}.$$

3) Используя таблицу значений арктангенса, получаем

$$C = 4\cdot\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\cdot\frac{\pi}{6} = \pi.$$

Ответ. 1) $-\dfrac{\pi}{6}$; 2) $\dfrac{3\pi}{2}$; 3) π.

Пример 2. Вычислить $\arcsin(\sin\alpha)$, если

1) $\alpha = \dfrac{8}{7}\pi$; 2) $\alpha = 10$; 3) $\alpha = \pi^2$.

Решение. 1) Число $\dfrac{8}{7}\pi$ не принадлежит отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Поэтому заменим $\sin\dfrac{8}{7}\pi$ синусом числа из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Так как $\sin\dfrac{8}{7}\pi = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{7}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{7} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$, то $\arcsin\left(\sin\dfrac{8\pi}{7}\right) = -\dfrac{\pi}{7}$.

2) Так как $3\pi < 10 < 3\pi + \dfrac{\pi}{2}$, то $0 < 3\pi - 10 < \dfrac{\pi}{2}$ и $\sin(3\pi - 10) = \sin(\pi - 10) = \sin 10$. Следовательно, $\arcsin(\sin 10) = 3\pi - 10$.

3) Так как $3\pi < \pi^2 < 10 < 3\pi + \dfrac{\pi}{2}$, то $-\dfrac{\pi}{2} < 3\pi - \pi^2 < 0$. Используя равенство $\sin(3\pi - \pi^2) = \sin\pi^2$, получаем $\arcsin(\sin\pi^2) = \arcsin\left(\sin(3\pi - \pi^2)\right) = 3\pi - \pi^2$.

Ответ. 1) $-\dfrac{\pi}{7}$; 2) $3\pi - 10$; 3) $3\pi - \pi^2$.

Пример 3. Вычислить $\arccos(\cos\alpha)$, если:

1) $\alpha = \dfrac{9\pi}{8}$; 2) $\alpha = 6$.

Решение. 1) Число $\frac{9\pi}{8}$ не принадлежит отрезку $[0,\pi]$. Поэтому нужно найти на отрезке $[0,\pi]$ такое число, косинус которого равен $\cos\frac{9\pi}{8}$. Так как $\cos(\pi+\beta) = \cos(\pi-\beta)$, то $\cos\frac{9\pi}{8} = \cos\frac{7\pi}{8}$, где $0 \leqslant \frac{7\pi}{8} \leqslant \pi$. Поэтому $\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{8}\right) = \arccos\left(\cos\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{7\pi}{8}$.

2) Так как $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$, то $-2\pi < -6 < -\frac{3\pi}{2}$ и $0 < 2\pi - 6 < \frac{\pi}{2}$, $\cos(2\pi-6) = \cos 6$. Поэтому $\arccos(\cos 6) = \arccos(\cos(2\pi-6)) = 2\pi - 6$.

Ответ. 1) $\frac{7\pi}{8}$; 2) $2\pi - 6$.

Пример 4. Вычислить:

1) $\arccos\left(\sin\frac{8}{7}\pi\right)$; 2) $\arcsin\left(\cos\frac{7}{8}\pi\right)$.

Решение. 1) Так как

$$\sin\frac{8}{7}\pi = \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{7}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{9}{14}\pi$$

и $0 \leqslant \frac{9}{14}\pi \leqslant \pi$, то

$$\arccos\left(\sin\frac{8}{7}\pi\right) = \arccos\left(\cos\frac{9}{14}\pi\right) = \frac{9}{14}\pi.$$

2) Используя равенства

$$\cos\frac{7}{8}\pi = -\cos\frac{\pi}{8} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \sin\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$$

и учитывая, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{3}{8}\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$, получаем $\arcsin\left(\cos\frac{7}{8}\pi\right) = -\frac{3}{8}\pi$. Этот же результат можно получить с помощью формулы (7). Действительно, $\arccos\left(\cos\frac{7}{8}\pi\right) = \frac{7}{8}\pi$ и из равенства (7) следует, что

$$\arcsin\left(\cos\frac{7}{8}\pi\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos\frac{7}{8}\pi\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{7}{8}\pi = -\frac{3}{8}\pi.$$

Ответ. 1) $\frac{9\pi}{14}$; 2) $-\frac{3\pi}{8}$.

Пример 5. Вычислить:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5}{8}\pi\right)$;

2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{5}\right)$.

Решение. 1) Так как $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8} = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ и $-\frac{\pi}{2} < -\frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{3\pi}{8}$.

2) Используя равенства $\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{5}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}$ и учитывая, что $-\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{10}<\frac{\pi}{2}$, получаем

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{5}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}\right)=\frac{3\pi}{10}.$$

Ответ. 1) $-\frac{3\pi}{8}$; 2) $\frac{3\pi}{10}$.

Пример 6. Вычислить:

$$1)\ A=\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{8}{15}-\arccos\frac{15}{17}\right);\qquad 2)\ B=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right).$$

Решение. 1) Пусть $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$, $\beta=\arccos\frac{15}{17}$. Тогда $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\cos\beta=\frac{15}{17}$. Воспользуемся формулой

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Так как $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha>0$, $\sin\beta>0$, то

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{15}\right)^2}}=\frac{15}{17},$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17}.$$

Следовательно, $A=\sin(\alpha-\beta)=\frac{8}{17}\cdot\frac{15}{17}-\frac{15}{17}\cdot\frac{8}{17}=0.$

2) Пусть $\alpha=\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)$, тогда $\cos\alpha=-\frac{4}{7}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Используя формулу $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, получаем

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\frac{4}{7}}{1-\frac{4}{7}}=\frac{11}{3},$$

откуда $B=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{11}{3}}$, так как $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$.

Ответ. 1) 0; 2) $\sqrt{\frac{11}{3}}$.

Пример 7. Доказать, что

$$\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}. \qquad (11)$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \arcsin\dfrac{4}{5}$, $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$. Заметим, что $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, откуда $-\dfrac{\pi}{2} < -\alpha < 0$ и $0 < \dfrac{\pi}{2} - \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Далее, так как $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$, то $0 < 2\beta < \dfrac{\pi}{2}$. Итак, углы $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ и β заключены между 0 и $\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому для доказательства равенства $\dfrac{\pi}{2} - \alpha = 2\beta$ достаточно показать, что какая-нибудь тригонометрическая функция (например, тангенс) каждого из этих углов имеет одно и то же значение.

Докажем, что

$$\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \tag{12}$$

Так как $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{3}$, то $\operatorname{tg} 2\beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \dfrac{3}{4}$.

Пользуясь формулой $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$ и учитывая, что $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, находим $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{4}$. Итак, равенство (12) является верным и, в силу сделанных выше замечаний, справедливо равенство (11).

Пример 8. Доказать, что

$$\arcsin\frac{5}{13} = 2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \arcsin\dfrac{5}{13}$, $\beta = \arccos\dfrac{5}{\sqrt{26}}$. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\cos\beta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Докажем, что $0 < 2\beta < \dfrac{\pi}{2}$. Действительно, так как $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{5}{\sqrt{26}} < 1$, то $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$ и $0 < 2\beta < \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому для доказательства равенства (13), т. е. равенства $\alpha = 2\beta$, достаточно убедиться в том, что

$$\sin\alpha = \sin 2\beta.$$

Так как $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, а $\cos\beta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$, то $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$ и поэтому

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{5}{13} = \sin\alpha.$$

Равенство (13) доказано.

Задачи

1. Вычислить:

1) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)$; 2) $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 5) $\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$; 6) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

2. Доказать, что если $|a| \leqslant 1$, то справедливо равенство:

1) $\sin(2\arcsin a) = 2a\sqrt{1-a^2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin a\right) = \dfrac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}$.

3. Доказать, что при любом $a \in R$ справедливо равенство

$\cos(\operatorname{arctg} a) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

4. Доказать, что если $-1 < a < 1$, то

$\operatorname{ctg}(\arccos a) = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.

5. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}} - \arccos\frac{5}{13}\right)$; 2) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{8}{15} - \arcsin\frac{8}{17}\right)$;

3) $\cos\left(\arccos\frac{5}{13} - \arcsin\frac{3}{5}\right)$; 4) $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5} + 2\operatorname{arctg} 2\right)$.

6. Вычислить:

1) $\arcsin(\sin 5)$; 2) $\arccos(\cos 4)$; 3) $\arcsin(\sin 11)$;

4) $\arccos\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right)$; 5) $\arccos(\sin 12)$; 6) $\arcsin(\cos\sqrt[3]{25})$.

7. Доказать, что если $0 \leqslant a \leqslant 1$, то:

1) $2\arcsin a = \arccos(1-2a^2)$; 2) $\arccos a = \arcsin\sqrt{1-a^2}$.

8. Доказать равенство:

1) $\arcsin\frac{5}{13} + 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3} = \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \frac{3\pi}{4}$;

3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} - \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{130}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$;

5) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg} 3$; 6) $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{24}\right)$.

9. Доказать равенство:

1) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$;

2) $\arccos\frac{36}{85} + \arcsin\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{15}{17}$;

3) $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{12}{13} = \pi - \arccos\frac{16}{65}$;

4) $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{12}{13} + \arcsin\frac{56}{65} = \pi$.

Ответы

1. 1) $-\frac{2\pi}{5}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{8}$; 4) $2\sqrt{2}$; 5) $\frac{12}{13}$; 6) $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

5. 1) $-\frac{119}{120}$; 2) 0; 3) $\frac{56}{65}$; 4) $\frac{4}{5}$.

6. 1) $5-2\pi$; 2) $2\pi-4$; 3) $11-4\pi$; 4) $\frac{7}{10}\pi$; 5) $\frac{9\pi}{2}-12$; 6) $\frac{\pi}{2}-\sqrt[3]{25}$.

§ 5. Числовые неравенства

Справочные сведения

1. ***Определение и основные свойства числовых неравенств.***

а) Говорят, что число a *больше* числа b и пишут $a > b$, если разность $a-b$ положительна. Если же разность $a-b$ отрицательна, то говорят, что a *меньше* b и пишут $a < b$.

Запись $a \geqslant b$ по определению означает, что либо $a > b$, либо $a = b$. Аналогично, неравенство $a \leqslant b$ означает, что либо $a < b$, либо $a = b$.

Неравенства $a > b$ и $a < b$ называют *строгими* в отличие от неравенств $a \geqslant b$ и $a \leqslant b$, которые называют *нестрогими*.

б) Основные свойства неравенств.

1°. *Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.*

2°. *Если $a > b$, то $a + c > b + c$ при любом c.*

3°. *Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$, а если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$, т. е. при умножении обеих частей неравенства на одно и то же положительное число знак неравенства сохраняется, а при умножении обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.*

4°. *Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$, т. е. при сложении неравенств одинакового знака получается неравенство того же знака.*

5°. *Если a, b, c, d — положительные числа, причем $a > b$, $c > d$, то $ac > bd$, т.е. при умножении неравенств одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, получается неравенство того же знака.*

Эти свойства, сформулированные для неравенств со знаком «>» («больше»), остаются в силе и для неравенств, записанных со знаком «<» («меньше»). Кроме того, указанные свойства справедливы и для нестрогих неравенств.

Наряду с неравенствами вида $a > b$, $a \geqslant b$, употребляются так называемые *двойные неравенства*, т.е. неравенства вида

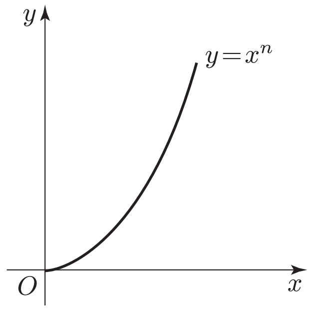

Рис. 5.1

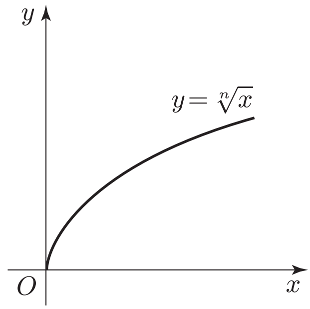

Рис. 5.2

$a < c < b$, $a \leqslant c < b$, $a < c \leqslant b$, $a \leqslant c \leqslant b$. По определению, запись $a < c < b$ означает, что справедливы (верны) оба неравенства $a < c$ и $c < b$. Аналогичный смысл имеют и другие двойные неравенства.

К перечисленным свойствам добавим еще некоторые свойства, связанные со степенной функцией.

6°. *Если* $a > b \geqslant 0$, *то* $a^n > b^n$ *при любом* $n \in \mathbf{N}$.

Это свойство выражает тот факт, что функция $y = x^n$, где $x \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$, является возрастающей (рис. 5.1).

7°. *Если* $a > b \geqslant 0$, *то* $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Это свойство иллюстрирует тот факт, что функция $y = \sqrt[n]{x}$, обратная к функции $y = x^n$, $x \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$, является возрастающей (рис. 5.2).

Объединяя свойства 6° и 7°, получаем следующее утверждение:

если a, b — *положительные числа и* $a > b$, *то* $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ *при любом* $n \in \mathbf{N}$ *и, обратно, из неравенства* $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ *следует, что* $a > b$.

В этом случае говорят, что неравенства $a > b$ и $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, где $a > 0$, $b > 0$, *равносильны*, и пишут

$$\{a > b\} \Longleftrightarrow \{\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}\} \quad \text{при} \quad a > 0, \quad b > 0.$$

8°. *Если* $a > b$, *то* $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ *при любом* $n \in \mathbf{N}$ *и* $\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$.

Отсюда следует, что

$$\{a > b\} \Longleftrightarrow \left\{\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}\right\}.$$

Это свойство выражает тот факт, что функция $y = x^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, и обратная к ней функция $y = \sqrt[2n+1]{x}$ являются возрастающими на всей числовой прямой (рис. 5.3 и 5.4).

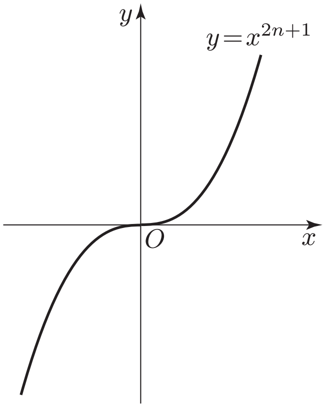

Рис. 5.3

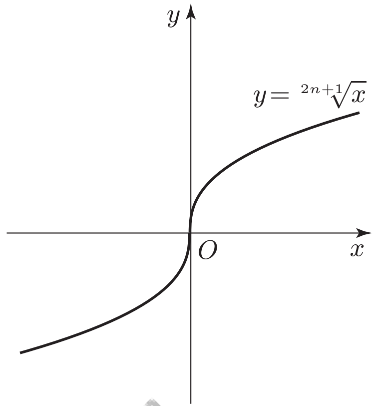

Рис. 5.4

В частности

$$\{a > b\} \Longleftrightarrow \{a^3 > b^3\} \Longleftrightarrow \{\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}\}.$$

Отметим еще, что неравенство $a^2 > b^2$ справедливо тогда и только тогда, когда $|a| > |b|$, т. е.

$$\{a^2 > b^2\} \Longleftrightarrow \{|a| > |b|\}.$$

Отбрасывание знака модуля в правом неравенстве было бы грубой ошибкой.

2. *Некоторые важные неравенства.*

1°. *Для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство*

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab, \tag{1}$$

причем знак равенства в (1) *имеет место тогда и только тогда, когда* $a = b$.

Это утверждение следует из очевидного неравенства $(a - b)^2 \geqslant 0$. Аналогично доказывается, что неравенство

$$a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$$

также является верным при любых $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$.

2°. *Если a и b — числа одного знака* ($ab > 0$), *то*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2. \tag{2}$$

Для доказательства неравенства (2) достаточно умножить обе части неравенства (1) на положительное число $\frac{1}{ab}$.

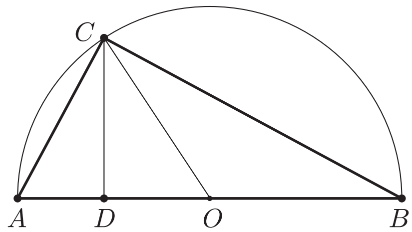

Рис. 5.5

3°. *Если* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, *то*

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \tag{3}$$

т.е. среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического. Знак равенства в неравенстве (3) *имеет место в том и только в том случае, когда* $a = b$.

Неравенство (3) следует из очевидного неравенства $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

Приведем геометрическое доказательство неравенства (3). Для этого воспользуемся тем, что перпендикуляр CD (рис. 5.5), опущенный из вершины прямого угла C треугольника ABC на гипотенузу AB, есть среднее геометрическое проекций его катетов на гипотенузу.

Пусть O — центр окружности, построенный на AB как на диаметре, $AD = a$, $DB = b$; тогда $CD = \sqrt{ab}$, $OC = \dfrac{a+b}{2}$. Так как $OC \geqslant CD$, то $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, причем равенство в этом соотношении имеет место только при $a = b$.

4°. *Неравенство*

$$|a| < b, \qquad b > 0 \tag{4}$$

равносильно двойному неравенству

$$-b < a < b. \tag{5}$$

Дадим геометрическое доказательство этого утверждения, пользуясь тем, что $|a|$ — расстояние от начала отсчета O на числовой прямой до точки A, изображающей число a (рис. 5.6).

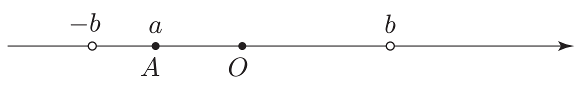

Рис. 5.6

Неравенство (4) означает, что расстояние от точки A до точки O меньше b, и поэтому число a принадлежит интервалу $(-b, b)$, т. е. справедливо неравенство (5). Обратно, из неравенства (5) следует неравенство (4).

5°. *Для любых действительных чисел a и b справедливы неравенства*

$$||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{6}$$

Чтобы доказать правое неравенство (6), запишем очевидные неравенства

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \qquad -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Складывая их, получаем неравенство

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|,$$

которое в силу утверждения 4° равносильно неравенству

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{7}$$

Докажем левое неравенство (6). Используя неравенство (7), получаем

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|,$$

откуда

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|. \tag{8}$$

Аналогично

$$|b| = |(b - a) + a| \leqslant |b - a| + |a| \leqslant |a - b| + |a|,$$

откуда находим

$$|a - b| \geqslant |b| - |a|. \tag{9}$$

Из неравенств (8) и (9) имеем

$$-|a - b| \leqslant ||a| - |b|| \leqslant |a - b|,$$

а это неравенство в силу утверждения 4° равносильно следующему:

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|.$$

Заменив здесь b на $-b$ и учитывая, что $|-b| = |b|$, получаем

$$||a| - |b|| \leqslant |a + b|,$$

т. е. левое неравенство (6) доказано.

Примеры с решениями

Пример 1. Доказать, что для любых действительных чисел a, b, c справедливы неравенства:

$$4a^2-4ab+\frac{10}{9}b^2 \geqslant 0; \tag{1}$$

$$a^4+b^4 \geqslant a^3b+ab^3; \tag{2}$$

$$(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2). \tag{3}$$

Доказательство. 1) Обозначим левую часть неравенства (1) через A и преобразуем ее, используя метод выделения полного квадрата:

$$A=4\left(a^2-ab+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{b^2}{9}=4\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{9}.$$

Так как $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2 \geqslant 0$, $b^2 \geqslant 0$, то $A \geqslant 0$, т. е. справедливо неравенство (1).

2) Разность B между левой и правой частями неравенства (2) можно преобразовать так:

$$B=a^3(a-b)-b^3(a-b)=(a-b)(a^3-b^3)=$$
$$=(a-b)^2(a^2+ab+b^2).$$

Так как $(a-b)^2 \geqslant 0$, $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqslant 0$, то $B \geqslant 0$.

Неравенство (2) доказано.

3) Используя формулу квадрата суммы трех чисел, преобразуем разность C между правой и левой частями неравенства (3):

$$C=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac)=$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2. \tag{4}$$

Отсюда следует, что $C \geqslant 0$, т. е. справедливо неравенство (3).

Заметим, что из равенства (4) следует неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac, \tag{5}$$

справедливое для любых a, b, c.

Пример 2. Доказать, что если a, b, c — положительные числа, то

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geqslant a+b+c. \tag{6}$$

Доказательство. Используя неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right) \geqslant \sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}}=c.$$

Аналогично

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right) \geqslant a,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right) \geqslant b.$$

Складывая эти неравенства, получаем неравенство (6).

Пример 3. Пусть $a = \sqrt{1994} + \sqrt{1997}$, $b = \sqrt{1995} + \sqrt{1996}$. Доказать, что $b > a$.

Доказательство. Рассмотрим более общую задачу: сравним числа $A = \sqrt{n} + \sqrt{n+3}$ и $B = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$, где $n \in \mathbf{N}$. Запишем разность этих чисел в виде

$$A - B = (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

а затем умножим и разделим каждую разность радикалов на их сумму и воспользуемся формулой $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$. Тогда получим

$$A - B = \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Так как знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби, то $A < B$. В частности, $a < b$.

Пример 4. Доказать, что при любом $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим через S_n левую часть неравенства (7) и воспользуемся неравенствами

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$S_n < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n},$$

т. е. справедливо неравенство (7).

Пример 5. Доказать, что при любом $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \tag{8}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n},$$

$$B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots \frac{2n}{2n+1}.$$

Отсюда следует, что

$$AB = \frac{1}{2n+1}\,.$$

Воспользуемся неравенствами

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}\,, \qquad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}\,, \qquad \frac{5}{6} < \frac{6}{7}\,, \ \ldots, \ \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}\,. \tag{9}$$

Перемножив неравенства (9), получим $A < B$, откуда следует, что $A^2 < AB = \dfrac{1}{2n+1}$ и поэтому $A < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, т. е. справедливо неравенство (8).

Пример 6. Доказать, что если действительные числа a, b, c удовлетворяют условиям

$$a + b \geqslant c, \qquad c \geqslant 0, \tag{10}$$

то справедливы неравенства

$$a^4 + b^4 \geqslant \frac{c^4}{8}\,, \tag{11}$$

$$a^8 + b^8 \geqslant \frac{c^8}{128}\,. \tag{12}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством

$$a^2 + b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{2}\,, \tag{13}$$

которое равносильно неравенству $(a-b)^2 \geqslant 0$. Но из (10) следует, что

$$(a+b)^2 \geqslant c^2, \tag{14}$$

а из (13) и (14) получаем неравенство

$$a^2 + b^2 \geqslant \frac{c^2}{2}\,. \tag{15}$$

Заменяя в неравенстве (13) a и b на a^2 и b^2 и используя неравенство (15), имеем

$$a^4 + b^4 \geqslant \frac{(a^2+b^2)^2}{2} \geqslant \frac{c^4}{8}\,,$$

т. е. справедливо неравенство (11).

Аналогично, заменив в неравенстве (13) a и b на a^4 и b^4 и применив неравенство (11), находим

$$a^8 + b^8 \geqslant \frac{(a^4+b^4)^2}{2} \geqslant \frac{c^8}{128}\,,$$

т. е. неравенство (12) доказано.

Пример 7. Доказать, что если $a > 1$, то

$$\log_a(a+1) > \log_{a+1}(a+2). \tag{16}$$

Доказательство. Запишем следующую цепочку равенств и неравенств:

$$\log_a(a+1) - 1 = \log_a \frac{a+1}{a} =$$
$$= \log_a \left(1 + \frac{1}{a}\right) > \log_{a+1} \left(1 + \frac{1}{a}\right) >$$
$$> \log_{a+1} \left(1 + \frac{1}{a+1}\right) = \log_{a+1}(a+2) - 1,$$

откуда следует, что верно неравенство (16). Здесь мы воспользовались тем, что если $a > 1$, $b > 1$, $c > a$, то $\log_a b > \log_c b$ (функция $\log_x b = \dfrac{1}{\log_b x}$, где $b > 1$, $x > 1$, убывает), а также тем, что функция $\log_a x$, где $a > 1$, возрастает.

Пример 8. Доказать, что для любых действительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n, удовлетворяющих условиям

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1, \qquad b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1, \tag{17}$$

справедливо неравенство

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leqslant 1. \tag{18}$$

Доказательство. Так как для любых действительных чисел a и b выполняется неравенство $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$, а абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых, то

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leqslant |a_1b_1| + |a_2b_2| + \ldots + |a_nb_n| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_1^2+b_1^2}{2} + \frac{a_2^2+b_2^2}{2} + \ldots + \frac{a_n^2+b_n^2}{2} =$$
$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{2} = 1$$

в силу условий (17), т. е. неравенство (18) доказано.

Пример 9. Доказать, что если положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют условию

$$x_1x_2\ldots x_n = 1, \tag{19}$$

то справедливо неравенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n. \tag{20}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Утверждение верно при $n = 1$: если $x_1 = 1$, то $x_1 \geqslant 1$. Пусть неравенство верно при всех m таких, что $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Докажем, что оно верно и при $m = n$.

Если все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны единице, то неравенство (20) является верным. Если хотя бы одно из этих чисел больше единицы, то из равенства (19) следует, что хотя бы одно из оставшихся чисел меньше единицы. Пусть для определенности $x_n > 1$, $x_{n-1} < 1$; тогда $(x_n - 1)(1 - x_{n-1}) > 0$, откуда следует, что

$$x_n + x_{n-1} - x_{n-1}x_n > 1. \tag{21}$$

Согласно предположению индукции для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, y_{n-1}$ таких, что

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-2} y_{n-1} = 1, \tag{22}$$

выполняется неравенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + y_{n-1} \geqslant n - 1. \tag{23}$$

Полагая

$$y_{n-1} = x_{n-1}x_n, \tag{24}$$

в силу (23) получаем

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1}x_n \geqslant n - 1. \tag{25}$$

Складывая неравенства (21) и (25), приходим к неравенству (20), справедливому для любых неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые (см. (22) и (24)) удовлетворяют условию (19).

Замечание. При решении неравенств часто возникает потребность сравнивать числа, записанные с помощью радикалов, логарифмов и т. д. Предполагается, что ответ на вопрос «Какое из двух заданных чисел больше другого?» следует получить без использования микрокалькулятора и других вычислительных средств, а на основании свойств неравенств и свойств элементарных функций.

Пример 10. Сравнить числа a и b, если:

а) $a = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}$, $\quad b = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}}$;

б) $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\quad b = \sqrt{10}$;

в) $a = \log_5 11$, $\quad b = \log_2 3$;

г) $a = \log_{15} 60$, $\quad b = \log_{60} 480$;

д) $a = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\quad b = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. а) Обозначим через c разность чисел a и b. Тогда

$$c = a - b = \frac{\sqrt[4]{27} - \sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5}\,\sqrt[4]{3}}.$$

Сравним числа $\alpha = \sqrt[4]{27}$ и $\beta = \sqrt[3]{10}$. Так как $\alpha^{12} = 27^3 > 700 \cdot 27 = 18900$, $\beta^{12} = 10^4 = 10000$, то $\alpha^{12} > \beta^{12}$, откуда $\alpha > \beta$ и поэтому $a > b$.

б) Так как $a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $b^2 = 10$; $\alpha = a^2 - 5 = 2\sqrt{6}$, $\beta = b^2 - 5 = 5$; $\alpha^2 = 24$, $\beta^2 = 25$, а неравенство $\alpha^2 < \beta^2$ равносильно каждому из неравенств $\alpha < \beta$, $a^2 < b^2$, то $a < b$, т. е. $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$.

в) Заметив, что $2a = \log_5 121 < \log_5 125 = 3$, $2b = \log_2 9 > \log_2 8 = 3$, получим $2a < 2b$, откуда $a < b$, т. е. $\log_5 11 < \log_2 3$.

г) Переходя к логарифмам по основанию 2, получаем

$$a = \frac{\log_2 60}{\log_2 15} = \frac{\log_2 15 + 2}{\log_2 15} = 1 + \frac{2}{\log_2 15},$$

$$b = \frac{\log_2 60 + 3}{\log_2 60} = 1 + \frac{3}{\log_2 15 + 2},$$

откуда $a - b = \dfrac{4 - \log_2 15}{\log_2 15(2 + \log_2 15)}$. Так как $\log_2 15 < \log_2 16 = 4$, то $a > b$, т. е. $\log_{15} 60 > \log_{60} 480$.

д) Так как $\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$, а $\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{2}$, то $\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{3}} < \arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 11. Упростив выражение

$$a = (2\sqrt{6} - 5)^2 - 10\sqrt{49 - 20\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{5}}{2},$$

сравнить полученное число с нулем.

Решение. Так как $49 - 20\sqrt{6} = (5 - 2\sqrt{6})^2$, где $5 > 2\sqrt{6}$, то $\sqrt{49 - 20\sqrt{6}} = |5 - 2\sqrt{6}| = 5 - 2\sqrt{6}$ и поэтому

$$a = (5 - 2\sqrt{6})^2 - 10(5 - 2\sqrt{6}) + \frac{\sqrt{5}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2} - (5 - 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6}) = \frac{\sqrt{5}}{2} - (25 - 24) = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 > 0.$$

Итак, $a = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - 1 > 0$.

Задачи

1. Доказать, что для любых действительных чисел a и b справедливы неравенства:

а) $(a + b)^2 \geqslant 4ab$; б) $16a^2 + 25b^2 \geqslant 40ab$;
в) $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$; г) $a^2 + b^2 \geqslant 2(a + b - 1)$.

2. Доказать неравенства

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a + b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

связывающие среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратичное положительных чисел a и b.

3. Доказать, что для любых действительных чисел a и b верны неравенства:

а) $2a^2 - 4ab + 3b^2 \geqslant 0$;
б) $a^2 + b^2 + 1 \geqslant ab + a + b$;
в) $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geqslant (a^3 + b^3)^2$.

4. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, то:

а) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$; б) $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$;

в) $a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{ab} + \frac{2}{\sqrt{ab}}$; г) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}$.

5. Доказать, что для любых действительных чисел a, b, c справедливы неравенства:

а) $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$; б) $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c)$.

6. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b, c верны неравенства:

а) $a^5 + b^5 \geqslant a^2b^3 + a^3b^2$; б) $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geqslant 6abc$;
в) $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) \geqslant 2(a+b)(b+c)(c+a)$.

7. Доказать, что для любых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ справедливо неравенство Коши—Буняковского

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

8. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

9. Доказать неравенства:

а) $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$; б) $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} + \frac{1}{\log_{10} \pi} > 4$.

10. Доказать, что при любом $a \in \mathbf{R}$ справедливы неравенства:

а) $|a+1| + |a-3| \geqslant 4$; б) $|a-1| + |a-2| + |a-3| \geqslant 2$.

11. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c верны неравенства:

а) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$;

б) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$; в) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$.

12. Доказать, что если $|b| < \frac{|a|}{2}$, то $\frac{1}{|a-b|} < \frac{2}{|a|}$.

13. Доказать, что если $a^2 + b^2 = 1$, то $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$.

14. Пусть b_1, b_2, ..., b_n — положительные числа, a_1, a_2, ..., a_n — произвольные действительные числа, M и m — соответственно наибольшая и наименьшая из дробей $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$. Доказать, что

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqslant M.$$

15. Доказать, что для любого натурального $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

16. Доказать, что для любого натурального $n \geqslant 2$ справедливы неравенства

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

17. Доказать, что при любом $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$\lg(n+1) < \frac{\lg 1 + \lg 2 + \cdots + \lg n}{n}.$$

18. Доказать, что если $a + b = 1$, то

$$a^3 + b^3 \geqslant \frac{1}{4}, \qquad a^6 + b^6 \geqslant \frac{1}{32}.$$

19. Доказать, что для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ справедливы неравенства:

а) $\frac{1}{2} \leqslant \sin^4\alpha + \cos^4\alpha \leqslant 1$; б) $\frac{1}{4} \leqslant \sin^6\alpha + \cos^6\alpha \leqslant 1$;

в) $\frac{1}{8} \leqslant \sin^8\alpha + \cos^8\alpha \leqslant 1$.

20. Сравнить числа a и b, если:

а) $a = \sqrt[3]{3}$, $b = \sqrt[5]{5}$; б) $a = \sqrt[3]{2}$, $b = \sqrt[7]{5}$;

в) $a = \sqrt{8} + \sqrt{15}$, $b = 7$; г) $a = \sqrt{3} + \sqrt{6}$, $b = \sqrt{17}$;

д) $a = 3^{\sqrt{3}}$, $b = (\sqrt{3})^3$; е) $a = 2^{\pi}$, $b = \pi^2$;

ж) $a = 2^{300}$, $b = 3^{200}$; з) $a = \sqrt{13} - \sqrt{12}$, $b = \sqrt{12} - \sqrt{11}$.

21. Доказать, что $\log_{12} 13 > \log_{14} 15$.

22. Сравнить числа a и b, если:

а) $a = 7\log_5 2$, $b = 3$; б) $a = \frac{1}{2}\log_4 65$, $b = \log_5 11$;

в) $a = \log_7 18$, $b = \log_2 3$; г) $a = \log_{1/2}\frac{1}{3}$, $b = \log_{1/3}\frac{1}{2}$;

д) $a = \log_9 36$, $b = \log_{36} 288$; е) $a = \log_{17} 68$, $b = \log_{68} 544$.

23. Упростив выражение

$$a = (4 - 3\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{34 - 24\sqrt{2}} - \sqrt{5},$$

сравнить полученное число с нулем.

24. Сравнить числа a и b, если:

а) $a = \sin 1{,}5$, $b = \sin 1{,}7$; б) $a = \cos 2{,}9$, $b = \cos 3{,}2$;

в) $a = \arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}$, $b = \arccos\sqrt{\frac{3}{5}}$; г) $a = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}$, $b = \frac{2}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}$;

д) $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{10}$; е) $5 - \sqrt{15}$, $b = \sqrt{17} - 3$.

Ответы и указания

4. а) Воспользоваться неравенством $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.
б) Неравенство равносильно следующему: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \geqslant 0$.
в) Сложить неравенства $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ и $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{ab}}$.
г) Исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$(a+b)ab \leqslant a^3+b^3, \qquad (a+b)(a-b)^2 \geqslant 0.$$

5. а) Неравенство равносильно следующему: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$ (см. пример 1).
б) Свести задачу к предыдущей, положив $ab=a_1$, $bc=b_1$, $ac=c_1$.

6. а) Записать разность между левой и правой частями исходного неравенства в виде $(a^2-b^2)(a^3-b^3)$ и рассмотреть два возможных случая: $a \leqslant b$, $a > b$.
б) Неравенство равносильно следующему: $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geqslant 0$.
в) Воспользоваться тождеством $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

7. Если $A_n = x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \neq 0$, $B_n = y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2 \neq 0$, то положить $a_k = \dfrac{x_k}{\sqrt{A_n}}$, $b_k = \dfrac{y_k}{\sqrt{B_n}}$ $(k=1,2,\dots,n)$ и воспользоваться результатом примера 8.

8. Положить $A_n = \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$, $x_k = \dfrac{a_k}{A_n}$ $(k=1,2,\dots,n)$ и воспользоваться результатом примера 9.

9. Перейти к логарифмам по основанию π и учесть, что $\pi^2<10$.

10. Воспользоваться тем, что $|x_1-x_2|$ — расстояние между точками x_1 и x_2 числовой прямой, и рассмотреть различные случаи расположения точки a на числовой прямой.

11. а) Положить $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{b}}$, $z=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ и использовать неравенство $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$ (см. пример 1).
б) *Первый способ*. Применить неравенство $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$ (см. § 2, замечание к примеру 4).
Второй способ. Неравенство равносильно следующему:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geqslant 6.$$

Третий способ. Положить $a_1=\sqrt{a}$, $a_2=\sqrt{b}$, $a_3=\sqrt{c}$, $b_1=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $b_2=\dfrac{1}{\sqrt{b}}$, $b_3=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ и использовать неравенство Коши—Буняковского (см. задачу 7).
в) Применить неравенство $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.

13. Воспользоваться тем, что $a+b=\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$.

14. Сложить неравенства $mb_k \leqslant a_k \leqslant Mb_k$, $k=1,2,3,\dots,n$.

15. Записать правую часть неравенства в виде $\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

16. При доказательстве правого неравенства воспользоваться результатом предыдущей задачи, а при доказательстве левого неравенства использовать неравенства $\dfrac{1}{\sqrt{k}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $(k=1,2,3,\dots,n-1)$.

17. Применить метод индукции.

18. Воспользоваться следующими соотношениями:

а) $a^3 + b^3 = 3\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$; б) $a^6 + b^6 \geqslant \frac{(a^3+b^3)^2}{2}$.

19. Воспользоваться неравенствами $\sin^{2k}\alpha \leqslant \sin^2\alpha$, $\cos^{2k}\alpha \leqslant \cos^2\alpha$ $(k \in \mathbf{N})$, результатами предыдущей задачи и примера 6.

20. а) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{5}$; б) $\sqrt[3]{2} > \sqrt[7]{5}$; в) $\sqrt{8} + \sqrt{15} < 7$; г) $\sqrt{3} + \sqrt{6} > \sqrt{17}$; д) $3^{\sqrt{3}} > (\sqrt{3})^3$; е) $2^{\pi} < \pi^2$; ж) $2^{300} < 3^{200}$; з) $\sqrt{13} - \sqrt{12} < \sqrt{12} - \sqrt{11}$.

21. Использовать результат примера 7.

22. а) $7\log_5 2 > 3$; б) $\frac{1}{2}\log_4 65 > \log_5 11$; в) $\log_7 18 < \log_2 3$; г) $\log_{1/2}\frac{1}{3} > \log_{1/3}\frac{1}{2}$; д) $\log_9 36 > \log_{36} 288$; е) $\log_{17} 68 < \log_{68} 544$.

23. $a = 2 - \sqrt{5} < 0$.

24. а) $\sin 1,5 > \sin 1,7$; б) $\cos 2,9 > \cos 3,2$; в) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}} > \arccos\sqrt{\frac{3}{5}}$; г) $a > b$; д) $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$; е) $5 - \sqrt{15} > \sqrt{17} - 3$.

Сначала прибавить к каждому из чисел $5-\sqrt{15}$ и $\sqrt{17}-3$ по 3 и возвести полученные положительные числа в квадрат. Затем к каждому из новых чисел прибавить $16\sqrt{15} - 17$.

Глава 2

Алгебраические уравнения

§ 6. Уравнение и его корни. Преобразование уравнений

Справочные сведения

1. ***Основные понятия, относящиеся к уравнениям.***

Рассмотрим равенство

$$f(x) = g(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Когда говорят, что равенство (1) есть уравнение, то это означает, что равенство (1) рассматривается как неопределенное высказывание, при одних значениях x истинное, при других — ложное, и ставится задача — найти значения x, при подстановке которых это неопределенное высказывание становится истинным. Такие числа называют корнями уравнения (1).

Рассмотрим подробно основные понятия, связанные с уравнениями.

Число a называется *корнем* (или *решением*) уравнения (1), если обе части уравнения (1) определены при $x = a$ и равенство $f(a) = g(a)$ является верным. Следовательно, каждый корень уравнения (1) принадлежит множеству, которое является пересечением (общей частью) областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$ и называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) уравнения (1).

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Если в условиях задачи не указано, на каком множестве нужно решить уравнение, то решение следует искать на ОДЗ этого уравнения.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве E и равенство (1) верно для каждого $x \in E$. Тогда говорят, что это равенство является *тождеством* на множестве E. Например, равенства

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1), \qquad (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \qquad \log_3 3^x = x, \qquad \sqrt{x^2} = |x|$$

являются тождествами на множестве действительных чисел $\mathbf{R}$, а равенство

$$\sqrt{x^2} = x$$

представляет собой тождество лишь на множестве неотрицательных чисел.

В процессе решения часто приходится преобразовывать уравнение, заменяя его более простыми (с точки зрения нахождения корней).

Какие-либо общие рекомендации по поводу преобразования уравнений дать невозможно. Однако есть правило, которое не следует забывать:

нельзя выполнять преобразования, которые приводят к потере корней.

Назовем преобразование уравнения (1) *допустимым*, если при этом преобразовании не происходит потери корней, т. е. получается уравнение

$$f_1(x) = g_1(x), \tag{2}$$

которое либо имеет те же корни, что и уравнение (1), либо, кроме всех корней уравнения (1), имеет *посторонний* для уравнения (1) *корень*. В связи с этим используют следующие понятия.

Уравнение (2) называется *следствием* уравнения (1), если каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2).

Уравнения (1) и (2) называются *равносильными* (*эквивалентными*), если каждое из этих уравнений является следствием другого. Иными словами, уравнения (1) и (2) равносильны, если каждый корень уравнения (1) есть корень уравнения (2) и обратно, каждый корень уравнения (2) есть корень уравнения (1). Уравнения, не имеющие корней, считаются равносильными.

Например, уравнение $x^2 = x + 2$ равносильно уравнению $x^2 - x - 2 = 0$, а уравнение $x^2 = 1$ — следствие уравнения $\sqrt{x} = 1$.

Если уравнения (1) и (2) равносильны, то пишут

$$\{f(x) = g(x)\} \Longleftrightarrow \{f_1(x) = g_1(x)\} \qquad \text{или} \qquad (1) \Longleftrightarrow (2),$$

а если уравнение (2) является следствием уравнения (1), то пишут

$$\{f(x) = g(x)\} \Longrightarrow \{f_1(x) = g_1(x)\} \qquad \text{или} \qquad (1) \Longrightarrow (2).$$

Отметим, что если исходное уравнение с помощью допустимых преобразований заменено другим, причем в процессе преобразований хотя бы один раз уравнение заменялось на неравносильное ему следствие, то *проверка* найденных *корней* с помощью подстановки в исходное уравнение *является обязательной*.

Если же при каждом преобразовании уравнение заменялось на равносильное, то проверка не нужна (не следует путать проверку с контролем вычислений).

Рассмотрим еще одно понятие, связанное с решением уравнений. Будем говорить, что уравнение (1) *равносильно совокупности уравнений*

$$f_1(x) = g_1(x), \ldots, f_n(x) = g_n(x), \tag{3}$$

если выполнены следующие условия:

1) каждый корень уравнения (1) является корнем по крайней мере одного из уравнений (3);
2) любой корень каждого из уравнений (3) является корнем уравнения (1).

При выполнении указанных условий множество корней уравнения (1) является объединением множества корней уравнений (3).

Например, уравнение

$$(x^2 - 4)(x^2 - 5x + 6) = 0,$$

равносильное совокупности уравнений

$$x^2 - 4 = 0, \qquad x^2 - 5x + 6 = 0,$$

имеет корни $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Если уравнение записано в виде

$$f(x)\varphi(x) = 0, \tag{4}$$

то каждое решение этого уравнения является решением по крайней мере одного из уравнений

$$f(x) = 0, \qquad \varphi(x) = 0. \tag{5}$$

Однако нельзя утверждать, что любой корень каждого из уравнений (5) есть корень уравнения (4).

Например, если $f(x) = x\sqrt{2-x}$, $\varphi(x) = x^2 - 3x$, то $x = 3$ — корень уравнения $\varphi(x) = 0$, но число 3 не является корнем уравнения (4), так как функция $f(x)$ не определена при $x = 3$.

Таким образом, в общем случае нельзя утверждать, что уравнение (4) равносильно совокупности уравнений (5). Чтобы решить уравнение (4), достаточно найти корни уравнений $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$, а затем отбросить те, которые не входят в ОДЗ уравнения (4), т. е. не принадлежат множеству, на котором определены функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. В ОДЗ уравнения (4) это уравнение равносильно совокупности уравнений (5). Справедливо более общее утверждение:

Если функция $f(x)$ определена при всех x таких, что $\varphi(x) = 0$, а функция $\varphi(x)$ определена при всех x таких, что $f(x) = 0$, то уравнение (4) *равносильно совокупности уравнений* (5).

2. *Наиболее важные приемы преобразования уравнений.*

а) *Перенос слагаемых из одной части уравнения в другую*, т. е. переход от уравнения

$$f(x) = \varphi(x) + g(x) \tag{1}$$

к уравнению

$$f(x) - \varphi(x) = g(x). \tag{2}$$

Указанное преобразование приводит к равносильному уравнению, т. е. (1) $\Longleftrightarrow$ (2).

В частности,

$$\{f(x) = g(x)\} \Longleftrightarrow \{f(x) - g(x) = 0\}.$$

Заметим, что здесь речь идет только о переносе членов уравнения из одной части в другую без последующего приведения подобных членов (если таковые имеются).

б) *Приведение подобных членов,* т. е. переход от уравнения

$$f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) = g(x) \tag{3}$$

к уравнению

$$f(x) = g(x). \tag{4}$$

Справедливо следующее легко проверяемое утверждение:

Для любых функций $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ уравнение (4) *является следствием уравнения* (3), *т. е.* (3) $\Longrightarrow$ (4).

Переход от уравнения (3) к уравнению (4) является допустимым преобразованием, при котором потеря корней невозможна, но могут появиться посторонние корни. Все сказанное остается в силе при замене уравнения (3) уравнением

$$f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x).$$

Таким образом, при приведении подобных членов, а также при отбрасывании одинаковых слагаемых в левой и правой частях уравнения получается уравнение, являющееся следствием исходного уравнения.

Например, если в левой и правой частях уравнения

$$x^2 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

вычеркнуть слагаемое $\dfrac{1}{x}$, то получится уравнение

$$x^2 = x,$$

являющееся следствием исходного: второе уравнение имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, а первое — единственный корень $x = 1$.

Отметим еще, что если ОДЗ уравнения (4) содержится в области определения функции $\varphi(x)$, то уравнения (3) и (4) равносильны.

в) *Умножение обеих частей уравнения на одну и ту же функцию*, т. е. переход от уравнения (4) к уравнению

$$f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x). \tag{5}$$

Справедливы следующие утверждения:

1°. *Если ОДЗ уравнения* (4), *т. е. пересечение областей определения функций* $f(x)$ *и* $g(x)$, *содержится в области определения функции* $\varphi(x)$, *то уравнение* (5) *является следствием уравнения* (4).

2°. *Если функция* $\varphi(x)$ *определена и отлична от нуля в ОДЗ уравнения* (4), *то уравнения* (4) *и* (5) *равносильны.*

Заметим, что в общем случае переход от уравнения (5) к уравнению (4) недопустим: этот переход может привести к потере корней.

При решении уравнения вида (5) обычно заменяют его равносильным уравнением

$$[f(x) - g(x)]\,\varphi(x) = 0,$$

затем находят корни уравнений

$$f(x) - g(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 0$$

и, наконец, проверяют, какие из этих корней удовлетворяют уравнению (5).

г) *Возведение обеих частей уравнения в натуральную степень*, т. е. переход от уравнения

$$f(x) = g(x) \tag{6}$$

к уравнению

$$[f(x)]^n = [g(x)]^n, \qquad n \in \mathbf{N}, \quad n \geqslant 2. \tag{7}$$

Справедливы следующие утверждения:

1°. *При любом* $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$ *уравнение* (7) *является следствием уравнения* (6).

2°. *Если* $n = 2k+1$ (n — *нечетное число*), *то уравнения* (6) *и* (7) *равносильны.*

3°. *Если* $n = 2k$ (n — *нечетное число*), *то уравнение* (7) *равносильно уравнению*

$$|f(x)| = |g(x)|, \tag{8}$$

а уравнение (8) *равносильно совокупности уравнений*

$$f(x) = g(x), \qquad f(x) = -g(x). \tag{9}$$

В частности, уравнение

$$[f(x)]^2 = [g(x)]^2 \tag{10}$$

равносильно совокупности уравнений (9). Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают значения одного знака (например, $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$) в ОДЗ уравнения (6), то уравнение (10) равносильно уравнению (6).

Более общим, чем переход к уравнению (7), является переход от уравнения (6) к уравнению

$$\varphi(f(x)) = \varphi(g(x)), \tag{11}$$

где $\varphi(t)$ — некоторая заданная функция.

Заметим, что в общем случае такой переход недопустим. В том случае, когда пересечение множеств значений функций $f(x)$ и $g(x)$ содержится в области определения функции $\varphi(t)$, уравнение (11) является следствием уравнения (6). Если, кроме того, известно, что $\varphi(t)$ — строго возрастающая или строго убывающая функция, то уравнения (6) и (11) равносильны.

Задачи

1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве E. Рассмотрим уравнения

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

и

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{g(x)}. \tag{2}$$

а) Равносильны ли уравнения (1) и (2) на множестве E?
б) Если не равносильны, то при каких дополнительных условиях (1) $\iff$ (2)?
в) Какое из уравнений есть следствие другого?

2. Ответить на те же вопросы, что и в задаче 1, для уравнений:
а) $f(x) = g(x)$ и $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$; б) $f(x) = g(x)$ и $f^3(x) = g^3(x)$;
в) $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = \varphi(x)$ и $\sqrt{f(x)g(x)} = \varphi(x)$, предполагая, что функция $\varphi(x)$ определена на множестве E.

Ответы

1. а) В общем случае уравнения (1) и (2) неравносильны. б) Если хотя бы одна из функций $f(x)$, $g(x)$ отлична от нуля на множестве E, то (1) $\iff$ (2). в) Первое уравнение есть следствие второго, т. е. (2) $\Longrightarrow$ (1).

2. а) В общем случае неравносильны; если хотя бы одна из функций $f(x)$, $g(x)$ принимает неотрицательные значения на множестве E, то уравнения равносильны; первое уравнение — следствие второго. б) Уравнения равносильны. в) В общем случае неравносильны; если функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают неотрицательные значения на множестве E, то уравнения равносильны; второе уравнение — следствие первого.

§ 7. Рациональные уравнения

Справочные сведения

1. *Квадратные уравнения.*

Уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

где a, b, c — заданные действительные числа, $a \neq 0$, x — неизвестное, называют *квадратным*.

Приведем основные утверждения (теоремы), связанные с корнями квадратного уравнения (1).

1°. *Квадратное уравнение* (1):

а) имеет два действительных и различных корня x_1 и x_2, определенных по формулам

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{2}$$

если дискриминант D квадратного уравнения (1) *положителен, т. е. $D = b^2 - 4ac > 0$;*

б) имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{2a}$, если $D = 0$;

в) не имеет действительных корней, если $D < 0$.

2°. ***Теорема Виета.*** *Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения* (1), *то*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \tag{3}$$

Для приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0 \tag{4}$$

формулы Виета (3) принимают вид

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 x_2 = q. \tag{5}$$

3°. *Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения* (1), *то для любого $x \in \mathbf{R}$ справедливо равенство*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{6}$$

При выводе формул (2) используется *метод выделения полного квадрата,* т. е. следующее преобразование квадратного трехчлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \tag{7}$$

Равенство (7) можно записать в виде

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right]. \tag{8}$$

Формулы Виета (3) следуют из равенств (2), а для доказательства тождества (6) достаточно преобразовать его правую часть, используя (3).

Справедливо утверждение, обратное утверждению 1°.

4°. *Если квадратное уравнение* (1) *имеет два действительных и различных корня, то* $D > 0$; *если уравнение* (1) *имеет единственный корень, то* $D = 0$; *если уравнение* (1) *не имеет действительных корней, то* $D < 0$.

Используя термины «необходимость» и «достаточность», можно объединить теоремы 1° и 4° и сформулировать следующее утверждение: *для того чтобы квадратное уравнение* $ax^2 + bx + c = 0$ *имело два действительных различных корня, имело один действительный корень, не имело действительных корней, необходимо и достаточно выполнение соответственно условий* $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$, *где* $D = b^2 - 4ac$.

Замечание. Если a, b, c — действительные числа, $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$, то многочлен второй степени (квадратный трехчлен) $ax^2 + bx + c$ имеет комплексные корни. Например, многочлен $x^2 + 1$ имеет корни $x_1 = i$, $x_2 = -i$, т. е. $i^2 + 1 = 0$ и $(-i)^2 + 1 = 0$. В дальнейшем при решении уравнений и систем уравнений условимся ограничиваться отысканием только действительных решений и утверждение «уравнение не имеет корней» понимать так: «уравнение не имеет действительных корней».

При решении некоторых задач удобно пользоваться утверждением:

5°. ***Обратная теорема Виета***: *если* a, b, c, x_1, x_2 — *такие числа, что справедливы равенства* (3), *то* x_1 *и* x_2 — *корни квадратного уравнения* (1).

Утверждение 4° можно доказать, используя метод доказательства от противного и утверждение 1°, а справедливость теоремы, обратной теореме Виета, следует из равенства (6).

2. *Уравнения, сводящиеся к квадратным.*

Биквадратное уравнение, т. е. уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad (a \neq 0),$$

сводится к квадратному заменой $x^2 = t$.

К квадратному уравнению сводится уравнение вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \qquad (a \neq 0), \tag{9}$$

которое называют *возвратным*.

Заметим, что число $x = 0$ не является корнем уравнения (9), поскольку $a \neq 0$. Следовательно, разделив обе его части на x^2, получим уравнение

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0, \tag{10}$$

равносильное исходному. Сведем уравнение (10) к квадратному, полагая $x + \dfrac{1}{x} = t$. Так как $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$, то получаем квадратное уравнение

$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0.$$

3. ***Корни многочлена.***

Приведем некоторые сведения о корнях многочленов. Пусть задан многочлен n-й степени

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0, \tag{11}$$

где $c_0, c_1, \dots, c_n$ — действительные числа, $c_n \neq 0$.

Число a называют *корнем многочлена* $P(x)$, если $P(a) = 0$.

Разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x - a$, где a — заданное число, означает представить его в виде

$$P(x) = (x - a)Q(x) + r, \tag{12}$$

где $Q(x)$ — многочлен степени $n - 1$, а r — некоторое число (его называют *остатком от деления многочлена* $P(x)$ *на* $x - a$). Если $r = 0$, то говорят, что *многочлен* $P(x)$ *делится без остатка* (*нацело*) на $x - a$.

Теорема Безу. *Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда этот многочлен делится без остатка на $x - a$, т.е. справедливо равенство*

$$P(x) = (x - a)Q(x). \tag{13}$$

Доказательство. Если $x = a$ — корень многочлена $P(x)$, то $P(a) = 0$. С другой стороны, из равенства (12) при $x = a$ получаем $r = P(a)$. Следовательно, $r = P(a) = 0$, т. е. многочлен делится без остатка на $x - a$. Это означает, что справедливо равенство (13).

Обратно, если многочлен $P(x)$ делится без остатка на $x - a$, т. е. справедливо равенство (13), то из этого равенства следует, что $P(a) = 0$, т. е. a — корень многочлена $P(x)$.

Замечание. Для нахождения коэффициентов многочлена $Q(x)$ можно либо использовать алгоритм деления многочлена на многочлен, либо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях в равенстве (12) (или в равенстве (13), если $r = 0$).

Пусть коэффициенты многочлена $P(x)$ являются целыми числами и пусть целое число s является корнем этого многочлена, т. е. $P(s) = c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0 = 0$. Отсюда находим, что $c_0 = -s(c_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + c_1)$. Так как число, стоящее в скобках, является целым, то c_0 делится на s.

Таким образом, *целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем свободного члена этого многочлена.*

4. ***Корни рационального уравнения.***

Рациональным называют уравнение вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \tag{14}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(x) \not\equiv 0$.

Корнями уравнения (14) являются все те и только те корни уравнения $P(x) = 0$, которые удовлетворяют условию $Q(x) \neq 0$. Иначе говоря, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Примеры с решениями

Пример 1. Пусть $p^2 - 4q \geqslant 0$, $q \neq 0$, а x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (4). Выразить через p и q следующие суммы:

1) $S_1 = x_1^2 + x_2^2$; 2) $S_2 = x_1^3 + x_2^3$; 3) $S_3 = \dfrac{x_1^3}{x_2} + \dfrac{x_2^3}{x_1}$.

Решение. 1) Используя тождество

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

и формулы (5), получаем

$$S_1 = p^2 - 2q.$$

2) Применяя формулу для суммы кубов, находим

$$S_2 = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2\right] = -p(p^2 - 3q) = 3pq - p^3.$$

3) Так как $S_3 = \dfrac{x_1^4 + x_2^4}{x_1 x_2}$, где

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = S_1^2 - 2q^2 = p^4 - 4p^2 q + 2q^2,$$

то

$$S_3 = \frac{p^4}{q} - 4p^2 + 2q.$$

Пример 2. Сократить дробь $S = \dfrac{9x^2 - 9x + 2}{6x^2 - x - 2}$.

Решение. Применив формулы (2), найдем корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $9x^2 - 9x + 2 = 0$. Имеем

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{18},$$

откуда $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$. По теореме 3° (формула (6)) получаем

$$9x^2 - 9x + 2 = 9\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Аналогично, решив уравнение $6x^2 - x - 2 = 0$, находим его корни $\dfrac{2}{3}$ и $-\dfrac{1}{2}$; поэтому

$$6x^2 - x - 2 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Итак,

$$S = \frac{9\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{3x - 1}{2x + 1}.$$

Пример 3. Найти все значения r, при которых уравнение

$$rx^2 - 2(r - 2)x + 3(r - 2) = 0$$

имеет один корень.

Решение. Если $r = 0$, то уравнение имеет один корень $x = \dfrac{3}{2}$. Если же $r \neq 0$, то уравнение является квадратным и имеет один корень тогда и только тогда, когда его дискриминант D равен нулю, т. е.

$$D = 4(r - 2)^2 - 12r(r - 2) = 8(2 + r - r^2) = 0,$$

откуда находим $r_1 = -1$, $r_2 = 2$.

Ответ. 0, -1 и 2.

Пример 4. Решить уравнение $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$.

Решение. Полагая $x^2 = t$, получаем уравнение $4t^2 + 3t - 1 = 0$, имеющее корни $t_1 = -1$, $t_2 = \dfrac{1}{4}$. Если $t = -1$, то $x^2 = -1$. Это уравнение не имеет действительных корней. Если $t = \dfrac{1}{4}$, то $x^2 = \dfrac{1}{4}$, откуда $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ. $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на x^2, запишем его в виде

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Полагая $x + \dfrac{1}{x} = t$, получаем уравнение $t^2 - 2 + 2t - 1 = 0$, откуда находим $t_1 = -3$, $t_2 = 1$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $x + \dfrac{1}{x} = -3$, $x + \dfrac{1}{x} = 1$. Первое из них равносильно уравнению $x^2 + 3x + 1 = 0$, имеющему корни $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $x_1 = -\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

Пример 6. Решить уравнение

$$(x - 1)x(x + 1)(x + 2) = 24.$$

Решение. Так как $(x-1)(x+2) = x^2+x-2$, $x(x+1) = x^2+x$, то, полагая $t = x^2 + x$, приходим к уравнению $t(t - 2) = 24$ или $t^2 - 2t - 24 = 0$. Это уравнение имеет корни $t_1 = 6$, $t_2 = -4$.

Если $t = 6$, то $x^2 + x - 6 = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Если $t = -4$, то получаем уравнение $x^2 + x + 4 = 0$, не имеющее действительных корней.

Ответ. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Пример 7. Решить уравнение $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$.

Решение. Целыми корнями многочлена $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ могут быть только делители числа -2, т. е. числа -1, 1, -2, 2. Так как $P(1) = 1$, $P(-1) = -15$, $P(-2) = -44$, $P(2) = 0$, то число 2 — корень многочлена $P(x)$ и по теореме Безу $P(x) = (x - 2)Q(x)$.

Чтобы найти $Q(x)$, можно воспользоваться любым из способов, указанных в замечании. Укажем еще один способ отыскания $Q(x)$, основанный на представлении многочлена $P(x)$ в виде произведения двух множителей, один из которых равен $x - 2$. Так как

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 - 3x^2 + 6x + x - 2 = \\ &= x^2(x - 2) - 3x(x - 2) + x - 2 = (x - 2)(x^2 - 3x + 1), \end{aligned}$$

то $Q(x) = x^2 - 3x + 1$.

Многочлен $Q(x)$ имеет корни $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, являющиеся корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{(x-3)^2} = 0.$$

Решение. Число $x = 1$ является корнем многочлена $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, так как P(1)=0. Разложим многочлен $P(x)$ на множители, для чего выделим множитель $x - 1$. Тогда получим

$$P(x) = x^3 - x^2 - (x^2 - x) - 6(x-1) =$$
$$= (x-1)(x^2 - x - 6) = (x-1)(x+2)(x-3).$$

Следовательно, многочлен $P(x)$ имеет корни 1, -2 и 3, из которых первые два удовлетворяют условию $(x-3)^2 \neq 0$.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Задачи

1. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2 - 2rx - 7r^2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 = 2$. Найти r.

2. Не вычисляя корней уравнения $2x^2 - 7x - 6 = 0$, найти:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^4 x_2 + x_2^4 x_1$.

3. Сократить дробь:

а) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}$; б) $\frac{10x^2 - 11x + 3}{6x^2 + x - 2}$.

4. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, где $q < 0$, имеет корни x_1 и x_2. Составить приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

5. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни x_1 и x_2. Найти p и q, если числа $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$ — корни уравнения $x^2 - p^2 x + pq = 0$.

6. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, а $S_n = x_1^n + x_2^n$. Доказать, что $S_{n+1} + pS_n + qS_{n-1} = 0$.

7. Даны уравнения $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$. Доказать, что по крайней мере одно из них имеет действительные корни, если $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$.

Решить уравнение (8–17):

8. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

9. $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$.

10. $(x^2 - 2x)^2 - 2x^2 + 4x - 3 = 0$.

11. $(x^2 - x - 3)(x^2 - x - 2) = 12$.

12. $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 6$.

13. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$.

14. $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$.

15. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.

16. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} + 1 = 0$.

17. $\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{(x-2)^2} = 0$.

Ответы

1. $r_1 = -\frac{1}{3}$, $r_2 = \frac{1}{3}$. **2.** а) $-\frac{7}{6}$; б) $-\frac{1785}{8}$. **3.** а) $\frac{x+1}{x-3}$; б) $\frac{5x-3}{3x+2}$.

4. $x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q} = 0$. **5.** $p = -2$, $q = -1$; $p = 1$, $q \leqslant \frac{1}{4}$.

8. $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. **9.** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_4 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

10. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. **11.** $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

12. $x_1 = -1$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, $x_3 = 2 + \sqrt{3}$. **13.** $x_1 = -\frac{5+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

14. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. **15.** $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

16. $x_1 = -2 - \sqrt{6}$, $x_2 = -2 + \sqrt{6}$. **17.** $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Указания

6. Умножить равенства $x_1^2 + px_1 + q = 0$ и $x_2^2 + px_2 + q = 0$ на x_1^{n-1} и x_2^{n-1} соответственно и сложить.

7. Предположив, что оба уравнения не имеют действительных корней (т. е. что дискриминанты этих уравнений отрицательны), получить неравенство $(p_1 - p_2)^2 < 0$.

§ 8. Иррациональные уравнения. Уравнения, содержащие знак модуля

Справочные сведения

1. Методы решения иррациональных уравнений, как правило, основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения рациональным уравнением, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. Чаще всего обе части уравнения возводят в одну и ту же степень. При этом получается уравнение, являющееся следствием исходного.

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

1) если показатель радикала — четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательным; при этом значение радикала также является неотрицательным;

2) если показатель радикала — нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом; в этом случае знак радикала совпадает со знаком подкоренного выражения.

Рассмотрим уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x). \tag{1}$$

Если $g(x) < 0$, то уравнение (1) не имеет корней, так как левая часть уравнения (1) не может принимать отрицательные значения ни при каких значениях x.

Если же $g(x) \geqslant 0$, то при возведении обеих частей уравнения (1) в квадрат получим равносильное уравнение. Таким образом, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = [g(x)]^2, & (2) \\ g(x) \geqslant 0. & (3) \end{cases}$$

Замечание. При решении уравнения (1) нет необходимости предварительно находить ОДЗ левой части (1), решая неравенство $f(x) \geqslant 0$, которое может оказаться довольно сложным. Достаточно найти корни уравнения (2) и, не прибегая к непосредственной подстановке этих корней в уравнение (1), выяснить, какие из найденных корней удовлетворяют неравенству (3). Эти корни, и только они, являются корнями уравнения (1).

2. Из определения модуля (абсолютной величины) числа следует, что

1) $|a| = \begin{cases} a & \text{при} \quad a \geqslant 0, \\ -a & \text{при} \quad a < 0; \end{cases}$

2) $\sqrt{a^2} = |a|$;

3) если x_1 и x_2 — произвольные точки числовой оси, то расстояние между ними равно $|x_1 - x_2|$.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^3 - 5x^2 + 4} = x - 2. \quad (4)$$

Решение. Уравнение (4) равносильно системе

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 + 4 = x^2 - 4x + 4, & (5) \\ x \geqslant 2. & (6) \end{cases}$$

Уравнение (5), равносильное каждому из уравнений $x^3 - 6x^2 + 4x = 0$, $x(x^2 - 6x + 4) = 0$, имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 3 - \sqrt{5}$, $x_3 = 3 + \sqrt{5}$, из которых лишь корень x_3 удовлетворяет условию (6).

Ответ. $x = 3 + \sqrt{5}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 2} = 4. \quad (7)$$

Решение. Возведя обе части уравнения (7) в квадрат, получим уравнение

$$2x + 3 + x - 2 + 2\sqrt{2x + 3} \cdot \sqrt{x - 2} = 16, \quad (8)$$

равносильное (7), так как обе части уравнения (7) неотрицательны.

Уравнение (8) равносильно уравнению

$$2\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x-2} = 3(5-x). \tag{9}$$

Возведя в квадрат обе части уравнения (9), получим уравнение

$$4(2x^2-x-6) = 9(x^2-10x+25), \tag{10}$$

равносильное уравнению

$$x^2-86x+249=0, \tag{11}$$

которое имеет корни $x_1 = 3$, $x_2 = 83$.

Заметим, что уравнение (11) является следствием уравнения (7), так как (7) $\Longleftrightarrow$ (8) $\Longleftrightarrow$ (9) $\Longrightarrow$ (10) $\Longleftrightarrow$ (11). Число $x_1 = 3$ — корень уравнения (7), а число $x_2 = 83$ — посторонний корень для уравнения (7): при $x_2 = 83$ левая часть уравнения (7) больше четырех.

Ответ. $x = 3$.

В рассмотренном примере можно было сначала перенести один из радикалов в правую часть уравнения (*метод уединения радикала*), а затем возвести обе части полученного уравнения в квадрат.

Воспользуемся этим приемом при решении следующего примера.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x-2}=2. \tag{12}$$

Решение. Применив метод уединения радикала, получим уравнение

$$\sqrt{2x^2-4x+3}=2+\sqrt{x^2-2x-2}, \tag{13}$$

равносильное уравнению (12).

Заметим, что нет необходимости находить ОДЗ уравнения (13), но следует обратить внимание на подкоренные выражения. Если ввести новое неизвестное (выполнить замену переменной), полагая $t = x^2-2x$, то уравнение (13) примет вид

$$\sqrt{2t+3}=2+\sqrt{t-2}. \tag{14}$$

При $t \geqslant 2$ (в ОДЗ уравнения (14)) это уравнение равносильно каждому из уравнений

$$2t+3 = 4+4\sqrt{t-2}+t-2, \quad 4\sqrt{t-2}=t+1, \quad 16(t-2)=(t+1)^2,$$
$$t^2-14t+33=0. \tag{15}$$

Корни $t_1 = 3$ и $t_2 = 11$ уравнения (15) удовлетворяют условию $t \geqslant 2$ и поэтому являются корнями уравнения (14).

Если $t = 3$, то $x^2-2x=3$, откуда $x_1=-1$, $x_2=3$. Если $t=11$, то $x^2-2x-11=0$, откуда $x=1\pm2\sqrt{3}$.

Ответ. $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=1+2\sqrt{3}$, $x_4=1-2\sqrt{3}$.

В примерах 1–3 был использован *метод возведения обеих частей уравнения в квадрат*. В отдельных случаях применяются другие приемы, которые могут оказаться более эффективными.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}. \qquad (16)$$

Решение. Положим $\sqrt{2x-5}=t$; тогда $x=\dfrac{t^2+5}{2}$, и уравнение (16) примет вид

$$\sqrt{\frac{t^2+1}{2}+t}+\sqrt{\frac{t^2+9}{2}+3t}=7\sqrt{2}. \qquad (17)$$

Уравнение (17) равносильно каждому из уравнений

$$\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2+6t+9}=14,$$
$$\sqrt{(t+1)^2}+\sqrt{(t+3)^2}=14. \qquad (18)$$

Используя тождество $\sqrt{a^2}=|a|$, запишем уравнение (18) в виде

$$|t+1|+|t+3|=14. \qquad (19)$$

Так как $t\geqslant 0$, то уравнение (18) и равносильное ему уравнение (19) можно записать в виде $t+1+t+3=14$, откуда $t=5$, т. е. $\sqrt{2x-5}=5$, $x=15$.

Ответ. $x=15$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{12-2x}}=\frac{5}{2}.$$

Решение. Полагая $\sqrt[3]{\dfrac{12-2x}{x-1}}=u$, преобразуем уравнение к виду

$$u+\frac{1}{u}=\frac{5}{2} \quad \text{или} \quad 2u^2-5u+2=0. \qquad (20)$$

Уравнение (20) имеет корни $u_1=2$, $u_2=\dfrac{1}{2}$. Если $u=2$, то $\sqrt[3]{\dfrac{12-2x}{x-1}}=2$, откуда $\dfrac{12-2x}{x-1}=8$, $x=2$. Если $u=\dfrac{1}{2}$, то $\dfrac{12-2x}{x-1}=\dfrac{1}{8}$, откуда $x=\dfrac{97}{17}$.

Оба найденных корня являются корнями исходного уравнения, так как в процессе решения было использовано (наряду с заменой неизвестного) только преобразование вида $\{f(x)=g(x)\}\to\{f^3(x)=g^3(x)\}$, при котором получается равносильное уравнение.

Ответ. $x_1=2$, $x_2=\dfrac{97}{17}$.

Пример 6. Решить уравнение

$$|x-3| = |x+1|. \qquad (21)$$

Решение. Так как $|x-3|$ и $|x+1| = |x-(-1)|$ — это расстояния от искомой точки x до точек 3 и -1 соответственно, то из равенства (21) следует, что искомая точка x находится на одинаковом расстоянии от точек 3 и -1. Таким образом, точка x — середина отрезка $[-1, 3]$ и поэтому $x = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.

Ответ. $x = 1$.

Пример 7. Решить уравнение

$$x^2 + 2x - 3 = 3|x+1|. \qquad (22)$$

Решение. Полагая $t = x + 1$, получаем уравнение

$$t^2 - 4 = 3|t|. \qquad (23)$$

Если $t \geqslant 0$, то (23) имеет вид $t^2 - 3t - 4 = 0$, откуда находим $t_1 = 4$.

Поскольку при замене t на $-t$ уравнение (23) не меняется, число $t_2 = -4$ также является корнем уравнения (23), а корни уравнения (2) — числа $x_1 = 3$ и $x_2 = -5$.

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = -5$.

Пример 8. Решить уравнение

$$|x^2 - x - 1| + |x^2 - x - 3| = 6. \qquad (24)$$

Решение. Положим $x^2 - x = t$; тогда уравнение (24) примет вид

$$|t-1| + |t-3| = 6. \qquad (25)$$

Решить уравнение (25) — значит найти все такие точки числовой оси Ot (рис. 8.1), для которых сумма расстояний от каждой из них до точек 1 и 3 равна 6. Заметим, что искомые точки лежат вне отрезка $[1, 3]$, так как сумма расстояний от любой точки отрезка до его концов равна 2.

Рис. 8.1

Пусть M_1 — искомая точка, лежащая правее точки 3; r — расстояние от точки M_1 до точки 3, s — сумма расстояний от точки M_1 до точек 3 и 1. Тогда $s = r + r + 2 = 6$, откуда $r = 2$, а точке M_1 соответствует число $t_1 = 3 + 2 = 5$. Аналогично, корнем уравнения (25) является точка $t_2 = -1$, находящаяся на расстоянии 2 от точки 1.

Таким образом, задача сводится к решению уравнений $x^2 - x = -1$, $x^2 - x = 5$. Первое из них не имеет действительных корней, а второе имеет два корня.

Ответ. $x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Пример 9. Решить уравнение

$$|x^2 + x| + |x+2| = x^2 - 2. \tag{26}$$

Решение. Функция $x + 2$ меняет знак при $x = -2$, а функция $x^2 + x$ — при $x = -1$ и $x = 0$, причем $x^2 + x \geqslant 0$ при $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 0$. Поэтому

$$|x^2 + x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{при} \quad x \leqslant -1 \quad \text{и при} \quad x \geqslant 0, \\ -x^2 - x & \text{при} \quad -1 < x < 0; \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x + 2 & \text{при} \quad x \geqslant -2, \\ -x - 2 & \text{при} \quad x < -2, \end{cases}$$

а уравнение (26), записанное без знака модуля на промежутках $x < -2$, $-2 \leqslant x \leqslant -1$, $-1 < x < 0$, $x \geqslant 0$, равносильно совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} x < -2, \\ x^2 + x - x - 2 = x^2 - 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ x^2 + x + x + 2 = x^2 - 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0, \\ -x^2 - x + x + 2 = x^2 - 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 + x + x + 2 = x^2 - 2. \end{cases}$$

Первой из этих систем удовлетворяют все значения x из промежутка $x < -2$, второй системе — значение $x = -2$, остальные две системы не имеют решений.

Ответ. $x \leqslant -2$.

Задачи

Решить уравнение (1–18):

1. $\sqrt{5x^2 + 3x - 1} - 2x = 1$.

2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{11-x} = 4$.

3. $\sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} = 4$.

4. $\sqrt{2x-15} - \sqrt{x+16} = -1$.

5. $\sqrt{3x^2 + 6x + 1} + x^2 + 2x = 13$.

6. $\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = 1$.

7. $2\sqrt{x^2 - 4x + 7} - \sqrt{x^2 - 4x + 12} = 1$.

8. $\dfrac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}} = 2$.

9. $\sqrt[3]{5+x} - 2\sqrt[3]{5-x} = \sqrt[6]{25-x^2}$.

10. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 0$.

11. $\sqrt{x + 6 - 4\sqrt{x+2}} + \sqrt{11 + x - 6\sqrt{x+2}} = 1$.

12. $|2x+3| = |2x-5|$.

13. $x^2 - 4x - 4 = 2|x-2|$.

14. $|x^2 + x + 1| + |x^2 + x - 3| = 6$.

15. $|x^3 - 3x^2 + x| = x - x^3$.

16. $|x^2 - x| + |x+1| = x^2 - 2x - 1$.

17. $\sqrt{x-1} + |x-2| = |x-3|$.

18. $\dfrac{3x^2 + 2 - |2x+3|}{|x| - 1} = 0$.

Ответы

1. $x = 2$. **2.** $x_1 = 2,\ x_2 = 10$. **3.** $x = 8$. **4.** $x = 20$. **5.** $x_1 = -4,\ x_2 = 2$. **6.** $x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{7}{2}$. **7.** $x_1 = 1,\ x_2 = 3$. **8.** $x = \frac{12}{5}$. **9.** $x = \frac{63}{13}$. **10.** $x = -1$. **11.** $2 \leqslant x \leqslant 7$. **12.** $x = \frac{1}{2}$. **13.** $x_1 = -2,\ x_2 = 6$. **14.** $x_1 = -\frac{1+\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

15. $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}$. **16.** $x \leqslant -1$. **17.** $x = 2$. **18.** $x = -\frac{1}{3}$.

Указания

9. Полагая $t = \sqrt[6]{\frac{5+x}{5-x}}$, получить уравнение $t - \frac{2}{t} = 1$.

10. Возвести в куб обе части уравнения $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{x+2}$.

11. Записать уравнение в виде $|2 - \sqrt{x+2}| + |3 - \sqrt{x+2}| = 1$.

Глава 3

Показательные и логарифмические уравнения

§ 9. Показательные уравнения

Справочные сведения

1. *Показательная функция* $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена на $\mathbf{R}$, а множество ее значений — множество всех положительных чисел.
2. Для любых $a > 0$, $b > 0$ и при любых значениях x и y верны равенства (основные свойства степени):

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^x.$$

3. *Простейшее показательное уравнение*

$$a^x = b, \qquad \text{где} \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

не имеет корней при $b \leqslant 0$ *и имеет единственный корень* $x = \log_a b$ *при* $b > 0$.

В частности, уравнение $a^x = a^\alpha$, $a > 0$, $a \neq 1$, имеет единственный корень $x = \alpha$.

4. *Уравнение*

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \qquad a > 0, \quad a \neq 1,$$

равносильно уравнению

$$f(x) = g(x).$$

5. *Уравнение*

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}, \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq 1,$$

равносильно каждому из уравнений

$$a^{f(x)} = a^{g(x)\log_a b}, \qquad f(x) = g(x) \cdot \log_a b.$$

Примеры с решениями

Пример 1. Решить уравнение $64^{\frac{x}{2}} \cdot 3^x = 576$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из уравнений $8^x \cdot 3^x = 24^2$, $24^x = 24^2$, откуда $x = 2$.

Ответ. $x = 2$.

Пример 2. Решить уравнение $\left(\frac{16}{9}\right)^{x^2+2x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-3}$.

Решение. Это уравнение равносильно каждому из уравнений: $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x^2+4x} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3-x}$, $2x^2 + 4x = 3 - x$, $2x^2 + 5x - 3 = 0$, откуда находим $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ. $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Решение. Пусть $x - \frac{1}{2} = t$, тогда уравнение примет вид

$$2 \cdot 4^t - 3^t = 3 \cdot 3^t - 4^t.$$

Это уравнение равносильно каждому из уравнений: $3 \cdot 4^t = 4 \cdot 3^t$, $\left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{4}{3}$, откуда $t = 1$, $x = \frac{3}{2}$.

Ответ. $x = \frac{3}{2}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$3^x - 18 \cdot 3^{-x} = 7.$$

Решение. Полагая $3^x = t$, получаем уравнение $t - \frac{18}{t} = 7$ или $t^2 - 7t - 18 = 0$, откуда находим $t_1 = -2$, $t_2 = 9$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $3^x = -2$, $3^x = 9$. Первое из них не имеет корней, второе имеет единственный корень $x = 2$.

Ответ. $x = 2$.

Пример 5. Решить уравнение

$$3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0. \qquad (1)$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$2(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x \cdot 2^x + 3 \cdot (2^x)^2 = 0. \qquad (2)$$

и заметим, что левая часть уравнения (2) — однородный многочлен степени 2 от u и v, где $u = 2^x$, $v = 3^x$ (сумма степеней u и v в каждом члене этого многочлена равна двум).

Разделив обе части уравнения (2) на 2^{2x} и полагая $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$, получим уравнение $2t^2 - 5t + 3 = 0$, имеющее корни $t_1 = 1$,

$t_2 = \frac{3}{2}$. Исходное уравнение (1) равносильно совокупности уравнений $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$, откуда находим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 6.$$

Решение. Воспользуемся равенством $3 - \sqrt{8} = \frac{1}{3+\sqrt{8}}$ и положим $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = t$. Тогда уравнение примет вид $t + \frac{1}{t} = 6$ или $t^2 - 6t + 1$, откуда $t_1 = 3 + \sqrt{8}$, $t_2 = 3 - \sqrt{8}$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 3+\sqrt{8}, \qquad \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 3-\sqrt{8} = \frac{1}{3+\sqrt{8}},$$

откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Пример 7. Решить уравнение

$$3^x + 4^x = 25.$$

Решение. Число 2 является корнем этого уравнения. Докажем, что уравнение не имеет других корней. Так как каждая из функций 3^x и 4^x является возрастающей, то и $f(x) = 3^x + 4^x$ — также возрастающая функция. Поэтому $f(x) < f(2) = 25$ при $x < 2$ и $f(x) > f(2)$ при $x > 2$, т. е. функция не принимает значение, равное 25, при $x \neq 2$. Это означает, что $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Задачи

Решить уравнение (1–11):

1. $729^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{9}$. **2.** $5^{x+1} - 14 \cdot 5^x + 3 \cdot 5^{x+2} = 66$. **3.** $7 \cdot 49^x - 13 \cdot 7^x = 2$.

4. $3^x - 3^{2-x} = 8$. **5.** $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{-x} \cdot 5^{2x+1} = 13 \cdot 5^x$. **6.** $4^{x+1} - 6^x = 2 \cdot 9^{x+1}$.

7. $2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x = 2^{2x}$. **8.** $2^{|x+1|} - |2^x - 1| = 1 + 2^x$.

9. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$. **10.** $4^x + 25^x = 29$.

11. $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 34$.

Ответы

1. $x = -1$. **2.** $x = 0$. **3.** $x = \log_7 2$. **4.** $x = 2$. **5.** $x = -1$. **6.** $x = -2$. **7.** $x = \log_{\frac{2}{3}} 3$. **8.** $x = -2$, $x \geqslant 0$. **9.** $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. **10.** $x = 1$. **11.** $x = -2$.

§ 10. Логарифмические уравнения

Справочные сведения

1. *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена при $x > 0$, множество ее значений есть $\mathbf{R}$.

2. Показательная и логарифмическая функция являются взаимно обратными. Это означает, что

$$\log_a a^x = x \qquad \text{при} \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$
$$a^{\log_a x} = x \qquad \text{при} \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0.$$

3. *Основные свойства логарифмов* выражают следующие формулы, справедливые при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$
$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$
$$\log_{a^\alpha} x^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a x, \qquad \alpha \in \mathbf{R}, \quad \beta \in \mathbf{R}, \quad \alpha \neq 0,$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Замечание. а) Левые и правые части первых двух равенств определены на разных множествах: в правых частях этих равенств x и y могут принимать только положительные значения, а левые части определены при любых значениях x и y одного знака, т. е. при $x > 0$, $y > 0$, а также при $x < 0$, $y < 0$.

б) При решении логарифмических уравнений часто используется формула

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

4. При решении логарифмических уравнений применяют следующие преобразования:

а) замену функции $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ на функцию $\log_a [f(x)g(x)]$;

б) замену функции $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ на функцию $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Эти преобразования, основанные на свойствах логарифмов, являются допустимыми.

Обратные замены могут привести к потере корней исходного уравнения из-за возможного сужения ОДЗ уравнения. Чтобы избежать потери корней, следует заменять функции $\log_a [f(x)g(x)]$

и $\log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ на функции $\log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|$ и $\log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|$ соответственно. Такие преобразования являются допустимыми.

Приведем еще формулу

$$\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|, \qquad k \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

применяемую при решении логарифмических уравнений, и обратим внимание на то, что *отбрасывание знака модуля в правой части равенства* (1) — *грубая ошибка,* которую, к сожалению, часто допускают абитуриенты.

5. Сформулируем утверждения, относящиеся к решению логарифмических уравнений.

   а) *Простейшее логарифмическое уравнение*

   $$\log_a x = b, \qquad где \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

   имеет единственный корень $x = a^b$ *при любом* $b \in \mathbf{R}$.

   б) *Потенцирование, т. е. переход от уравнения*

   $$\log_a f(x) = \log_a g(x), \qquad где \quad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{2}$$

   к уравнению

   $$f(x) = g(x) \tag{3}$$

   является допустимым преобразованием, а уравнение (3) — *следствием уравнения* (2).

   Обратный переход (*логарифмирование*), т. е. *переход от уравнения* (3) *к уравнению* (2), *может привести к потере корней.*

   Уравнения (2) и (3) равносильны, если хотя бы одна из функций $f(x)$, $g(x)$ принимает только положительные значения.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2)$.

Решение. Потенцируя, получаем уравнение $x^2 - 2 = x$, являющееся следствием исходного и имеющее корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Проверка показывает, что x_1 не удовлетворяет уравнению (x_1 не входит в ОДЗ уравнения), а число x_2 — корень исходного уравнения.

Ответ. $x = 2$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_2(x^3 + 9) = \log_2(x + 3) + 2\log_2(x - 1). \tag{4}$$

Решение. Заменив в правой части уравнения (4) сумму логарифмов на логарифм произведения, получим уравнение

$$\log_2(x^3 + 9) = \log_2 \left[(x + 3)(x - 1)^2\right], \tag{5}$$

которое является следствием уравнения (4). При этом преобразовании посторонние корни могут появиться благодаря расширению ОДЗ уравнения.

Потенцируя, получаем уравнение

$$x^3 + 9 = (x+3)(x-1)^2, \qquad (6)$$

являющееся следствием уравнений (4) и (5). Уравнение (6) можно заменить равносильным уравнением $x^2 - 5x - 6 = 0$, которое имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 6$.

Число -1 не содержится в ОДЗ уравнения (4), а число 6 входит в ОДЗ этого уравнения и является его корнем.

Ответ. $x = 6$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_5(-x^7) + 2 = \log_{25} x^8. \qquad (7)$$

Решение. Заметим, что ОДЗ уравнения (7) — множество отрицательных чисел. Пусть $t = -x$, тогда $t > 0$. Используя формулу

$$\log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b,$$

запишем уравнение (7) в виде

$$\log_5 t^7 + 2 = \log_5 t^4. \qquad (8)$$

Так как $t > 0$, то уравнение (8) равносильно уравнению

$$7\log_5 t + 2 = 4\log_5 t,$$

откуда находим $\log_5 t = -\dfrac{2}{3}$, $t = 5^{-\frac{2}{3}}$, $x = -5^{-\frac{2}{3}}$.

Ответ. $x = -5^{-\frac{2}{3}}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_5\left(3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1}\right) = x + \log_5 13. \qquad (9)$$

Решение. Так как правую часть уравнения (9) можно записать в виде $\log_5(13\cdot 5^x)$, где $13\cdot 5^x > 0$, то потенцирование приводит к уравнению

$$3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1} = 13\cdot 5^x, \qquad (10)$$

равносильному уравнению (9).

Разделив обе части уравнения (10) на 2^x и обозначив $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = t$, получим уравнение $6 - 5t^2 = 13t$ или $5t^2 + 13t - 6 = 0$, имеющее корни $t_1 = \dfrac{2}{5}$, $t_2 = -3$. Следовательно, уравнение (10) равносильно совокупности уравнений $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \dfrac{2}{5}$, $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = -3$, откуда следует, что $x = -1$.

Ответ. $x = -1$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\log_2 x + \log_x 2 = \frac{10}{3}. \tag{11}$$

Решение. Пусть E — множество чисел x таких, что

$$x > 0, \qquad x \neq 1. \tag{12}$$

Тогда $\log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$, и уравнение (11) примет вид $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{10}{3}$ или $3t^2 - 10t + 3 = 0$, где $t = \log_2 x$. Отсюда находим $t_1 = 3$, $t_2 = \dfrac{1}{3}$. Если $t = 3$, то $\log_2 x = 3$, $x = 8$. Если $t = \dfrac{1}{3}$, то $x = \sqrt[3]{2}$. Найденные значения x удовлетворяют условиям (12) и являются корнями уравнения (11).

Ответ. $x_1 = 8$, $x_2 = \sqrt[3]{2}$.

Пример 6. Решить уравнение

$$1 - \log_9 (x+1)^2 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \frac{x+5}{x+3}. \tag{13}$$

Решение. Переходя к логарифмам по основанию 3, получаем уравнение

$$1 - \log_3 |x+1| = \log_3 \frac{x+5}{x+3}, \tag{14}$$

равносильное уравнению (13).

Уравнение

$$\frac{3}{|x+1|} = \frac{x+5}{x+3}, \tag{15}$$

полученное из уравнения (14) в результате потенцирования, является следствием уравнения (14).

При решении уравнения (15) нужно рассмотреть два возможных случая: $x > -1$ и $x < -1$.

Если $x > -1$, то $|x+1| = x+1$, и уравнение (15) примет вид

$$\frac{3}{x+1} = \frac{x+5}{x+3}. \tag{16}$$

Умножая обе части уравнения (16) на $(x+1)(x+3)$, получим уравнение $3x + 9 = x^2 + 6x + 5$, являющееся следствием уравнения (16) и имеющее корни $x = -4$ (не удовлетворяет условию $x > -1$) и $x = 1$.

Аналогично, если $x < -1$, то уравнение (15) преобразуется к виду $x^2 + 9x + 14 = 0$, откуда находим $x = -7$ и $x = -2$ (оба корня меньше, чем -1). Проверка показывает, что числа 1, -7 и -2 входят в ОДЗ уравнения (13) и являются его корнями.

Ответ. $x_1 = -7$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

Замечание. Многие абитуриенты при решении уравнения (13) допустили ошибку, отбросив знак модуля в левой части уравнения (14). Это привело к потере корней -7 и -2.

Пример 7. Решить уравнение

$$5 \cdot x^{\log_3 2} + 2^{\log_3 x} = 24. \tag{17}$$

Решение. Заметим, что

$$x^{\log_3 2} = 2^{\log_3 x}. \tag{18}$$

Равенство (18) является верным при всех $x > 0$, так как логарифмы по основанию 3 его левой и правой частей совпадают. Используя равенство (18), заменим уравнение (17) равносильным уравнением $2^{\log_3 x} = 4$, откуда $\log_3 x = 2$, $x = 9$.

Ответ. $x = 9$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\lg^2(4-x) + \lg(4-x) \cdot \lg\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\lg^2\left(x + \frac{1}{2}\right). \tag{19}$$

Решение. Используя тождество $a^2 + ab - 2b^2 = (a-b)(a+2b)$, заменим уравнение (19) следующим равносильным уравнением:

$$\left[\lg(4-x) - \lg\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]\left[\lg(4-x) + 2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = 0. \tag{20}$$

Уравнение (20) равносильно совокупности уравнений:

$$\lg(4-x) = \lg\left(x + \frac{1}{2}\right), \tag{21}$$

$$\lg(4-x) + 2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0. \tag{22}$$

Потенцируя, из (21) и (22) получаем уравнения

$$4 - x = x + \frac{1}{2}, \tag{23}$$

$$(4-x)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1. \tag{24}$$

Уравнение (23) имеет корень $x_1 = \frac{7}{4}$, а уравнение (24) приводится к виду $x(4x^2 - 12x - 15) = 0$, откуда $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{2} + \sqrt{6}$, $x_4 = \frac{3}{2} - \sqrt{6}$. Корнями исходного уравнения (19) являются те и только те из чисел x_1, x_2, x_3, x_4, которые входят в ОДЗ уравнения (19), т. е. удовлетворяют условию $-\frac{1}{2} < x < 4$.

Ответ. $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{2} + \sqrt{6}$.

При решении уравнений, содержащих функции вида $f(x)^{g(x)}$, следует иметь в виду, что:

а) если $f(x) < 0$, то выражение $f(x)^{g(x)}$ не имеет смысла;

б) если $f(x) = 0$, то это выражение считается равным нулю при $g(x) > 0$ и не имеющим смысла при $g(x) \leqslant 0$;

в) при $f(x) > 0$ функция $f(x)^{g(x)}$ определяется формулой

$$f(x)^{g(x)} = a^{g(x)\log_a f(x)},$$

где a — любое положительное число, не равное единице;

г) функция вида $\log_{g(x)} f(x)$, где $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$, определяется формулой

$$\log_{g(x)} f(x) = \frac{\log_a f(x)}{\log_a g(x)},$$

где a — любое положительное число, не равное единице.

Пример 9. Решить уравнение

$$\log_5 x\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} = -2. \tag{25}$$

Решение. Данное уравнение имеет смысл, если $x > 0$, $x \neq 1$ и $\log_{\sqrt{x}}(5x) \geqslant 0$. Переходя к логарифмам по основанию 5 и возведя обе его части в квадрат, получаем уравнение

$$\log_5^2 x\,\frac{\log_5(5x)}{\log_5\sqrt{x}} = 4, \tag{26}$$

являющееся следствием уравнения (25).

Уравнение (26) можно записать в виде $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0$, откуда $\log_5 x = 1$, $\log_5 x = -2$.

Значение $\log_5 x = 1$ следует отбросить, так как в этом случае левая часть равенства (25) неотрицательна. Итак, $\log_5 x = -2$, откуда $x = \frac{1}{25}$. Проверка показывает, что число $\frac{1}{25}$ — корень уравнения (25).

Ответ. $x = \frac{1}{25}$.

Пример 10. Решить уравнение

$$1 + \log_x(4 - x) = \log_5 3 \cdot \log_x 5. \tag{27}$$

Решение. Так как $\log_5 3 \cdot \log_x 5 = \log_x 5^{\log_5 3} = \log_x 3$, то уравнение (27) можно записать в виде $\log_x x + \log_x(4 - x) = \log_x 3$, откуда получаем уравнение

$$x(4 - x) = 3, \tag{28}$$

являющееся следствием уравнения (27). Из уравнения (28) находим $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. При $x = 1$ уравнение (27) теряет смысл, а число $x = 3$ — корень уравнения (27).

Ответ. $x = 3$.

Пример 11. Решить уравнение

$$\log_7(3-2x)\cdot\log_x(3-2x)=\log_7(3-2x)+\log_7 x^2. \tag{29}$$

Решение. Допустимые значения x определяются условиями

$$0<x<\frac{3}{2},\qquad x\neq 1. \tag{30}$$

Переходя к логарифмам по основанию x, запишем уравнение (29) в виде

$$\frac{\log_x^2(3-2x)}{\log_x 7}=\frac{\log_x(3-2x)}{\log_x 7}+\frac{\log_x x^2}{\log_x 7}$$

или

$$\log_x^2(3-2x)=\log_x(3-2x)+2. \tag{31}$$

Из уравнения (31), являющегося следствием уравнения (29), находим $\log_x(3-2x)=2$, $\log_x(3-2x)=-1$. Если $\log_x(3-2x)=2$, то $3-2x=x^2$, откуда $x_1=-3$, $x_2=1$. Если $\log_x(3-2x)=-1$, то $3-2x=\dfrac{1}{x}$, откуда $x_3=1$, $x_4=\dfrac{1}{2}$. Условиям (30) удовлетворяет только число $x=\dfrac{1}{2}$.

Ответ. $x=\dfrac{1}{2}$.

Пример 12. Решить уравнение

$$\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x). \tag{32}$$

Решение. Область допустимых значений уравнения (32) — множество E точек x таких, что $x<1$, $x\neq 0$, $x<3$, $x\neq 2$, откуда находим

$$x<1,\qquad x\neq 0. \tag{33}$$

Применяя формулу $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ и полагая $\log_{1-x}(3-x)=t$, получаем уравнение $t-\dfrac{1}{t}=0$, $t^2=1$, откуда $t_1=1$, $t_2=-1$. Следовательно, на множестве E уравнение (32) равносильно совокупности уравнений $\log_{1-x}(3-x)=1$, $\log_{1-x}(3-x)=-1$. Первое из них не имеет корней, так как $1-x\neq 3-x$. Второе уравнение равносильно на множестве E уравнению $1-x=\dfrac{1}{3-x}$ или $x^2-4x+2=0$, откуда $x_1=2+\sqrt{2}$, $x_2=2-\sqrt{2}$. Из чисел x_1, x_2 только x_2 удовлетворяет условиям (33) и является корнем уравнения (32).

Ответ. $x=2-\sqrt{2}$.

Пример 13. Решить уравнение $x^{\lg x-1}=100$.

Решение. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим равносильное уравнение $(\lg x-1)\lg x=2$. Полагая $\lg x=t$, запишем это уравнение в виде $t^2-t-2=0$, откуда $t_1=-1$, $t_2=2$. Решив уравнения $\lg x=-1$, $\lg x=2$, найдем $x_1=0,1$; $x_2=100$.

Ответ. $x_1=0,1$; $x_2=100$.

Пример 14. Решить уравнение

$$15^{\log_5 3}x^{\log_5(45x)}=1. \tag{34}$$

Решение. Уравнение (34) равносильно каждому из следующих уравнений:

$$5^{\log_5 3}\cdot 3^{\log_5 3}\cdot x^{\log_5 3+1+\log_5(3x)}=1,$$

$$(3x)^{\log_5 3+1}x^{\log_5(3x)}=1. \tag{35}$$

Логарифмируя уравнение (35) по основанию 5, получаем

$$(1+\log_5 3)\log_5(3x)+\log_5(3x)\log_5 x=0,$$

или

$$\log_5(3x)(1+\log_5(3x))=0.$$

Если $\log_5(3x)=0$, то $x=\frac{1}{3}$, а если $\log_5(3x)=-1$, то $x=\frac{1}{15}$.

Ответ. $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{15}$.

Задачи

Решить уравнение (1–28):

1. $\log_3(x^2-6)=\log_3 x$.

2. $\log_2(98-x^3)=3\log_2(2-x)$.

3. $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30$.

4. $2\log_2 x+\log_2(x+1)=2+\log_2(1-x^2)$.

5. $\log_5(x^2+x+1)+\log_5(x^2-x-1)=\log_5(1-2x)$.

6. $2\log_3\dfrac{x-3}{x-7}+\log_3\dfrac{x-1}{x-3}=-1$.

7. $x(1-\lg 5)=\lg(4^x-12)$.

8. $\log_2(2^x-5)-\log_2(2^x-2)=2-x$.

9. $\log_2(x-5)=\log_4(x+1)$.

10. $\log_2 x+\log_x 2=\dfrac{5}{2}$.

11. $\log_2\dfrac{x-2}{x+2}+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x-1}{6x+7}=0$.

12. $\log_4[\log_3(\log_2 x)]=\dfrac{1}{2}$.

13. $\sqrt{5\log_2(-x)}=\log_2\sqrt{x^2}$.

14. $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=2$.

15. $\lg\lg x+\lg(\lg x^2-1)=1$.

16. $\log_3(\log_2 x-9)=2+\log_3(1-4\log_x 4)$.

17. $\log_2(\log_2 x)=\log_2(1+\log_x 16)+1$.

18. $\sqrt{3+\log_x 5\sqrt{5}}\cdot\log_{\sqrt{5}}x=-\sqrt{6}$.

19. $\log_{16x}x^3+\log_{\frac{x}{2}}\sqrt{x}=2$.

20. $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}}2=\log_{\frac{x}{64}}2$.

21. $\log_{3x}\left(\dfrac{3}{x}\right)+\log_3^2 x=1$.

22. $x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6$. **23.** $\lg^2\left(1 + \frac{4}{x}\right) + \lg^2\left(1 - \frac{4}{x+4}\right) = 2\lg^2\left(\frac{2}{x-1} - 1\right)$.

24. $\log_2 x \cdot \log_2(x-3) + 1 = \log_2(x^2 - 3x)$.

25. $1 + \log_6 \frac{x+3}{x+7} = \frac{1}{4}\log_{\sqrt{6}}(x-1)^2$. **26.** $3\log_{3x} x = 2\log_{9x} x^2$.

27. $\log_{2x-1}(2x-3) = \log_{2x-3}(2x-1)$. **28.** $x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$.

29. Найти все значения a, при которых уравнение $\frac{\lg(ax)}{\lg(x+1)} = 2$ имеет ровно один корень.

30. При каких значениях a уравнение $\frac{\lg x}{\lg(x-a-a^2)} = 2$ имеет хотя бы один корень? Найти все корни этого уравнения.

Ответы

1. 3. **2.** -3. **3.** 6. **4.** $2(\sqrt{2}-1)$. **5.** $-\sqrt{2}$. **6.** -5. **7.** 2. **8.** 3. **9.** 8.
10. $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt{2}$. **11.** 3. **12.** 512. **13.** $x_1 = -1$, $x_2 = -32$. **14.** 0. **15.** $10^{\frac{5}{2}}$.
16. 2^{12}. **17.** 16. **18.** $\frac{1}{5}$. **19.** $x_1 = 4$, $x_2 = 4^{\frac{4}{3}}$. **20.** $x_1 = 4$, $x_2 = 8$.
21. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{9}$. **22.** $\sqrt{10}$. **23.** $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{6}$. **24.** 5.
25. $x_1 = -11$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$. **26.** $x_1 = 1$, $x_2 = 9$. **27.** $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.
28. $x_1 = 7$, $x_2 = 14$. **29.** $a = 4$, $a < 0$.
30. При $a = 0$ и $a = -1$ уравнение не имеет корней; при $a < -1$ — один корень $x = a^2$; при $a > 0$ — один корень $x = (a+1)^2$; при $a = -\frac{1}{2}$ — один корень $x = \frac{1}{4}$; при $-1 < a < 0$, $a \neq -\frac{1}{2}$ — два корня $x_1 = a^2$, $x_2 = (a+1)^2$.

Глава 4

Тригонометрические уравнения

§ 11. Простейшие тригонометрические уравнения. Уравнения, сводящиеся к алгебраическим относительно $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$

Справочные сведения

1. Решение тригонометрических уравнений сводится в конечном итоге к решению *простейших тригонометрических уравнений*, т. е. уравнений вида

$\sin x = a, \qquad \cos x = a, \qquad \operatorname{tg} x = a.$

а) Если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то все корни уравнения

$$\sin x = a \tag{1}$$

определяются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \tag{2}$$

а все корни уравнения

$$\cos x = a \tag{3}$$

— формулой

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \tag{4}$$

где $n \in \mathbf{Z}$ (n принимает любые целые значения).

Если $|a| > 1$, то уравнения (1) и (3) не имеют корней.

б) Уравнение

$$\operatorname{tg} x = a \tag{5}$$

при любом a имеет корни, определяемые формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}. \tag{6}$$

в) Формулы нахождения корней некоторых часто встречающихся простейших тригонометрических уравнений:

Уравнение	Его корни	Уравнение	Его корни
$\sin x = 0$	$x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = -1$	$x = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$

2. Рассмотрим уравнение вида

$$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0, \qquad a \neq 0. \tag{7}$$

Полагая $\sin x = t$, перепишем уравнение (7) в виде

$$at^2 + bt + c = 0. \tag{8}$$

Пусть $D = b^2 - 4ac < 0$; тогда уравнение (8) не имеет действительных корней и поэтому уравнение (7) также не имеет корней.

Пусть $D \geqslant 0$, тогда уравнение (8) имеет корни

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \tag{9}$$

а уравнение (7) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = t_1, \qquad \sin x = t_2.$$

Уравнение (7) имеет корни тогда и только тогда, когда $D \geqslant 0$ и по крайней мере одно из чисел t_1, t_2 по абсолютной величине не превосходит единицы, причем:

а) если $|t_1| \leqslant 1$, $|t_2| \leqslant 1$, то уравнение (7) имеет две серии корней

$$\begin{aligned} x &= (-1)^n \arcsin t_1 + \pi n, \\ x &= (-1)^n \arcsin t_2 + \pi n, \end{aligned} \qquad n \in \mathbf{Z}; \tag{10}$$

б) если $|t_1| \leqslant 1$, $|t_2| > 1$ или $|t_1| > 1$, $|t_2| \leqslant 1$, то уравнение (7) имеет одну серию корней, определяемую первой или второй из формул (10) соответственно.

К квадратному уравнению можно свести уравнение

$$a\cos^2 x + b\sin x + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

если заменить $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$.

Аналогично, уравнения вида

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0, \qquad a \neq 0,$$
$$a\sin^2 x + b\cos x + c = 0, \qquad a \neq 0$$

также приводятся к квадратным уравнениям.

3. Рассмотрим уравнение вида

$$a_0\sin^n x + a_1\sin^{n-1} x\cos x + a_2\sin^{n-2} x\cos^2 x + \cdots + \\ + a_{n-1}\sin x\cos^{n-1} x + a_n\cos^n x = 0. \tag{11}$$

В каждом слагаемом левой части уравнения (11) сумма степеней синуса и косинуса одна и та же и равна n. Такое уравнение называется *однородным* относительно $\sin x$ и $\cos x$, а число n — *показателем однородности*.

Рассмотрим однородные уравнения с показателями 1 и 2, т. е. уравнения вида

$$a\sin x + b\cos x = 0, \tag{12}$$
$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0, \tag{13}$$

предполагая, что в уравнении (12) хотя бы одно из чисел a, b не равно нулю, а в уравнении (13) хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля.

Пусть в уравнении (12) $a \neq 0$; тогда значения x, при которых $\cos x = 0$, не удовлетворяют уравнению (12), так как если $\cos x = 0$, то $\sin x \neq 0$ ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Поэтому в случае $a \neq 0$, разделив обе части уравнения (12) на $\cos x$, получим равносильное уравнение

$$a\operatorname{tg} x + b = 0.$$

Аналогично, если $a \neq 0$, то разделив обе части уравнения (13) на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение

$$a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0.$$

Примеры с решениями

Пример 1. Решить уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$.

Решение. По формуле (4) находим $2x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$, где $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Отсюда следует, что

$$2x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \qquad x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin(x^2 - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Согласно формуле (2) получаем

$$x^2 - 1 = (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,$$

откуда $x^2 = 1 + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$. Так как правая часть этого равенства должна быть неотрицательной, то n может принимать только значения $0, 1, 2, \ldots$. Отсюда находим

$$x = \pm\sqrt{1 + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n}, \qquad \text{где} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x^3 = -1$.

Решение. Применяя формулу (6), находим

$$x^3 = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \qquad \text{где} \quad n \in \mathbf{Z},$$

откуда $x = \sqrt[3]{-\frac{\pi}{4} + \pi n}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 4. Решить уравнение $2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$.

Решение. При $\sin x = t$ получим квадратное уравнение $2t^2 - t - 3 = 0$, имеющее корни $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{3}{2}$. Так как $|t_1| = 1$, $|t_2| > 1$, то исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x = -1$, откуда находим $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 5. Решить уравнение $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$.

Решение. Пусть $t = \cos x$, тогда $\sin^2 x = 1 - t^2$ и уравнение примет вид

$$2(1 - t^2) - t - 1 = 0$$

или

$$2t^2 + t - 1 = 0,$$

откуда находим $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Если $t = -1$, то $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, а если $t = \frac{1}{2}$, то $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \pi + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 6. Решить уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Решение. Полагая $\operatorname{tg} x = t$, получаем уравнение $3t^2 - t - 2 = 0$, имеющее корни $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{2}{3}$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}$, откуда находим две серии корней: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 7. Решить уравнение $3\sin x + 4\cos x = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из уравнений $3\operatorname{tg} x + 4 = 0$, $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$, откуда $x = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 8. Решить уравнение $3\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение $3\,\mathrm{tg}^2\, x + 5\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$, имеющее корни $t_1 = -2$, $t_2 = \frac{1}{3}$. Исходное уравнение, равносильное совокупности уравнений $\mathrm{tg}\, x = -2$ и $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{3}$, имеет две серии корней: $x = -\mathrm{arctg}\, 2 + \pi n$, $x = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Замечание. К уравнению вида (13) сводится уравнение

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d.$$

Для этого достаточно воспользоваться тождеством

$$d \equiv d(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Пример 9. Решить уравнение $3\sin^2 x + \sin 2x + 2\cos^2 x = 4$.

Решение. Это уравнение равносильно каждому из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} 3\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x &= 4(\sin^2 x + \cos^2 x),\\ \sin^2 x - 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x &= 0,\\ \mathrm{tg}^2\, x - 2\,\mathrm{tg}\, x + 2 &= 0,\\ (\mathrm{tg}\, x - 1)^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Значит, исходное уравнение не имеет корней.

Пример 10. Решить уравнение $4\sin^3 x + 4\cos^2 x = 1 + 3\sin x$.

Решение. Полагая $\sin x = t$, преобразуем уравнение к виду

$$4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 = 0.$$

Разложив левую часть полученного уравнения на множители, приходим к уравнению $(t-1)(4t^2-3) = 0$. Если $t = 1$, то $\sin x = 1$, откуда
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Если $4t^2 = 3$, то $4\sin^2 x = 3$, $2(1 - \cos 2x) = 3$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 11. Решить уравнение $\mathrm{ctg}^4\, 2x + \dfrac{1}{\sin^4 2x} = 25$.

Решение. Полагая $\mathrm{ctg}^2\, 2x = t$ и используя формулу $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha$, преобразуем уравнение к виду $t^2 + (1+t)^2 = 25$

или $t^2+t-12=0$, откуда $t_1=-4$, $t_2=3$. Следовательно, $\operatorname{ctg}^2 2x=3$, откуда $\operatorname{tg} 2x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 12. Решить уравнение $8\sin^4 x+13\cos 2x=7$.

Решение. Полагая $\cos 2x=t$ и используя формулу $2\sin^2 x=1-\cos 2x$, получаем уравнение $2t^2+9t-5=0$, имеющее корни $t_1=-5$, $t_2=\frac{1}{2}$. Следовательно, $\cos 2x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Задачи

Решить уравнение (1–21):

1. $\sin\frac{3x}{2}=0$. **2.** $\cos\frac{x}{2}=0$. **3.** $\operatorname{tg} 2x=1$. **4.** $\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

5. $\operatorname{tg}(2x+1)=\sqrt{3}$. **6.** $\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. $2\sin^2 x+3\sin x=2$. **8.** $3\cos^2 x+2\cos x=1$.

9. $4\cos^2 x+\sin x+1=0$. **10.** $2\sin x+3\cos x=0$.

11. $\sin^2 x+\sin 2x=0$. **12.** $\sin 2x+\sin^2 x=\cos^2 x$.

13. $2\cos^2 x+3\sin x\cos x=5\sin^2 x$. **14.** $4\cos^2 x+\sin x\cos x+3\sin^2 x=3$.

15. $4\sin^2 x+3\sin x\cos x=2$. **16.** $3\sin^2 3x+5\cos^2 3x=2(1+\sin 6x)$.

17. $\sin^4 x=1-\cos^4 x$. **18.** $\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x=3\cos^2 x$.

19. $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{13}{16}+\operatorname{tg} x$. **20.** $2\sin^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}=3$.

21. $8\sin^3 x+4\cos^2 x=1+6\sin x$.

Ответы

1. $x=\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

4. $x=-\frac{\pi}{18}\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. **5.** $x=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

6. $x=-\frac{\pi}{16}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$. **7.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

8. $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **9.** $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

10. $x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **11.** $x=\pi n$, $x=-\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

12. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **13.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

14. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$ **15.** $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

16. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$

17. $x = \pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **18.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

19. $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n,\ x = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **20.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$

21. $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

§ 12. Решение уравнений с помощью введения вспомогательного угла, методом замены неизвестного и разложения на множители, с помощью формул понижения степени

Справочные сведения

1. ***Метод введения вспомогательного угла.***

Рассмотрим уравнение вида

$$a\sin x + b\cos x = c. \tag{1}$$

Будем считать, что $a \neq 0$, $b \neq 0$ (в противном случае получаем простейшее тригонометрическое уравнение вида $\sin x = \frac{c}{a}$ или $\cos x = \frac{c}{b}$).

Если $c = 0$, то уравнение (1) является однородным и при $a \neq 0$ равносильно уравнению $a\operatorname{tg} x + b = 0$ (см. § 11).

В §4 (пример 16) был изложен метод введения вспомогательного угла для преобразования выражения вида $a\sin x + b\cos x$ и было установлено, что

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi), \tag{2}$$

где φ — такой угол, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Используя (2), запишем уравнение (1) в виде $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) = c$ или

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{4}$$

Уравнение (4) (и равносильное ему уравнение (1)) имеет корни тогда и только тогда, когда $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$, т. е.

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2. \tag{5}$$

Если условие (5) выполнено, то уравнение (1) имеет следующие корни:

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z},$$

где φ определяется формулами (3).

Если же условие (5) не выполнено, т. е. $c^2 > a^2 + b^2$, то уравнение (1) не имеет корней.

2. ***Метод замены неизвестного.***

а) *Замена* $t = \sin x + \cos x$. Если уравнение имеет вид

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin 2x + c = 0, \qquad a \neq 0, \tag{6}$$

то, полагая $t = \sin x + \cos x$ и учитывая, что

$$\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = t^2 - 1,$$

сведем уравнение (6) к квадратному уравнению вида

$$at + b(t^2 - 1) + c = 0.$$

Уравнения вида

$$a(\sin x - \cos x) + b \sin 2x + c = 0$$

решаются аналогично с помощью подстановки $\sin x - \cos x = t$. Эта же подстановка позволяет свести к алгебраическому уравнению уравнение вида

$$a(\sin^3 x - \cos^3 x) + b(\sin x - \cos x) + c \sin 2x + d = 0.$$

б) *Замена* $t = \cos 2x$. Такую замену можно применять при решении уравнений вида

$$a \cos 2x + b \cos^2 x + c = 0 \quad \text{и} \quad a \cos 2x + b \sin^2 x + c = 0,$$

которые сводятся к простейшим тригонометрическим уравнениям вида $\cos 2x = m$, если воспользоваться формулами удвоения аргумента

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(1 + t),$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(1 - t).$$

в) *Замена* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Если в тригонометрическом уравнении $F(x) = 0$ левая часть является рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$, т. е. ее можно представить в виде $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены от $\sin x$ и $\cos x$, то это уравнение сводится к алгебраическому уравнению относительно $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, поскольку

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{7}$$

Однако следует иметь в виду, что использование подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ при решении тригонометрических уравнений часто приводит к трудной задаче нахождения корней многочлена степени $n > 2$. Поэтому указанную подстановку, как правило, применяют лишь в том случае, когда не видно других путей решения уравнения.

Отметим еще, что формулы (7) теряют смысл, если $\cos\frac{x}{2} = 0$, т. е. если $x = \pi(2n+1)$. Поэтому при решении уравнений с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ следует проверить, не являются ли значения $x = \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, корнями исходного уравнения.

3. ***Метод разложения на множители.***

Одним из наиболее употребительных методов решения тригонометрических уравнений является метод разложения на множители. Этим методом можно решать уравнения следующих видов:

$\sin(ax+\alpha) = \sin(bx+\beta)$,
$\cos(ax+\alpha) = \cos(bx+\beta)$,
$\sin(ax+\alpha) = \cos(bx+\beta)$,

используя формулы разности (суммы) синусов или косинусов (см. формулы (15)–(18) из § 4), а также некоторые уравнения вида

$\sin ax \cos bx = \sin cx \cos dx$,

предварительно преобразовав произведения тригонометрических функций в суммы по формулам (21)–(23) из § 4.

4. ***Использование формул понижения степени.***

При решении тригонометрических уравнений находят широкое применение формулы понижения степени $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ и $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить уравнение $4\sin x + 3\cos x = 5$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{4^2+3^2} = 5$, получим равносильное уравнение

$$\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = 1.$$

Пусть φ — такой угол, что $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. Так как $\sin\varphi > 0$, $\cos\varphi > 0$, то в качестве φ можно взять $\varphi = \arcsin\frac{3}{5}$ или $\varphi = \arccos\frac{4}{5}$. Получаем уравнение $\sin(x+\varphi) = 1$, откуда $x = -\arcsin\frac{3}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$.

Решение. Это — уравнение вида (1), в котором $a = b = 1$, $c = \frac{3}{2}$. Так как $a^2+b^2 = 2$, $c^2 = \frac{9}{4}$, то $c^2 > a^2+b^2$ и поэтому уравнение не имеет корней.

Пример 3. Решить уравнение $\sin 2x - 2(\sin x + \cos x) - 1 = 0$.

Решение. Пусть $\sin x + \cos x = t$, тогда $t^2 = 1 + \sin 2x$ и уравнение можно записать в виде $t^2 - 2t - 2 = 0$, откуда $t_1 = 1 + \sqrt{3}$, $t_2 = 1 - \sqrt{3}$.

Если $t = 1+\sqrt{3}$, то $\sin x + \cos x = 1 + \sqrt{3}$. Это уравнение не имеет решений, так как $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ и поэтому $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$, а его правая часть больше двух.

Если $t = 1 - \sqrt{3}$, то получаем уравнение $\sin x + \cos x = 1 - \sqrt{3}$, которое равносильно уравнению

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Так как $\left|\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right| < 1$, то это уравнение имеет корни, определяемые из равенства

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \pi n.$$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 4. Решить уравнение $2(\sin^3 x - \cos^3 x) + \cos x - \sin x = 0$.

Решение. Пусть $\sin x - \cos x = t$; тогда

$$t^2 = 1 - 2\sin x \cos x, \qquad \sin x \cos x = \frac{1}{2}(1 - t^2),$$

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = \\ = t\left(1 + \frac{1}{2}(1 - t^2)\right) = \frac{t}{2}(3 - t^2)$$

и данное уравнение примет вид

$$t(3 - t^2) - t = 0 \quad \text{или} \quad t(t^2 - 2) = 0,$$

откуда $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{2}$, $t_3 = -\sqrt{2}$. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности следующих трех уравнений

$$\sin x - \cos x = 0,$$
$$\sin x - \cos x = \sqrt{2},$$
$$\sin x - \cos x = -\sqrt{2}.$$

Первое уравнение, равносильное уравнению $\operatorname{tg} x = 1$, имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Второе уравнение можно записать в виде $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1$ или $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, откуда $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Аналогично, третье уравнение преобразуется к виду $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 5. Решить уравнение $\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x$.

Решение. Пусть $\cos 2x = t$; тогда $4\sin^4 x = (1 - t)^2$, $8\cos^6 x = (1 + t)^3$ и уравнение примет вид

$$t + (1 - t)^2 = (1 + t)^3 \quad \text{или} \quad t^3 + 2t^2 + 4t = t(t^2 + 2t + 4) = 0,$$

откуда получаем $t = 0$, т. е. $\cos 2x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. Уравнение $t^2 + 2t + 4 = 0$ не имеет действительных корней.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 6. Решить уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$.

Решение. Это уравнение можно решить с помощью замены $\cos 2x = t$, записав его в виде $\left(\frac{1 - t}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 + t}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$ или, после упрощений, в виде $t^2 = 0$. Итак, $\cos 2x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Воспользовавшись равенством $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$ (§ 4, пример 4, б), можно преобразовать уравнение к виду $\sin^2 2x = 1$ или $\cos 2x = 0$.

Пример 7. Решить уравнение $\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2$.

Решение. Заметим, что значения $x = \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ не являются корнями исходного уравнения. Воспользуемся подстановкой $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и запишем уравнение в виде

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{t} = 2.$$

Так как числа $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, являющиеся корнями уравнения $\sin\frac{x}{2} = 0$, не удовлетворяют исходному уравнению, то $t \neq 0$. Поэтому полученное нами алгебраическое уравнение равносильно уравнению

$$2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Преобразуем это уравнение, учитывая, что $t = 1$ — его корень. Получим

$$2(t^3 - t^2) - (t^2 - t) + (t - 1) = 0, \qquad (t-1)(2t^2 - t + 1) = 0,$$

откуда $t = 1$, т. е. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 8. Решить уравнение $\cos^4 x + \sin^8 x = 1$.

Решение. С помощью подстановки $t = \sin^2 x$ уравнение приводится к алгебраическому уравнению $(1-t)^2 + t^4 = 1$, которое равносильно каждому из уравнений

$$t^4 + t^2 - 2t = 0, \qquad t(t^3 + t - 2) = 0,$$
$$t(t-1)(t^2 + t + 2) = 0, \qquad t(t-1) = 0,$$

откуда находим $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Если $t = 0$, то $\sin x = 0$, $x = \pi n$. Если $t = 1$, то $\sin^2 x = 1$, $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Полученные серии корней можно объединить в одну: $x = \frac{\pi}{2} m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Пример 9. Решить уравнение $\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} = \sin x - \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{7}{4}$.

Решение. Пусть $\sin x - \dfrac{1}{\sin x} = t$; тогда $t^2 = \sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} - 2$ и уравнение преобразуется к виду $t^2 + 2 = t + \dfrac{7}{4}$ или $\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$, откуда $t = \dfrac{1}{2}$, т. е.

$$\sin x - \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}, \qquad 2\sin^2 x - \sin x - 2 = 0, \qquad \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Так как уравнение $\sin x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ не имеет корней, то исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x = -\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$.

Ответ. $x = (-1)^{n+1} \arcsin \dfrac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sin\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{2}\right).$$

Решение. Положим $\dfrac{\pi}{5} - \dfrac{x}{2} = t$; тогда $x + \dfrac{3\pi}{5} = \pi - 2\left(\dfrac{\pi}{5} - \dfrac{x}{2}\right) = \pi - 2t$ и уравнение примет вид

$$\sin(\pi - 2t) = 2\sin t \quad \text{или} \quad \sin 2t = 2\sin t$$

или

$$2\sin t(\cos t - 1) = 0.$$

Так как корни уравнения $\cos t = 1$ содержатся среди корней уравнения $\sin t = 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению $\sin t = \sin\left(\dfrac{\pi}{5} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, откуда $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{5} = \pi n$, $x = \dfrac{2\pi}{5}(1 + 5n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \dfrac{2\pi}{5}(1 + 5n),\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 11. Решить уравнение $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$.

Решение. Вынося общий множитель первого и третьего слагаемых, запишем уравнение в виде

$$2\cos 2x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \quad \text{или} \quad (2\cos 2x - 1)(\sin x + 1) = 0.$$

Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$, $\sin x = -1$.

Ответ. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 12. Решить уравнение $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$.

Решение. Левая и правая части уравнения имеют общий множитель $\cos x + \sin x$, так как

$$\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x),$$
$$\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x).$$

Поэтому исходное уравнение, записанное в виде

$$(\cos x + \sin x)[1 + (\sin x - \cos x) - \cos x \sin x] = 0,$$

равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0, \\ 1 + (\sin x - \cos x) - \cos x \sin x = 0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение имеет корни $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Второе уравнение заменой $\sin x - \cos x = t$ приводится к уравнению $t^2 + 2t + 1 = 0$, откуда $t = -1$, т. е. $\sin x - \cos x = -1$ или

$$\sin x + 1 - \cos x = 0,$$
$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Если $\sin\frac{x}{2} = 0$, то $x = 2\pi n$, а если $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0$, то $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 13. Решить уравнение $\cos 3x + \sin 5x = 0$.

Решение. Используя формулу $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и формулу суммы косинусов, преобразуем данное уравнение:

$$\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 14. Решить уравнение $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$.

Решение. Преобразуя произведения тригонометрических функций в сумму (разность) с помощью формулы (21) из § 4, запишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 4x) = \frac{1}{2}(\sin 12x + \sin 6x) \quad \text{или} \quad \sin 12x + \sin 4x = 0.$$

Разложим левую часть этого уравнения на множители, применив формулу суммы синусов:

$$2\sin 8x\cos 4x = 0.$$

Так как $\sin 8x = 2\sin 4x\cos 4x$, то исходное уравнение можно заменить равносильным уравнением $\sin 8x = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 15. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x} = \frac{\cos 5x}{\sin 2x}.$$

Решение. Уравнение равносильно каждому из следующих уравнений:

$$\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\sin 2x} = 0, \qquad \frac{\sin 4x\sin x}{\sin 2x} = 0.$$

Так как $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$, а ОДЗ уравнения определяется условием $\sin 2x \neq 0$, то $\sin x \neq 0$, и исходное уравнение равносильно уравнению $\cos 2x = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 16. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, используя формулу $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ и формулу суммы косинусов. Получим

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} = 1 + \cos 3x\cos x.$$

Исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$1 + \cos 3x\cos x = \sin^2 3x,$$
$$\cos^2 3x + \cos 3x\cos x = 0,$$
$$\cos 3x\cos 2x\cos x = 0.$$

Следовательно, оно равносильно совокупности трех уравнений:

$$\cos 3x = 0,$$
$$\cos 2x = 0,$$
$$\cos x = 0.$$

Корнями первого из них являются числа $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, а корнями второго — числа $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. Корни уравнения $\cos x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\cos 3x = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 17. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

Решение. Используя формулы $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$, $2\sin^2 x = 1-\cos 2x$, а также формулу суммы косинусов, последовательно преобразуем данное уравнение:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2},$$

$$\cos 2x + \cos 8x + \cos 4x + \cos 6x = 0,$$

$$\cos 5x(\cos x + \cos 3x) = 0, \qquad \cos 5x \cos 2x \cos x = 0.$$

Заметим, что все корни уравнения $\cos x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\cos 5x = 0$. Действительно, если $\cos 5x = 0$, то $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$. Полагая $k = 5n+2$, получаем $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} + \pi n = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\cos 5x = 0$, $\cos 2x = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 18. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Решение. Применяя формулы понижения степени, запишем уравнение в виде

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Исходное уравнение равносильно каждому из следующих уравнений:

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x = 1,$$

$$1 + \sin 2x - \cos 2x = 0,$$

$$2\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 0,$$

$$\sin x(\sin x + \cos x) = 0,$$

откуда находим $x = \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Задачи

Решить уравнение (1–21):

1. $\cos 3x = 1 + \sin 3x$.

2. $3\sin x + 4\cos x = \sqrt{26}$.

3. $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$.

4. $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$.

5. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x$.

6. $\operatorname{ctg} x = 1 + 2\cos 2x$.

7. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \cos 2x$.

8. $\sin x \cos x = 6(\sin x - \cos x - 1)$.

9. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

10. $\sin^3 x - \cos^3 x + \cos 2x = 0$.

11. $\sin 3x = \cos 2x$.

12. $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$.

13. $\sin 2x + \cos 2x + \cos x + \sin x + 1 = 0$.

14. $\cos^2 2x + \dfrac{1}{\cos^2 2x} = \cos 2x - \dfrac{1}{\cos 2x} + 4$.

15. $\sin\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{10}\right) = 3\sin\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}\right)$.

16. $\cos 7x \cos 13x = \cos x \cos 19x$.

17. $\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

18. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \dfrac{3}{2}$.

19. $\sin^2 2x + \sin^2 4x = \sin^2 6x$.

20. $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

21. $\operatorname{tg} x + \sin 2x = 2$.

Ответы

1. $x = \dfrac{2\pi n}{3}$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** Нет корней.

3. $x = 2\pi n$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **4.** $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \dfrac{3\pi}{20} + \dfrac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.** $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. **8.** $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

9. $x = 2\pi n$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

10. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

11. $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5}$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **12.** $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

13. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

14. $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos(1 - \sqrt{2}) + \pi n$, $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

15. $x = \dfrac{3\pi}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

16. $x = \dfrac{\pi n}{12}$, $n \in \mathbf{Z}$.

17. $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

18. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **19.** $x = \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$.

20. $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $x = \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$. **21.** $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

§ 13. Уравнения, решаемые с помощью оценки их левой и правой частей. Уравнения, содержащие знаки корня и модуля

Справочные сведения

1. ***Оценка левой и правой части уравнения.***

Решение некоторых тригонометрических уравнений основывается на неравенствах

$$|\sin x| \leqslant 1, \qquad |\cos x| \leqslant 1.$$

Кроме этих неравенств могут оказаться полезными неравенства

$$\cos^{2k} x \leqslant \cos^2 x, \qquad \sin^{2n} x \leqslant \sin^2 x, \tag{1}$$

справедливые для любых $x \in \mathbf{R}$ и для любых натуральных k и n. Складывая неравенства (1), получаем

$$\cos^{2k} x + \sin^{2n} x \leqslant 1, \tag{2}$$

причем неравенство (2) является строгим при $x \neq \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Если $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, то справедливо равенство

$$\cos^{2k} x + \sin^{2n} x = 1, \tag{3}$$

т. е. числа $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, и только они, являются корнями уравнения (3) при любых $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$.

Если уравнение имеет вид

$$f^2(x) + g^2(x) = 0$$

или преобразуется к такому виду, то оно равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

2. ***Уравнения, содержащие знак корня.***

Если тригонометрическое уравнение имеет вид

$$\sqrt{f(x)} = g(x),$$

то, как было отмечено в § 8, такое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = [g(x)]^2, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

При решении тригонометрических уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

следует иметь в виду, что такое уравнение равносильно каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

3. ***Уравнения, содержащие знак модуля.***

При решении тригонометрических уравнений, содержащих знак модуля, следует иметь в виду, что

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Примеры с решениями

Пример 1. Решить уравнение $\cos^4 x + \sin^8 x = 1$.

Решение. В § 12 (см. пример 8) решение этого уравнения было получено с помощью подстановки $t = \sin^2 x$. Данное уравнение — это уравнение вида (3) при $k = 2$, $n = 4$ и поэтому его корнями являются числа $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin x \sin 5x \sin 9x = 1$.

Решение. Так как $|\sin t| \leqslant 1$ для любого t, то уравнение может иметь корни только в том случае, когда $|\sin x| = 1$, т. е. $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $5x = \frac{5\pi}{2} + 10\pi n = \frac{\pi}{2} + 2(1 + 5n)\pi$, $9x = \frac{9\pi}{2} + 18\pi n = \frac{\pi}{2} + 2(2 + 9n)\pi$, откуда $\sin 5x = 1$, $\sin 9x = 1$. Поэтому числа $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ — корни данного уравнения.

Если $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\sin 5x = -1$, $\sin 9x = -1$, $\sin x \sin 5x \sin 9x = -1$. Поэтому корни уравнения $\sin x = -1$ не являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$(\cos 6x - \cos 4x)^2 = 5 - \sin 3x. \tag{4}$$

Решение. Левая часть уравнения (4) не превосходит четырех, так как $|\cos 6x - \cos 4x| \leqslant 2$, а правая не меньше четырех. Отсюда следует, что уравнение (4) может иметь решения только при одновременном выполнении условий

$$\sin 3x = 1, \tag{5}$$

$$|\cos 6x - \cos 4x| = 2. \tag{6}$$

Если справедливо равенство (5), то

$$x = \frac{\pi(4n+1)}{6}, \tag{7}$$

$$\cos 6x = \cos \pi = -1, \tag{8}$$

$$\cos 4x = \cos\left(\frac{2\pi(4n+1)}{3}\right). \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что равенство (6) верно только тогда, когда $\cos 4x = 1$, т. е. когда число $4n+1$ делится на 3. Число вида $4n+1$ делится на 3 тогда и только тогда, когда $n = 3k+2$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$(3 - 2\cos^4 6x)(1 - \operatorname{ctg}^2 x)(1 - 3\operatorname{ctg}^2 x)(1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 3x) = 1. \tag{10}$$

Решение. Допустимые значения x определяются условиями

$$\sin 3x \neq 0, \qquad \cos 2x \neq 0. \tag{11}$$

Воспользуемся равенствами

$$1 - \operatorname{ctg}^2 x = -\frac{\cos 2x}{\sin^2 x},$$

$$1 - 3\operatorname{ctg}^2 x = \frac{4\sin^2 x - 3}{\sin^2 x} = -\frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin^3 x} = -\frac{\sin 3x}{\sin^3 x},$$

$$1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 3x = \frac{\sin x}{\sin 3x \cos 2x},$$

справедливыми при условиях (11).

Тогда уравнение (10) равносильно уравнению

$$3 - 2\cos^4 6x = \sin^4 x \tag{12}$$

при выполнении условий (11).

Так как $3 - 2\cos^4 6x \geqslant 1$, а $\sin^4 x \leqslant 1$, то уравнение (12) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ \cos^2 6x = 1, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна системе

$$\begin{cases} \cos x = 0, & (13) \\ \sin 6x = 0. & (14) \end{cases}$$

Поскольку каждый корень уравнения (13) является корнем уравнения (14), а для значений x, удовлетворяющих уравнению (13), выполняются условия (11), уравнение (13) равносильно уравнению (10).

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 5. Решить уравнение $\cos^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 4x + 1 = \sin 4x \cos 2x + \sin^2 x$.

Решение. Уравнение можно записать в виде

$$\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 4x\right)^2 + \cos^2 x = 0$$

и поэтому оно равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x \ = 0, \\ \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x. \end{cases}$$

Уравнение $\cos x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, которые не являются корнями второго уравнения системы. Поэтому исходное уравнение не имеет корней.

Пример 6. Найти все корни уравнения

$$4\sin 3x + \sqrt{2}\sin^4\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 4\cos 3x - 4\sqrt{2}, \tag{15}$$

принадлежащие отрезку $[-2\pi, 2\pi]$.

Решение. Уравнение (15) равносильно каждому из следующих уравнений:

$$4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x + 1\right) + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0,$$

$$4\left(1 + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -1, & (17) \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0. & (18) \end{cases}$$

Из (18) следует, что

$$x = -\frac{\pi}{12} + \pi n. \tag{19}$$

Подставляя найденное значение x в уравнение (17), получаем

$$\sin\left(3\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = -1. \tag{20}$$

Равенство (20) является верным в том и только в том случае, когда n — четное число. Поэтому все корни уравнения (15) определяются формулой

$$x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi k, \tag{21}$$

а отрезку $[-2\pi, 2\pi]$ принадлежат те значения x, которые получаются из формулы (21) при $k = 0$ и $k = 1$.

Ответ. $x_1 = -\frac{\pi}{12}$, $x_2 = \frac{23}{12}\pi$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sin^2 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x \cos^4 x. \tag{22}$$

Решение. Первый способ. Запишем уравнение в виде

$$\sin^2 4x - 2\sin 4x \cos^4 x + \cos^2 x = 0. \tag{23}$$

Прибавляя и вычитая в левой части уравнения (23) $\cos^8 x$, преобразуем это уравнение к виду

$$(\sin 4x - \cos^4 x)^2 + \cos^2 x(1 - \cos^6 x) = 0. \tag{24}$$

Равенство (24) является верным тогда и только тогда, когда верны равенства

$$\begin{cases} \sin 4x - \cos^4 x = 0, \\ \cos^2 x(1 - \cos^6 x) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Система (25) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} \sin 4x - \cos^4 x = 0, \\ \cos x = 0; \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} \sin 4x - \cos^4 x = 0, \\ |\cos x| = 1. \end{cases} \tag{27}$$

Если $\cos x = 0$, то $\sin 4x = 0$, и система (26) имеет решения $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, которые являются решениями уравнения (22).

Система (27) не имеет решений, так как из равенства $|\cos x| = 1$ следует, что $\sin x = 0$ и $\sin 4x = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Второй способ. Решив уравнение (22) как квадратное относительно $\sin 4x$, получаем

$$\sin 4x = \cos^4 x \pm \sqrt{\cos^2 x(\cos^6 x - 1)}. \tag{28}$$

Из (28) следует, что уравнение (22) может иметь решение лишь тогда, когда $\cos^2 x(\cos^6 x - 1) \geqslant 0$, т. е. при условии, что хотя бы одно из равенств $\cos x = 0$, $|\cos x| = 1$ является верным.

Если $\cos x = 0$, то из (28) получаем $\sin 4x = 0$. Числа $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ являются решениями уравнения (22). Если $|\cos x| = 1$, то $\sin x = 0$ и $\sin 4x = 0$, но из (28) следует, что $\sin 4x = \frac{1}{2}$. Итак, снова получаем, что числа $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, и только они, являются корнями уравнения (22).

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{6 \sin x \cos 2x} = \sqrt{-7 \sin 2x}. \tag{29}$$

Решение. Возведя обе части уравнения (29) в квадрат, получаем уравнение $6 \sin x \cos x = -7 \sin 2x$, которое равносильно каждому из уравнений

$$\sin x(3 \cos 2x + 7 \cos x) = 0,$$
$$\sin x(6 \cos^2 x + 7 \cos x - 3) = 0.$$

Уравнение $\sin x = 0$ имеет корни $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, являющиеся корнями уравнения (29). Решив уравнение $6 \cos^2 x + 7 \cos x - 3 = 0$, находим $\cos x = -\frac{3}{2}$, $\cos x = \frac{1}{3}$, откуда

$$x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{30}$$

Из чисел, определяемых формулой (30), уравнению (29) удовлетворяют лишь те значения x, для которых $\sin 2x < 0$.

Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, а $\cos x = \frac{1}{3}$, то неравенство $\sin 2x < 0$ равносильно неравенству $\sin x < 0$ и поэтому в формуле (30) знак «$\pm$» следует заменить на знак «$-$».

Ответ. $x = \pi n$, $x = -\arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{7 - \cos x - 6 \cos 2x} = 4 \sin x. \tag{31}$$

Решение. Левая часть уравнения определена при всех значениях x, так как $|\cos x| \leqslant 1$, $|\cos 2x| \leqslant 1$, и неотрицательна. Возведя обе части уравнения (31) в квадрат, получим уравнение

$$7 - \cos x - 6 \cos 2x = 16 \sin^2 x, \tag{32}$$

являющееся следствием уравнения (31).

Корнями уравнения (31) являются все те и только те корни уравнения (32), которые удовлетворяют условию

$$\sin x \geqslant 0. \tag{33}$$

Иначе говоря, уравнение (31) равносильно системе, состоящей из уравнения (32) и неравенства (33).

Уравнение (32) сводится к квадратному относительно $\cos x$, если воспользоваться формулой $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Применив эту формулу, запишем уравнение (32) в виде $4\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$, откуда найдем $\cos x = 1$, $\cos x = -\frac{3}{4}$.

Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а условие (33) выполняется.

Если $\cos x = -\frac{3}{4}$, то

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}. \tag{34}$$

В том случае, когда в формуле (34) взят знак «+», $\sin x > 0$, а если взят знак «−», то $\sin x < 0$.

Отметим еще, что $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) = \pi - \arccos\frac{3}{4}$.

Ответ. $x = 2\pi n$, $x = \pi - \arccos\frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Многие абитуриенты допустили ошибку, решая уравнение (32) без учета условия (33). Это привело к появлению посторонних для уравнения (31) корней.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{7}{2} - 3\sin^2 x} = \sin x + \cos x. \tag{35}$$

Решение. Возведя обе части уравнения (35) в квадрат, получим уравнение

$$\frac{7}{2} - 3\sin^2 x = 1 + \sin 2x, \tag{36}$$

являющееся следствием уравнения (35). Уравнение (36) равносильно каждому из следующих уравнений:

$$\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x - 5 = 0. \tag{37}$$

Решив уравнение (37), находим $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -5$.

1) Если $\operatorname{tg} x = 1$, то

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n. \tag{38}$$

Пусть в формуле (38) n — четное число ($n = 2k$), тогда числа $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ — корни уравнения (35), так как $\sin x + \cos x > 0$.

Пусть n — нечетное число ($n = 2k + 1$), тогда

$$x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi. \tag{39}$$

Из (39) следует, что $\sin x < 0$, $\cos x < 0$, $\sin x + \cos x < 0$, и поэтому значения x, определяемые формулой (39), не являются корнями уравнения (35).

2) Если $\operatorname{tg} x = -5$, то

$$x = -\operatorname{arctg} 5 + \pi n. \tag{40}$$

Пусть в формуле (40) n — четное число, тогда

$$x = -\operatorname{arctg} 5 + 2\pi k. \tag{41}$$

Положим $\varphi = \operatorname{arctg} 5$, отсюда $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\sin x + \cos x = \cos\varphi - \sin\varphi < 0$, так как $\sin\varphi > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому значения x, определяемые формулой (41), не являются корнями уравнения (35).

Пусть $n = 2k + 1$, тогда числа $x = \pi - \operatorname{arctg} 5 + 2\pi k$ — корни уравнения (35), поскольку в этом случае $\sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|\cos x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin x + \cos x > 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \pi - \operatorname{arctg} 5 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 11. Решить уравнение

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}. \tag{42}$$

Решение. Так как правая часть уравнения (42) неотрицательна, то уравнение может иметь решения только в том случае, когда

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant 0. \tag{43}$$

Если освободиться от радикала возведением обеих частей уравнения (42) в квадрат, то получается уравнение

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x. \tag{44}$$

Уравнение (44) является тождеством. Однако это не означает, что уравнению (42) удовлетворяют все значения x, поскольку уравнение (44) — лишь следствие уравнения (42). Эти уравнения равносильны при выполнении условия (43). Таким образом, решениями уравнения (42) являются все значения x, удовлетворяющие неравенству (43), и только эти значения.

Решая неравенство (43), получаем

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ответ. Объединение всех отрезков вида

$$\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right], \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Замечание. Так как

$$2+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x = 2\left(1+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) = \\ = 2\left(1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right),$$

то уравнение (42) равносильно уравнению

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{x}\right) = 2\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|,$$

решениями которого являются те и только те значения x, которые удовлетворяют неравенству $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \geqslant 0$.

Пример 12. Решить уравнение

$$1+\operatorname{tg} x+\frac{1}{9}\operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}. \tag{45}$$

Решение. Допустимые значения x определяются условием $\sin 2x \neq 0$, а уравнение (45) можно записать в виде

$$1+\operatorname{tg} x+\frac{1}{9}\operatorname{ctg} x = |\operatorname{tg} x|. \tag{46}$$

Рассмотрим два случая: $\operatorname{tg} x > 0$ и $\operatorname{tg} x < 0$.

1) Если $\operatorname{tg} x > 0$, то уравнение (46) приводится к виду $\operatorname{ctg} x = -9$, откуда следует, что $\operatorname{tg} x < 0$. В данном случае решений нет.

2) Если $\operatorname{tg} x < 0$, то, полагая в (46) $t = \operatorname{tg} x$, получаем

$$18t^2+9t+1=0,$$

откуда $t_1 = -\frac{1}{6}$, $t_2 = -\frac{1}{3}$.

Ответ. $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+\pi n$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 13. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{2|\cos x|}{\cos 3x} = -1. \tag{47}$$

Решение. Положим $t = \frac{\cos 3x}{\cos x}$ и рассмотрим два возможных случая: $\cos x > 0$ и $\cos x < 0$.

а) Пусть $\cos x > 0$, тогда уравнение (47) примет вид

$$t+\frac{2}{t} = -1. \tag{48}$$

Уравнение (48), равносильное уравнению (47), не имеет действительных корней.

б) Пусть $\cos x < 0$, тогда уравнение (47) примет вид

$$t - \frac{2}{t} = -1. \qquad (49)$$

Так как $t \neq 0$, то уравнение (49), равносильное уравнению $t^2 + t - 2 = 0$, имеет корни $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Если $t = -2$, то

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x} = -2. \qquad (50)$$

Так как $\cos x \neq 0$, то уравнение (50) равносильно уравнению $\cos^2 x = \frac{1}{4}$, откуда, с учетом условия $\cos x < 0$, получаем $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Если $t = 1$, то $4\cos^2 x - 3 = 1$, $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$.

Ответ. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 14. Решить уравнение

$$\cos 3x + |\cos x| = \sin 2x. \qquad (51)$$

Решение. Возможны два случая: $\cos x \geqslant 0$ и $\cos x < 0$.

1) Пусть $\cos x \geqslant 0$, тогда уравнение (51) примет вид

$$\cos 3x + \cos x = \sin 2x.$$

Преобразуя это уравнение, получаем

$$2\cos 2x \cos x = 2\sin x \cos x, \qquad \cos x(\sin x - \cos 2x) = 0,$$
$$\cos x(2\sin^2 x + \sin x - 1) = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n. \qquad (52)$$

Если $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, то $\sin x = -1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Корни уравнения $\sin x = -1$ содержатся в серии (52).

Решив уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ с учетом условия $\cos x \geqslant 0$, находим

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n. \qquad (53)$$

2) Пусть $\cos x < 0$, тогда из (51) следует, что

$$\cos 3x - \cos x = \sin 2x, \qquad -2\sin 2x \sin x = \sin 2x.$$

Решив уравнения $\sin 2x = 0$ и $\sin x = -\frac{1}{2}$ при условии $\cos x < 0$, найдем еще две серии корней уравнения (51):

$$x = \pi + 2\pi n, \qquad (54)$$

$$x = \frac{\pi}{6} + (2n + 1)\pi. \qquad (55)$$

Серии (53) и (55) можно объединить в одну: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \pi + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 15. Решить уравнение

$$\sin 3x + |\sin x| = \sin 2x. \qquad (56)$$

Решение. Рассмотрим два случая: $\sin x \geqslant 0$ и $\sin x < 0$.

1) Если $\sin x \geqslant 0$, то $|\sin x| = \sin x$ и уравнение (56) равносильно каждому из уравнений

$$\sin 3x + \sin x = \sin 2x, \qquad 2\sin 2x \cos x = \sin 2x,$$
$$\sin 2x(2\cos x - 1) = 0, \qquad (57)$$

а уравнение (57) равносильно совокупности уравнений

$$\sin 2x = 0, \qquad (58)$$
$$\cos x = \frac{1}{2}. \qquad (59)$$

Условию $\sin x \geqslant 0$ удовлетворяют следующие две серии корней уравнения (58):

$$x = \pi n, \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbf{Z},$$

а также корни уравнения (59) такие, что

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbf{Z}. \qquad (60)$$

2) Если $\sin x < 0$, то $|\sin x| = -\sin x$ и уравнение (56) равносильно каждому из уравнений

$$\sin 3x - \sin x = \sin 2x, \qquad 2\sin x \cos 2x = \sin 2x,$$
$$\sin x(\cos 2x - \cos x) = 0. \qquad (61)$$

Так как $\sin x < 0$, то уравнение (61) равносильно каждому из уравнений

$$\cos 2x - \cos x = 0, \qquad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0,$$

откуда получаем $\cos x = 1$ (и тогда $\sin x = 0$) и

$$\cos x = -\frac{1}{2}. \qquad (62)$$

Таким образом, если $\sin x < 0$, то все корни уравнения (56) содержатся среди корней уравнения (62), т. е. среди чисел вида

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, \qquad m \in \mathbf{Z}. \qquad (63)$$

Условию $\sin x < 0$ удовлетворяют числа из формулы (63), взятые со знаком «$-$», т. е. значения

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, \qquad m \in \mathbf{Z}. \tag{64}$$

Заметим, что серии (64) и (60) можно объединить в одну: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 16. Решить уравнение

$$\frac{2\cos 3x - \cos 5x}{|\cos x|} = 1. \tag{65}$$

Решение. Здесь ОДЗ уравнения (65) определяется условием $\cos x \neq 0$. Рассмотрим два возможных случая: $\cos x > 0$ и $\cos x < 0$.

1) Если $\cos x > 0$, то все корни уравнения (65) содержатся среди корней каждого из следующих равносильных уравнений:

$$2\cos 3x - \cos 5x = \cos x,$$
$$2\cos 3x = 2\cos 3x \cos 2x, \tag{66}$$

а уравнение (66) равносильно совокупности уравнений

$$\cos 3x = 0, \tag{67}$$
$$\cos 2x = 1. \tag{68}$$

Чтобы найти корни уравнения (67), удовлетворяющие условию $\cos x > 0$, воспользуемся формулой

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cos x\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right).$$

Отсюда следует, что уравнению (67) и условию $\cos x > 0$ удовлетворяют корни уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. числа

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{69}$$

Корнями уравнения (68), удовлетворяющими условию $\cos x > 0$, являются числа

$$x = 2\pi k, \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{70}$$

2) Если $\cos x < 0$, то все корни уравнения (65) содержатся среди корней каждого из следующих уравнений:

$$2\cos 3x - 2\cos 5x = -(\cos x + \cos 5x),$$
$$2\sin 4x \sin x + \cos 3x \cos 2x = 0,$$
$$8\cos 2x \sin^2 x \cos x + \cos 2x \cos 3x = 0,$$
$$\cos 2x(8\sin^2 x \cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x) = 0,$$

$$\cos 2x\left[8(1-\cos^2 x)+4\cos^2 x-3\right]=0,$$
$$\cos 2x(4\cos^2 x-5)=0.$$

Уравнение $\cos 2x=0$ равносильно уравнению $\cos^2 x=\frac{1}{2}$, откуда (при условии $\cos x<0$) $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, \qquad k\in\mathbf{Z}. \tag{71}$$

Уравнение $4\cos^2 x=5$ не имеет корней. Таким образом, корнями уравнения (65) являются числа, определяемые формулами (69)–(71).

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x=2\pi k$, $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Задачи

Решить уравнение (1–19):

1. $2\sin^2 2x+3\cos^5 x=5$.
2. $(2\cos 2x+\cos 4x)^2=9$.
3. $(\sin x+\sin^3 x)^2=4$.
4. $\sin x\sin 3x\sin 7x=1$.
5. $\sin^4 x+\cos^8 x=\sqrt{5}-1$.
6. $(\cos 4x-\cos 2x)^2=5+\sin 3x$.
7. $\sqrt{2}\cos x=-\sqrt{3\sin x}$.
8. $\sqrt{13-18\operatorname{tg} x}=6\operatorname{tg} x-3$.
9. $\sqrt{\sin 2x}=\sqrt{\cos x-\sin x-1}$.
10. $\sqrt{7-4\sqrt{2}\sin x}=2\cos x-\sqrt{2}\operatorname{tg} x$.
11. $\sqrt{17+7\sin 2x}=3\sin x+5\cos x$.
12. $\sqrt{2\cos x-\sin x}=\operatorname{ctg} x\sqrt{\sin x}$.
13. $\sqrt{6(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x)}=-\frac{2}{\sin x}$.
14. $\sqrt{3\sin 2x}=\sqrt{-5\cos x\operatorname{ctg} x}$.
15. $\sqrt{4\sin x+\cos 2x+5}=2\sqrt{2}\cos x$.
16. $|\operatorname{ctg} x|=\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}$.
17. $\cos 3x+|\cos x|=\sin 2x$.
18. $\frac{(\sqrt{3}+1)\sin 3x+\sin 5x}{|\sin x|}=\sqrt{3}$.
19. $\frac{\sin 3x}{|\sin x|}+\frac{3\sin x}{\sin 3x}=-2$.

Ответы

1. Нет корней. **2.** $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

4. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **5.** Нет корней. **6.** $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

7. $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **8.** $x=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

9. $x=2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.** $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

11. $x=-\frac{\pi}{8}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{8}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **12.** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

13. $x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **14.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \arccos\frac{2}{3} + \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

15. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

16. $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **17.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \pi + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

18. $x = \alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, α принимает значения $-\frac{7\pi}{12},\ -\frac{5\pi}{12},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$.

19. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

§ 14. Тригонометрические уравнения различных видов

Примеры с решениями

Пример 1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right),$$

полученной в § 4 (см. замечание к примеру 9). Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 1\right] = 0.$$

Ответ. $x = \pi n,\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = \frac{1}{8}$.

Решение. Используя тождество

$$\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = \cos^3 2x$$

(см. § 4, пример 5), запишем уравнение в виде $\cos^3 2x = \frac{1}{8}$, откуда находим $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$.

Решение. Используя тождество

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{32}(\cos^2 4x + 14\cos 4x + 17)$$

(см. § 4, пример 4, в), запишем данное уравнение в виде

$$\cos^2 4x + 14\cos 4x = 0,$$

откуда находим $\cos 4x = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$2\cos 3x = 3\sin x + \cos x. \qquad (1)$$

Решение. Первый способ. Запишем уравнение (1) в виде

$$2(\cos 3x + \cos x) = 3(\cos x + \sin x). \qquad (2)$$

Так как

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos x\cos 2x, \qquad \cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x),$$

то уравнение (2) равносильно совокупности уравнений

$$\cos x + \sin x = 0, \qquad (3)$$
$$4\cos^2 x - 4\cos x\sin x - 3 = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (3) имеет корни $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, а уравнение (4) сводится к однородному

$$3\sin^2 x + 4\cos x\sin x - \cos^2 x = 0,$$

которое равносильно уравнению

$$3\,\mathrm{tg}^2\, x + 4\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0,$$

откуда $\mathrm{tg}\, x = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{7}-2}{3} + \pi n$, $x = -\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{7}+2}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Второй способ. Уравнение (1) можно последовательно преобразовать так:

$$2(\cos 3x - \sin x) = \cos x + \sin x,$$
$$2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \sin x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right),$$
$$4\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

Дальнейшие действия очевидны.

Третий способ. Используя формулу $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, последовательно преобразуем уравнение (1):

$$8\cos^3 x - 7\cos x - 3\sin x = 0,$$
$$4\cos x(2\cos^2 x - 1) - 3(\cos x + \sin x) = 0,$$
$$4\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - 3(\cos x + \sin x) = 0,$$
$$(\cos x + \sin x)(4\cos^2 x - 4\cos x \sin x - 3) = 0.$$

Снова убеждаемся в том, что уравнение (1) равносильно совокупности уравнений (3), (4).

Пример 5. Найти все значения x из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\sin 6x}{\cos x + \sin x} = \frac{\cos 6x}{\cos x - \sin x}. \tag{5}$$

Решение. Так как $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \cos 2x$, то ОДЗ уравнения (5) определяется условием $2x \neq 0$, т. е.

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \qquad n \in \mathbf{Z}. \tag{6}$$

При выполнении условия (6) уравнение (5) равносильно каждому из уравнений:

$$\sin 6x \cos x - \cos 6x \sin x = \cos 6x \cos x + \sin 6x \sin x, \quad \sin 5x = \cos 5x,$$
$$\operatorname{tg} 5x = 1. \tag{7}$$

Уравнение (7) имеет корни

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, \qquad n \in \mathbf{Z}. \tag{8}$$

Неравенству $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и условию (6) могут удовлетворять лишь те значения x, определяемые формулой (8), которые соответствуют значениям n, равным 0, 1, и 2. Придавая n эти значения, по формуле (8) находим числа $x_0 = \frac{\pi}{20}$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{9}{20}\pi$, из которых лишь x_0 и x_2 удовлетворяют условию (6).

Ответ. $\frac{\pi}{20}$, $\frac{9}{20}\pi$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x} - \frac{\cos 3x}{\cos 2x} = \frac{2}{\cos 3x}.$$

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{\sin x}{\sin 4x} = \frac{1}{\cos 3x}, \tag{9}$$

а допустимые значения x для уравнения (9) определяются условиями

$$\sin 4x \cos 3x \neq 0. \tag{10}$$

При выполнении условия (10) уравнение

$$\sin x \cos 3x = \sin 4x$$

является следствием уравнения (9) и равносильно уравнению

$$\sin 3x \cos x = 0. \tag{11}$$

Корнями уравнения (9) являются все те и только те корни уравнения (11), которые удовлетворяют условиям (10).

Так как $\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x) = \sin x(1 + 2\cos 2x)$, а $\sin x \cos x \neq 0$ в силу (10), то из (11) следует, что

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}. \tag{12}$$

Корни уравнения (12) удовлетворяют условиям (10) и являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x + 18|\operatorname{tg} x| = 0. \tag{13}$$

Решение. Пусть $t = \operatorname{tg} x$, тогда $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{t}$, $\operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - t^2}{2t}$ и уравнение (13) примет вид

$$\frac{1}{t} + \frac{t^2 - 1}{2t} + 18|t| = 0. \tag{14}$$

1) Если $t > 0$, то из (14) следует, что $37t^2 + 1 = 0$. Это уравнение не имеет корней. Поэтому уравнение (13) не имеет корней в случае, когда $\operatorname{tg} x > 0$.

2) Если $t < 0$, то из уравнения (14) следует, что $35t^2 = 1$, откуда

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{35}, \qquad \sin^2 x = \frac{1}{36}.$$

Если $\sin x = \frac{1}{6}$, то либо $x = \arcsin\frac{1}{6} + 2\pi n$ и, значит, $t = \operatorname{tg} x > 0$, либо $x = -\arcsin\frac{1}{6} + (2n + 1)\pi$ и, значит, $\operatorname{tg} x < 0$.

Если $\sin x = -\frac{1}{6}$, то либо $x = -\arcsin\frac{1}{6} + 2\pi k$ и, значит, $\operatorname{tg} x < 0$, либо $x = \pi \arcsin\frac{1}{6} + 2\pi k$ и, значит, $\operatorname{tg} x > 0$.

Ответ. $x = -\arcsin\frac{1}{6} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = \frac{8}{\sin 2x}. \tag{15}$$

Решение. Допустимые значения x определяются условиями

$$\cos x \neq 0, \qquad \cos 3x \neq 0, \qquad \sin 2x \neq 0. \tag{16}$$

Преобразуем уравнение (15):

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{8}{2\sin x \cos x},$$

$$\frac{\sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x}{\cos x \cos 3x} = \frac{4}{\sin x \cos x}, \qquad -\frac{\sin 2x}{\cos 3x} = \frac{4}{\sin x},$$

$$-\sin 2x \sin x = 4\cos 3x. \tag{17}$$

Уравнение (17) является следствием уравнения (15), а при выполнении условий (16) оно равносильно уравнению (15).

Применив формулу $\cos 3x = \cos x(1 - 4\sin^2 x)$, запишем уравнение (17) в виде

$$-2\sin^2 x \cos x = 4(1 - 4\sin^2 x)\cos x,$$

или

$$\sin^2 x = 2(4\sin^2 x - 1), \tag{18}$$

так как $\cos x \neq 0$ в силу условий (16).

Используя формулу $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, преобразуем уравнение (18) к виду $\cos 2x = \frac{3}{7}$, откуда $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{7} + \pi k$. Найденные значения x удовлетворяют условиям (16) и являются корнями уравнения (15).

Ответ. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{7} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} 2x + 3\operatorname{tg} 3x = 2\operatorname{tg} x + \frac{2}{\sin 4x}. \tag{19}$$

Решение. Допустимые значения x определяются условиями

$$\cos 3x \neq 0, \qquad \sin 4x \neq 0. \tag{20}$$

Используя равенства

$$\frac{2}{\sin 4x} - \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sin 2x \cos 2x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{tg} 2x,$$

запишем уравнение (19) в виде

$$3(\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x \tag{21}$$

или

$$\frac{3\sin 2x}{\cos 3x\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x\cos 2x}. \tag{22}$$

При выполнении условий (20) уравнение (22) равносильно каждому из следующих уравнений:

$$3\sin 2x\cos 2x = \sin x\cos 3x,$$

$$6\cos x\cos 2x = \cos 3x. \tag{23}$$

Применив формулу $\cos 3x = \cos x(2\cos 2x - 1)$, запишем уравнение (23) в виде

$$\cos x(4\cos 2x + 1) = 0. \tag{24}$$

Так как $\cos x \neq 0$ в силу условий (20), то из (24) следует, что $\cos 2x = -\frac{1}{4}$.

Ответ. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Замечание. Выразив $\operatorname{tg} 2x$ и $\operatorname{tg} 3x$ через $\operatorname{tg} x$, преобразуем уравнение (21) к виду $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x + 1)(3\operatorname{tg}^2 x - 5) = 0$, откуда следует, что $\operatorname{tg}^2 x = \frac{5}{3}$ или $\cos 2x = -\frac{1}{4}$.

Пример 10. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin 5x}. \tag{25}$$

Решение. Допустимые значения x определяются условиями

$$\cos 2x \neq 0, \qquad \sin 5x \neq 0, \tag{26}$$

так как $\sin x \neq 0$, если $\sin 5x \neq 0$.

Считая условия (26) выполненными, преобразуем последовательно уравнение (25):

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 5x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x},$$

$$\frac{\sin 5x - \sin x}{\sin x\sin 5x} = \frac{\cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x}{\sin x\cos 2x}, \qquad \frac{2\sin 2x\cos 3x}{\sin 5x} = \frac{\cos 3x}{\cos 2x},$$

$$\cos 3x(\sin 5x - \sin 4x) = 0, \qquad 2\cos 3x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{9}{2}x = 0.$$

Если $\sin\frac{x}{2} = 0$, то $\sin x = 0$. Поэтому решение сводится к нахождению тех корней уравнений $\cos 3x = 0$, $\cos\frac{9x}{2} = 0$, которые удовлетворяют условиям (26).

Уравнение $\cos 3x = 0$ имеет корни

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \tag{27}$$

а уравнение $\cos\dfrac{9x}{2}=0$ имеет корни

$$x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{9}. \qquad (28)$$

Серия корней (27) удовлетворяет условиям (26). Для серии корней (28) условие $\cos 2x\neq 0$ выполняется, а равенство

$$\sin 5x=\sin\frac{5(2k+1)\pi}{9}=0$$

является верным тогда и только тогда, когда $\dfrac{5(2k+1)}{9}=m$, где k, m — целые числа. Так как числа 5 и 9 взаимно просты, то число $\dfrac{5}{9}(2k+1)$ является целым в том и только в том случае, когда $2k+1=9p$, где p — целое число.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3}$; $x=\dfrac{\pi(2k+1)}{9}$, $2k+1\neq 9p$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$, $p\in\mathbf{Z}$.

Задачи

Решить уравнение (1–15):

1. $\dfrac{\sin x}{\sin 3x}+\dfrac{\sin 5x}{\sin x}=8\cos x\cos 3x$.

2. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\sin 3x}=2\cos 2x$.

3. $\operatorname{arctg} 3x=\arccos 8x$.

4. $2\arcsin 2x=\arccos 7x$.

5. $\dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}{\cos x+3\cos 2x}=\operatorname{ctg} 2x$.

6. $\dfrac{2\cos x+\sin^2 x}{\operatorname{ctg} x-\sin 2x}=\operatorname{tg} 2x$.

7. $2\cos 2x=\sin x\sin 3x-\sin^2 3x$.

8. $\operatorname{tg} 5x-2\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 5x\operatorname{tg}^2 3x$.

9. $3\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg} x+4\sin 2x=0$.

10. $\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}+\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 3x}$.

11. $3\cos x=\sin x+2\sin 3x$.

12. $2\sin 3x-\dfrac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\dfrac{1}{\cos x}$.

13. $\dfrac{\sin^2 5x}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 5x}{\cos^2 x}=8\cos 2x$.

14. $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\cos 2x\right)=\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi\sin x\right)$.

15. $\sin^{10} x+\cos^{10} x=\dfrac{29}{16}\cos^4 2x$.

16. Найти все корни уравнения $\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{\cos 6x}=\dfrac{\sqrt{3}\sin x+\cos x}{\sin 6x}$, принадлежащие интервалу $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

Ответы

1. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$.

4. $x=\dfrac{1}{8}$. **5.** $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $x=\pm\arccos\dfrac{5}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

6. $x=\pi\pm\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **7.** $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

8. $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **9.** $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.** $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

11. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{8} + (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$

12. $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$

13. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}.$

14. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \pm \arcsin(2-\sqrt{3}) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

15. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}.$ **16.** $-\frac{11}{30}\pi.$

Задачи к главе IV

Решить уравнение (1–128):

1. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$

2. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$

3. $\sin x = 2\cos x.$

4. $3\sin x + 2\cos x = 0.$

5. $3\cos^2 x + \cos x - 4 = 0.$

6. $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0.$

7. $2\cos^2 x - 3\sin x = 0.$

8. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0.$

9. $4\sin^2 x + 5\sin x\cos x - \cos^2 x = 2.$

10. $\sin 3x - \sin x = 0.$

11. $\cos x - \cos 3x = 0.$

12. $3\sin x + 4\cos x = 2.$

13. $4\sin x - 3\cos x = 2.$

14. $\sin 5x = \cos x.$

15. $\cos 5x = \sin x.$

16. $\cos x + \cos 3x = \cos 2x.$

17. $\sin x + \sin 3x = \sin 2x.$

18. $5\sin^2(x+\pi) = 3[1 - \cos(x-\pi)].$

19. $10\cos^2 x - 16\sin x = 16 - \cos 2x.$

20. $2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2} - 2\sin x)\sin x.$

21. $5\sin x + \frac{3}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \cos 2x - 3\sin^2 x.$

22. $\sin x + \cos x = 5\sin x\cos x + \frac{5}{2}.$

23. $2\cos^2 3x + \sin 5x = 1.$

24. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$

25. $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1.$

26. $\sqrt{2}\sin 3x - \sin 2x = \cos 2x.$

27. $\sin 2x - \cos 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x.$

28. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 4\sin x.$

29. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$

30. $3\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg} 2x = 0.$

31. $2 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 2\cos 2x.$

32. $\operatorname{tg}^2 3x = 2\sin^2 3x.$

33. $2\cos^2 x = 1 + 4\sin 4x.$

34. $2\sin^2 x = 1 - 3\sin 4x.$

35. $\sin 7x + \sin 5x = 4\sin 3x.$

36. $\cos 7x - \cos 5x = 4\cos 3x.$

37. $\cos 4x - \sin 2x = 1.$

38. $2\cos 2x = \sin 3x\sin x - \sin^2 3x.$

39. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = \cos x\sin 3x.$

40. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\sin 4x.$

41. $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

42. $\operatorname{tg}^2 4x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}.$

43. $\cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0.$

44. $\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = 0.$

45. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0.$

46. $5\sin 2x + 4\cos^3 x - 8\cos x = 0.$

47. $\cos^4 x + \cos^3 x\sin x + 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^3 x\cos x + \sin^4 x = 2.$

48. $\sin x(1-\cos x)^2 + \cos x(1-\sin x)^2 = 2.$

49. $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x.$

50. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

51. $2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 6\sin 2x - 5\sin^2 2x$.

52. $8(\sin^5 x\cos x + \cos^5 x\sin x) + 3\sin 2x = 0$.

53. $\sin^2 2x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{9}{2}\cos 2x$.

54. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} 4x = 0$.

55. $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} 2x = \cos x + \sin 2x$.

56. $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = 2\operatorname{ctg} 4x$.

57. $2\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = \sin 2x + 3\sin x$.

58. $\frac{\cos 2x + \cos x}{\sin 2x - \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} 2x$.

59. $\sin 4x - \sin 3x = 2\sin 2x - 3\sin x$.

60. $\sin x\cos 5x + \sin 3x\cos 9x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \sin 12x)$.

61. $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = \operatorname{tg} x\cos 3x$.

62. $\sin 3x = 3\sin x$.

63. $\sin^2 x - \cos x\cos 3x = \frac{1}{4}$.

64. $\cos^2 x - 2\cos x = 4\sin x - \sin 2x$.

65. $2\sin 2x - \cos 2x = 2\sqrt{2}\sin x$.

66. $\cos^2 x = 2 - \cos x\cos 7x$.

67. $\operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

68. $6\cos 2x\sin x + 7\sin 2x = 0$.

69. $\sin 2x - \sin 4x = \frac{7}{8}\operatorname{ctg} 3x$.

70. $2\sin 2x(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 3\sin^2 x - \cos^2 x$.

71. $\cos 2x + \sin 2x + \cos x - \sin x = 1$.

72. $4\cos^2 x - 2 = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

73. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

74. $\sin 3x - 4\sin x\cos 2x = 0$.

75. $2\cos^2 x + \cos x - \cos\frac{x}{2} = 1$.

76. $\frac{\sin^3\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2}}{2 + \sin x} = \frac{1}{3}\cos x$.

77. $(\sin^4 x + \cos 2x)\operatorname{ctg} 4x = \frac{\cos 5x + \cos 3x}{16\sin 4x}$.

78. $3(\sin x + \cos x) = 2\sin 2x$.

79. $\left(\cos\frac{x}{2} - 2\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right)\cos x = 0$.

80. $\sin x = 2 + \sin x\cos 6x$.

81. $8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 1 + \frac{1}{\cos x}$.

82. $2\sin 11x + \sqrt{3}\sin 7x + \cos 7x = 0$.

83. $\cos^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

84. $9\cos 2x + 8(\cos^4 x - \cos 4x) = 0$.

85. $\cos 3x\operatorname{tg} 5x = \sin 7x$.

86. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x = 2\operatorname{ctg} 4x$.

87. $5\sin^2 x - 4\sin^4 x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

88. $2\sin x\sin 2x\sin 3x = \sin 4x$.

89. $8\cos 4x\cos 2x\cos x = 1$.

90. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 2x + \cos^4 2x$.

91. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x\cos x} = 5$.

92. $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

93. $\sin x + 2\sin 3x = 3\cos x$.

94. $\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x\sin 3x$.

95. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$.

96. $\frac{2\sin x}{\cos x - \cos 3x} - \frac{1}{3} = 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

97. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 3x = \frac{6}{\sin 2x}$.

98. $\sin x + 2\sin 3x + \sin 5x = \operatorname{ctg} x\sin 3x$.

99. $\frac{\sin 3x}{\cos 3x + 2\cos x} = \operatorname{ctg} x$.

100. $\cos x + \cos 5x = \cos 3x(2 + \operatorname{tg} x)$.

101. $\dfrac{\sin^3 x + 3\cos^3 x}{\sin x + 3\cos x} = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

102. $\cos 2x - \sin 3x - \cos 8x = \sin 10x - \cos 5x$.

103. $\sin^2 x + \cos^2 2x = 2\sin^3 x \cos^3 2x$.

104. $\sin 3x \cos^3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos 3x \sin^3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}$.

105. $\dfrac{1}{\cos x \cos 2x} + \dfrac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \dfrac{1}{\cos 3x \cos 4x} = 0$.

106. $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos 2x \sin 3x} + \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sin x \cos 2x}$.

107. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

108. $\operatorname{tg} 7x = 2\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg}^2 5x \operatorname{tg} 7x$.

109. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}\sin 2x$.

110. $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 32\cos^3 2x$.

111. $\cos 4x + 5\cos 2x + 3 = \sin 3x$.

112. $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x$.

113. $\sqrt{3(1 - \operatorname{tg}^2 x)} = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

114. $\sqrt{\cos x + \cos 3x} = -\sqrt{2}\cos x$.

115. $\sqrt{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x} = \dfrac{1}{\cos x}$.

116. $\sqrt{3\sin 2x} = \sqrt{-5\cos x \operatorname{ctg} x}$.

117. $\sqrt{2\cos x - \sin x} = \operatorname{ctg} x\sqrt{\sin x}$.

118. $\sqrt{3\sin^2 x - 2} = 3\cos x - 1$.

119. $\sqrt{1 + \sin 2x} + \sin x = \frac{1}{2} + \cos x$.

120. $\sqrt{5 + \cos 2x} = \sin x + 3\cos x$.

121. $\sqrt{5 - 2\sin x + 3\cos 2x} = 2\sqrt{3}\cos x$.

122. $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}$.

123. $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$.

124. $\operatorname{tg} x + 8|\operatorname{ctg} x| + \operatorname{ctg} 2x = 0$.

125. $\sin 3x - |\sin x| = \sin 2x$.

126. $|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x$.

127. $\dfrac{2\sin 3x + \sin 5x}{|\sin x|} = 1$.

128. $\dfrac{(\sqrt{3} + 1)\cos 3x - \cos 5x}{|\cos x|} = \sqrt{3}$.

129. Найти все корни уравнения

$$\frac{\sin 6x}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos 6x}{\sin x + \cos x},$$

принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

130. Найти все корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{\sin 6x} = \frac{\sqrt{3}\cos x + \sin x}{\cos 6x},$$

принадлежащие интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

131. Найти все корни уравнения

$$6\sin x + 4(\sin 3x - \sin 5x) - \sin 7x = 256\sin^5 x \cos^4 x,$$

принадлежащие отрезку $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

132. Показать, что уравнение $\sin 5x \sin 7x = 1$ не имеет корней.

133. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)$.

134. Найти все корни уравнения $\cos 2x = 2\operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x$, удовлетворяющие неравенству $\sin x \geqslant \cos x$.

135. Найти все корни уравнения $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2\operatorname{ctg}^2 x$, удовлетворяющие неравенству $\sin x \geqslant 2\cos x$.

Решить уравнение (136–159):

136. $\dfrac{\sin 3x - \cos x}{\cos 3x - \sin 5x} = 1.$

137. $\dfrac{3 + 4\cos 2x - 8\cos^4 x}{\sin 2x - \cos 2x} = \dfrac{1}{\sin 2x}.$

138. $\operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{3x} + \arcsin 3x = \dfrac{\pi}{2}.$

139. $\operatorname{arcctg} \dfrac{3x-1}{x} + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}.$

140. $\sqrt{2} + \cos x - |\sin x| = 2\sqrt{2}\sin^2 x.$

141. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = 4|\cos x|.$

142. $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1 + \operatorname{ctg} 3x.$

143. $\dfrac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos x} + \cos^2 x \sin 3x = \sin 8x - \operatorname{tg} 2x.$

144. $\dfrac{\sin^2 5x}{\sin^2 x} = 24\cos 2x + \dfrac{\cos^2 5x}{\cos^2 x}.$

145. $\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x \cos 5x} + \dfrac{\sin 3x}{\cos 5x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 2x.$

146. $\dfrac{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \dfrac{|\cos 2x|}{\sqrt{2}\sin x \sin(x + \frac{\pi}{4})}.$

147. $2\sin 3x - \dfrac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x}.$

148. $35 + 3\cos 4x - 12\sin^2 2x - 32\cos^2 x = 32\sin^6 x.$

149. $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{32} + \dfrac{7}{16}\cos 4x.$

150. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \dfrac{29}{16}\cos^4 2x.$

151. $2\operatorname{tg} 6x + 4\operatorname{tg} 12x + 8\operatorname{ctg} 24x + \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 2x.$

152. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = 0.$

153. $4\operatorname{tg} 4x - 4\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x.$

154. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x.$

155. $\sin 4x\left(2 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right) = 2\sqrt{2}(1 + \sin 2x + \cos 2x).$

156. $32\cos\dfrac{\pi x}{31}\cos\dfrac{2\pi x}{31}\cos\dfrac{4\pi x}{31}\cos\dfrac{8\pi x}{31}\cos\dfrac{16\pi x}{31} = 1.$

157. $\sin^2 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x \cos^4 x.$

158. $\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3.$

159. $\cos^7 x \cos 7x - \sin^7 x \sin 7x = -\dfrac{5}{16}.$

160. Найти все общие корни уравнений

$$\sin\frac{3\pi}{x} - \cos\frac{3\pi}{x} - 2\sin 5\pi x = 0,$$

$$\sqrt{3}\sin 10\pi x - 3\cos 10\pi x - \sin\frac{6\pi}{x} = 0.$$

Ответы

1. $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$ **2.** $x = \pm\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$

3. $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **4.** $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

5. $x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **6.** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **7.** $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

8. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **9.** $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

10. $x = \pi n,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$. **11.** $x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

12. $x = -\arcsin\frac{4}{5} + (-1)^n \arcsin\frac{2}{5} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

13. $x = \arcsin\frac{3}{5} + (-1)^n \arcsin\frac{2}{5} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

14. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

15. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

16. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

17. $x = \frac{\pi n}{2},\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

18. $x = \pi + 2\pi n,\ x = \pm\arccos\frac{2}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

19. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

20. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **21.** $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

22. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{5} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

23. $x = \frac{3\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11},\ n \in \mathbf{Z}$. **24.** $x = 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

25. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

26. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

27. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{12} + (2n+1)\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

28. $x = \pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$. **29.** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

30. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg}(3 + \sqrt{10}) + \pi n,\ x = \operatorname{arctg}(\sqrt{10} - 3) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

31. $x = \pi n,\ x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$. **32.** $x = \frac{\pi n}{3},\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6},\ n \in \mathbf{Z}$.

33. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = (-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

34. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = (-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

35. $x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$. **36.** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$.

37. $x = \frac{\pi n}{2},\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$. **38.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

39. $x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$. **40.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$. **41.** $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

42. $x = \frac{\pi n}{5},\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **43.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$.

44. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

45. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$. Иначе: $x = \frac{\pi k}{8},\ k \in \mathbf{Z},\ k \neq 8p$ $(p \in \mathbf{Z})$.

46. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **47.** $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

48. $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

49. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

50. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

51. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

52. $x = \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$. **53.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

54. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \neq 1 + 3m,\ n \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z},\ m \in \mathbf{Z}$.

55. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **56.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

57. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **58.** $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

59. $x = \pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **60.** $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z}$.

61. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi n}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$. **62.** $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

63. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **64.** $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

65. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **66.** $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

67. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **68.** $x = \pi n,\ x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

69. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

70. $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$.

71. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

72. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$.

73. $x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$. **74.** $x = \pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

75. $x = \pi + 2\pi n,\ x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{4}{3}\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **76.** $x = \frac{\pi}{2}\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

77. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **78.** $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

79. $x = 2\pi(4n+1),\ n \in \mathbf{Z}$. **80.** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

81. $x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

82. $x = -\frac{\pi}{108} + \frac{\pi n}{9},\ x = \frac{7}{24}\pi + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$. **83.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z}$.

84. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **85.** $x = \pi n,\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10},\ n \in \mathbf{Z}$. **86.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

87. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z}$. **88.** $x = \frac{\pi n}{2},\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

89. $x = \frac{\pi n}{7},\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{9},\ n \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z},\ n \neq 7p,\ (p \in \mathbf{Z}),\ 2k+1 \neq 9m,\ (m \in \mathbf{Z})$.

90. $x = \frac{\pi n}{6},\ n \in \mathbf{Z}$. **91.** $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{7}{5\sqrt{2}} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

92. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

93. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \operatorname{arctg}(\sqrt{7} - 2) + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg}(\sqrt{7} + 2) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

94. $x = \pi n,\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}.$ **95.** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$

96. $x = (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$ **97.** $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

98. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **99.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$

100. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

101. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

102. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4},\ x = (-1)^n\frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z}.$

103. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **104.** $x = \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$

105. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **106.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z},\ n \neq 3m,\ m \in \mathbf{Z}.$

107. $x = \frac{\pi n}{2},\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **108.** $x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$

109. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **110.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8},\ n \in \mathbf{Z}.$

111. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **112.** $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

113. $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **114.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

115. $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **116.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \arccos\frac{2}{3} + \pi(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}.$

117. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **118.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

119. $x = \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n,\ x = -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

120. $x = -\frac{\pi}{8} + 2\pi n,\ x = \frac{3\pi}{8} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

121. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = -\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **122.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

123. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **124.** $x = -\arccos\frac{1}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

125. $x = \pi n,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

126. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

127. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

128. $x = 2\pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ **129.** $x_1 = -\frac{\pi}{20},\ x_2 = -\frac{9\pi}{20}.$

130. $x = \frac{11}{30}\pi.$ **131.** $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{9},\ x_3 = \frac{2\pi}{9},\ x_4 = \frac{\pi}{3}.$ **133.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

134. $x = \pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + (2n+1)\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$ **135.** $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

136. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$ **137.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$

138. $x = \frac{1}{5}.$ **139.** $x = \frac{3}{5}.$ **140.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{12} + (2n+1)\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$

141. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = -\frac{3\pi}{10} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{10} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **142.** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$.

143. $x = \pi n,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **144.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

145. $x = \frac{\pi n}{2},\ n \neq 2 + 4k,\ n \neq 4 + 8k,\ n \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z}$.

146. $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **147.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

148. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **149.** $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$.

150. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$. **151.** $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z}$. **152.** $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

153. $x = \pi n,\ x = \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **154.** Уравнение не имеет корней.

155. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

156. $x = 2n,\ n \neq 31k;\ x = \frac{31}{33}(2n+1),\ n \neq 33p + 16;\ n \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z},\ p \in \mathbf{Z}$.

157. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **158.** $x = \frac{2\pi n}{3},\ x = \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{2\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z}$.

159. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2},\ x = \pm\frac{1}{4}\arccos(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$. **160.** $x = -\frac{2}{3},\ x = -\frac{1}{15}$, $x = \frac{1}{3}$.

Указания

89. Преобразовать уравнение к виду $\sin 8x = \sin x$. Учесть, что $\sin x \neq 0$.

92. Воспользоваться формулой $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ (см. § 4, замечание к примеру 9).

93. Записать уравнение в виде $3(\sin x - \cos x) + 4\sin x \cos 2x = 0$.

102. Преобразовать уравнение к виду $(2\sin 5x - 1)(\sin 3x - \cos 5x) = 0$.

103. Воспользоваться неравенствами $\sin^2 x \geqslant |\sin x|^3|\cos 2x|^3$, $\cos^2 2x \geqslant |\sin x|^3|\cos 2x|^3$, и учесть, что знак равенства в первом из этих неравенств может иметь место лишь в следующих случаях: $\sin x = 0$, $|\sin x| = 1$.

104. Выразить $\cos^3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ через $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ и $\sin^3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ через $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ (§ 4, пример 5) и привести уравнение к виду $\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

106. Преобразовать уравнение к виду $\sin x(\sin 3x + \cos 3x) = 0$ и учесть, что $\sin 4x \neq 0$, $\sin 3x \neq 0$.

108. Записать уравнение в виде $\frac{\operatorname{tg} 7x - \operatorname{tg} 5x}{1 + \operatorname{tg} 7x \operatorname{tg} 5x} = \operatorname{tg} 5x$.

109. Воспользоваться тождеством $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$ (см. § 4, пример 4, б).

111. Воспользоваться формулами $\sin 3x = \sin(1 + 2\cos 2x)$ и $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$. Преобразовать уравнение к виду $(2\cos 2x + 1)(\cos 2x - \sin x + 2) = 0$.

119. Записать уравнение в виде $\sin x + |\sin x + \cos x| - \cos x = \frac{1}{2}$.

122. Записать уравнение в виде $(\sqrt{3}\sin x - \cos x)\cos x = 2|\cos x|$.

131. Воспользоваться равенством

$$64\sin^4 x\cos^4 x = (1-\cos 4x)^2 = 1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2}.$$

132. Рассмотреть два случая: 1) $\sin 5x = 1$, $\sin 7x = 1$; 2) $\sin 5x = -1$, $\sin 7x = -1$.

133. Преобразовать уравнение к виду $\cos x + \sin x = 2k+1$, $k \in \mathbf{Z}$.

134. Воспользоваться формулой $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$.

135. Записать уравнение в виде $(1-\cos 2x)^2 + 1 - \cos^2 2x = 2\,\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$.

149. Воспользоваться тождеством $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{1}{32}(\cos^2 4x + 14\cos 4x + 17)$ из примера 4, § 4, п. 1.

150. Воспользоваться тождеством $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \dfrac{1}{64}(5\cos^2 4x + 30\cos 4x + 29)$.

151. Применив 3 раза формулу $2\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \left(\alpha \neq \dfrac{\pi n}{2}\right)$, преобразовать уравнение к виду $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

152. Использовать формулу $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 3x$.

153. Используя формулу $\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x)$, привести уравнение к виду $(1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x)(4\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x) = 0$.

154. Использовать формулу $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ и выразить $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{ctg} 2x$ через $\operatorname{tg} x$.

155. Воспользоваться формулами $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} =$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1}$ и $1 + \sin 2x + \cos 2x = 1 + \sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

156. Используя 5 раз формулу $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, привести уравнение к виду $\sin\dfrac{\pi x}{31} = \sin\dfrac{32\pi x}{31}$.

157. Решить данное уравнение как квадратное относительно $\sin 4x$ и воспользоваться неравенством

$$\cos^8 x - \cos^2 x \leqslant 0.$$

158. Воспользоваться тождеством

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

159. Используя тождества $\sin^7 x = \dfrac{1}{64}(-\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x)$, $\cos^7 x = \dfrac{1}{64}(1 + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x)$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, преобразовать уравнение к виду $2t^3 + 5t^2 - 1 = 0$, где $t = \cos 4x$.

Глава 5

Системы уравнений

§ 15. Основные понятия, относящиеся к системам уравнений. Системы линейных уравнений

Справочные сведения

1. ***Решение системы, равносильность и следствие, совокупность систем.***

а) Будем рассматривать системы с двумя и тремя неизвестными (переменными). Систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y можно записать в виде

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Если левые и правые части уравнений системы (1) являются многочленами от x и y или их можно представить в виде отношения многочленов, то систему (1) называют *алгебраической*.

Решением системы (1) называется пара чисел x_0, y_0, при подстановке которых соответственно вместо x и y каждое уравнение системы (1) становится верным числовым равенством. Множество решений системы может быть, в частности, пустым. В этом случае говорят, что система не имеет решений (несовместна).

Решить систему — значит найти все ее решения или установить, что система не имеет решений.

б) Процесс решения системы обычно состоит в последовательном переходе с помощью некоторых преобразований от данной системы к другим, более простым, которые мы умеем решать. При этом нужно внимательно следить за тем, чтобы не потерять решения. Что касается посторонних для данной системы решений, которые могут появиться при преобразовании системы, то их обычно отсеивают с помощью проверки.

Если в результате преобразований системы (1) получена система

$$\begin{cases} h_1(x, y) = \varphi_1(x, y), \\ h_2(x, y) = \varphi_2(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

такая, что каждое решение системы (1) является решением системы (2), то система (2) называется *следствием* системы (1). Аналогично, уравнение

$$F(x, y) = G(x, y)$$

называют *следствием* системы (1), если равенство

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0)$$

верно для каждой пары чисел x_0, y_0, образующих решение системы (1).

Если система (2) является следствием системы (1), а система (1) также является следствием системы (2), то эти системы называются *равносильными*. Иначе говоря, системы называют равносильными, если множества их решений совпадают. В частности, две системы, не имеющие решений, являются равносильными.

Используя определения равносильности и следствия, можно утверждать, что:

1) если в системе уравнений заменить какое-либо уравнение на равносильное ему, а остальные уравнения оставить без изменения, то полученная при этом система будет равносильна исходной;
2) если к данной системе присоединить уравнение, являющееся следствием этой системы, то полученная система будет равносильна исходной;
3) если какое-либо уравнение данной системы заменить его следствием, а остальные уравнения оставить без изменения, то полученная система будет следствием исходной.

в) При решении систем уравнений нередко приходится применять такие преобразования систем, как умножение обеих частей уравнения на одно и то же число (или одну и ту же функцию), почленное сложение, вычитание, умножение и деление уравнений системы, возведение обеих частей уравнения в n-ю степень.

Сформулируем утверждения, связанные с этими преобразованиями, опустив в записи системы неизвестные.

1°. *Система*

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = g_1 + g_2, \\ f_1 - f_2 = g_1 - g_2, \end{cases}$$

полученная почленным сложением и вычитанием уравнений системы (1), *равносильна системе* (1).

2°. *Система*

$$\begin{cases} f_1 = g_1, \\ f_2^2 = g_2^2, \end{cases} \qquad (3)$$

является следствием системы (1). *Если же функции* f_2 *и* g_2 *принимают неотрицательные значения в области определения системы* (1), *т. е. на множестве, где определены функции* f_2 *и* g_2, *то система* (3) *равносильна системе* (1).

3°. *Система*

$$\begin{cases} f_1 = g_1, \\ f_1 f_2 = g_1 g_2 \end{cases} \qquad (4)$$

является следствием системы (1). *Если же не существует таких пар чисел* x, y, *при которых обе функции* f_1 *и* g_1 *обращаются в нуль, то система* (4) *равносильна системе* (1).

4°. *Если не существует таких пар чисел* x *и* y, *при которых обе функции* f_2 *и* g_2 *одновременно обращаются в нуль, то система*

$$\begin{cases} f_1 = g_1, \\ \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases} \qquad (5)$$

является следствием системы (1), *а при дополнительном требовании, что одновременно не обращаются в нуль функции* f_1 *и* g_1, *система* (5) *равносильна системе* (1).

Эти свойства преобразований систем, доказательство которых легко можно получить самостоятельно, широко применяются при решении систем с двумя и тремя переменными.

г) Введем еще одно понятие, играющее важную роль при решении систем уравнений.

Пусть система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Будем говорить, что система (6) *равносильна совокупности систем*

$$\begin{cases} g_1 = 0, \\ g_2 = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

и

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0, \\ \varphi_2 = 0, \end{cases} \qquad (8)$$

если каждое решение системы (6) является решением хотя бы одной из систем (7), (8) и всякое решение каждой из систем (7), (8) есть решение системы (6).

Это означает, что множество решений системы (6) совпадает с объединением множеств решений систем (7) и (8). Поэтому вместо слов «система (6) равносильна совокупности систем (7) и (8)» говорят, что «система (6) распадается на системы (7) и (8)».

Обычно это понятие применяется в случае, когда левую часть одного из уравнений системы (6) удается разложить на множители. Пусть, например, $f_1 = fg$, где f и g — многочлены (или функции, которые определены на одном и том же множестве). Тогда система

$$\begin{cases} fg = 0, \\ f_2 = 0 \end{cases}$$

равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} f = 0, \\ f_2 = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} g = 0, \\ f_2 = 0. \end{cases}$$

2. ***Методы решения систем.***

а) При решении систем уравнений часто применяется *метод подстановки* (метод исключения неизвестного), с помощью которого решение системы с двумя неизвестными сводится к решению уравнения с одним неизвестным. В основе этого метода лежит следующее утверждение.

Система уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(y), \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} x = \varphi(y), \\ F(\varphi(y), y) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

б) Одним из эффективных методов решения систем уравнений является *метод замены переменной*, который состоит в следующем. Пусть левые части уравнений системы

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

записываются в виде $F_1(x, y) = f_1(u, v)$, $F_2(x, y) = f_2(u, v)$, где $u = \varphi_1(x, y)$, $v = \varphi_2(x, y)$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 0, \\ f_2(u, v) = 0. \end{cases}$$

Если $(u_k; v_k)$ — все решения этой системы, $k = 1, 2, \ldots, n$, то, решив n систем уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = u_k, \\ \varphi_2(x, y) = v_k \end{cases}$$

и объединив эти решения, найдем все решения исходной системы.

3. *Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Определители второго порядка. Правило Крамера.*

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{11}$$

Предполагая, что хотя бы один из коэффициентов при неизвестных в каждом уравнении системы (11) отличен от нуля, будем решать эту систему способом алгебраического сложения. Уравняем коэффициенты при y в обоих уравнениях системы, умножив обе части первого уравнения на b_2, а второго — на b_1. Получим систему

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2, \\ a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1. \end{cases}$$

Вычитая почленно из первого уравнения этой системы второе уравнение, имеем

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1. \tag{12}$$

Уравнение (12) не содержит y. Чтобы получить уравнение, не содержащее x, умножим обе части первого уравнения системы (11) на a_2, а второго — на a_1. Получим систему

$$\begin{cases} a_1a_2x + b_1a_2y = c_1a_2, \\ a_2a_1x + b_2a_1y = c_2a_1. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения этой системы первое, имеем

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \tag{13}$$

Заметим, что коэффициент при x в уравнении (12) равен коэффициенту при y в уравнении (13), и предположим, что этот коэффициент не равен нулю, т. е.

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \tag{14}$$

Тогда из уравнений (12) и (13) получаем

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{15}$$

Если выполняется условие (14), то система (11) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам (15). В самом деле, если $(x; y)$ — решение системы (11), то каждое из равенств (12), (13), (15) является верным, т. е. решение системы (11) определяется формулами (15). Легко проверить, что если выполняется условие (14), то пара чисел x, y, которые определяются формулами (15), удовлетворяет системе (11).

Установим правило, по которому образованы правые части равенств (15). Пусть Δ — общий знаменатель дробей (15), т. е.

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Число Δ назовем *определителем системы* (11) и обозначим его символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{16}$$

а числа a_1, b_1, a_2, b_2 назовем *элементами* этого *определителя*. В первом и втором столбцах определителя (16) расположены соответственно коэффициенты при неизвестном x и неизвестном y системы (11). Диагональ, на которой расположены элементы a_1 и b_2, называют *главной*, а диагональ, на которой стоят элементы a_2 и b_1 определителя (16), называют *побочной*.

Из равенства

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{17}$$

следует, что определитель Δ равен разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях.

Обозначим числители в формулах (15) через Δ_x и Δ_y. Тогда, пользуясь правилом (17), получаем

$$\Delta_x = c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, равенства (15) можно записать так:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \tag{18}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{19}$$

Заметим, что определители Δ_x и Δ_y можно получить из определителя Δ заменой столбца из коэффициентов соответственно при x и y системы (11) столбцом свободных членов этой системы.

Определители Δ, Δ_x, Δ_y, имеющие две строки и два столбца, называют *определителями второго порядка*.

Формулы (18), (19) выражают *правило Крамера* для нахождения решения системы (11) в том случае, когда определитель этой системы $\Delta \neq 0$.

Заметим, что каждое уравнение системы (11) геометрически представляет прямую на координатной плоскости. Если $\Delta \neq 0$ и $(\alpha;\beta)$ — решение системы (11), то это означает, что прямые $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ пересекаются в точке с координатами $x = \alpha$, $y = \beta$.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ xy + x^2 = 6. \end{cases} \tag{20}$$

Решение. Так как $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$, то система (20) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ xy + x^2 = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 2y = 0, \\ xy + x^2 = 6. \end{cases}$$

Решим первую систему. Подставляя $x = 2y$ во второе уравнение этой системы, получаем $6y^2 = 6$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Следовательно, первая система имеет два решения, которые будем записывать так: $(2;1)$, $(-2;-1)$. Аналогично, решив вторую систему, найдем еще два решения $(-2\sqrt{3};\sqrt{3})$ и $(2\sqrt{3};-\sqrt{3})$ исходной системы.

Ответ. $(2;1)$, $(-2;-1)$, $(-2\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 + 1 - x = 0, \\ y^2 + y^3 = xy. \end{cases}$$

Решение. Так как первое уравнение системы равносильно уравнению $x = y^2 + 1$, то, заменяя во втором уравнении x на $y^2 + 1$, получаем уравнение $y^2 - y = 0$, имеющее корни $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Тогда из равенства $x = y^2 + 1$ находим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Ответ. $(1;0)$, $(2;1)$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Решение. Введем новые неизвестные $u = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1}{y}$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} u - v = \dfrac{3}{2}, \\ u^2 - v^2 = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} u - v = \dfrac{3}{2}, \\ u + v = -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $u = \dfrac{1}{2}$, $v = -1$.

Следовательно, $x = \dfrac{1}{u} = 2$, $y = \dfrac{1}{v} = -1$.

Ответ. $(2; -1)$.

Пример 4. Пользуясь правилом Крамера, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8, \\ 5x + 7y = 3. \end{cases}$$

Решение. Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - (-2) \cdot 5 = 31,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 62, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -31.$$

По формулам (18), (19) находим $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = 2$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = -1$. Следовательно, система имеет единственное решение $(2; -1)$.

Ответ. $(2; -1)$.

На рис. 15.1 дана геометрическая интерпретация системы из примера 4.

Замечание. Если определитель системы (11) равен нулю, то эта система либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

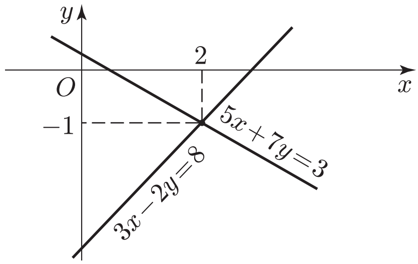

Рис. 15.1

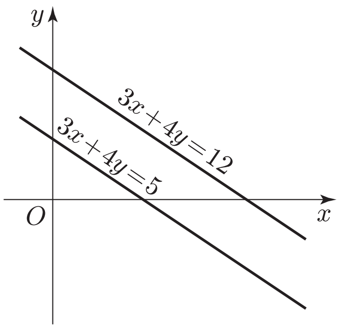

Рис. 15.2

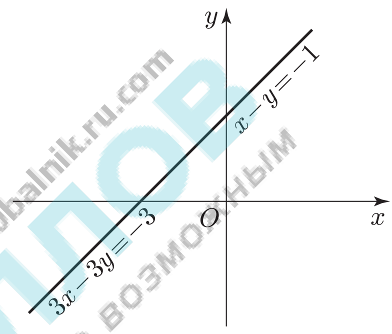

Рис. 15.3

Так, система

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$$

не имеет решений. Этой системе соответствует пара параллельных прямых (рис. 15.2), не имеющих общих точек.

Система

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ 3x - 3y = -3 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений. Этой системе соответствует пара совпадающих прямых (рис. 15.3).

Можно показать, что если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных в системе (11) отличен от нуля, то эта система:

а) не имеет решений, когда ее определитель $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y не равен нулю;

б) имеет бесконечное множество решений при

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0.$$

Пример 5. Найти все пары значений a, b, при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} (a+b)x + 26y = 2, \\ 8x + (a^2 - ab + b^2)y = 4 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений.

Решение. Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда оба ее уравнения являются уравнением одной и той же прямой. Умножив обе части первого уравнения на 2 и приравняв коэффициенты при x и y полученного уравнения и второго уравнения исходной системы, имеем

$$2(a+b) = 8, \qquad 52 = a^2 - ab + b^2,$$

или

$$a + b = 4, \qquad (a+b)^2 - 3ab = 52,$$

откуда $ab = -12$. Решив систему

$$\begin{cases} a + b = 4, \\ ab = -12, \end{cases}$$

находим два ее решения $a_1 = -2$, $b_1 = 6$ и $a_2 = 6$, $b_2 = -2$.

Ответ. $(-2; 6)$, $(6; -2)$.

Обращаясь к линейным системам с n неизвестными, где $n \geqslant 3$, рассмотрим один из способов решения таких систем.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -11, \\ 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 24, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 12x_4 = -4. \end{cases} \tag{21}$$

Решение. Умножим первое уравнение системы (21) на -2 и сложим полученное уравнение со вторым. Затем умножим первое уравнение на -5 и сложим полученное уравнение с третьим. Наконец, умножим первое уравнение на -3 и полученное уравнение сложим с четвертым. Тогда система (21) примет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ -x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -23, \\ 2x_2 + x_3 + 11x_4 = -6, \\ 5x_2 - 2x_3 + 21x_4 = -22. \end{cases} \tag{22}$$

Цель этих преобразований состоит в том, чтобы получить систему, которая не содержит неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого.

Далее преобразуем последние три уравнения системы (22) так, чтобы третье и четвертое уравнения новой системы не содержали неизвестное x_2. Для этого умножим второе уравнение системы (22) на 2 и полученное уравнение сложим с третьим, а затем умножим второе уравнение на 5 и полученное уравнение сложим с четвертым. В результате придем к системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ -x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -23, \\ -9x_3 + 25x_4 = -52, \\ -27x_3 + 56x_4 = -137. \end{cases} \tag{23}$$

Умножим третье уравнение системы (23) на -3 и полученное уравнение сложим с четвертым. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ -x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -23, \\ -9x_3 + 25x_4 = -52, \\ -19x_4 = 19. \end{cases} \tag{24}$$

Из последнего уравнения системы (24) находим $x_4 = -1$, затем из третьего уравнения получаем $x_3 = 3$, из второго имеем $x_2 = 1$ и, наконец, из первого находим $x_1 = 2$. Итак, система (24) имеет следующее решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

Заметим, что если одно из уравнений системы (21) заменить уравнением, которое получено почленным сложением этого уравнения и любого другого уравнения, умноженного на некоторое число, а остальные уравнения оставить без изменения, то новая система имеет то же множество решений, что и первоначальная система (равносильна системе (21)). Отсюда следует, что каждая из систем (22), (23), (24) равносильна системе (21).

Таким образом, система (21) имеет единственное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

При решении системы (21) она преобразована к треугольному виду (24) *методом Гаусса*.

Пример 7. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 - 7x_2 + 11x_3 = 21. \end{cases} \tag{25}$$

Решение. Умножим первое уравнение системы (25) на -2 и прибавим полученное уравнение ко второму уравнению. Затем умножим первое уравнение на -3 и прибавим полученное уравнение к третьему. Тогда придем к системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_2 - 2x_3 = -3, \\ -x_2 + 2x_3 = 6, \end{cases} \tag{26}$$

равносильной системе (25). Система (26) не имеет решений. В самом деле, третье уравнение можно записать так: $x_2 - 2x_3 = -6$. С другой стороны, в силу второго уравнения, $x_2 - 2x_3 = -3$.

Эти равенства не могут одновременно быть верными. Итак, система (26) несовместна, а поэтому несовместна и система (25).

Задачи

1. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$$

равносильна каждой из следующих систем:

а) $\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_1(x,y)+f_2(x,y)=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ \alpha f_1(x,y)+\beta f_2(x,y)=0, \end{cases}$

где $\beta \neq 0$ (α — любое число).

2. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=a(x-y), \\ x^3+y^3=b(x+y) \end{cases}$$

равносильна совокупности следующих систем:

а) $\begin{cases} x-y=0, \\ x+y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=0, \\ x^2-xy+y^2-b=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+xy+y^2-a=0, \\ x+y=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+xy+y^2-a=0, \\ x^2-xy+y^2-b=0. \end{cases}$

3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x,y)=a, \\ f_2(x,y)=b, \end{cases}$$

где $ab \neq 0$. Доказать, что:

а) каждая из систем уравнений

$\begin{cases} f_1(x,y)=a, \\ \dfrac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}=\dfrac{a}{b}; \end{cases}$ $\begin{cases} f_1(x,y)=a, \\ f_1(x,y)f_2(x,y)=\dfrac{a}{b} \end{cases}$

равносильна исходной системе;

б) система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x,y)f_2(x,y)=ab, \\ \dfrac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}=\dfrac{a}{b} \end{cases}$$

является следствием исходной системы.

4. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} [f_1(x,y)]^2=[g_1(x,y)]^2, \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$$

является следствием системы

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_2(x,y)=0. \end{cases}$$

Решить системы уравнений (5–16):

5. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 3x + y = 8, \\ xy = -3. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 5, \\ 13x - \dfrac{3}{y} = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - y^2 + 5x = 2, \\ x - y = 3. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5y. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} x - xy = 0, \\ y^2 + 3xy = 4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 - 9y^2 = 0, \\ 8y^2 + xy = 11. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5, \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = 5. \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} x^2 + y = 8, \\ x^2 y = 16. \end{cases}$

14. $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ x - y = 3. \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 + 2y^2 = 6. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} xy - 3y + x = 3, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

17. Пользуясь правилом Крамера, решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 4y = 7, \\ 2x + 5y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x + 7y = 9, \\ 5x - y = -13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x - 11y = 1, \\ 6x - 7y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 5y = -8, \\ 7x - 4y = -2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{7}{4}x - \dfrac{5}{3}y = -1, \\ \dfrac{3}{8}x - \dfrac{4}{9}y = -1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + \dfrac{5y}{8} = -2, \\ \dfrac{8x}{5} + \dfrac{7y}{4} = 10. \end{cases}$

18. Доказать, что при любом значении a данная система имеет единственное решение, и найти это решение:

а) $\begin{cases} 3x + ay = a, \\ ax - 2y = a^2 + 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + 4y = -a, \\ -x + 5ay = 1. \end{cases}$

19. Найти все значения a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = 12, \\ 9x + ay = b \end{cases}$$

а) не имеет решений; б) имеет бесконечное множество решений; в) имеет единственное решение.

20. Найти все значения a, при которых не имеет решений система уравнений:

а) $\begin{cases} ax + 3y = a^2 + 1, \\ (3a + 14)x + (a + 8)y = 5a^2 + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2ax + y = a^2 - 2a, \\ -10x + (a - 6)y = 10a - 5a^2. \end{cases}$

21. Решить методом Гаусса систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y-z=4, \\ x-y+z=6, \\ x-y-z=-8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y-z=2, \\ x-y-2z=1, \\ x-2y-3z=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3-5x_4=2, \\ 4x_1-7x_2-x_3-8x_4=-5, \\ 10x_1-18x_2+2x_3-23x_4=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-2x_2-x_3-x_4=3, \\ x_1+x_2-2x_3+x_4=5, \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=-1. \end{cases}$

22. Пользуясь методом Гаусса, показать, что система уравнений не имеет решений:

а) $\begin{cases} x+y-z=4, \\ x-y+z=-2, \\ x-5y+5z=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y-z=1, \\ x-y+2z=4, \\ 5x+3y-4z=3. \end{cases}$

23. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} ax+y+z=1, \\ x+ay+z=a, \\ x+y+az=a^2. \end{cases}$$

24. Какому условию должны удовлетворять числа a_1, a_2, a_3, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} (1+a_1)x+y+z=1, \\ x+(1+a_2)y+z=1, \\ x+y+(1+a_3)z=1 \end{cases}$$

имела решение и притом единственное? Найти это решение.

Ответы

5. $(3;2)$. **6.** $(3;-1)$, $\left(-\frac{1}{3};9\right)$. **7.** $\left(1;\frac{1}{4}\right)$. **8.** $(1;-2)$. **9.** $(0;0)$, $(2;4)$, $(-2;4)$.

10. $(0;2)$, $(0;-2)$, $(1;1)$. **11.** $(3;1)$, $(-3;-1)$, $\left(-3\sqrt{\frac{11}{5}};\sqrt{\frac{11}{5}}\right)$, $\left(3\sqrt{\frac{11}{5}};-\sqrt{\frac{11}{5}}\right)$.

12. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **13.** $(2;4)$, $(-2;4)$. **14.** $(5;2)$, $(-2;-5)$.

15. $(2;1)$, $(-2;-1)$, $\left(\sqrt{\frac{2}{3}};2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

16. $(3;1)$, $(3;-1)$, $(-3;-1)$.

17. а) $(1;-1)$; б) $(-2;3)$; в) $(5;4)$; г) $\left(\frac{22}{23};\frac{50}{23}\right)$; д) $(8;9)$; е) $(15;-8)$.

18. а) $(a;-2)$; б) $(-1;0)$.

19. а) $a=-12$, $b=36$; б) $a=-12$, $b\neq 36$; в) $a\neq -12$.

20. а) -6; б) 5. **21.** а) $(5;6;7)$; б) $(0;-3;1)$; в) $(1;2;3;-1)$; г) $(1;0;-2;0)$.

23. При $a=1$ система имеет бесконечное множество решений $(\alpha;\beta;1-\alpha-\beta)$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$; при $a=-2$ система несовместна; при $a\neq 1$, $a\neq -2$ система имеет единственное решение $\left(-\frac{1+a}{a+2};\frac{1}{a+2};\frac{(1+a)^2}{a+2}\right)$.

24. $\left(\frac{a_2a_3}{D};\frac{a_1a_3}{D};\frac{a_1a_2}{D}\right)$, где $D=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2a_3\neq 0$.

Указания

23. Сложить все уравнения и решить полученное уравнение с каждым уравнением исходной системы при $a \neq -2$. Если $a = -2$, то система несовместна ($1 + a + a^2 > 0$ при всех $a \in \mathbf{R}$).

24. *Первый способ.* Если среди чисел a_1, a_2, a_3 два числа равны нулю (например $a_2 = a_3 = 0$), то система совместна при $a_1 = 0$ и имеет бесконечное множество решений.

Если $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, то, вычитая из второго уравнения первое и из третьего второе, получить $y = \frac{a_1}{a_2}x$, $z = \frac{a_1}{a_3}x$, а затем из первого уравнения найти x, предполагая, что $D = a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 + a_1a_2a_3 \neq 0$.

Второй способ. Применяя метод Гаусса, последовательно заменить исходную систему следующими равносильными системами:

$$\begin{cases} x + y + (1 + a_3)z = 1, \\ a_2y - a_3z = 0, \\ a_1y + (a_1 + a_3 + a_1a_3)z = a_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + (1 + a_3)z = 1, \\ a_2y - a_3z = 0, \\ Dz = a_1a_2. \end{cases}$$

§ 16. Системы алгебраических уравнений

1. Нелинейные системы уравнений с двумя неизвестными

а) Однородные системы

Многочлен $P(x, y)$ называют *однородным многочленом степени n*, если $P(tx, ty) = t^nP(x, y)$. Например, многочлен $P(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + 4y^3$ является однородным многочленом третьей степени.

Система двух уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, & (1) \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2. & (2) \end{cases}$$

является *однородной*, так как левые части уравнений (1) и (2) представляют собой однородные многочлены второй степени.

Рассмотрим сначала пример однородной системы, в которой одно из чисел d_1, d_2 равно нулю.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 = 0, & (3) \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1. & (4) \end{cases}$$

Решение. Если положить $y = 0$, то из уравнения (3) находим $x = 0$. Но пара чисел $(0; 0)$ не удовлетворяет уравнению (4). Поэтому, разделив обе части уравнения (3) на y^2, получим уравнение

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 3 = 0, \tag{5}$$

которое вместе с уравнением (4) образует систему, равносильную исходной.

Из уравнения (5) находим, что $\frac{x}{y} = -1$ или $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, т. е. $x = -y$ или $x = \frac{3}{2}y$. Поэтому исходная система равносильна совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} x = -y, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1. \end{cases}$$

Из первой системы получаем уравнение $6y^2 = -1$, не имеющее действительных корней.

Решив вторую систему, находим два решения $(3; 2)$ и $(-3; -2)$ исходной системы.

Ответ. $(3; 2)$, $(-3; -2)$.

Рассмотрим теперь однородную систему вида (1), (2), в которой $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 5y^2 = -5. \end{cases}$$

Решение. Первый способ. Сведем эту систему к системе того же вида, у которой одно из чисел d_1, d_2 равно нулю. Умножим первое уравнение на 5, а второе на 3 и сложим полученные уравнения.

В результате придем к уравнению

$$13x^2 + 21xy - 10y^2 = 0,$$

которое вместе в первым уравнением образует систему, равносильную данной. Как и в предыдущем примере, пара чисел $(0; 0)$ не является решением исходной системы. Поэтому последнее уравнение равносильно уравнению

$$13\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 21\frac{x}{y} - 10 = 0, \tag{6}$$

откуда $x = -2y$, $x = \frac{5}{13}y$.

Если $x = -2y$, то из первого уравнения исходной системы получаем $y^2 = 1$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = -1$ и, следовательно, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Аналогично, если $x = \frac{5}{13}y$, то $y^2 = \frac{169}{138}$, $y = \pm\frac{13}{\sqrt{138}}$.

Ответ. $(-2; 1)$, $(2; -1)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{138}}; \frac{13}{\sqrt{138}}\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{138}}; -\frac{13}{\sqrt{138}}\right)$.

Второй способ. Разделим почленно уравнения данной системы, а затем разделим числитель и знаменатель в левой части полученного уравнения на y^2. В результате придем к уравнению

$$\frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) + 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 5} = -\frac{3}{5},$$

которое можно записать в виде

$$13t^2 + 21t - 10 = 0, \tag{7}$$

где $t = \frac{x}{y}$. Уравнение (7) совпадает с уравнением (6).

Рассмотрим теперь систему, у которой левые части уравнений являются однородными многочленами третьей степени.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

Решение. Разложив левые части уравнений на множители, запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 7, \\ (x - y)xy = 2. \end{cases}$$

Разделив уравнения этой системы почленно, получим уравнение

$$\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x} = \frac{7}{2},$$

которое вместе с первым уравнением исходной системы образует систему, равносильную исходной.

Полагая $\frac{y}{x} = t$, получаем $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$, т. е. $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$. Если $y = 2x$, то из первого уравнения находим $x^3 = -1$, откуда $x_1 = -1$ (другие корни уравнения $x^3 = -1$ не являются действительными) и поэтому $y_1 = -2$.

Аналогично, если $y = \frac{x}{2}$, то $x^3 = 8$, откуда $x = 2$, $y = 1$.

Ответ. $(-1; -2)$, $(2; 1)$.

б) Симметрические системы

Будем рассматривать системы вида

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

где f и g — многочлены, которые не изменяются при замене x на y, а y на x. Такие системы называются *симметрическими*. Простейшей системой этого типа является система

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases} \tag{1}$$

Используя теорему Виета, можно доказать, что система (1) и квадратное уравнение

$$t^2 - at + b = 0 \tag{2}$$

связаны следующим образом: если t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения (2), то система (1) имеет решения $(t_1; t_2)$ и $(t_2; t_1)$ и не имеет других решений. Обратно, если $(x_0; y_0)$ — решение системы (1), то x_0 и y_0 — корни уравнения (2).

Например, система

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases}$$

имеет два решения $(2; 3)$ и $(3; 2)$, так как уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$ имеет два корня $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.

Многочлены $x + y$ и xy в левых частях уравнений системы (1) являются простейшими симметрическими многочленами, а любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от u и v, где $u = x + y$, $v = xy$.

При решении симметрических систем часто приходится выражать через u и v многочлены вида

$$S_n = x^n + y^n.$$

Суммы S_2, S_3, S_4, S_5 выражаются через $u = x + y$ и $v = xy$ следующим образом:

$$S_2 = x^2 + y^2 = u^2 - 2v, \tag{3}$$
$$S_3 = x^3 + y^3 = u^3 - 3uv, \tag{4}$$
$$S_4 = x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2, \tag{5}$$
$$S_5 = x^5 + y^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2. \tag{6}$$

Формулы (3)–(6) можно легко получить самостоятельно. Докажем формулу

$$S_n = uS_{n-1} - vS_{n-2}, \tag{7}$$

позволяющую последовательно выразить через u и v суммы S_3, S_4, S_5, S_6 и т. д. Для этого заметим, что

$$uS_{n-1} = (x+y)(x^{n-1}+y^{n-1}) = x^n + y^n + xy(x^{n-2}+y^{n-2}),$$

откуда и следует равенство (7).

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Решение. Это — симметрическая система. Полагая $x+y=u$, $xy=v$ и используя формулы (3), (5), запишем ее в виде

$$\begin{cases} u^4 - 4u^2v + 3v^2 = 91, \\ u^2 = 7 + 3v. \end{cases}$$

Исключая из этой системы u^2, получаем

$$(7+3v)^2 - 4(7+3v)v + 3v^2 = 91$$

или $14v = 42$, откуда $v = 3$, $u^2 = 16$. Следовательно, исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3. \end{cases}$$

Ответ. $(1;3)$, $(3;1)$, $(-1;-3)$, $(-3;-1)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ \dfrac{x^3+y^3}{x^5+y^5} = \dfrac{7}{31}. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулами (3), (4), (6). Тогда система примет вид

$$\begin{cases} u^2 = v + 3, \\ \dfrac{u^3 - 3uv}{u^5 - 5u^3v + 5uv^2} = \dfrac{7}{31}. \end{cases}$$

Так как $u \neq 0$ (при $u = 0$ второе уравнение системы теряет смысл), то, разделив числитель и знаменатель дроби на u и исключая из системы u^2, преобразуем второе уравнение к виду $7v^2 - v - 30 = 0$, откуда $v_1 = -2$, $v_2 = \dfrac{15}{7}$.

Если $v = -2$, то $u = \pm 1$, а если $v = \dfrac{15}{7}$, то $u = \pm\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$. Поэтому исходная система равносильна совокупности следующих четырех систем:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-1, \\ xy=-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{6\sqrt{7}}{7}, \\ xy=\dfrac{15}{7}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-\dfrac{6\sqrt{7}}{7}, \\ xy=\dfrac{15}{7}. \end{cases}$$

Первая система имеет решения $(-1; 2)$ и $(2; -1)$, вторая — решения $(-2; 1)$ и $(1; -2)$, третья и четвертая системы не имеют действительных решений.

Ответ. $(-1; 2)$, $(2; -1)$, $(-2; 1)$, $(1; -2)$.

Замечание. К системе симметрических уравнений иногда бывает удобно свести иррациональное уравнение. Например, при решении уравнения

$$\sqrt[4]{x+3}+\sqrt[4]{94-x}=5$$

можно ввести вспомогательные неизвестные $u=\sqrt[4]{x+3}$, $v=\sqrt[4]{94-x}$, и мы получим систему

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^4+v^4=97. \end{cases}$$

в) Другие типы систем

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2y^2-x^2+2xy-12=0, & (1) \\ 5x^2y^2-2x^2-3xy-6=0. & (2) \end{cases}$$

Решение. Из данной системы можно исключить x^2, сложив уравнение (1), умноженное на 2, с уравнением (2), умноженным на -1. В результате получим квадратное относительно xy уравнение

$$(xy)^2+7xy-18=0, \qquad (3)$$

откуда $xy=2$ и $xy=-9$.

Система (1), (2), равносильная системе (1), (3), распадается на две системы:

$$\begin{cases} xy=2, \\ 3x^2y^2-x^2+2xy-12=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=-9, \\ 3x^2y^2-x^2+2xy-12=0. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x_1=2$, $x_2=-2$, $y_1=1$, $y_2=-1$.

Из второй системы получаем $x^2=213$.

Ответ. $(2; 1)$, $(-2; -1)$, $\left(\sqrt{213}; -\dfrac{9}{\sqrt{213}}\right)$, $\left(-\sqrt{213}; \dfrac{9}{\sqrt{213}}\right)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = \dfrac{7}{4}x^2y, & (4)\\[2mm] 2xy - y^2 = \dfrac{1}{6}xy^2. & (5)\end{cases}$$

Решение. Если $x = 0$, то из данной системы получаем, что $y = 0$, т. е. $(0; 0)$ — решение системы.

Пусть $xy \neq 0$, тогда разделив уравнения почленно, находим

$$\frac{3x^2 + y^2}{2xy - y^2} = \frac{21}{2} \cdot \frac{x}{y} \quad \text{или} \quad \frac{3t^2 + 1}{2t - 1} = \frac{21t}{2},$$

где $t = \dfrac{x}{y}$. Уравнение

$$36t^2 - 21t - 2 = 0 \tag{6}$$

имеет корни $t_1 = \dfrac{2}{3}$, $t_2 = -\dfrac{1}{12}$.

Заметим, что при $xy \neq 0$ уравнение (6) вместе с уравнением (4) образует систему, равносильную исходной.

Если $t = \dfrac{2}{3}$, т. е. $x = \dfrac{2}{3}y$, то из уравнения (4) с учетом условия $x \neq 0$ получаем $y = 3$ и поэтому $x = 2$.

Если $t = -\dfrac{1}{12}$, то $y = -12x$, $x = -7$, $y = 84$.

Ответ. $(0; 0)$, $(2; 3)$, $(-7; 84)$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + 24 = \dfrac{x^3}{y}, & (7)\\[2mm] xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}. & (8)\end{cases}$$

Решение. Допустимые значения x и y определяются условием $xy \neq 0$, а произведение правых частей уравнения равно x^2y^2. Перемножив уравнения (7) и (8), получим $(xy + 24)(xy - 6) = x^2y^2$ или

$$xy = 8. \tag{9}$$

Так как обе части уравнений (7) и (8) отличны от нуля, то система (9), (7) равносильна системе (7), (8).

Исключая y из системы (9), (7), получаем

$$x^4 = 2^8. \tag{10}$$

Из (10) следует, что $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, а из (9) — что $y_1 = 2$, $y_2 = -2$.

Ответ. $(4; 2)$, $(-4; -2)$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 - 2x + 7y - 3 = 0, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$$

Решение. Запишем первое уравнение в виде

$$x^2 - (y+2)x + 7y - 3 - 2y^2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно x, получим

$$x = \frac{y + 2 \pm \sqrt{y^2 + 4y + 4 - 4(7y - 3 - 2y^2)}}{2} =$$

$$= \frac{y + 2 \pm \sqrt{9y^2 - 24y + 16}}{2} = \frac{y + 2 \pm (3y - 4)}{2},$$

откуда

$$x = 2y - 1, \quad x = 3 - y.$$

Таким образом, исходная система распадается на следующие две системы:

$$\begin{cases} x = 2y - 1, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 - y, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$$

Ответ. $(3; -1)$, $\left(\frac{11}{3}; \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{17}{6}; \frac{1}{6}\right)$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 3, & (11) \\ x^4 + 3x^2y - 4y^2 = 0. & (12) \end{cases}$$

Решение. Исключив y из системы, получим уравнение

$$x^4 + 3x^3 - 13x^2 + 24x - 36 = 0,$$

нахождение корней которого — совсем не простая задача. Более эффективный способ основан на разложении левой части уравнения (12) на множители:

$$x^4 + 3x^2y - 4y^2 = x^4 - x^2y + 4x^2y - 4y^2 =$$

$$= x^2(x^2 - y) + 4y(x^2 - y) = (x^2 - y)(x^2 + 4y).$$

Отсюда вытекает, что система (11), (12) распадается на следующие две системы:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 - y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + 4y = 0. \end{cases}$$

Первая из этих систем не имеет действительных решений, а вторая имеет два решения.

Ответ. $(2; -1)$, $(-6; -9)$.

Задачи

Решить систему уравнений (1–6):

1. а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - xy + y^2 = 52; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = -8, \\ (x+2)(y+2) = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) = 3, \\ (1-x)(1-y) = 6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{1}{xy} - \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{2}, \\ x^2y + xy^2 = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = 6, \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{15}{2}. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2y} + \dfrac{3}{2x-y} = -\dfrac{5}{8}, \\ -\dfrac{2}{x+2y} + \dfrac{5}{2x-y} = \dfrac{21}{8}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 35 + 2(xy - x + y), \\ x^2 + y^2 = -2xy - 3(x+y) - 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} + \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{26}{5}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + x + xy = 8, \\ y^2 + y + xy = 4. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x^2 - x + y^2 = 4, \\ 8x^2 - xy + 2y^2 = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y = 3x^2, \\ x + 2y = 3y^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}, \\ xy^2 - x^2y = 6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2y^2 - 3y^2 + xy + 1 = 0, \\ 3x^2y^2 - 6y^2 + xy + 2 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} + xy = 10, \\ \dfrac{y^3}{x} + xy = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 7, \\ xy + y^2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2y^2 - 4xy + 3x^2 = 17, \\ y^2 - x^2 = 16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 3, \\ 2x^2 - 2xy - y^2 = -6. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} (x^3 + 1)(y^3 + 1) = 18, \\ xy + x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ xy = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ xy = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^4 + y^4 = 81; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^5 + y^5 = 33; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4(x^3 + y^3) = 9x^2y^2, \\ 4(x^2 + y^2) = 9x^2y^2 - 8xy. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} x^2(x+y) = 12, \\ x^2(3x - y) = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-y)(x^2 + y^2) = 65, \\ (x+y)(x^2 - y^2) = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{3y}{4x} = 2, \\ \dfrac{8y}{x^2} - \dfrac{6x}{y} = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x, \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2); \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y - 6 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)(x - y) = 1 + y^3, \\ (x^2 + xy + y^2)(x + y) = 1 - y^3. \end{cases}$

7. Найти решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - x^2y^2 = 13, \\ x^2 - y^2 + 2xy = 1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $xy \geqslant 0$.

Ответы

1. а) $(-2; 6)$, $(6; -2)$; б) $(-1; 5)$, $(5; -1)$; в) $(3; 2)$, $(2; 3)$, $(5; 1)$, $(1; 5)$; г) $(-1; -2)$, $(-2; -1)$; д) $(1; 1)$, $(-2; 1)$, $(-1; 2)$; е) $(4; 2)$, $(-4; -2)$.

2. а) $(3; -2)$; б) $(3; -2)$, $\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$, $(-3; 4)$, $\left(-\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$; в) $(3; -2)$, $(-3; 2)$, $(3; 2)$, $(-3; -2)$; г) $(2; 1)$, $\left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

3. а) $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(-2; -3)$, $(-3; -2)$; б) $(0; 2)$, $(0; -2)$, $(1; 0)$; в) $(0; 0)$, $(1; 1)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}; \frac{1-\sqrt{5}}{6}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{6}; \frac{1+\sqrt{5}}{6}\right)$; г) $(2; 3)$, $(-3; -2)$; д) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$; е) $(2; 1)$, $(-2; -1)$.

4. а) $(2; 1)$, $(-2; -1)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; б) $(4; 5)$, $(-4; -5)$, $(3\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; в) $\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{13}{3}\right)$, $(3; 5)$, $(-3; -5)$; г) $(1; 2)$, $(-1; -2)$.

5. а) $(1; 2)$, $(2; 1)$; б) $(2; -1)$, $(1; -2)$; в) $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(-2; -1)$, $(-1; -2)$; г) $(3; 0)$, $(0; 3)$; д) $(1; 2)$, $(2; 1)$; е) $(0; 0)$, $(1; 2)$, $(2; 1)$.

6. а) $(2; 1)$; б) $(3; -2)$; в) $(2; 4)$, $\left(\frac{4^4}{3 \cdot 5^3}; -\frac{2^{11}}{3^2 \cdot 5^4}\right)$; г) $(0; 2)$, $(0; -2)$, $(1; -3)$, $(-1; 3)$; д) $(-2; 0)$, $(-3; 3)$, $(-4; 2)$; е) $(1; 0)$.

7. $(1; 2)$, $(-1; -2)$.

Указания

1. е) Вычитая из одного уравнения другое, получить квадратное уравнение относительно $t = \frac{x}{y}$.

2. а) Система сводится к линейной относительно u и v, где $u = \frac{1}{x+2y}$, $v = \frac{1}{2x-y}$.

б) Положить $x - y = u$, $x + y = v$.

в) Положить $\frac{x-y}{x+y} = u$.

г) Сложив уравнения, получить квадратное уравнение относительно $u = x + y$.

3. а) Сложить первое уравнение со вторым, умноженным на 2.

б) Вычесть второе уравнение из первого, умноженного на 3.

в) Вычесть из первого уравнения второе.

г) Записать систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{y-x}{xy} = \dfrac{1}{6}, \\ xy(y-x) = 6 \end{cases}$$

и перемножить полученные уравнения.

д) Вычесть из второго уравнения удвоенное первое.

е) Записав систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x(x^2+y^2)}{y} = 10, \\ \dfrac{y(x^2+y^2)}{x} = \dfrac{5}{2}, \end{cases}$$

разделить ее уравнения почленно.

4. а) Вычесть из первого уравнения удвоенное второе.

б) Записав систему в виде

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases}$$

и разделив ее уравнения почленно, получить квадратное уравнение относительно $t = \dfrac{x}{y}$.

в) Сложить первое уравнение со вторым, умноженным на 2.

г) Сложив второе уравнение с первым, умноженным на 3, получить квадратное уравнение относительно $t = \dfrac{x}{y}$.

5. а) Положить $x + y = u$, $xy = v$; тогда $u + v = 5$, $u^3 + v^3 - 3uv = 17$.

б) Положить $x^3 = u$, $y^3 = v$; тогда $u + v = 9$, $uv = 8$.

в) Положить $x + y = u$, $xy = v$; тогда $u^4 - 8u^2 - 9 = 0$.

г) Положить $x + y = u$, $xy = v$; тогда $v^2 - 18v = 0$.

д) Положить $x + y = u$, $xy = v$ и воспользоваться формулой $x^5 + y^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$.

е) Положить $x + y = u$, $xy = v$; тогда $4u^2 = 9v^2$.

6. а)–в) Разделить уравнения почленно.

г) Записав систему в виде

$$\begin{cases} x(x^2 - 16) = y(y^2 - 4), \\ 5x^2 = y^2 - 4 \end{cases}$$

и разделив (при $x \neq 0$) ее уравнения почленно, получить уравнение $31x^4 + 32x^2 - 64 = 0$. Если $x = 0$, то $y^2 = 4$.

д) Решив каждое уравнение системы как квадратное относительно x или y, преобразовать систему к виду

$$\begin{cases} (x + 2y + 2)(x - y + 6) = 0, \\ (x + 2y - 3)(x + y + 2) = 0. \end{cases}$$

е) Перемножить уравнения почленно.

7. Преобразовать систему к виду

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)^2 + x^2y^2 = 13, \\ x^2 - y^2 + 2xy = 1 \end{cases}$$

и получить квадратное уравнение относительно $u = xy$.

2. Иррациональные системы с двумя неизвестными

Если уравнение является иррациональным, то рассматриваются лишь действительные решения этого уравнения.

При этом предполагается, что в случае корня четной степени подкоренное выражение принимает неотрицательные значения и берется неотрицательное значение корня. В случае корня нечетной степени подкоренное выражение может принимать любые действительные значения и знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение подстановкой $t = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ преобразуется к виду

$$2t^2 - 3t - 2 = 0,$$

откуда $t_1 = 2$, $t_2 = -\dfrac{1}{2}$. Так как $t \geqslant 0$, то второй корень отбрасываем.

Решив систему

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} = 2, \\ x + y + xy = 9, \end{cases}$$

найдем два ее решения $(4; 1)$ и $\left(-9; -\dfrac{9}{4}\right)$, которые являются решениями и исходной системы.

Ответ. $(4; 1)$, $\left(-9; -\dfrac{9}{4}\right)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{7x + y} + \sqrt{2x + y} = 5, & (1) \\ \sqrt{2x + y} + x - y = 1. & (2) \end{cases}$$

Решение. Умножив обе части (1) на выражение $\sqrt{7x + y} - \sqrt{2x + y}$, сопряженное левой части этого уравнения, получаем

$$5x = 5(\sqrt{7x + y} - \sqrt{2x + y}),$$

или

$$\sqrt{7x+y} = \sqrt{2x+y} + x. \qquad (3)$$

Из (3) и (2) следует, что

$$\begin{cases} \sqrt{2x+y} = 1 + y - x, & (4)\\ \sqrt{7x+y} = 1 + y. & (5)\end{cases}$$

Складывая почленно уравнения (4) и (5), имеем

$$\sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 2 + 2y - x. \qquad (6)$$

Но тогда из (6) и (1) находим $2 + 2y - x = 5$, откуда

$$x = 2y - 3. \qquad (7)$$

Каждое из уравнений (3)–(7) является следствием системы (1), (2). Исключив x из системы (4), (7), получим

$$\sqrt{5y-6} = 4 - y,$$

откуда $y^2 - 13y + 22 = 0$, $y_1 = 11$, $y_2 = 2$.

Соответствующие значения x находим по формуле (7): $x_1 = 19$, $x_2 = 1$. Проверка показывает, что пара чисел $(x_1; y_1)$ не является решением системы, а пара чисел $(1; 2)$ образует решение системы.

Ответ. $(1; 2)$.

Замечание. Легко убедиться в том, что «лобовое» решение, основанное на избавлении от корней в исходной системе с помощью возведения в квадрат, связано с преодолением немалых трудностей.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10(y-x) - x^4 = 9, & (8)\\ \sqrt{y} + \sqrt{y-2x} = \sqrt{2}. & (9)\end{cases}$$

Решение. Запишем уравнение (9) в виде

$$\sqrt{y-2x} = \sqrt{2} - \sqrt{y} \qquad (10)$$

и возведем обе части уравнения (10) в квадрат. Получим $\sqrt{2y} = x + 1$, откуда

$$y = \frac{(x+1)^2}{2}. \qquad (11)$$

Уравнение 11 является следствием системы (8), (9). Подставляя y из (11) в уравнение (8), получаем

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$.

Остается найти соответствующие значения y по формуле (11) и сделать проверку.

Ответ. $(1; 2)$, $(-1; 0)$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+4y}}{4y} + \dfrac{\sqrt[3]{3x+4y}}{3x} = -\dfrac{1}{72}, \\ \dfrac{\sqrt[3]{2x-y}}{y} - \dfrac{\sqrt[3]{2x-y}}{2x} = -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Решение. Заметив, что $xy \neq 0$, запишем систему в виде

$$\begin{cases} (3x+4y)^{4/3} = -\dfrac{xy}{6}, & (12) \\ (2x-y)^{4/3} = -\dfrac{8}{3}\,xy. & (13) \end{cases}$$

Разделив почленно уравнения системы (12), (13), получаем

$$\left(\frac{3x+4y}{2x-y}\right)^{4/3} = \frac{1}{16}, \quad \frac{3x+4y}{2x-y} = \pm\frac{1}{8},$$

откуда

$$x = -\frac{3}{2}\,y \text{ или } x = -\frac{31}{26}\,y.$$

Если $x = -\dfrac{3}{2}\,y$, то из уравнения (13) находим

$$(-4y)^{4/3} = 4y^2, \quad 4^4y^4 = 4^3y^6, \quad y^2 = 4, \quad y = \pm 2, \quad x = \mp 3.$$

Если $x = -\dfrac{31}{26}\,y$, то $y^2 = \left(\dfrac{726}{31}\right)^2 \dfrac{3}{13}$, $y = \pm\dfrac{726}{31}\sqrt{\dfrac{3}{13}}$, $x = \pm\dfrac{363}{13}\sqrt{\dfrac{3}{13}}$.

Ответ. $(-3; 2)$, $(3; -2)$, $\left(-\dfrac{363}{13}\sqrt{\dfrac{3}{13}}; \dfrac{726}{31}\sqrt{\dfrac{3}{13}}\right)$, $\left(\dfrac{363}{13}\sqrt{\dfrac{3}{13}}; -\dfrac{726}{31}\sqrt{\dfrac{3}{13}}\right)$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} + \dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = \dfrac{17}{4}, & (14) \\ x(x+y) + \sqrt{x^2+xy+4} = 52. & (15) \end{cases}$$

Решение. Освобождаясь в уравнении (14) от иррациональности в знаменателях, получаем

$$\frac{4x^2 - 2y^2}{y^2} = \frac{17}{4},$$

откуда $x = \frac{5}{4}y$ и $x = -\frac{5}{4}y$.

В уравнении (15) положим $t = \sqrt{x^2 + xy + 4}$; тогда получим

$$t^2 + t - 56 = 0,$$

откуда $t_1 = 7$, $t_2 = -8$. Отбросив корень $t_2 < 0$, получим $x^2 + xy = 45$.

Решив две системы уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4}y, \\ x^2 + xy = 45; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{5}{4}y, \\ x^2 + xy = 45, \end{cases}$$

найдем четыре решения, которые, как показывает проверка, удовлетворяют и исходной системе.

Ответ. $(5; 4)$, $(-5; -4)$, $(15; -12)$, $(-15; 12)$.

Задачи

Решить систему уравнений (1–13):

1. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ x^2y + xy^2 = 468. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 84, \\ x + y + \sqrt{xy} = 14. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sqrt[4]{3x - 2y + 9} + \sqrt[4]{2x + y - 6} = 3, \\ \sqrt{3x - 2y + 9} - \sqrt{2x + y - 6} = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y}{x}} - 2\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = 1, \\ \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y + 11} = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y + 1}{x - 1}} - 2\sqrt[3]{\frac{x - 1}{y + 1}} = 1, \\ \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y + 6} = 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sqrt{8y - x} + x = 2, \\ \sqrt{3y - x} + x + y = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \sqrt{7x + y} + \sqrt{x + y} = 6, \\ \sqrt{x + y} - y + x = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \sqrt{7(x - y)} - \sqrt{x + y} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{y}{x}}, \\ \sqrt{7(x - y)} + \sqrt{x + y} = 9\sqrt{\frac{x}{y}}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sqrt{2x - 1} + \sqrt{3 - y} = 3, \\ 6x + y - 2xy = 7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y^4 + 19 = 20(x + y), \\ \sqrt{x} + \sqrt{x + 2y} = \sqrt{2}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185, \\ (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sqrt{25 - x^2} - \sqrt{25 - y^2} = \sqrt{8}, \\ \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{25 - y^2} = \sqrt{16 + (x + y)^2}. \end{cases}$

Ответы

1. $(4;9)$, $(9;4)$. **2.** $(8;27)$, $(27;8)$. **3.** $(2;8)$, $(8;2)$. **4.** $(3;1)$.
5. $(1;8)$, $(7;-7)$, $\left(\frac{49}{64};\frac{49}{8}\right)$. **6.** $(2;7)$, $\left(\frac{5}{4};1\right)$, $(5;-5)$. **7.** $(-1;1)$.
8. $(2;2)$. **9.** $(16;9)$. **10.** $(1;-1)$, $\left(\frac{5}{2};2\right)$. **11.** $(0;1)$, $(2;-1)$.
12. $(4;-3)$, $(-4;3)$, $(3;-4)$, $(-3;4)$.
13. $(-2\sqrt{2}+\sqrt{3};-2\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $(2\sqrt{2}-\sqrt{3};2\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

Указания

1. Положить $x\sqrt{y}=u$, $y\sqrt{x}=v$; тогда $u+v=30$, $uv=216$.
2. Положить $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$; тогда $u+v=5$, $uv=6$.
3. Положить $x+y=u$, $\sqrt{xy}=v$; тогда $u+v=14$, $u^2-v^2=84$.
4. Положить $\sqrt[4]{3x-2y+9}=u$, $\sqrt[4]{2x+y-6}=v$; тогда $u+v=3$, $u^2-v^2=3$.
5. Положить $\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=t$; тогда $t-\frac{2}{t}=1$.
6. Положить $\sqrt[3]{\frac{y+1}{x-1}}=t$; тогда $t-\frac{2}{t}=1$.
7. Записав систему в виде

$$\begin{cases}\sqrt{8y-x}=2-x,\\ \sqrt{3y-x}=2-x-y,\end{cases}$$

возвести каждое уравнение этой системы в квадрат (почленно), а затем вычесть из первого уравнения полученной системы второе.
8. См. решение примера 2.
9. Перемножить уравнения почленно.
10. Положить $\sqrt{2x-1}=u$, $\sqrt{3-y}=v$; тогда $u+v=3$, $uv=2$.
11. См. решение примера 3.
12. Разделив уравнения почленно, получить квадратное уравнение относительно $t=\frac{x}{y}$.
13. Возведя уравнения системы в квадрат и сложив, получить уравнение

$$76-2(x^2+y^2)=(x+y)^2.$$

Перемножив уравнения системы и возведя полученное уравнение в квадрат (почленно), придти к уравнению

$$(x-y)^2(x+y)^2=8\left[16+(x+y)^2\right].$$

Положить $(x+y)^2=u$, $(x-y)^2=v$.

3. Алгебраические системы с тремя неизвестными

Справочные сведения

Для систем с тремя неизвестными определения понятий равносильности и следствия, а также свойства преобразований систем формулируются аналогично тому, как это было сделано для систем с двумя неизвестными.

Будем рассматривать системы вида

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \\ f_3(x, y, z) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где f_1, f_2, f_3 являются либо многочленами от x, y, z, либо могут быть представлены в виде отношения многочленов.

Сформулируем для систем уравнений с тремя неизвестными следующие утверждения, которые могут оказаться полезными при решении систем.

1°. *Если $f_1 = g_1 g_2$, где g_1 и g_2 — многочлены, то система* (1) *равносильна совокупности систем*

$$\begin{cases} g_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0; \end{cases} \tag{2}$$

и

$$\begin{cases} g_2 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

и поэтому множество решений системы (1) *в этом случае есть объединение множеств решений систем* (2) *и* (3).

2°. *Если уравнение*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

есть следствие системы (1), *то система*

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \\ F = 0 \end{cases}$$

равносильна системе (1), *т. е. при добавлении к системе* (1) *еще одного уравнения* (4), *являющегося следствием этой системы, получается система, равносильная системе* (1).

3°. *Если уравнение* (4) — *следствие системы* (1), *причем* $F = F_1F_2$, *где* F_1 *и* F_2 — *многочлены, то система* (1) *равносильна совокупности систем*

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \\ F_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \\ F_2 = 0. \end{cases}$$

4°. *Система* (1) *равносильна каждой из следующих систем*:

$$\begin{cases} f_1 - f_2 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 + f_2 = 0, \\ f_1 - f_2 = 0, \\ f_3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 + f_2 = 0, \\ f_1 + f_3 = 0, \\ f_2 + f_3 = 0. \end{cases}$$

5°. *Если уравнение* $f_1(x, y, z) = 0$ *равносильно уравнению* $x = \varphi(y, z)$, *где* φ — *многочлен от* y *и* z, *то система* (1) *равносильна системе*

$$\begin{cases} x = \varphi(y, z), \\ f_2\,(\varphi(y, z), y, z) = 0, & (5) \\ f_3\,(\varphi(y, z), y, z) = 0. & (6) \end{cases}$$

Это утверждение лежит в основе метода исключения неизвестных: система (1) сводится к системе (5), (6) с двумя неизвестными.

Прежде чем переходить к примерам алгебраических систем с тремя неизвестными, отметим, что нет общих рецептов для нахождения решений систем. Каждый раз нужно учитывать конкретные особенности рассматриваемой системы. Можно дать только общий совет: решайте побольше задач.

Рассмотрим сначала системы с тремя неизвестными, которые сводятся к кубическим уравнениям.

К таким системам относятся системы симметрических алгебраических уравнений, т. е. системы вида (1), где f_1, f_2, f_3 — многочлены, каждый из которых не меняется, если поменять местами любую пару из переменных x, y, z.

В этом случае удобно ввести следующие переменные:

$$u = x + y + z, \qquad v = xy + xz + yz, \qquad w = xyz.$$

Простейший пример системы рассматриваемого вида — система

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ xy + xz + yz = b, \\ xyz = c. \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) и кубическое уравнение

$$t^3 - at^2 + bt - c = 0 \tag{8}$$

связаны следующим образом.

Если t_1, t_2, t_3 — корни уравнения (8), то система (7) имеет шесть решений: $(t_1; t_2; t_3)$, $(t_1; t_3; t_2)$, $(t_2; t_1; t_3)$, $(t_2; t_3; t_1)$, $(t_3; t_2; t_1)$, $(t_3; t_1; t_2)$, получаемых всевозможными перестановками трех чисел t_1, t_2, t_3. Обратно, если $(x_0; y_0; z_0)$ — решение системы (7), то x_0, y_0, z_0 — корни уравнения (8).

Доказательство этого утверждения основано на использовании формул Виета для корней уравнения (8):

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = a, \\ t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = b, \\ t_1t_2t_3 = c. \end{cases}$$

Для сведения к системам (7) систем симметрических уравнений вида

$$\begin{cases} x + y + z = A, \\ x^2 + y^2 + z^2 = B, \\ xyz = C; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = A, \\ xy + xz + yz = B, \\ xyz = C; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = A, \\ x^2 + y^2 + z^2 = B, \\ x^3 + y^3 + z^3 = C; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = A, \\ xy + xz + yz = B, \\ x^3 + y^3 + z^3 = C \end{cases}$$

можно использовать следующие тождества:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz), \tag{9}$$

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + xz + yz) - 3xyz, \tag{10}$$

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz. \tag{11}$$

Примеры с решениями

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, & (12) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, & (13) \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. & (14) \end{cases}$$

Решение. Используя уравнения (12), (13) и тождество (9), получаем

$$xy + xz + yz = -1. \tag{15}$$

Применяя формулу (11) и учитывая равенства (13)–(15), находим $xyz = -2$.

Следовательно, исходная система равносильна системе вида (7), в которой $a = 2$, $b = -1$, $c = -2$, а уравнение (8) имеет вид

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0.$$

Корни этого уравнения — числа 1, -1, 2. Поэтому система имеет шесть решений, получаемых перестановкой чисел 1, -1, 2.

Ответ. $(1; -1; 2)$, $(1; 2; -1)$, $(-1; 1; 2)$, $(-1; 2; 1)$, $(2; 1; -1)$, $(2; -1; 1)$.

Обратимся теперь к системам с тремя неизвестными, которые не являются симметрическими.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y} = 2, \\ \dfrac{xyz}{y+z} = \dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{xyz}{z+x} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Решение. Так как правые части уравнений отличны от нуля, то $xyz \neq 0$. Полагая $\dfrac{1}{yz} = u$, $\dfrac{1}{zx} = v$, $\dfrac{1}{xy} = w$, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{1}{2}, \\ v + w = \dfrac{5}{6}, \\ w + u = \dfrac{2}{3}. \end{cases} \tag{16}$$

Сложив уравнения системы (16), находим

$$u + v + w = 1. \tag{17}$$

Из (16) и (17) получаем $w = \dfrac{1}{2}$, $u = \dfrac{1}{6}$, $v = \dfrac{1}{3}$, т. е.

$$\begin{cases} yz = 6, \\ zx = 3, \\ xy = 2. \end{cases} \tag{18}$$

Перемножив почленно уравнения системы (18), которая равносильна исходной, имеем $(xyz)^2 = 36$, откуда

$$xyz = 6 \tag{19}$$

или

$$xyz = -6. \tag{20}$$

Следовательно, исходная система равносильна совокупности систем (18), (19) и (18), (20), которые имеют решения $(1; 2; 3)$ и $(-1; -2; -3)$ соответственно.

Ответ. $(1; 2; 3)$, $(-1; -2; -3)$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6xz + 3x = 2z - 2, & (21)\\ xy + yz = 2(z - x + 1), & (22)\\ zy - 6xz + y = 3x + 3. & (23)\end{cases}$$

Решение. Будем решать систему методом исключения неизвестных и сведением, в конечном счете, к одному уравнению с одним неизвестным. Складывая почленно уравнения (21) и (23), получаем

$$z(y - 2) = 1 - y. \qquad (24)$$

Так как $y \neq 2$ на основании равенства (24), то из этого равенства следует, что

$$z = \frac{1 - y}{y - 2}. \qquad (25)$$

Запишем далее уравнение (22) в виде

$$z(y - 2) = 2 - (y + 2)x. \qquad (26)$$

Исключив z из уравнений (24) и (26), получаем $x(y + 2) = y + 1$, откуда

$$x = \frac{y + 1}{y + 2}. \qquad (27)$$

Заметим, что система (27), (25), (21) равносильна системе (21)–(23). Подставляя выражения для x и z из формул (27) и (25) в уравнение (21), получаем

$$6\,\frac{(y + 1)(1 - y)}{y^2 - 4} + 3\,\frac{y + 1}{y + 2} = 2\,\frac{1 - y}{y - 2} - 2,$$

или $y^2 - y - 12 = 0$, откуда $y_1 = 4$, $y_2 = -3$.

Соответствующие значения x и z найдем по формулам (27) и (25).

Ответ. $\left(\frac{5}{6}; 4; -\frac{3}{2}\right)$, $\left(2; -3; -\frac{4}{5}\right)$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{yz}{x^3} = \dfrac{5}{2},\\[2mm] \dfrac{zx}{y^3} = \dfrac{5}{32},\\[2mm] \dfrac{xy}{z^3} = \dfrac{8}{125}. \end{cases} \qquad (28)$$

Решение. Перемножив уравнения системы (28), получаем $\frac{1}{xyz} = \frac{1}{40}$, или

$$xyz = 40. \qquad (29)$$

Уравнение (29) является следствием системы (28), которая равносильна системе

$$\begin{cases} x^4 = 2^4, & (30)\\ y^4 = 4^4, & (31)\\ z^4 = 5^4, & (32)\\ xyz = 40. \end{cases}$$

Уравнения (30), (31), (32) имеют решения ± 2, ± 4, ± 5 соответственно. С учетом равенства (29) находим четыре решения системы (28).

Ответ. $(2; 4; 5)$, $(2; -4; -5)$, $(-2; 4; -5)$, $(-2; -4; 5)$.

Пример 5. Найти решения системы уравнений

$$\begin{cases} yz - x^2 - xz - xy = 2, & (33)\\ y^2 + xy + zy - zx = 3, & (34)\\ z^2 + zy + xz - xy = 6, & (35) \end{cases}$$

удовлетворяющие условию

$$x \geqslant 0, \qquad y \geqslant 0, \qquad z \geqslant 0. \tag{36}$$

Решение. Вычитая из уравнения (34) уравнение (33), получаем

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1. \tag{37}$$

Далее, вычитая из уравнения (35) уравнение (33), находим

$$z^2 + 2xz + x^2 = 4. \tag{38}$$

Наконец, складывая уравнения (34) и (35), получаем

$$y^2 + 2yz + z^2 = 9. \tag{39}$$

Система (37)–(39) равносильна системе (33)–(35), а при условии (36) — системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1,\\ x + z = 2,\\ y + z = 3, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $(0; 1; 2)$.

Ответ. $(0; 1; 2)$.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + z^2 = 2, & (40)\\ yz + x^2 = 2, & (41)\\ xz + y^2 = 2. & (42) \end{cases}$$

Решение. Вычтем из уравнения (41) уравнение (40) и преобразуем полученное уравнение к виду

$$(z - x)(x - y + z) = 0. \qquad (43)$$

Выполнив ту же операцию с уравнениями (42) и (41), имеем

$$(y - x)(x + y - z) = 0. \qquad (44)$$

Система (43), (44), (42), равносильная системе (40)–(42), распадается на следующие четыре системы:

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ y - x = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z = 0, \\ x + y - z = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ y - x = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y - z = 0, \\ xz + y^2 = 2. \end{cases}$$

Полученные системы легко решаются методом исключения неизвестных. Объединив решения этих систем, найдем все решения исходной системы.

Ответ. $(1; 1; 1)$, $(-1; -1; -1)$, $(\sqrt{2}; 0; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; 0; -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$, $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$, $(0; \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(0; -\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - z^3 - xyz = -4, \\ x^3 - y^3 + z^3 - xyz = 8, \\ -x^3 + y^3 + z^3 - xyz = -2. \end{cases} \qquad (45)$$

Решение. Решим эту систему как линейную относительно x^3, y^3, z^3. Для этого сложим попарно уравнения системы (45) и получим систему

$$\begin{cases} x^3 = xyz + 2, \\ y^3 = xyz - 3, \\ z^3 = xyz + 3. \end{cases} \qquad (46)$$

Перемножив уравнения системы (46) и полагая $t = xyz$, находим

$$t^3 = (t + 2)(t^2 - 9) \quad \text{или} \quad 2t^2 - 9t - 18 = 0,$$

откуда $t_1 = 6$, $t_2 = -\dfrac{3}{2}$, т. е.

$$xyz = 6, \qquad (47)$$

$$xyz = -\frac{3}{2}. \qquad (48)$$

Система (45) в силу утверждения 3° равносильна совокупности систем (46), (47) и (46), (48), каждая из которых имеет единственное решение.

Ответ. $(2; \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{9})$, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}; \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5xy^2 + 2z^2 - xz = 0, \\ 3x^2y - z^2 + xz = 9x^2y^3, \\ -2x^2 + z^2 - 5y^2z = 18x^2y. \end{cases} \tag{49}$$

Решение. Если $x = 0$, то из системы (49) следует, что $z = 0$, а y может принимать любые значения. Аналогично, если $z = 0$, то $x = 0$, y — любое. Таким образом, система имеет бесконечное множество решений вида

$$(0; \alpha; 0), \qquad \alpha \text{ — любое.} \tag{50}$$

Будем искать решения системы (49) такие, что $xz \neq 0$. Умножив первое уравнение системы (49) на z, а третье — на x и сложив результаты, получим

$$z^3 - x^3 = 9x^3y. \tag{51}$$

Прибавив к уравнению (51) второе уравнение системы (49), умноженное на $3x$, находим

$$(z - x)^3 = 27x^3y^3. \tag{52}$$

Каждое из уравнений (51), (52) является следствием системы (49).

Так как x, y, z — действительные числа (требуется найти действительные решения системы), то уравнение (52) равносильно уравнению

$$z - x = 3xy. \tag{53}$$

Исключая y из уравнений (53) и (51), получаем

$$z^3 - x^3 = 3x^2(z - x), \qquad (z - x)(z^2 + xz - 2x^2) = 0,$$
$$(z - x)^2(z + 2x) = 0. \tag{54}$$

Уравнения (53) и (54) являются следствиями системы (49), а уравнение (54) равносильно совокупности уравнений

$$z = x, \tag{55}$$
$$z = -2x. \tag{56}$$

Из (55) и (53) следует, что $y = 0$, а из системы (49) при $z = x$ и $y = 0$ находим $x = z = 0$. Полученное решение содержится среди решений (50).

Из (56) и (53) следует, что $y=-1$. Подставляя $y=-1$ в систему (49), находим решения $(0;0;0)$ и $\left(-\frac{1}{2};-1;1\right)$.

Ответ. $(0;\alpha;0)$, α — любое действительное число; $\left(-\frac{1}{2};-1;1\right)$.

Задачи

Решить системы уравнений (1–12):

1. $\begin{cases} xy=6, \\ yz=15, \\ xz=10. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(y+z)=27, \\ y(x+z)=32, \\ z(x+y)=35. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{6}{5}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x+2y+3z=5, \\ x^2+y^2+z^2=6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x(x+y+z)=7, \\ y(x+y+z)=14, \\ z(x+y+z)=28. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+xy+xz-x=2, \\ y^2+xy+yz-y=-2, \\ z^2+xz+yz-z=6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=xyz, \\ y+z=xyz, \\ z+x=xyz. \end{cases}$

8. $\begin{cases} yz=\dfrac{2}{3}x, \\ zx=\dfrac{3}{2}y, \\ xy=6z. \end{cases}$

9. $\begin{cases} xy+x+y=7, \\ yz+y+z=-3, \\ xz+x+z=-5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x(y+z)=5, \\ y(x+z)=8, \\ x+y+z=6. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+xz+yz=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ xyz=-2. \end{cases}$

13. Пусть $(x_0;y_0;z_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} (x-a)(y-a)(z-a)=d, \\ (x-b)(y-b)(z-b)=d, \\ (x-c)(y-c)(z-c)=d, \end{cases}$$

причем среди чисел a, b, c нет равных. Найти $x_0^3+y_0^3+z_0^3$.

Решить систему уравнений:

14. $\begin{cases} y+z=3x, \\ x+y=z+2, \\ y^3+z^3=7x^3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=1, \\ y+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{3}{4}, \\ z+\dfrac{1}{x}=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+y=z, \\ y+z=-2x, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)=15, \\ 3y\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)=20, \\ 6z\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=13. \end{cases}$

18. $\begin{cases} (x+y)^2-z^2=4, \\ (y+z)^2-x^2=2, \\ (z+x)^2-y^2=3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 6(x+y)=5xy, \\ 2(y+z)=3yz, \\ 3(z+x)=4zx. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xyz}=\dfrac{7}{12}, \\ \dfrac{y+z}{xyz}=\dfrac{5}{12}, \\ \dfrac{z+x}{xyz}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 24(x+y-z)=xyz, \\ \dfrac{24}{5}(y+z-x)=xyz, \\ 8(x+z-y)=xyz. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3xz+1=4x+3z, \\ 4xy-3xz=4y-3z+9, \\ xy-zy=x+3-2z. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} xy=x+y-z, \\ xz=2(x-y+z), \\ yz=3(y-x+z). \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} x^2=x-2z, \\ xy=3x+y-5z, \\ xz=5x+2y-8z. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3xy-\dfrac{16}{xz}=-5, \\ xz+\dfrac{8}{yz}=4, \\ yz-\dfrac{3}{xy}=1. \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} 2x^2+3y^2=8x+6y+8z+11, \\ y^2-z^2=2y+z+1, \\ 2x^2-4y^2+2z^2=8x-8y+z-1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 6x(y^2+z^2)=13yz, \\ 3y(x^2+z^2)=5xz, \\ 6z(x^2+y^2)=5xy. \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} 2(x^2+y^2)=xyz, \\ 10(y^2+z^2)=29xyz, \\ 5(z^2+x^2)=13xyz. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-z^2}{xy}=\dfrac{3}{z}, \\ \dfrac{y^2+z^2-x^2}{yz}=\dfrac{3}{x}, \\ \dfrac{y^2-x^2-z^2}{xz}=\dfrac{21}{y}. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=\dfrac{-3}{2}, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=\dfrac{-3}{2}, \\ xy+yz+zx=-3. \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} (x+2y)(x+2z)=x, \\ (y+2x)(y+2z)=y, \\ (z+2x)(z+2y)=z. \end{cases}$ **33.** $\begin{cases} (x+y)(x+z)=x, \\ (y+x)(y+z)=2y, \\ (z+x)(z+y)=3z. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1, \\ x^2+z^2+xz=4, \\ y^2+z^2+yz=7. \end{cases}$

Ответы

1. $(2;3;5)$, $(-2;-3;-5)$. **2.** $(3;4;5)$, $(-3;-4;-5)$. **3.** $(1;2;3)$.
4. $(1;-1;2)$, $\left(-\frac{2}{3};\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$. **5.** $(1;2;4)$, $(-1;-2;-4)$. **6.** $(1;-1;3)$, $\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};-2\right)$.
7. $(0;0;0)$, $(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.
8. $(0;0;0)$, $(3;2;1)$, $(-3;-2;1)$, $(3;-2;-1)$, $(-3;2;-1)$.
9. $(-5;-3;0)$, $(3;1;-2)$. **10.** $(1;2;3)$, $(1;4;1)$, $(5;2;-1)$, $(5;4;-3)$.
11. $(1;2;-2)$, $(2;1;-2)$, $(-2;1;2)$, $(1;-2;2)$, $(2;-2;1)$, $(-2;2;1)$.
12. $(1;2;-1)$, $(1;-1;2)$, $(-1;1;2)$, $(-1;2;1)$, $(2;1;-1)$, $(2;-1;1)$.
13. $3d+a^3+b^3+c^3$. **14.** $(0;1;-1)$, $(3;4;5)$, $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};2\right)$.
15. $\left(\frac{1}{5};\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right)$, $(2;-1;4)$. **16.** $(-2;3;1)$.
17. $(3;2;1)$, $(-3;-2;1)$, $(3;-2;-1)$, $(-3;2;-1)$.
18. $\left(\frac{7}{6};1;\frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{7}{6};-1;-\frac{5}{6}\right)$. **19.** $(0;0;0)$, $(3;2;1)$. **20.** $(3;4;1)$, $(-3;-4;-1)$.
21. $(0;0;0)$, $(2;3;4)$, $(-2;-3;-4)$. **22.** $(1;2;3)$. **23.** $\left(-\frac{1}{2};-1;\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{2};3;2\right)$.
24. $(0;0;0)$, $(0;6;6)$, $(4;0;4)$, $(2;2;0)$, $\left(\frac{7}{3};\frac{5}{2};-1\right)$.
25. $(0;0;0)$, $(-1;-1;-1)$, $(-5;-10;-15)$.
26. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$, $\left(2;-\frac{1}{2};4\right)$, $\left(-2;\frac{1}{2};-4\right)$.
27. $(5;3;1)$, $(5;-1;1)$, $(-1;3;1)$, $(-1;-1;1)$, $(4;1+\sqrt{2};-1)$, $(4;1-\sqrt{2};-1)$, $(0;1+\sqrt{2};-1)$, $(0;1-\sqrt{2};-1)$.

28. $(a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$, где a, b, c — любые числа; $\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$, $\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$, $\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$, $\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$.

29. $(0;0;0)$, $(1;2;5)$, $(-1;-2;-5)$, $(-1;2;-5)$, $(-1;-2;5)$.

30. $(1;3;1)$, $(-1;-3;1)$, $(-1;3;-1)$, $(1;-3;-1)$.

31. $(1;1;-2)$, $(-1;-1;2)$, $(1;-2;1)$, $(-1;2;-1)$, $(-2;1;1)$, $(2;-1;-1)$.

32. $(0;0;0)$, $(0;0;1)$, $(0;1;0)$, $(1;0;0)$, $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{9};\frac{1}{9}\right)$, $\left(-\frac{5}{9};-\frac{5}{9};\frac{4}{9}\right)$, $\left(-\frac{5}{9};\frac{4}{9};-\frac{5}{9}\right)$,
$\left(\frac{4}{9};-\frac{5}{9};-\frac{5}{9}\right)$.

33. $(0;0;0)$, $(0;0;3)$, $(0;2;0)$, $(1;0;0)$, $\left(\frac{35}{24};-\frac{7}{24};-\frac{5}{24}\right)$,

34. $(0;1;2)$, $(0;-1;-2)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

Указания

1. Перемножить уравнения системы.

2. Сложить уравнения системы.

3. Пусть $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$, $\frac{1}{z}=w$; тогда $u+v=\frac{3}{2}$, $u+w=\frac{4}{3}$, $v+w=\frac{5}{6}$.

4. Выразить из первых двух уравнений x и y через z.

5. Сложить уравнения системы.

6. Сложив уравнения системы, получить уравнение

$$(x+y+z)^2-(x+y+z)=6.$$

7. Разность каждой пары уравнений дает равенство $x=y=z$.

8. Перемножить уравнения системы.

9. Добавив единицу к обеим частям каждого уравнения системы, записать ее в виде

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=8,\\(y+1)(z+1)=-2,\\(z+1)(x+1)=-4,\end{cases}$$

а затем перемножить уравнения полученной системы.

10. Из первого и третьего уравнений найти $x(6-x)=5$, а из второго и третьего получить $y(6-y)=8$.

11. Применяя изложенный в данном параграфе метод решения симметрической системы, с помощью тождества (10) установить, что $xyz=-4$, а затем найти корни уравнения $t^3-t^2-4t+4=0$.

12. Из первых двух уравнений системы следует, что $xy+xz+yz=-1$. Поэтому исходная система сводится к системе вида (7).

13. Полагая $u=x+y+z$, $v=xy+yz+zx$, $w=xyz$, записать систему в виде

$$\begin{cases}a^2u-av+w=d+a^3,\\b^2u-bv+w=d+b^3,\\c^2u-cv+w=d+c^3.\end{cases}$$

Далее решить эту систему и воспользоваться тождеством (10).

14. Полагая $x + y = u$, $xy = v$ и исключая z из системы, получить уравнения $u = \frac{1}{5}(u^2 - 2v)$, $u = \frac{1}{7}(u^3 - 3uv)$. Рассмотреть два случая: а) $u = 0$ (тогда $v = 0$); б) $u \neq 0$, тогда $v = \frac{u^2 - 7}{3}$, $u^2 - 15u + 14 = 0$.

15. Из первых двух уравнений выразить x и z через y и подставить в третье уравнение.

16. Из первых двух уравнений выразить x и y через z и подставить в третье уравнение.

17. Записать систему в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{z} + \dfrac{xz}{y} = \dfrac{15}{2}, \\ \dfrac{yz}{x} + \dfrac{xy}{z} = \dfrac{20}{3}, \\ \dfrac{xz}{y} + \dfrac{yz}{x} = \dfrac{13}{6}, \end{cases}$$

а затем решить ее как линейную относительно $\frac{xy}{z}$, $\frac{xz}{y}$, $\frac{yz}{x}$.

18. Разложив левые части уравнений на множители, а затем сложив, получить уравнение $(x + y + z)^2 = 9$.

19. Если $x = 0$, то $y = z = 0$. Если $xyz \neq 0$, то система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

20. Записать систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{xz} = \dfrac{7}{12}, \\ \dfrac{1}{xz} + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{5}{12}, \\ \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

и решить ее как линейную относительно $\frac{1}{yz}$, $\frac{1}{zx}$, $\frac{1}{xy}$.

21. Приравняв левые части уравнений, выразить y и z через x. Подставив $z = 2x$, $y = \frac{3}{2}x$ в первое уравнение, получить уравнение $4x = x^3$.

22. Записать систему в виде

$$\begin{cases} xy + xz = \dfrac{5}{6}(x + y + z), \\ xy + yz = \dfrac{4}{3}(x + y + z), \\ zx + zy = \dfrac{3}{2}(x + y + z). \end{cases}$$

Сложив первые два уравнения этой системы и вычитая третье, получить уравнение $xy = \frac{1}{3}(x + y + z)$. Аналогично установить, что

$$yz = x + y + z, \qquad zx = \frac{1}{2}(x + y + z),$$

а затем получить уравнения $z = 3x$, $y = 2x$.

23. Решить систему методом исключения двух неизвестных (аналогичная система рассматривалась в примере 3).

24. Записать систему в виде

$$\begin{cases} xy = x + y - z, \\ \dfrac{xz}{2} = x - y + z, \\ \dfrac{yz}{3} = y - x + z, \end{cases}$$

а затем преобразовать к виду

$$\begin{cases} z\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 2\right) = 0, \\ y\left(x + \dfrac{z}{3} - 2\right) = 0, \\ x\left(y + \dfrac{z}{2} - 2\right) = 0. \end{cases}$$

25. Сложив первое и третье уравнения и вычитая удвоенное второе, получить уравнение $x(x + z - 2y) = 0$. Если $x = 0$, то $y = z = 0$. Если $xyz \neq 0$, то записать первое и третье уравнения в виде

$$x = \frac{x - 2z}{x}, \qquad x = \frac{5x + 2y - 8z}{z},$$

где $2y = x + z$, а затем получить уравнение $z^2 - 4xz + 3x^2 = 0$.

26. Полагая $xy = u$, $yz = v$, $xz = w$, записать систему в виде

$$\begin{cases} 3u = \dfrac{16}{w} - 5, \\ w = 4 - \dfrac{8}{v}, \\ v = 1 + \dfrac{3}{u}. \end{cases}$$

Исключив из этой системы v и w, получить уравнение $u^2 = 1$.

27. Решая систему как линейную относительно x^2, y^2, z^2, получить уравнение $z^2 = 1$.

28. 1) Если $x = 0$, то $yz = 0$ и поэтому хотя бы одно из чисел y, z равно нулю. Пусть, например, $x = y = 0$, тогда $(0; 0; c)$ — решение системы при любом c. Аналогично, $(a; 0; 0)$ и $(0; b; 0)$ — решения системы при любых a и b.

2) Пусть $xyz \neq 0$. Тогда, решив систему как линейную относительно x^2y^2, y^2z^2, z^2x^2, записать ее в виде

$$\begin{cases} x^2y^2 = \dfrac{3}{2}\, xyz, \\ y^2z^2 = \dfrac{1}{6}\, xyz, \\ z^2x^2 = \dfrac{2}{3}\, xyz. \end{cases}$$

Перемножив эти уравнения, получить уравнение $xyz = \dfrac{1}{6}$.

29. Решив систему как линейную относительно x^2, y^2, z^2, получить систему

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{10}\, xyz, \\ y^2 = \dfrac{2}{5}\, xyz, \\ x^2 = \dfrac{5}{2}\, xyz. \end{cases}$$

Перемножив уравнения этой системы, получить уравнение
$(xyz)^2 = \frac{1}{10}(xyz)^3$.

30. Записать систему в виде

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = \dfrac{3xy}{z}, \\ y^2 + z^2 - x^2 = \dfrac{3yz}{x}, \\ z^2 + x^2 - y^2 = -\dfrac{21xz}{y}, \end{cases}$$

а, затем, сложив уравнения попарно, получить равносильную систему

$$\begin{cases} 2y^2 = \dfrac{3xy}{z} + \dfrac{3yz}{x}, \\ 2x^2 = \dfrac{3xy}{z} - \dfrac{21xz}{y}, \\ 2z^2 = \dfrac{3yz}{x} - \dfrac{21xz}{y} \end{cases}$$

и записать ее в виде

$$\begin{cases} 2xyz = 3x^2 + 3z^2, \\ 2xyz = 3y^2 - 21z^2, \\ 2xyz = 3y^2 - 21x^2. \end{cases}$$

Из этой системы, которая равносильна исходной при условии $xyz \neq 0$, следует, что $z^2 = x^2$, $y^2 = 9x^2$.

31. Из системы следует, что $xyz \neq 0$. Умножив первое уравнение на x, второе на y и вычитая почленно полученные уравнения, установить, что $\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = -\frac{3}{2}(x - y)$, и преобразовать это уравнение к виду $(x - y)\left(x^2 + \frac{5}{2}xy + y^2\right) = 0$.

32. Раскрыв скобки в левых частях уравнений и вычитая из первого уравнения второе, а затем из второго третье, получить систему

$$\begin{cases} (x - y)(x + y - 2z - 1) = 0, \\ (y - z)(y + z - 2x - 1) = 0. \end{cases}$$

33. Рассмотреть два случая: $xyz = 0$, $xyz \neq 0$.
1) Если $xyz = 0$, то по крайней мере два из чисел x, y, z равны нулю. Пусть, например, $x = y = 0$, тогда $z^2 = 3z$. Аналогично, если $x = z = 0$, то $y^2 = 2y$, а если $y = z = 0$, то $x^2 = x$.
2) Если $xyz \neq 0$, то, разделив сначала второе уравнение на первое, а затем третье на первое, получить систему

$$\begin{cases} \dfrac{u + v}{1 + v} = 2u, \\ \dfrac{u + v}{1 + u} = 3u, \end{cases}$$

где $u = \frac{y}{x}$, $v = \frac{z}{x}$. Из этой системы получить уравнение $u = \frac{7}{5}v$.

34. Умножив уравнения системы соответственно на $x - y$, $z - x$ и $y - z$ и сложив результаты, получить уравнение $z = 2y - x$. Затем подставить это выражение во второе уравнение системы. Далее решить однородную систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1, \\ x^2 - 2xy + 4y^2 = 4. \end{cases}$$

§ 17. Задачи на составление и решение уравнений

На вступительных экзаменах в вузы часто предлагаются задачи на составление и решение уравнений. Для решения таких задач обычно требуется ввести неизвестные, записать условия задачи в виде уравнений, связывающих эти неизвестные, решить полученное уравнение или систему уравнений и произвести отбор решений по смыслу задачи.

1. Задачи на движение

Справочные сведения

При решении таких задач принято считать, что:

1) движение является равномерным (скорость постоянна и положительна), если не оговорено противное;
2) скорость тела при движении по течению реки равна $u+v$, а при движении против течения равна $u-v$, где u — собственная скорость тела (скорость в стоячей воде); v — скорость течения реки; плот движется со скоростью течения реки.

При составлении уравнений в задачах на движение часто используются следующие очевидные утверждения:

1) если два тела, находящиеся перед началом движения на расстоянии s, движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2, то время, через которое они встретятся, равно $\dfrac{s}{v_1+v_2}$;
2) если два тела, находящиеся перед началом движения на расстоянии s, движутся в одном направлении со скоростями v_1 и v_2, где $v_2 > v_1$, то время, через которое второе тело (его скорость v_2) догонит первое, равно $\dfrac{s}{v_2-v_1}$.

Примеры с решениями

Пример 1. Пешеход и велосипедист отправляются одновременно из пункта A в пункт B. В пункте B велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 20 мин после начала движения. Не останавливаясь, велосипедист доезжает до пункта A, поворачивает обратно и догоняет пешехода через 10 мин после первой встречи. За какое время пешеход пройдет путь от A до B?

Решение. Пусть v_1 и v_2 — скорости (в километрах в час) соответственно пешехода и велосипедиста, s — путь AB (в километрах).

Так как пешеход и велосипедист встретились через $\frac{1}{3}$ ч, пройдя вдвоем путь $2s$, то

$$\frac{1}{3}(v_1 + v_2) = 2s. \tag{1}$$

За полчаса, истекших от начала движения до того момента, когда велосипедист догнал пешехода, разность пройденных ими расстояний была равна $2s$, т. е.

$$\frac{1}{2}(v_2 - v_1) = 2s. \tag{2}$$

Запишем систему уравнений (1), (2) в виде

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 6s, \\ v_2 - v_1 = 4s \end{cases} \tag{3}$$

и вычтем из первого уравнения системы (3) второе. Получим $v_1 = s$, откуда найдем искомую величину $\frac{s}{v_1} = 1$.

Ответ. За 1 ч.

Пример 2. Пристань A находится выше по течению реки, чем пристань B. Из A и B одновременно навстречу друг другу начали движение плот и моторная лодка. Достигнув пристани A, моторная лодка немедленно повернула обратно и догнала плот в тот момент, когда он проплыл $2/3$ расстояния между A и B.

Найти время, которое затрачивает плот на путь из A в B, если моторная лодка проплывает из B в A и обратно за 3 ч.

Решение. Пусть s — расстояние между пунктами A и B, v — скорость течения реки, w — скорость моторной лодки в стоячей воде. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{2s}{3v} = \dfrac{s}{w-v} + \dfrac{2s}{3(w+v)}, \\ \dfrac{s}{w-v} + \dfrac{s}{w+v} = 3. \end{cases} \tag{4}$$

Полагая $x = \frac{v}{s}$, $y = \frac{w}{s}$, запишем систему (4) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3x} = \dfrac{1}{y-x} + \dfrac{2}{3(x+y)}, \\ \dfrac{1}{y-x} + \dfrac{1}{y+x} = 3. \end{cases} \tag{5}$$

Первое из уравнений системы (5) приводится к однородному уравнению $2y^2 - 5xy - 3x^2 = 0$, откуда $y = 3x$. Подставив это выражение во второе уравнение системы (5), получаем $x = \frac{1}{4}$, откуда $\frac{1}{x} = 4$.

Ответ. 4 ч.

Пример 3. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 ч из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 мин — мотоциклист. Все участники движения перемещались равномерно и без остановок.

Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода прибыл в пункт B велосипедист, если пешеход прибыл туда на 1 ч позже мотоциклиста?

Решение. Первый способ. Пусть C — точка на пути AB, в которой одновременно оказались участники движения, $AC = a$, $CB = b$; u, v, w — скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста соответственно, x — искомое время. Используя условия задачи, составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a}{u} = \dfrac{a}{v} + 2 = \dfrac{a}{w} + \dfrac{5}{2}, & (6) \\ \dfrac{b}{u} = \dfrac{b}{v} + x = \dfrac{b}{w} + 1. & (7) \end{cases}$$

Из (7) находим

$$b\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) = x, \qquad b\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{w}\right) = 1,$$

откуда

$$x = \frac{\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v}}{\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{w}}.$$

Далее, из (6) получаем

$$\frac{\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v}}{\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{w}} = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5}$$

и, следовательно, $x = \frac{4}{5}$.

Ответ. 48 мин.

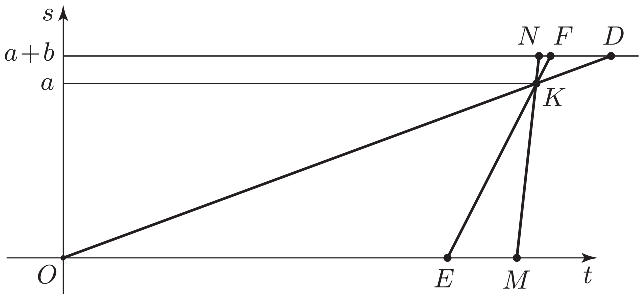

Рис. 17.1

Второй способ. Рассмотрим координатную плоскость, по оси абсцисс будем откладывать время t, а по оси ординат — пройденный путь s (рис. 17.1).

Пусть отрезки OD, EF, MN — графики движения пешехода, велосипедиста и мотоциклиста соответственно. По условию эти отрезки имеют общую точку K с ординатой a, $OE = 2$, $EM = 0,5$, $ND = 1$, точки N, F, D лежат на прямой $s = a + b$, $FD = x$, где x — искомое время.

Так как $ND \| OM$, то $\dfrac{OM}{ND} = \dfrac{OE}{FD}$, откуда

$$x = \frac{OE \cdot ND}{OM} = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5}.$$

Пример 4. Автомобилист и велосипедист, выехавшие одновременно соответственно из пунктов A и B, совершают безостановочное движение между этими пунктами. Доехав до пункта B и повернув назад, автомобилист догнал велосипедиста через 2 ч после их первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A, если к тому моменту, когда его обогнал автомобилист, он проехал $2/5$ пути от B до A?

Решение. Первый способ. Пусть s — расстояние между пунктами A и B, v и w — скорости автомобиля и велосипедиста соответственно, t — время (в часах) от начала движения до первой встречи. Тогда

$$(v + w)t = s, \tag{8}$$

$$w(t + 2) = \frac{2}{5}s, \tag{9}$$

$$v(t + 2) = \frac{7}{5}s. \tag{10}$$

Требуется найти величину $\tau = \dfrac{s}{w} - t$. Разделив почленно уравнения (10) и (9), получим

$$v = \frac{7}{2}w. \tag{11}$$

Из (8) и (11) следует, что

$$\frac{s}{w} = \frac{9}{2}\,t, \tag{12}$$

а из (9) находим

$$\frac{s}{w} = \frac{5}{2}\,(t+2). \tag{13}$$

Наконец, из равенств (12) и (13) получаем $t = \frac{5}{2}$ и $\frac{s}{w} = \frac{45}{4}$ ч. Следовательно, $\tau = \frac{s}{w} - t = \frac{35}{4}$ ч.

Ответ. 8 ч 45 мин.

Второй способ. Решим задачу, не составляя систему уравнений. От начала движения до того момента, когда автомобилист обогнал велосипедиста, они проехали $\frac{7}{5}$ и $\frac{2}{5}$ пути от A до B. Поэтому отношение их скоростей равно $2:7$.

Следовательно, к моменту первой встречи участники движения проехали $\frac{2}{9}$ и $\frac{7}{9}$ пути от A до B. Но, затратив на дорогу еще 2 ч, велосипедист проезжает $\frac{2}{5}$ всего пути. Значит, за 1 ч он проезжает $\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right) : 2 = \frac{4}{45}$ пути. Оставшуюся после первой встречи часть пути $\left(\frac{7}{9}\right)$ велосипедист проедет за $\frac{7}{9} : \frac{4}{45} = \frac{35}{4}$ ч.

Пример 5. Дорога проходит через пункты A и B. Велосипедист выехал из A по направлению к B. Одновременно с ним из пункта B вышли с равными скоростями два пешехода: первый — в пункт A, а второй — в противоположном направлении. Велосипедист проехал от A до B за 0,5 ч и, продолжая движение, догнал второго пешехода. Это произошло через 1,2 ч после встречи велосипедиста с первым пешеходом. Определить время движения велосипедиста от начала движения до встречи с первым пешеходом.

Решение. Пусть C — место встречи велосипедиста с первым пешеходом (рис. 17.2).

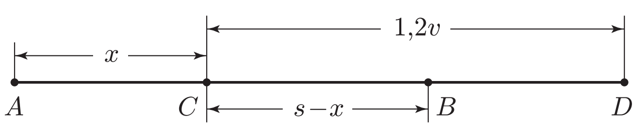

Рис. 17.2

Пусть $AC = x$, $AB = s$, v — скорость велосипедиста, w — скорость каждого из пешеходов. Тогда искомое время

$$t = \frac{x}{v}. \tag{14}$$

Согласно условию задачи имеем

$$\frac{s}{v} = 0{,}5, \tag{15}$$

$CD = 1{,}2v$, где D — место (пункт), где велосипедист догнал второго пешехода, вышедшего из B (в направлении D). Так как велосипедист и первый пешеход вышли одновременно, то время, в течение которого они находились в пути до встречи в C, составляет

$$\frac{x}{v} = \frac{s-x}{w}. \tag{16}$$

Расстояние AD велосипедист преодолел за $\left(\frac{x}{v} + 1{,}2\right)$ ч, а второй пешеход за это время прошел $[1{,}2v - (s-x)]$ км со скоростью w. Следовательно,

$$\frac{x}{v} + 1{,}2 = \frac{1{,}2v + x - s}{w}. \tag{17}$$

Уравнение (16) в силу (14) и (15) можно записать так:

$$\frac{t}{0{,}5-t} = \frac{v}{w}. \tag{18}$$

Аналогично, используя равенства (14) и (15), преобразуем уравнение (17):

$$t + 1{,}2 = \frac{1{,}2v + vt - 0{,}5v}{w}$$

или

$$\frac{t+1{,}2}{t+0{,}7} = \frac{v}{w}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что

$$\frac{t+1{,}2}{t+0{,}7} = \frac{t}{0{,}5-t}, \qquad 10t^2 + 7t - 3 = 0,$$

откуда $t_1 = -1$, $t_2 = 0{,}3$.

Ответ. 0,3 ч.

Пример 6. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости, — равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно $\frac{4}{3}$. В момент встречи поезда имели равные скорости, а в пункты A и B прибыли одновременно. Найти отношение ускорений поездов.

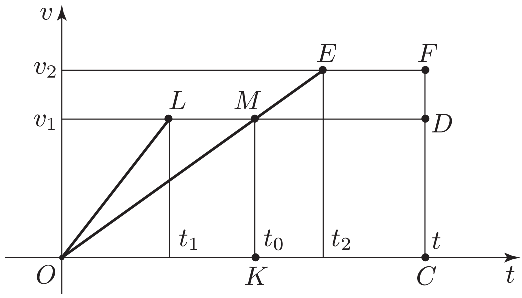

Рис. 17.3

Решение. Пусть v_1 и v_2 — скорости равномерного движения первого и второго поездов, a_1 и a_2 — их ускорения. Предположим, что $v_2 > v_1$, тогда

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{3}. \tag{20}$$

Графики скоростей поездов как функций времени изображены на рис. 17.3.

Здесь t_1 и t_2 — время равноускоренного движения поездов, t_0 — момент их встречи, t — время прохождения пути каждым из поездов. Заметим, что $t_1 < t_0$, а $t_2 > t_0$, так как $v_2 > v_1$ и в момент t_0 поезда имели равные скорости.

Из равенств $v_1 = a_1 t_1$, $v_2 = a_2 t_2$ и условия (20) следует, что

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{t_2}{t_1}. \tag{21}$$

Таким образом, для решения задачи нужно найти отношение $\frac{t_2}{t_1}$.

По условию в момент t_0 поезда имели равные скорости. Следовательно,

$$v_1 = a_2 t_0 = a_1 t_1. \tag{22}$$

Из (22) и (20) находим

$$t_0 = \frac{3}{4}\, t_2. \tag{23}$$

Пусть s — все расстояние, пройденное каждым из поездов, тогда величина s равна площади каждой из трапеций $OLDC$ и $OEFC$ (рис. 17.3), т. е.

$$s = \frac{1}{2}\, v_1 t_1 + v_1 (t - t_1), \tag{24}$$

$$s = \frac{1}{2}\, v_2 t_2 + v_2 (t - t_2). \tag{25}$$

Из равенств (24), (25) и (20) находим

$$2t - t_1 = \frac{4}{3}(2t - t_2)$$

или

$$4t_2 - 3t_1 = 2t. \tag{26}$$

Итак, получены уравнения (23) и (26), связывающие t_1, t_2, t_0 и t. Не хватает еще одного уравнения. Такое уравнение (и в этом ключ к решению задачи) мы получим, заметив, что сумма расстояний s_1 и s_2, пройденных поездами до встречи, равна s.

Так как

$$s_1 = \frac{1}{2}v_1 t_1 + v_1(t_0 - t_1), \qquad s_2 = \frac{1}{2}v_1 t_0, \qquad s_1 + s_2 = s,$$

то

$$s = \frac{v_1}{2}(3t_0 - t_1). \tag{27}$$

Из (24), (27) и (23) следует, что $\frac{9}{4}t_2 - t_1 = 2t - t_1$, т. е.

$$t_2 = \frac{8}{9}t, \tag{28}$$

а из (26) и (28) получаем

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{12}{7}. \tag{29}$$

Наконец, из равенств (21) и (29) находим, что $\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{7}$.

Ответ. $\frac{9}{7}$.

Пример 7. Два велосипедиста движутся по кольцевой велотрассе длины s, $\frac{1}{5}$ часть которой проходит по стадиону, а оставшаяся часть — по городским улицам. Скорость первого велосипедиста на стадионе равна v, а на городских улицах равна $\frac{16}{3}v$. Скорость второго велосипедиста на стадионе равна $4v$, а на городских улицах $\frac{16}{5}v$. Велосипедисты одновременно въезжают на стадион. Через какое время после этого один из них впервые совершит обгон другого?

Решение. Первый велосипедист проезжает полный круг за время

$$t_1 = \frac{\frac{s}{5}}{v} + \frac{\frac{4s}{5}}{\frac{16v}{3}} = \frac{7}{20}a, \qquad \text{где} \quad a = \frac{s}{v},$$

а второй — за время

$$t_2 = \frac{\frac{s}{5}}{4v} + \frac{\frac{4s}{5}}{\frac{16v}{5}} = \frac{6}{20}\,a.$$

Поэтому второй велосипедист догонит первого, если проедет на круг больше, чем первый, причем это произойдет на стадионе, поскольку там скорость второго больше, чем у первого.

Пусть t — время от начала движения до момента, когда второй совершит обгон первого; l — число целых кругов, пройденных до обгона вторым велосипедистом; x — часть пути по стадиону, пройденная велосипедистами после l кругов, пройденных вторым.

Так как на полный круг первый затрачивает на $\tau = t_2 - t_1 = \frac{1}{20}\,a$ больше, чем второй, то второй, отрываясь от первого, догонит первого, когда выигрыша во времени будет достаточно, чтобы второй проехал круг. Поэтому второму достаточно проехать 5 полных кругов ($l = 5$), чтобы затем на стадионе обогнать первого. Из условия равенства времени t движения каждого его участника с учетом пройденного пути получаем систему уравнений

$$\begin{cases} t = (l-1)\,\frac{7}{20}\,a + x\,\frac{a}{5}\,, \\ t = l\,\frac{6}{20}\,a + x\,\frac{1}{20}\,a, \end{cases}$$

откуда (при $l = 5$) находим

$$4 \cdot \frac{7}{20} + \frac{x}{5} = 5 \cdot \frac{6}{20} + \frac{1}{20}\,x, \qquad x = \frac{2}{3}\,, \qquad t = \frac{23}{15}\,a.$$

Ответ. $\frac{23s}{15v}$.

Пример 8. Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта A в пункт B и совершают безостановочное движение между A и B. Первая их встреча произошла, когда автобус прошел $\frac{5}{9}$ всего расстояния от A до B, а вторая встреча — когда автобус после первого захода в B проехал $\frac{1}{8}$ всего расстояния от B до A. Первый раз в пункт B автобус прибыл на 16 мин позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер окажутся одновременно в пункте A, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны?

Решение. Первый способ. Пусть τ и t_1 — время (в часах), за которое проходят путь AB автобус и катер соответственно, а t_2 — время, за которое катер проходит путь BA, s — расстояние AB.

До первой встречи в пункте C автобус прошел путь $\frac{5}{9}s$ за время $\frac{5}{9}\tau$. Такое же время катер затратил на AB и путь BC, равный $\frac{4}{9}s$. Следовательно,

$$\frac{5}{9}\tau = t_1 + \frac{4}{9}t_2. \tag{30}$$

До второй встречи автобус затратил время $\tau + \frac{1}{8}\tau$, а катер — время t_1 (на AB), затем t_2 (на BA) и еще $\frac{7}{8}t_1$. Значит,

$$\frac{9}{8}\tau = t_1 + t_2 + \frac{7}{8}t_1 = \frac{15}{8}t_1 + t_2. \tag{31}$$

По условию, автобус первый раз прибыл в B на 16 мин (на $\frac{4}{15}$ ч) позже катера, т. е.

$$\tau = t_1 + \frac{4}{15}. \tag{32}$$

Решив систему (30)–(32), находим

$$\tau = \frac{2}{5}, \qquad t_1 = \frac{2}{15}, \qquad t_2 = \frac{1}{5}.$$

Автобус оказывается в пункте A, преодолев (четное число $2m$ раз) путь от A до B и затратив время $2m\tau$. Катер окажется в пункте A, совершив n рейсов от A до B и n рейсов от B до A и затратив время $n(t_1 + t_2)$. Одновременно в пункте A автобус и катер окажутся лишь в том случае, когда найдутся $m \in \mathbf{N}$ и $n \in \mathbf{N}$ такие, что $2m\tau = n(t_1 + t_2)$, т. е.

$$\frac{4}{5}m = \frac{1}{3}n \quad \text{или} \quad n = \frac{12}{5}m.$$

Так как 12 и 5 — взаимно простые числа, то число $\frac{12}{5}m$ является целым только в том случае, когда m делится на 5. Наименьшее возможное число $m = 5$ и тогда $n = 12$.

Итак, автобус и катер первый раз одновременно окажутся в пункте A, если автобус сделает $m = 5$ рейсов (катер — 12) и затратит время $2m\tau = 10 \cdot \frac{2}{5} = 4$ (ч).

Ответ. Через 4 ч.

Второй способ. Пусть x, y, z — скорости соответственно катера в стоячей воде, автобуса и течения реки, s — расстояние от A до B (река течет от A к B, скорость — в километрах в минуту). Тогда, учитывая, что до первой и второй встречи катер и автобус затратили одинаковое время, получаем

$$\frac{\frac{5}{9}s}{y} = \frac{s}{x+z} + \frac{\frac{4}{9}s}{x-z}, \tag{33}$$

$$\frac{\frac{9}{8}s}{y} = \frac{\frac{15}{8}s}{x+z} + \frac{s}{x-z}. \tag{34}$$

Так как катер пришел в пункт B на 16 мин раньше автобуса, то

$$\frac{s}{y} - \frac{s}{x+z} = 16. \tag{35}$$

Введем следующие обозначения: $u = \frac{s}{y}$, $v = \frac{s}{x+z}$, $w = \frac{s}{x-z}$. Тогда система (33)–(35) примет вид

$$\begin{cases} 5u - 9v = 4w, \\ 9u - 15v = 8w, \\ u - v = 16. \end{cases} \tag{36}$$

Линейная система (36) имеет решение $u = 24$, $v = 8$, $w = 12$. Время, затраченное катером на путь от A до B и обратно, равно $\frac{s}{x+z} + \frac{s}{x-z} = v + w = 20$ (мин), а время, затраченное автобусом на тот же путь, равно $\frac{2s}{y} = 2u = 48$. Одновременно автобус и катер первый раз окажутся в пункте A через целое число поездок, поэтому искомое время есть наименьшее общее кратное чисел 48 и 20 и равно 240 мин, т. е. 4 ч.

2. Задачи на сплавы и смеси

Справочные сведения

Рассмотрим задачи с использованием понятий «процентное содержание», «концентрация», где речь идет о получении сплавов, растворов или смесей.

В таких задачах предполагается, что:

1) все получающиеся сплавы, смеси, растворы однородны;

2) при слиянии двух растворов, имеющих данные объемы, получается смесь, объем которой равен сумме этих объемов.

Примеры с решениями

Пример 1. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди отрезали по куску равной массы и каждую из отрезанных частей сплавили с остатками другого куска. В новых сплавах процентное содержание меди стало одинаковым. Найти массу каждого из отрезанных кусков, если масса первого сплава m кг, а масса второго n кг.

Решение. Первый способ. Назовем для краткости сплавом A первый сплав, а сплавом B — второй сплав. Пусть масса меди в 1 кг сплава A равна u кг, а в 1 кг сплава B равна v кг. Тогда в первом слитке (новом сплаве) содержится $(m-x)u+xv$ кг меди и поэтому в 1 кг первого слитка содержится $\dfrac{(m-x)u+xv}{m}$ кг меди, где x — масса каждого из отрезанных кусков. Аналогично, в 1 кг второго слитка содержится $\dfrac{(n-x)v+xu}{n}$ кг меди.

Приравнивая два найденных выражения, получаем уравнение

$$n[(m-x)u+xv]=m[(n-x)v+xu],$$

которое можно представить в виде

$$(u-v)(mx+nx-mn)=0.$$

Так как сплавы A и B имеют различное процентное содержание меди, то $u\neq v$, и поэтому $mx+nx-mn=0$, откуда $x=\dfrac{mn}{m+n}$.

Ответ. Масса каждого из кусков равна $\dfrac{mn}{m+n}$ кг.

Второй способ. Из двух вновь полученных сплавов (слитков) первый содержит $(m-x)$ кг сплава A и x кг сплава B, а второй — x кг сплава A и $(n-x)$ кг сплава B. По условию процентное содержание меди в обоих слитках одинаково. Это возможно лишь тогда, когда в двух слитках массы сплава A и сплава B пропорциональны, т. е.

$$\frac{m-x}{x}=\frac{x}{n-x},$$

откуда $x=\dfrac{mn}{m+n}$.

Пример 2. Сосуд содержит $p\%$-ный раствор кислоты. Из него отлили a литров и добавили то же количество $q\%$-ного раствора кислоты ($q<p$). Затем после перемешивания эту операцию повторили еще $(k-1)$ раз, после чего получился $r\%$-ный раствор кислоты. Найти объем сосуда.

Решение. Пусть V — объем сосуда, a_i — процентное содержание кислоты в сосуде после i-го перемешивания ($i = 1, 2, \ldots, k$). Тогда

$$\frac{(V-a)p + aq}{V} = a_1, \qquad \frac{(V-a)a_1 + aq}{V} = a_2, \ \ldots,$$
$$\frac{(V-a)a_{k-2} + aq}{V} = a_{k-1}, \qquad \frac{(V-a)a_{k-1} + aq}{V} = r.$$

Положим $x = \frac{V-a}{V} = 1 - \frac{a}{V}$. Умножив i-е равенство на x^{k-i}, где $i = 1, 2, \ldots, k$, и сложив почленно полученные равенства, находим $x^k p + \frac{aq}{V}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) = r$.

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$x^k p + \frac{aq}{V} \cdot \frac{1 - x^k}{1 - x} = r.$$

Так как $1 - x = \frac{a}{V}$, то

$$\left(1 - \frac{a}{V}\right)^k (p - q) = r - q, \qquad V = \frac{a}{1 - \sqrt[k]{\frac{r-q}{p-q}}}.$$

Ответ. $\frac{a}{1 - \sqrt[k]{\frac{r-q}{p-q}}}$.

3. Задачи на совместную работу

Рассмотрим еще один тип задач — задачи на совместную работу (заполнение бассейна, перепечатка рукописи, рытье котлована и т. д.), которую выполняют несколько человек или механизмов, работающих с постоянной для каждого из них производительностью.

Примеры с решениями

Пример 1. Грузчики A и B работали одинаковое число часов. Если бы грузчик A работал на 1 ч меньше, а B — на 7 ч меньше, то A заработал бы 72 тыс. руб., а B — 64,8 тыс. руб. Если бы A работал на 7 ч меньше, а B — на 1 ч меньше, то B заработал бы на 32,4 тыс. руб. больше, чем A. Сколько заработал каждый грузчик?

Решение. Пусть за t часов работы грузчик A заработал x тыс. руб., а B — y тыс. руб. Используя условия задачи, составляем систему уравнений

$$\begin{cases} (t-1)\dfrac{x}{t} = 72, \\ (t-7)\dfrac{y}{t} = 64{,}8, \\ (t-1)\dfrac{y}{t} - (t-7)\dfrac{x}{t} = 32{,}4. \end{cases} \tag{1}$$

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$\frac{t-1}{t} = \frac{72}{x}, \qquad \frac{t-7}{t} = \frac{64{,}8}{y}, \tag{2}$$

а из равенств (2) и третьего уравнения системы (1) получаем уравнение

$$72\,\frac{y}{x} - 64{,}8\,\frac{x}{y} = 32{,}4 \qquad \text{или} \qquad 20\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 9\left(\frac{y}{x}\right) - 18 = 0,$$

откуда

$$\frac{y}{x} = \frac{6}{5}. \tag{3}$$

Разделив второе уравнение системы (1) на первое и учитывая равенство (3), получаем

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{t-7}{t-1} = \frac{64{,}8}{72} \qquad \text{или} \qquad \frac{t-7}{t-1} = \frac{3}{4},$$

откуда $t = 25$.

Тогда из первого уравнения системы (1) находим, что $x = 75$, а из (3) получаем 90.

Ответ. 75 тыс. руб. и 90 тыс. руб.

Пример 2. Бак объемом 425 м^3 был наполнен водой из двух кранов, причем первый кран был открыт на 5 ч дольше второго. Если бы первый кран был открыт столько времени, сколько на самом деле был открыт второй, а второй кран был бы открыт столько времени, сколько был открыт первый, то из первого крана вытекло бы в 2 раза меньше воды, чем из второго. Если открыть два крана одновременно, то бак наполнится за 17 ч. Какое время был открыт второй кран?

Решение. Пусть x — искомое время, v и w — скорость поступления воды из первого и второго кранов соответственно (v и w измеряются в м^3/ч). Тогда

$$\begin{cases} v(x+5) + wx = 425, & (4) \\ 2vx = w(x+5), & (5) \\ (v+w)17 = 425. & (6) \end{cases}$$

Из уравнений (4) и (5) находим

$$v = 25\,\frac{x+5}{3x+5}, \qquad w = \frac{50x}{3x+5} \tag{7}$$

и подставляем выражения v и w, определяемые формулами (7), в уравнение (6).

Тогда получим квадратное уравнение

$$3x^2 - 41x - 60 = 0,$$

имеющее единственный положительный корень $x = 15$.

Ответ. 15 ч.

Задачи

1. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист, а навстречу ему одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Мотоциклист прибыл в пункт B через 2 ч после встречи с велосипедистом, а велосипедист прибыл в пункт A через 4,5 ч после встречи. Сколько часов они были в пути?
2. Два поезда отправились одновременно в одном направлении из городов A и B, расстояние между которыми 60 км, и одновременно прибыли в город C. Если бы один из поездов увеличил скорость на 25 км/ч, а другой — на 20 км/ч, то оба поезда прибыли бы в C одновременно, но на 24 мин раньше. Найти скорости поездов.
3. Поезд должен был пройти перегон в 120 км по расписанию с постоянной скоростью. Однако, пройдя половину перегона с этой скоростью, поезд остановился на 5 мин. Увеличив на второй половине перегона скорость на 10 км/ч, поезд прибыл в конечный пункт вовремя. Определить скорость поезда по расписанию.
4. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу, первый — из пункта A, второй — из пункта B. До встречи пешеходов первый прошел на 1 км больше, чем второй. Первый пешеход прибыл в пункт B через 45 мин после встречи, а второй прибыл в пункт A через 1 ч 20 мин после встречи. Найти расстояние от A до B.
5. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, и на пробег всей дорожки один тратит на 5 с меньше другого. Если они начинают пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, то окажутся рядом через 30 с. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях?
6. Из пункта A выехали три велосипедиста, первый на 1 ч раньше двух других, стартовавших одновременно. Скорость каждого велосипедиста постоянна. Через некоторое время третий велосипедист догнал первого, а второй догнал первого на 2 ч позже, чем третий. Определить отношение скоростей первого и третьего велосипедистов, если отношение скорости второго к скорости третьего равно 2/3.
7. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготавливала 8 м^3 сверх

плана. Поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготавливать по плану?

8. Бассейн наполняется насосами за 3 ч, причем первый насос вдвое производительнее второго. Если бассейн наполнять сначала на 0,5 объема первым и третьим насосами, а затем на 0,5 объема вторым и третьим, то он наполнится за 5 ч. За какое время бассейн наполнится, если будет работать только третий насос?

9. Имеются два куска сплава серебра с медью. Один из них содержит p% меди, другой — q% меди. В каком отношении нужно брать сплавы от первого и второго кусков, чтобы получить новый сплав, содержащий r% меди, где $p < r < q$?

10. Бригада рабочих строит мост за 14 дней. Если бы в бригаде было на 4 человека больше, а каждый работал бы на один час в день дольше, то та же работа была бы выполнена за 10 дней. При увеличении же бригады еще на 6 человек и рабочего дня еще на один час вся работа была бы выполнена за 7 дней. Сколько человек было в бригаде и сколько часов в день они работали?

11. Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала был открыт только первый кран на $\frac{1}{3}$ того времени, которое требуется для наполнения бассейна только вторым краном. Затем был открыт только второй кран на $\frac{1}{3}$ того времени, которое требуется для наполнения бассейна через один первый кран. В результате оказалось наполненным $\frac{13}{18}$ бассейна. За какое время наполнит бассейн каждый кран в отдельности, если оба крана, открытых вместе, наполняют бассейн за 3 ч 36 мин?

12. Из пунктов A и B выехали одновременно навстречу друг другу мотоциклист и велосипедист. Они встретились на расстоянии 4 км от B, а в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист находился на расстоянии 15 км от A. Определить расстояние от A до B.

13. Дорога проходит через пункты A и B. Велосипедист выехал из A по направлению к B. Одновременно с ним из пункта B вышли с равными скоростями два пешехода: первый — в пункт A, а второй — в противоположном направлении. Велосипедист встретил первого пешехода через 0,3 ч после выезда из A, а второго догнал спустя час после момента проезда через B. Определить время движения велосипедиста от A до B.

14. Два пешехода одновременно отправились от станции к поселку по одной дороге. Первый из них первую половину пути шел со скоростью в 1,5 раза большей, чем вторую половину пути. Второй пешеход первую половину времени нахождения в пути шел со скоростью в 1,5 раза меньшей, чем вторую половину времени, и пришел в поселок на 6 мин раньше первого. Сколько минут каждый из них был в пути, если второй обогнал первого, пройдя 5/8 всего пути?

15. Три велосипедиста выехали одновременно: первый и второй из пункта A, двигаясь с различными скоростями, а третий — навстречу им из пункта B. Через 1,5 ч после старта первый был на равном расстоянии от двух других, а через 2 ч после старта третий был на равном расстоянии от первого и второго. Через сколько часов после старта второй велосипедист находился на равном расстоянии от первого и третьего?

16. В двух одинаковых сосудах, объемом по 30 л каждый, содержится всего 34 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если полученная смесь во втором сосуде содержит на 2 л спирта меньше, чем в первом?

17. Имеются два сплава, состоящие из железа, никеля и хрома. Процентное содержание хрома в первом сплаве в 5 раз больше, чем никеля во втором сплаве. Кусок первого сплава массой 200 г сплавили с куском второго сплава массой 400 г и получили сплав, содержащий $q\%$ никеля. Сколько граммов железа содержит новый сплав, если первый сплав содержит 30% никеля, а второй — 40% железа?

18. Для размещения комплекта журналов достаточно купить 13 стандартных полок. Так как в продаже были полки, на которых умещается на 7 журналов меньше, чем на стандартных, то пришлось купить 27 полок. Поэтому осталось свободное место для трех журналов. Сколько журналов было в комплекте?

19. Один вкладчик положил в сбербанк некоторую сумму денег, а другой — вдвое большую сумму. Сумма первого вкладчика через m лет составила p руб., а сумма второго через n лет, где $n \neq m$, составила q руб. Определить, какова первоначальная сумма денег первого вкладчика и сколько процентов в год выплачивает сбербанк.

20. Автобус из пункта A и автомобиль из пункта B отправляются одновременно и осуществляют безостановочное движение с постоянными скоростями между A и B. Первая их встреча произошла через 42 мин после начала движения, а через 2 ч 34 мин после начала движения автомобиль первый раз обогнал автобус. Через какое время после начала движения автобус и автомобиль первый раз окажутся одновременно в пункте A?

21. Пункты A и B расположены на берегу реки. Из A и B одновременно отправляются катер и лодка. Катер курсирует безостановочно между A и B. Через некоторое время из A в B выходит вторая лодка и приходит в B одновременно с десятым прибытием туда катера. При движении от B до A девятый раз катер встретил вторую лодку, пройдя $2/11$ расстояния от B до A, а первую лодку — пройдя $1/3$ расстояния от B до A. Определить, какую часть расстояния между A и B прошли лодки до того момента, когда они поравнялись.

22. Пароход по реке и автобус по дороге, идущей вдоль реки, отправляются одновременно из пункта A в пункт B и совершают безостановочное движение между A и B. Первая их встреча произошла, когда пароход прошел $4/5$ всего пути от A до B, а вторая встреча — когда пароход после первого захода в B прошел $3/8$ пути от B до A. На путь от A до B и обратно пароход затрачивает 1,8 ч. Через сколько часов после начала движения автобус и пароход первый раз окажутся одновременно в пункте B?

23. Вдоль реки расположены пункты A, B, C (B между A и C). Катер прошел от A до C за 7 ч. На каждом из участков AB и BC его собственная скорость (скорость относительно воды) была постоянна, причем на участке BC в 1,5 раза меньше, чем на участке AB. Обратный путь от C до A катер прошел за 8 ч, и на всем пути его собственная скорость была в $\frac{4}{3}$ раза больше, чем при движении из A в B. Если бы на обратном пути собственная скорость катера была такой же, как и при движении из A в B, то участок от B до A он прошел бы за 6 ч. За какое время катер дошел от B до C?

Ответы

1. 5 ч и 7,5 ч. **2.** 50 км/ч, 40 км/ч. **3.** 80 км/ч. **4.** 7 км. **5.** 6 с. **6.** $\frac{1}{2}$. **7.** 24 м^3. **8.** 12 ч. **9.** $\frac{q-r}{r-p}$. **10.** 20 чел., 6 ч в день. **11.** 9 ч и 6 ч. **12.** 20 км. **13.** 0,5 ч. **14.** 30 мин и 24 мин. **15.** 1 ч, $\frac{9}{5}$ ч, 3 ч. **16.** 20 л и 10 л. **17.** $15(30-q)$ при $10 < q < \frac{58}{3}$. **18.** 14. **19.** $p\left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{n}{n-m}}$, $100\left[\left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{m}{m-n}}-1\right]\%$. **20.** 7 ч 42 мин. **21.** $\frac{9}{16}$. **22.** 6 ч. **23.** 4 ч.

§ 18. Системы показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений

При решении систем уравнений, содержащих неизвестные в показателе степени и в ее основании или под знаком логарифма и в его основании, применяются методы решения систем алгебраических уравнений (§ 16), а также методы решения показательных и логарифмических уравнений, изложенные в главе 3.

1. Системы показательных уравнений

Примеры с решениями

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x - 4^y = 65, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 5. \end{cases}$$

Решение. Полагая $3^{\frac{x}{2}} = u$, $2^y = v$, заменим исходную систему алгебраической системой

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 65, \\ u - v = 5, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} u + v = 13, \\ u - v = 5, \end{cases}$$

имеющей решение $u = 9$, $v = 4$. Следовательно, $3^{\frac{x}{2}} = 9$, $2^y = 4$, откуда находим $x = 4$, $y = 2$.

Ответ. $(2; 4)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 2, & (1) \\ 4y^2 - \dfrac{x^2}{3} = 1. & (2) \end{cases}$$

Решение. Полагая в (1) $t = 2^{\frac{x-y}{4}}$, получаем уравнение $t^2 - t - 2 = 0$, имеющее корни $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

Так как показательная функция принимает только положительные значения, то уравнение (1) равносильно уравнению $2^{\frac{x-y}{4}} = 2$, откуда находим

$$x = y + 4. \tag{3}$$

Исключая x из системы (2), (3), получаем уравнение $11y^2 - 8y - 19 = 0$, имеющее корни $y_1 = -1$, $y_2 = \dfrac{19}{11}$. Соответствующие значения x определяются формулой (3).

Ответ. $(3; -1)$, $\left(\dfrac{63}{11}; \dfrac{19}{11}\right)$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x 4^y = 1728, \\ 2^x 9^y = 5832. \end{cases} \tag{4}$$

Решение. Разложим правые части уравнений системы (4) на множители: $1728 = 64 \cdot 27 = 2^6 3^3$, $5832 = 729 \cdot 8 = 27^2 \cdot 2^3 = 3^6 \cdot 2^3$.

Поэтому исходную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} 3^x 2^{2y} = 2^6 3^3, \\ 2^x 3^{2y} = 3^6 2^3. \end{cases}$$

Перемножив, а затем разделив почленно уравнения этой системы, получаем систему

$$\begin{cases} 6^{x+2y} = 6^9, \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-2y} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} x + 2y = 9, \\ x - 2y = -3, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $(3; 3)$.

Ответ. $(3; 3)$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{x-y} = 15 + 9^{x+y}, \\ 8^{x-y} - 21 \cdot 2^{x-y} = 27^{x+y} - 7 \cdot 3^{x+y+1}. \end{cases}$$

Решение. Положим $2^{x-y} = u$, $3^{x+y} = v$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} u^2 = 15 + v^2, \\ u^3 - v^3 = 21(u - v). \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 15, \\ u - v = 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 15, \\ u^2 + uv + v^2 = 21. \end{cases} \tag{7}$$

Система (6) не имеет решений. Система (7) является однородной. Разделив почленно ее уравнения и полагая $\frac{u}{v} = t$, получаем

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 + t + 1} = \frac{5}{7} \quad \text{или} \quad 2t^2 - 5t - 12 = 0,$$

откуда $t_1 = 4$, $t_2 = -\frac{3}{2}$. Значение t_2 следует отбросить, так как $u > 0$, $v > 0$. Если $t = 4$, т. е. $u = 4v$, то из первого уравнения системы (7) находим $v = 1$. Итак, $v = 1$, $u = 4$, т. е. $3^{x+y} = 1$, $2^{x-y} = 4$, откуда $x = 1$, $y = -1$.

Ответ. (1; –1).

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (3x + y)^{x-y} = 9, & (8) \\ (324)^{\frac{1}{x-y}} = 18x^2 + 12xy + 2y^2. & (9) \end{cases}$$

Решение. Возведя обе части уравнения (9) в степень $x - y$ и учитывая, что $18x^2 + 12xy + 2y^2 = 2(3x + y)^2$, преобразуем это уравнение к виду

$$324 = 2^{x-y}(3x + y)^{2(x-y)}. \tag{10}$$

Система (8), (10) приводит к уравнению

$$324 = 2^{x-y} \cdot 81,$$

являющемуся следствием системы (8), (9). Это уравнение равносильно уравнению $2^2 = 2^{x-y}$, откуда

$$x - y = 2. \tag{11}$$

Из (11) и (9) получаем уравнение $(3x + y)^2 = 9$, равносильное совокупности уравнений

$$3x + y = 3; \tag{12}$$

$$3x + y = -3. \tag{13}$$

Решив системы (11), (12) и (11), (13), находим $x_1 = \frac{5}{4}$, $y_1 = -\frac{3}{4}$ и $x_2 = -\frac{1}{4}$, $y_2 = -\frac{9}{4}$. Обе эти пары чисел, как показывает проверка, образуют решение системы (8), (9).

Ответ. $\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}\right)$.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x - 2\cdot 6^x\cdot 2^y + 6\cdot 12^y = 0,\\ 2\cdot 3^y + 4\cdot 6^y\cdot 2^x - 12^x = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Решение. Запишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} 3^x(1 - 2\cdot 2^{x+y}) = -6\cdot 12^y,\\ 2\cdot 3^y(1 + 2\cdot 2^{x+y}) = 12^x. \end{cases} \tag{15}$$

Перемножив почленно уравнения системы (15), получаем

$$2\cdot 3^{x+y}(1 - 4\cdot 4^{x+y}) = -6\cdot 3^{x+y}\cdot 4^{x+y}$$

или

$$2\cdot 3^{x+y}(1 - 4^{x+y}) = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16), являющееся следствием системы (14), равносильно уравнению $4^{x+y} = 1$, откуда $x + y = 0$. Подставим $y = -x$ в систему (15). Тогда каждое из уравнений (15) можно записать в виде $36^x = 6$, откуда $x = \frac{1}{2}$ и тогда $y = -x = -\frac{1}{2}$.

Ответ. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

2. Системы, содержащие логарифмы с постоянными основаниями

Рассмотрим системы логарифмических уравнений, в которых содержатся логарифмы с постоянными основаниями. При решении таких систем часто используется формула $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\log_3(xy)} - \log_3\dfrac{1}{xy} = 3,\\ \log_3(3 + xy) - 2\log_9 y = \log_3(y - 1). \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Система (1) имеет смысл лишь в том случае, когда $xy > 0$, $3 + xy > 0$, $y > 0$, $y - 1 > 0$, т. е. при выполнении условий

$$x > 0, \qquad y > 1. \tag{2}$$

Полагая $\log_3(xy) = t$, запишем первое уравнение системы (1) в виде $\frac{2}{t} + t = 3$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Если $t = 1$, то $xy = 3$. В этом случае система (1) примет вид

$$\begin{cases} xy = 3, \\ \log_3 6 - 2\log_9 y = \log_3(y-1). \end{cases} \tag{3}$$

Если $t = 2$, то $xy = 9$, и система (1) примет вид

$$\begin{cases} xy = 9, \\ \log_3 12 - 2\log_9 y = \log_3(y-1). \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим систему (3). Так как $2\log_9 y = \log_3 y$, то второе уравнение этой системы равносильно уравнению

$$\log_3 6 = \log_3 y + \log_3(y-1). \tag{5}$$

Потенцируя, получаем уравнение $6 = y(y-1)$, являющееся следствием уравнения (5) и имеющее корни $y_1 = -2$, $y_2 = 3$. Значение $y = -2$ не удовлетворяет условию (2), а при $y = 3$ из первого уравнения системы (3) находим $x = 1$. Пара чисел $(1; 3)$ — решение системы (1).

Аналогично, решив систему (4), найдем еще одно решение $\left(\frac{9}{4}; 4\right)$ системы (1).

Ответ. $(1; 3)$; $\left(\frac{9}{4}; 4\right)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x^2y + 2xy^2) - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) = 4, \\ \log_5\left|\frac{xy}{6}\right| = 0. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы можно записать в виде $\log_2[xy(x+2y)] + \log_2\frac{x+2y}{xy} = 4$, а множество допустимых значений x, y определяется условием

$$xy(x+2y) > 0. \tag{6}$$

При выполнении условия (6) исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} (x+2y)^2 = 16, \\ \left|\frac{xy}{6}\right| = 1, \end{cases} \tag{7}$$

а система (6)–(7) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ xy = 6 \end{cases} \tag{8}$$

и

$$\begin{cases} x + 2y = -4, \\ xy = -6. \end{cases} \tag{9}$$

Исключая x из системы (8), получаем уравнение $y^2 - 2y + 3 = 0$, не имеющее действительных корней. Поэтому система (8) не имеет действительных решений.

Из системы (9) получаем уравнение $y^2 + 2y - 3 = 0$, имеющее корни $y_1 = -3$, $y_2 = 1$.

Поэтому исходная система имеет два решения: $(2; -3)$ и $(-6; 1)$.

Ответ. $(2; -3)$, $(-6; 1)$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(y + 3x) - \log_{27} 8 = \log_3(3 - x), \\ 4 + \log_3 \dfrac{y^2}{x^2} = \log_{\sqrt{3}}(9x). \end{cases}$$

Решение. Считая, что $x > 0$, и переходя к логарифмам по основанию 3, заменим исходную систему равносильной ей:

$$\begin{cases} \log_3(y + 3x) = \log_3 2(3 - x), \\ \log_3 \dfrac{81y^2}{x^2} = \log_3(81x^2). \end{cases}$$

Потенцируя, получаем систему

$$\begin{cases} y + 3x = 2(3 - x), & (10) \\ y^2 = x^4, & (11) \end{cases}$$

являющуюся следствием исходной системы. Из (11) следует, что либо $y = x^2$, либо $y = -x^2$.

1) Если $y = x^2$, то из (10) получаем уравнение $x^2 + 5x - 6 = 0$, откуда $x_1 = -6$, $x_2 = 1$. При $x = -6$ исходная система теряет смысл. При $x = 1$ имеем $y^2 = x^2 = 1$. Пара чисел $(1; 1)$ — решение исходной системы.

2) Если $y = -x^2$, то из (10) получаем уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, имеющее корни 2 и 3. При $x = 3$ исходная система теряет смысл. При $x = 2$ находим $y = -x^2 = -4$. Пара чисел $(2; -4)$ образует решение исходной системы.

Ответ. $(1; 1)$, $(2; -4)$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8 \cdot 2^{-x-2y} + 2y^2 = 3\sqrt{2}, & (12) \\ \lg(x + 4y) = 2\lg(2 - x - 2y) - \lg x. & (13) \end{cases}$$

Решение. Потенцируя, заменим (13) на $x(x+4y)=(x+2y-2)^2$ или

$$x = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2. \qquad (14)$$

Система (12), (14) является следствием системы (12), (13). Исключив x из системы (12), (14), приходим к уравнению

$$8 \cdot 2^{-y^2-1} + 2^{y^2} = 3\sqrt{2}. \qquad (15)$$

Полагая в (15) $z = 2^{y^2}$, получаем уравнение $z^2 - 3\sqrt{2}z + 4 = 0$, откуда $z_1 = 2\sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{2}$.

1) Если $z = 2\sqrt{2}$, то $2^{y^2} = 2\sqrt{2}$, откуда $y^2 = \frac{3}{2}$ и из (14) следует, что $x + 2y = y^2 + 1 = \frac{5}{2} > 2$. В этом случае правая часть уравнения (13) теряет смысл.

2) Если $z = \sqrt{2}$, то $2^{y^2} = \sqrt{2}$, откуда $y^2 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Из уравнения (14) находим $x + 2y = y^2 + 1 = \frac{3}{2}$. При $y = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$x_1 = y_1^2 + 1 - 2y_1 = \frac{3}{2} - 2y_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0.$$

В этом случае выражения, содержащиеся под знаками логарифмов в уравнении (13), положительны и $(x_1; y_1)$ — решение системы (12), (13). При $y = y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем $x_2 = \frac{3}{2} - 2y_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, $x_2 + 4y_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$. Пара чисел $(x_2; y_2)$ также образует решение системы (12), (13).

Ответ. $\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + \log_3(x+y)\cdot\log_2 3 = 2\log_4 7 - \log_2 x, \\ \log_2(1+xy) = 2\log_4 y + \log_{\frac{1}{8}}(x-2y)^3. \end{cases} \qquad (16)$$

Решение. Используя равенство

$$\log_3(x+y)\cdot\log_2 3 = \frac{\log_3(x+y)}{\log_3 2} = \log_2(x+y)$$

и переходя к логарифмам по основанию 2, получим систему

$$\begin{cases} \log_2(x+y) = \log_2 7 - \log_2 x, \\ \log_2(1+xy) = \log_2 y - \log_2(x-2y), \end{cases} \qquad (17)$$

равносильную системе (16). Потенцируя, приходим к системе

$$\begin{cases} 2(x+y) = \dfrac{7}{x}, & (18) \\ 1 + xy = \dfrac{y}{x-2y}, & (19) \end{cases}$$

являющейся следствием системы (17).

Из уравнения (18) следует, что

$$y = \frac{7}{2x} - x. \tag{20}$$

Подставляя это в уравнение (19), получаем $6x^4 - 43x^2 + 70 = 0$, откуда $x^2 = \frac{14}{3}$, $x^2 = \frac{5}{2}$. Так как при $x < 0$ первое уравнение системы (16) теряет смысл, то $x_1 = \sqrt{\frac{14}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Если $x = x_1$, то из (20) имеем $y_1 = \sqrt{\frac{21}{8}} - \sqrt{\frac{14}{3}} < 0$, тогда как второе уравнение системы (16) имеет смысл лишь при $y > 0$.

Если $x = x_2$, то $y_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}$. Проверка показывает, что пара чисел $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ является решением системы (16).

Ответ. $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log^2_{2/3} x + \log^2_{2/3} y - \log^2_{2/3}(x+y) = 1, & (21)\\ \log_{3/2} x \cdot \log_{3/2} y + \log_{3/2}(x+y) = 0. & (22) \end{cases}$$

Решение. Переходя в уравнении (22) к логарифмам по основанию $\frac{2}{3}$, получаем

$$\log_{2/3} x \cdot \log_{2/3} y - \log_{2/3}(x+y) = 0. \tag{23}$$

Складывая уравнение (21) с удвоенным уравнением (23), имеем

$$\left(\log_{2/3} x + \log_{2/3} y\right)^2 = \left[1 + \log_{2/3}(x+y)\right]^2, \tag{24}$$

откуда

$$\log_{2/3} x + \log_{2/3} y = 1 + \log_{2/3}(x+y) \tag{25}$$

или

$$\log_{2/3} x + \log_{2/3} y = -1 - \log_{2/3}(x+y). \tag{26}$$

Система (21), (22) равносильна совокупности систем (23), (25) и (23), (26).

1) Рассмотрим систему (23), (25). Из (25) следует, что

$$xy = \frac{2}{3}(x+y). \tag{27}$$

Исключая из уравнений (23) и (25) $\log_{2/3}(x+y)$, получаем

$$\log_{2/3} x \cdot \log_{2/3} y - \log_{2/3} x - \log_{2/3} y + 1 = 0$$

или

$$\left(\log_{2/3} x - 1\right)\left(\log_{2/3} y - 1\right) = 0,$$

откуда следует, что либо $x = \frac{2}{3}$, либо $y = \frac{2}{3}$. Но если $x = \frac{2}{3}$, то равенство (27) не может быть верным ни при каких значениях y. Аналогичное утверждение справедливо и при $y = \frac{2}{3}$. Таким образом, система (23), (25) не имеет решений.

2) Рассмотрим систему (23), (26). Из уравнения (26) следует, что

$$xy = \frac{3}{2(x+y)}, \tag{28}$$

а из (23) и (26) находим

$$\log_{2/3} x \cdot \log_{2/3} y + \log_{2/3} x + \log_{2/3} y + 1 = 0$$

или

$$\left(\log_{2/3} x + 1\right)\left(\log_{2/3} y + 1\right) = 0.$$

Если $\log_{2/3} x = -1$, то $x = \frac{3}{2}$ и тогда из уравнения (28) получаем $y^2 + \frac{3}{2} y - 1 = 0$, откуда $y_1 = -2$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Значение y_1 следует отбросить, так как при $y < 0$ исходная система теряет смысл.

Если $\log_{2/3} y = -1$, то $y = \frac{3}{2}$, и из (24) найдем $x = \frac{1}{2}$.

Ответ. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

3. Системы, содержащие логарифмы с переменными основаниями

Примеры с решениями

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}, \\ xy = 27. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Используя формулу $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ и полагая $\log_x y = t$, запишем первое уравнение системы (1) в виде $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Если $t = 2$, то $\log_x y = 2$, откуда

$$y = x^2. \tag{2}$$

Из (2) и второго уравнения системы (1) находим $x = 3$, $y = 9$. Аналогично, если $t = \log_x y = \frac{1}{2}$, то $y = \sqrt{x}$, $x^{\frac{3}{2}} = 27 = 3^3$, откуда $x = 9$, $y = 3$.

Ответ. $(3; 9)$, $(9; 3)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x(xy) = \log_y x^2, & (3)\\ y^{2\log_y x} = 8 + 9y. & (4) \end{cases}$$

Решение. Допустимые значения x и y определяются условиями

$$x > 0, \qquad x \neq 1, \qquad y > 0, \qquad y \neq 1. \tag{5}$$

При выполнении условий (5) систему (3), (4) можно записать в виде

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{1}{\log_y x} = 2\log_y x, & (6)\\ x^2 = 8 + 9y. & (7) \end{cases}$$

С помощью замены $\log_y x = t$ уравнение (6) приводится к квадратному уравнению $2t^2 - t - 1 = 0$, имеющему корни $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

1) Если $t = 1$, то $\log_y x = 1$, $y = x$. Подставляя $y = x$ в (7), получаем уравнение $x^2 - 9x - 8 = 0$, имеющее единственный положительный корень $x_1 = \dfrac{9 + \sqrt{113}}{2}$, которому соответствует $y_1 = x_1$.

2) Если $t = -\frac{1}{2}$, то $\log_y x = -\frac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{x^2}$. Подставляя $y = x^{-2}$ в (7), получаем биквадратное уравнение $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Полагая $x^2 = z$, приходим к уравнению $z^2 - 8z - 9 = 0$, откуда $z_1 = -1$, $z_2 = 9$. Так как уравнение $x^2 = -1$ не имеет действительных корней, а уравнение $x^2 = 9$ имеет единственный положительный корень $x = 3$, то пара чисел $\left(3; \frac{1}{9}\right)$ образует решение системы (3), (4).

Ответ. $\left(\dfrac{9 + \sqrt{113}}{2}; \dfrac{9 + \sqrt{113}}{2}\right)$, $\left(3; \dfrac{1}{9}\right)$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}}, & (8)\\ \log_4 y \cdot \log_y(y - 3x) = 1. & (9) \end{cases}$$

Решение. Логарифмируя уравнение (8) по основанию y, получаем

$$1 + \log_y x \cdot \log_y x = \frac{5}{2}\log_y x,$$

откуда следует, что $2t^2 - 5t + 2 = 0$, где $t = \log_y x$. Это квадратное уравнение имеет корни $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

1) Если $t = 2$, то $\log_y x = 2$, и значит,

$$x = y^2. \tag{10}$$

Используя формулу $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, запишем уравнение (9) в виде $\log_y(y - 3x) = \log_y 4$, откуда

$$y = 3x + 4. \tag{11}$$

Из системы (10), (11) получаем уравнение $3y^2 - y + 4 = 0$, не имеющее действительных корней.

2) Если $t = \frac{1}{2}$, то $\log_y x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \sqrt{y}$,

$$y = x^2. \tag{12}$$

Из системы (11), (12) следует, что $x^2 - 3x - 4 = 0$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Так как $x > 0$, то значение x_2 следует отбросить, а значению $x = 4$ соответствует $y = 16$.

Ответ. (4; 16).

Задачи

Решить систему уравнений (1–30):

1. $\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 32, \\ 3^{8x+1} = 3^{3y}. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 16^x + 16^y = 68, \\ 16^{x+y} = 256. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3^x + 2^{x+y+1} = 5, \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^y = 9, \\ \sqrt[y]{324} = 6x. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} \sqrt[x]{x + 7y} = 3, \\ (2x + 14y)2^x = 72. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x^{x+y} = y^{24}, \\ y^{x+y} = x^6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y^{x^2-3x-4} = 1, \\ \log_2 x = y. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 5, \\ \lg x - \lg y = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + 2\lg 2, \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = \lg 2. \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} 2^{x-y} = 4^{x+y}, \\ x^4 - 5 = 4^{\log_{\sqrt{2}} y}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^{-y} = 1152, \\ \log_{\sqrt{5}}(x + y) = 2. \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 5, \\ \log_4 x + \log_2 y = 1. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} 3^x \cdot 9^y = 27, \\ \lg(2x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 8 \cdot 2^{\frac{y-x}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}, \\ \log_3(y - 2x) = 3 - \log_3(2x + 3y). \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 7, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \lg^2 \frac{x}{y} = 3\lg^2 x + \lg^2 y, \\ \lg^2(y - 3x) + \lg x \lg y = 0. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 2^{2\log_2 x} + 3^{2\log_3 y} = 8, \\ 2^{2\log_{\frac{1}{2}} x} + 3^{2\log_{\frac{1}{3}} y} = \frac{1}{2}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \log_9 x^2 + \log_3(x-y) = 1, \\ \log_2 y = \log_4(xy-2). \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} 2 + \log_{\sqrt{3}}(2x) = \log_3 y^2, \\ 2\log_3\left(9 + \frac{y}{x}\right) - \log_3 x^2 = 2\log_3(x+2). \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{\log_4(8x)}{\log_4 y} = \dfrac{\log_4 \frac{y}{8}}{\log_4 x}, \\ \log_4(xy) + \log_4 x \cdot \log_4 y = 0. \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ \log_{12}(x^2+y^2) = 1. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} 3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y} = 77, \\ 3^{\log_3 \sqrt{x}} + 2^{\log_{16} y} = 11. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \log_3(3x+y) - \log_{27} 8 = \log_3(3-x), \\ 4 + \log_3 \dfrac{y^2}{x^2} = \log_{\sqrt{3}}(9x). \end{cases}$

26. $\begin{cases} \log_2 \dfrac{y}{x} + \log_4 49 = 1 + 2\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{1}{1+xy}, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+y) = \log_2 5 \cdot \log_5(xy-2) - \log_2 y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5 + \log_y x^2 = -\log_{\sqrt{x}} y, \\ \dfrac{(\log_5 y)^2}{\log_5 x} = 6 - 3^{x^2 y} - \log_{25} y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \log^2_{3/2}(x+y) + \log^2_{3/2}(x-y) - \log^2_{3/2}(2x) = 1, \\ \log_{2/3}(x+y) \cdot \log_{2/3}(x-y) - \log_{2/3}(2x) = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2^{x-y} - 2\cdot 6^{x-y} = 6^{-2y}, \\ 2^{-x-y} - 2\cdot 3^{x+y} + 3\cdot 9^x = 0. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 2\cdot 15^x + 15^y = 5^x \cdot 3^{-y}, \\ 2\cdot 3^{x-y} - 5^{y-x} = 3\cdot 9^x. \end{cases}$

Ответы

1. $(1; 3)$. **2.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **3.** $(0; 1)$. **4.** $(3; 2)$. **5.** $(2; 1)$. **6.** $(1; 1)$, $(9; 3)$. **7.** $(2; 1)$, $(4; 2)$. **8.** $(125; 4)$, $(625; 3)$. **9.** $(100; 10)$. **10.** $(6; 2)$. **11.** $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **12.** $(7; -2)$. **13.** $\left(64; \frac{1}{4}\right)$. **14.** $(1; 1)$. **15.** $(-3; 3)$. **16.** $(8; 8)$. **17.** $(1; 4)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **18.** $(2; 2)$. **19.** $(3; 2)$. **20.** $(3; 18)$, $(1; -6)$. **21.** $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $\left(\frac{1}{64}; \frac{1}{8}\right)$. **22.** $(2; 32)$, $(32; 2)$. **23.** $(3; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; 3)$. **24.** $(81; 16)$. **25.** $(1; 1)$, $(2; -4)$. **26.** $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$. **27.** $\left(5; \frac{1}{25}\right)$, $\left((\log_3 6)^{\frac{2}{3}}; (\log_6 3)^{\frac{1}{3}}\right)$. **28.** $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$. **29.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **30.** $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Указания

4. Возвести второе уравнение в степень y и исключить из системы x.

6. Записать систему в виде

$$\begin{cases} x^{\frac{x+y}{24}} = y, \\ x^{\frac{6}{x+y}} = y. \end{cases}$$

Рассмотреть два случая: а) $y = 1$; б) $y > 0$, $y \neq 1$.

7. Рассмотреть два случая: а) $y = 1$; б) $y > 0$, $y \neq 1$.
Во втором случае получить уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x > 0$.

17. Записать первое уравнение в виде $\lg x(\lg x + \lg y) = 0$.

18. При $x > 0$, $y > 0$ исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

20. Перейти к равносильной (при $x > 0$) системе

$$\begin{cases} |y| = 6|x|, \\ 9x + y = x^2(x+2). \end{cases}$$

21. Положить $\log_4 x = u$, $\log_4 y = v$, $uv \neq 0$; тогда $(u+v)\left(uv - \dfrac{3}{2}\right) = 0$, $u + v + uv = 0$.

25. Перейти к равносильной (при $0 < x < 3$) системе

$$\begin{cases} 3x + y = 2(3 - x), \\ y^2 = x^4. \end{cases}$$

26. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 7y = 2x(1 + xy), \\ y = (x + y)(xy - 2), \end{cases}$$

если $x > 0$, $y > 0$, $xy > 2$. Исключив y из этой системы, получить уравнение $6x^4 - 43x^2 + 70 = 0$.

27. Полагая $\log_y x = t$, привести первое уравнение к виду $2t^2 + 5t + 2 = 0$. Второе уравнение при $t = -\dfrac{1}{2}$ привести к виду $\log_5 y = -2$, а при $t = -2$ — к виду $6^{y^3} = 3$.

28. См. пример 6 из п. 2.

29. Умножив обе части первого уравнения на 6^{y-x}, преобразовать его к виду $3^{y-x} - 2 = 6^{-x-y}$. Заменив во втором уравнении 6^{-x-y} на $3^{y-x} - 2$, получить уравнение $3z^2 - 4z + 1 = 0$, где $z = 3^{x-y}$.

30. Преобразовать первое уравнение к виду $2 \cdot 3^{x+y} + 3^{2y} \cdot 5^{y-x} = 1$, выразить отсюда 5^{y-x} и подставить во второе уравнение. Получится уравнение $3t^2 - 4t + 1 = 0$, где $t = 3^{x+y}$.

4. Системы тригонометрических уравнений

Рассмотрим некоторые типы систем тригонометрических уравнений и укажем наиболее употребительные методы решения систем, основываясь на общей теории систем уравнений, изложенной в § 15.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Складывая и вычитая уравнения системы (1), получаем систему

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 0, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = 1, \end{cases} \qquad (2)$$

равносильную (1). Систему (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Из системы (3) находим

$$\begin{cases} x + y = \pi n, \\ x - y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases}$$

где $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$, откуда следует, что

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi\left(\frac{n}{2} + k\right), \qquad y = -\frac{\pi}{4} + \pi\left(\frac{n}{2} - k\right).$$

Ответ. $\left(\pi\left(\dfrac{n}{2} + k + \dfrac{1}{4}\right); \pi\left(\dfrac{n}{2} - k - \dfrac{1}{4}\right)\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Обратим внимание на типичную ошибку, которую допускают учащиеся и абитуриенты при записи решений систем тригонометрических уравнений. Дело в том, что параметры n и k появляются при решении *разных* уравнений системы (3) и независимы друг от друга. Поэтому эти параметры должны обозначаться разными буквами. Обозначение их одним символом ведет к потере решений.

В некоторых случаях системы тригонометрических уравнений можно свести к алгебраическим системам.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6\sin x\cos y + 2\cos x\sin y = -3, \\ 5\sin x\cos y - 3\cos x\sin y = 1. \end{cases}$$

Решение. Полагая $\sin x\cos y = u$, $\cos x\sin y = v$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 6u + 2v = -3, \\ 5u - 3v = 1, \end{cases}$$

откуда $u = -\frac{1}{4}$, $v = -\frac{3}{4}$.

Исходная система равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} \sin x\cos y = -\dfrac{1}{4}, \\ \cos x\sin y = -\dfrac{3}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(x+y) = -1, \\ \sin(x-y) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда следует, что $x + y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x - y = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} + \pi n$, $y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} - \frac{\pi k}{2} + \pi n$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

Решение. Полагая $\sin x = u$, $\sin y = v$, получаем алгебраическую систему

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + 1 - v^2 = 1, \end{cases}$$

равносильную системе

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ u + v = 0, \end{cases}$$

откуда находим $u = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{1}{2}$. Таким образом, $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin y = -\frac{1}{2}$, откуда

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, \qquad y = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, \qquad n \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ. $\left((-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n; (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Аналогично можно находить решения систем вида

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = b \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b. \end{cases}$$

Решая системы тригонометрических уравнений с двумя неизвестными, следует выяснить, нельзя ли выразить одно неизвестное через другое и свести задачу к решению уравнения с одним неизвестным.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y, & (4) \\ \cos 2y + \sqrt{3} \cos 2x = -1. & (5) \end{cases}$$

Решение. Система (4), (5) имеет смысл, если

$$\cos x \neq 0, \qquad \cos y \neq 0. \tag{6}$$

Преобразуем сначала уравнение (4), разделив обе его части на $1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$. Тогда это уравнение примет вид

$$\operatorname{tg}(y - x) = 1. \tag{7}$$

Однако следует иметь в виду, что эта операция может привести к потере решений исходной системы, а именно таких решений, для которых

$$1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0. \tag{8}$$

Если справедливо равенство (8), то из (7) находим $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x$, $1 + \operatorname{tg}^2 x = 0$, что невозможно.

Итак, $1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \neq 0$ и поэтому система (4), (5) равносильна системе (7), (5) при выполнении условий (6).

Из уравнения (7) находим $y - x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, откуда

$$y = x + \frac{\pi}{4} + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}. \tag{9}$$

Подставляя найденное для y выражение в уравнение (5), получаем

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + \sqrt{3} \cos 2x = -1$$

или

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 1. \tag{10}$$

Применяя метод введения вспомогательного угла, запишем уравнение (10) в виде $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, откуда

$$2x = \frac{\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{11}$$

Если k — четное число ($k = 2m$), то из равенства (11) получаем $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. Подставив это выражение для x в формулу (9), найдем $y = \frac{\pi}{2} + \pi(n+m)$, $n \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$. Но тогда $\cos y = 0$ и не выполняются условия (6).

Если же k — нечетное число ($k = 2m+1$), то из (11) следует, что $2x = \frac{\pi}{6} + \pi + 2\pi m$, откуда

$$x = \frac{7\pi}{12} + \pi m, \qquad m \in \mathbf{Z}. \tag{12}$$

Из (12) и (9) находим $y = \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \pi(n+m)$. Полагая $n + m - 1 = p$, имеем

$$y = -\frac{\pi}{6} + \pi p, \qquad p \in \mathbf{Z}. \tag{13}$$

Для значений x, y, определяемых формулами (12) и (13), выполняются условия (6) и поэтому соответствующие пары чисел образуют решения системы (4), (5).

Ответ. $\left(\frac{7\pi}{12} + \pi m; -\frac{\pi}{6} + \pi p\right)$, $m \in \mathbf{Z}$, $p \in \mathbf{Z}$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y = 5\sin x, & (14)\\ 3\cos x + \cos y = 2. & (15) \end{cases}$$

Решение. Будем решать данную систему методом исключения одного из неизвестных, например y. Для этого запишем уравнение (15) в виде

$$\cos y = 2 - 3\cos x, \tag{16}$$

а затем возведем в квадрат обе части уравнений (14) и (16) и результаты сложим. Получим

$$1 = 25\sin^2 x + 4 - 12\cos x + 9\cos^2 x$$

или

$$16\cos^2 x + 12\cos x - 28 = 0. \tag{17}$$

Заметим, что система (15), (17) является следствием системы (14), (15), а уравнение (17), равносильное уравнению $\cos x = 1$, имеет корни

$$x = 2\pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}. \tag{18}$$

Подставляя найденные значения x в уравнение (15), получаем $\cos y = -1$, откуда

$$y = \pi + 2\pi k, \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{19}$$

Значения x и y, определяемые формулами (18) и (19), образуют решения не только системы (15), (17), но и исходной системы.

Ответ. $(2\pi n; \pi + 2\pi k)$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим еще несколько систем тригонометрических уравнений, при решении которых можно применять метод исключения одного из неизвестных.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left|\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = -\sqrt{2}\cos y, & (20) \\ \cos 2y + 2\sin 2x + \frac{3}{4} = 2\sin^3 2x. & (21) \end{cases}$$

Решение. Чтобы исключить из системы (20), (21) неизвестное y, возведем обе части уравнения (20) в квадрат:

$$\cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2 y. \tag{22}$$

Так как $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$, то из (22) и (21) следует, что

$$\cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + 2\sin^3 2x - 2\sin 2x. \tag{23}$$

Уравнение (23) можно записать в виде

$$\frac{1 + \cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4} - 2\sin 2x \cos^2 2x. \tag{24}$$

Применяя формулы $\cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 6x$, $2\sin 2x\cos 2x = \sin 4x$, $\sin 4x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x)$, заменим уравнение (24) ему равносильным:

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}. \tag{25}$$

Уравнение (25) является следствием системы (20), (21) и поэтому указанная система равносильна системе, состоящей из уравнений (20), (25) и уравнения, полученного из (21) в результате замены $\sin 2x$ на $-\frac{1}{2}$. Такое уравнение имеет вид

$$\cos 2y = 0. \tag{26}$$

Из (20) следует, что $\cos y < 0$. Поэтому $\cos^2 y = \frac{1 + \cos 2y}{2} = \frac{1}{2}$ в силу (26) и $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $y = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Соответствующие значения x найдем, решив уравнение (25).

Ответ. $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\operatorname{tg}^4 2x + 6\cos^2 y = 5, & (27) \\ \dfrac{2}{\cos^2 2x} + 4\sin y = 1. & (28) \end{cases}$$

Решение. Используя формулу $\dfrac{1}{\cos^2 2x} = 1 + \operatorname{tg}^2 2x$, запишем уравнение (28) в виде

$$\operatorname{tg}^2 2x = -\frac{1}{2} - 2\sin y. \qquad (29)$$

После исключения неизвестного x из системы (27), (29) получаем $4\sin^2 y + 8\sin y + 3 = 0$, откуда $\sin y = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\cos^2 y = \dfrac{3}{4}$, а затем из уравнения находим $\cos^2 2x = \dfrac{2}{3}$ или $\cos 4x = \dfrac{1}{3}$.

Ответ. $\left(\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi k}{2}; (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10\cos 2x - 2 = 7\cos x\cos 2y, & (30) \\ \sin x = \sqrt{\cos x}\,\sin y. & (31) \end{cases}$$

Решение. Возведя обе части уравнения (31) в квадрат, получаем

$$\sin^2 x = \sin^2 y\cos x. \qquad (32)$$

Система (30), (32) является следствием системы (30), (31). Используя формулу $2\sin^2 y = 1 - \cos 2y$, запишем уравнение (32) в виде

$$2\sin^2 x - \cos x = -\cos x\cos 2y. \qquad (33)$$

Сложим почленно уравнение (30) с уравнением (33), умноженным на 7:

$$10\cos 2x - 2 + 14\sin^2 x - 7\cos x = 0$$

или $6\cos^2 x - 7\cos x + 2 = 0$, откуда $\cos x = \dfrac{2}{3}$, $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

1) Если $\cos x = \dfrac{2}{3}$, то либо

$$x = \arccos\frac{2}{3} + 2\pi k, \qquad \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}, \qquad (34)$$

либо

$$x = -\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k, \qquad \sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}. \qquad (35)$$

Из (34) и (31) следует $\sin y = \sqrt{\frac{5}{6}}$, откуда $y = (-1)^m \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} + \pi m$. Аналогично, из (35) и (31) находим $\sin y = -\sqrt{\frac{5}{6}}$, откуда получаем $y = (-1)^{m+1}\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} + \pi m$.

2) Если $\cos x = \frac{1}{2}$, то из (31) следует, что $\sin y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. В этом случае система (30), (31) не имеет решений.

Ответ. $x = \arccos\frac{2}{3} + 2\pi n$, $y = (-1)^m \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} + \pi m$; $x = -\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n$, $y = (-1)^{m+1}\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} + \pi m$; $n \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Пример 9. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \cos x\sin y - 3\sin x\cos y = \dfrac{3}{5}, & (36)\\ 5\sin x\sin y + \dfrac{5}{3}\cos x\cos y = 4, & (37)\end{cases}$$

удовлетворяющие условиям

$$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{3\pi}{2}. \qquad (38)$$

Решение. Умножим уравнение (37) на $\frac{3}{5}$, затем обе части полученного уравнения возведем в квадрат и сложим почленно с уравнением, образующимся при возведении в квадрат обеих частей уравнения (36). В результате придем к уравнению

$$\cos^2 x + 9\sin^2 x = \frac{153}{25}, \qquad (39)$$

являющемуся следствием системы (36), (37). Уравнение (39) равносильно уравнению

$$\cos^2 x = \frac{9}{25}. \qquad (40)$$

Решив уравнение (40) при условиях (38), находим два его корня

$$x_1 = \pi - \arccos\frac{3}{5}, \qquad x_2 = \pi + \arccos\frac{3}{5}.$$

Если $x = x_1$, то $\sin x = \frac{4}{5}$, $\cos x = -\frac{3}{5}$ и система (36), (37) примет вид

$$\begin{cases} \sin y + 4\cos y = -1,\\ 4\sin y - \cos y = 4,\end{cases}$$

откуда $\sin y = \frac{15}{17}$, $\cos y = -\frac{8}{17}$. Учитывая условия (38), получаем $y = \pi - \arccos\frac{8}{17}$.

Если $x = x_2$, то $\sin x = -\frac{4}{5}$, $\cos x = -\frac{3}{5}$ и система (36), (37) примет вид

$$\begin{cases} -\sin y + 4\cos y = 1, \\ 4\sin y + \cos y = -4, \end{cases}$$

откуда находим $\cos y = 0$, $\sin y = -1$, $y = \frac{3\pi}{2}$.

Ответ. $x = \pi - \arcsin\frac{4}{5}$, $y = \pi - \arccos\frac{8}{17}$; $x = \pi + \arcsin\frac{4}{5}$, $y = \frac{3\pi}{2}$.

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos 2x = (1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin y + \sin 2x), & (41) \\ 8\cos 2x(\cos^8 x - \sin^8 x) + 1 = 25\cos^2 y. & (42) \end{cases}$$

Решение. Система имеет смысл, если $\cos x \neq 0$, а уравнение (41) равносильно уравнению

$$2\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x)(1 + \sin y + \sin 2x),$$

откуда следует, что либо

$$\cos x - \sin x = 0, \tag{43}$$

либо $2\cos^2 x + \sin 2x = 1 + \sin y + \sin 2x$, т. е.

$$\cos 2x = \sin y. \tag{44}$$

Преобразуем далее уравнение (42), пользуясь тем, что

$$\cos^8 x - \sin^8 x = (\cos^4 x - \sin^4 x)(\cos^4 x + \sin^4 x) = \\ = \cos 2x\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = \frac{\cos 2x}{2}(1 + \cos^2 2x).$$

Тогда уравнение (42) можно записать в виде

$$4\cos^2 2x(1 + \cos^2 2x) + 1 = 25\cos^2 y. \tag{45}$$

Исходная система (при условии, что $\cos x \neq 0$) равносильна совокупности систем (43), (42) и (44), (45).

1) Рассмотрим систему (43), (42). Уравнение (43) равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = 1$, откуда находим

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Из (42) и (43) следует, что $\cos^2 y = \frac{1}{25}$, $\cos y = \pm\frac{1}{5}$, откуда

$$y = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi m \quad \text{и} \quad y = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{5}\right) + 2\pi k.$$

Эти два множества значений y можно описать одной формулой:

$$y = \pm \arccos \frac{1}{5} + \pi p, \qquad p \in \mathbf{Z}.$$

Укажем еще один способ записи корней уравнения $\cos^2 y = \frac{1}{25}$. Так как $\cos^2 y = \frac{1 + \cos 2y}{2}$, то $\cos 2y = -\frac{23}{25}$, откуда

$$y = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{23}{25} \right) + \pi m.$$

2) Обратимся теперь к системе (44), (45). Исключая из этой системы y, получаем уравнение

$$4t^2 + 29t - 24 = 0,$$

где $t = \cos^2 2x$. Отсюда $t_1 = -8$ (этот корень следует отбросить), $t_2 = \frac{3}{4}$.

Итак, $\cos^2 2x = \frac{3}{4}$, откуда $\cos 4x = \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$.

Из (44) находим $\sin^2 y = \cos^2 2x = \frac{3}{4}$, откуда $\cos 2y = -\frac{1}{2}$, $y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi m$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $y = \pm \arccos \frac{1}{5} + \pi p$; $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi m$, $p \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cos(4x - 2y) = \sqrt{2}\cos(2x - 2y), & (46) \\ \sqrt{2}\sin(x + y) = 3\sin(y - x). & (47) \end{cases}$$

Решение. Перемножив почленно уравнения (46) и (47), получим

$$\cos(4x - 2y)\sin(x + y) = \cos(2x - 2y)\sin(y - x). \qquad (48)$$

Уравнение (48), являющееся следствием системы (46), (47), равносильно каждому из следующих уравнений:

$$\sin(5x - y) + \sin(3y - 3x) = \sin(x - y) + \sin(3y - 3x),$$
$$\cos(3x - y)\sin 2x = 0,$$

откуда находим, что либо

$$\sin 2x = 0, \qquad (49)$$

либо

$$\cos(3x - y) = 0. \qquad (50)$$

Система (46), (47) равносильна совокупности двух систем (46), (47), (49) и (46), (47), (50).

1) Рассмотрим систему (46), (47), (49). Из (49) следует, что

$$x = \frac{\pi n}{2}, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Подставляя $x = \frac{\pi n}{2}$ в систему (46), (47), получаем

$$\begin{cases} 3\cos 2y = \sqrt{2}\cos(\pi n - 2y) = \sqrt{2}(-1)^n \cos 2y, & (51)\\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi n}{2} + y\right) = 3\sin\left(y - \frac{\pi n}{2}\right). & (52)\end{cases}$$

Из (51) следует, что $\cos 2y = 0$, откуда $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbf{Z}$. Подставляя найденное значение y в уравнение (52), находим

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{2}\right). \qquad (53)$$

Равенство (53) не может быть верным ни при каких целых n и k, так как

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{при любом } m \in \mathbf{Z}.$$

Следовательно, система (46), (47), (49) не имеет решений.

2) Рассмотрим систему (46), (47), (50). Из (50) следует, что

$$y = 3x - \frac{\pi}{2} - \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}. \qquad (54)$$

Подставляя это значение y в систему (46), (47), находим

$$\begin{cases} 3\cos 2x = \sqrt{2}\cos 4x, & (55)\\ \sqrt{2}\sin\left(4x - \frac{\pi}{2} - \pi n\right) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{2} - \pi n\right). & (56)\end{cases}$$

Уравнение (56) равносильно уравнению (55), так как

$$\sin\left(4x - \frac{\pi}{2} - \pi n\right) = (-1)^n \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}\cos 4x,$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{2} - \pi n\right) = (-1)^{n+1}\cos 2x.$$

Используя формулу $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, из (55) находим $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, откуда $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Соответствующие значения y определяются формулой (54).

Ответ. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \pi k$, $y = \pm\frac{3}{2}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{\pi}{2} + \pi m$, $k \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Задачи

Решить систему уравнений (1–16):

1. $\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{7}{4}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4 \sin x \cos y = 1, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3 \cos x + 4 \cos y = 5, \\ 3 \sin x + 2 \sin y = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sin x = \sin y + \dfrac{1}{\sin x}, \\ \cos x = \cos y + \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2 \sin^3 x = \sin y, \\ 2 \cos^3 x = \cos y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \cos^2 y + 3 \sin x \sin y = 0, \\ 21 \cos 2x - \cos 2y = 10. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \cos^4 x = \cos y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \cos(x - y) = 2 \cos(x + y), \\ 4 \cos x \cos y = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y, \\ \sin 2y = 1 + \sqrt{2} \sin x. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2 \sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \cos x \sin y = 2 \sin x \cos^2 y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y, \\ \cos(2x + y) = - \cos x \cos(x + y). \end{cases}$

14. $\begin{cases} \left| \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \right| = \sin y - \cos y, \\ \sin 2y + 2 \sin 2x = \dfrac{3}{4} + 2 \sin^3 x. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 17 \cos 2x - 7 = 21 \sin x \cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3 \sin x} \cos y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \cos 2x + 4 = 2 \operatorname{tg}^4 y, \\ \sin x + \dfrac{1}{\cos^2 y} = 3. \end{cases}$

Ответы

1. $\left(\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; 2\pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $\left(\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \pi\left(n - \frac{k}{2}\right); (-1)^k \frac{\pi}{12} + \pi\left(n + \frac{k}{2}\right)\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} + 2\pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. $\left(\frac{\pi}{4} + (k + n)\pi; \pi(k - n)\right)$, $\left((k + n)\pi; \frac{\pi}{4} + \pi(k - n)\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. $\left(\arccos \frac{3}{4} + 2\pi k; -\arccos \frac{1}{8} + 2\pi n\right)$, $\left(-\arccos \frac{3}{4} + 2\pi k; \arccos \frac{1}{8} + 2\pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{5\pi}{4} + \left(2n + \frac{k}{2}\right)\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. $\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi; \frac{\pi}{4} + (2n + 1)\pi\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{3}{4}\pi + 2n\pi\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi + (2k + 1)\pi; \frac{3}{4}\pi + (2n + 1)\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. $\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $\left((-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

9. $(\pi k; 2\pi n)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

10. $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(k + n); \frac{\pi}{6} + \pi(k - n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(k + n); -\frac{\pi}{6} + \pi(k - n)\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

11. $\left(\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi n\right); \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

12. $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; (-1)^{k}\frac{\pi}{3} + \pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

13. $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

14. $\left((-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

15. $\left(\arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k; \pm\arccos\frac{\sqrt{15}}{10} + 2\pi n\right)$,

$\left(-\arcsin\frac{4}{5} + (2k+1)\pi; \pm\arccos\frac{\sqrt{15}}{10} + (2n+1)\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

16. $\left((-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}} + \pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Указания

2. Исходная система равносильна каждой из следующих систем:

а) $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{3}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

3. Сложить уравнения исходной системы и заменить ее равносильной системой:

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$$

4. Записав первое уравнение в виде $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 1$ и преобразовав произведение $\cos x \cos y$ в сумму, получить систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = \sqrt{2}. \end{cases}$$

5. См. пример 5.

6. Исходная система (при условии, что $\sin 2x \neq 0$) равносильна каждой из следующих систем:

а) $\begin{cases} \sin^2 x = 1 + \sin x \sin y, \\ \cos^2 x = 1 + \cos x \cos y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 + \cos(x-y) = 0, \\ \cos 2x = \cos(x+y). \end{cases}$

7. Возведя оба уравнения в квадрат и складывая, получить с помощью тождества $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$ уравнение $\sin^2 2x = 1$, являющееся следствием исходной системы.

8. Выражая из первого уравнения $\sin x$ через y ($\sin y \neq 0$) и подставляя во второе, получить систему, являющуюся следствием:

$$\begin{cases} \cos 2y = \frac{1}{2}, \\ \cos 2x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

9. Возводя уравнение в квадрат и складывая, получить уравнение $\sin^4 x + \cos^8 x = 1$, являющееся следствием исходной системы и имеющее корни $x = \frac{\pi n}{2}$ (см. гл. 4, § 13, пример 1).

10. Преобразовать произведение $\cos x \cos y$ в сумму. **11.** См. пример 3.

12. Выразить $\sin y$ через x из первого уравнения и подставить во второе.

13. Записать систему в виде

$$\begin{cases} \sin x \cos y = 3\cos x \sin y, \\ 2\cos(x+y)\cos x = \sin(x+y)\sin x \end{cases}$$

и рассмотреть два случая: а) $\cos x \cos y = 0$; б) $\cos x \cos y \neq 0$. Во втором случае заменить исходную систему следующей равносильной системой:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{tg} x = 2\operatorname{ctg}(x+y). \end{cases}$$

Исключив затем из этой системы y, получить уравнение $\operatorname{tg}^2 x = 1$.

14. См. пример 6. **15.** См. пример 8. **16.** См. пример 7.

Глава 6

Алгебраические неравенства

§ 19. Основные понятия, связанные с решением неравенств

Справочные сведения

Опыт проведения приемных экзаменов в вузы свидетельствует о том, что многие абитуриенты допускают ошибки при решении неравенств.

Если при решении уравнений можно использовать преобразования, приводящие к появлению посторонних корней, которые выявляются с помощью проверки, то при решении неравенств обычно нет возможности отсеять посторонние решения, так как множество решений неравенства, как правило, бесконечно.

Поэтому при решении неравенства нужно внимательно следить за тем, чтобы в процессе решения не менялось множество его решений, т. е. чтобы при каждом преобразовании неравенство заменялось равносильным.

Рассмотрим основные понятия, связанные с решением неравенств.

Если на некотором множестве E определены функции $f(x)$ и $g(x)$ и ставится задача *решить неравенство*

$$f(x) < g(x), \tag{1}$$

то это означает, что требуется найти *все значения* $x \in E$, *при подстановке которых в неравенство* (1) *получается верное числовое неравенство*.

Каждое такое значение x называется *решением* неравенства, а совокупность всех решений — *множеством решений* этого неравенства.

Из этого определения следует, что каждое решение неравенства (1) принадлежит множеству, которое является пересечением (общей частью) областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$ и называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) неравенства (1).

Неравенство вида (1) называют *строгим* в отличие от неравенства

$$f(x) \leqslant g(x), \tag{2}$$

которое называют *нестрогим*.

Множество решений неравенства (2) можно получить, объединив множество решений неравенства (1) с множеством решений уравнения $f(x) = g(x)$.

При решении неравенств, как и при решении уравнений, широко используется понятие равносильности.

Неравенство (1) и неравенство

$$f_1(x) < g_1(x) \tag{3}$$

называют *равносильными* на множестве M, если множества решений этих неравенств совпадают, т. е. каждое решение неравенства (1), принадлежащее множеству M, является решением неравенства (3) и, обратно, каждое решение неравенства (3), принадлежащее множеству M, является решением неравенства (1). Если неравенства (1) и (3) не имеют решений, то эти неравенства считаются равносильными.

Сформулируем основные утверждения, связанные с понятием равносильности.

1°. *Неравенства*

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad -f(x) > -g(x)$$

равносильны на любом числовом множестве.

2°. *Если функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены на множестве M, то неравенства*

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$$

равносильны на множестве M.

Например, неравенство

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 < a_2x^2 + b_2x + c_2$$

при любых $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ равносильно неравенству

$$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + c_1 - c_2 < 0$$

на множестве $\mathbf{R}$.

3°. *Если функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ определены на множестве M и $\varphi(x) > 0$ для всех $x \in M$, то неравенства*

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x)$$

равносильны на множестве M.

Применяя утверждения 1° и 3° к линейным неравенствам, т. е. к неравенствам вида

$$ax < b, \qquad a \neq 0, \tag{4}$$

получаем:

а) *если $a > 0$, то неравенство* (4) *равносильно неравенству $x < \frac{b}{a}$, т. е. решениями неравенства* (4) *являются все числа из промежутка $\left(-\infty, \frac{b}{a}\right)$ и только эти числа;*

б) *если* $a < 0$, *то неравенство* (4) *равносильно неравенству* $x > \frac{b}{a}$, *т. е. множество решений неравенства* (4) — *промежуток* $\left(\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

4°. *Если* $f(x) > 0$ *и* $g(x) > 0$ *для всех* $x \in M$, *то неравенства*

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{g(x)}$$

равносильны на множестве M.

5°. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на множестве* M, *то неравенство*

$$f^2(x) < g^2(x) \tag{5}$$

равносильно неравенству

$$|f(x)| < |g(x)|$$

на этом множестве.

В случае, когда $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ для всех $x \in M$, неравенство (5) равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Например, неравенство $x^2 < a^2$, где $a \neq 0$, равносильно неравенству $|x| < |a|$. В частности, неравенство $x^2 < 4$ равносильно неравенству $|x| < 2$, т. е. множество решений неравенства $x^2 < 4$ — это интервал $(-2, 2)$.

Для неравенств, как и для уравнений, вводятся понятия «система неравенств» и «совокупность неравенств».

Число $x = a$ называется *решением системы неравенств*

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x), \\ f_2(x) < g_2(x), \end{cases} \tag{6}$$

если это число является решением *каждого* неравенства системы (6). Пусть E_1 и E_2 — множества решений соответственно первого и второго неравенств системы (6), тогда множество E решений системы (6) является *пересечением* множеств E_1 и E_2, т. е. $E = E_1 \cap E_2$.

Число $x = a$ называется *решением совокупности неравенств*

$$f_1(x) < g_1(x), \qquad f_2(x) < g_2(x), \tag{7}$$

если это число является решением *хотя бы одного* из неравенств (7). Пусть E_1 и E_2 — множества решений соответственно первого и второго неравенства совокупности (7), тогда множество G решений совокупности неравенств (7) является *объединением* множеств E_1 и E_2, т. е. $G = E_1 \cup E_2$.

Понятие равносильности переносится на системы и совокупности неравенств. Говорят, что неравенство (1) *равносильно системе неравенств* (6), если это неравенство и система (6) имеют одни и те же решения или не имеют решений.

Неравенство (1) называют *равносильным совокупности неравенств* (7), если выполняются следующие условия:

1) каждое решение неравенства (1) является решением по крайней мере одного из неравенств (7);
2) любое решение каждого из неравенств (7) является решением неравенства (1).

При решении неравенств часто используются следующие утверждения.

6°. *Неравенство*

$$f(x)g(x) > 0$$

равносильно совокупности следующих двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

7°. *Неравенство*

$$f(x)g(x) < 0$$

равносильно совокупности следующих двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Примеры с решениями

Пример 1. Решить неравенство $(x-1)^2 < 4$.

Решение. Это неравенство равносильно следующему: $|x-1| < 2$. Так как модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа, то решение данного неравенства сводится к нахождению точек x числовой прямой, которые удалены от точки 1 на расстояние, не превосходящее 2 (рис. 19.1). Такими точками являются точки интервала $(-1, 3)$.

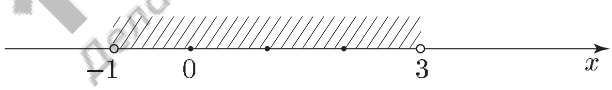

Рис. 19.1

Ответ. $-1 < x < 3$.

Пример 2. Решить неравенство $(x-1)^2 > 9$.

Решение. Неравенству $|x-1| > 3$, которое равносильно исходному, удовлетворяют все точки числовой прямой, расстояние от которых до точки 1 больше 3 (рис. 19.2).

Это точки, лежащие вне отрезка длины 6 с центром в точке 1, т. е. точки, лежащие вне отрезка $[-2, 4]$. Таким образом, множество решений исходного неравенства — объединение промежутков $(-\infty, -2)$ и $(4, +\infty)$.

Ответ. $x < -2$, $x > 4$.

Рис. 19.2

Пример 3. Решить неравенство $|x+1| < |x-3|$.

Решение. Первый способ. Так как обе части неравенства неотрицательны, то при возведении их в квадрат получается равносильное неравенство

$$x^2 + 2x + 1 < x^2 - 6x + 9.$$

Это неравенство равносильно неравенству $8x < 8$, откуда $x < 1$.

Ответ. $x < 1$.

Второй способ. Решение данного неравенства сводится к нахождению точек x числовой прямой, которые расположены ближе к точке -1, чем к точке 3 (рис. 19.3). Такими точками являются все точки, лежащие слева от точки 1 — середины отрезка $[-1, 3]$, т. е. точки из промежутка $(-\infty, 1)$.

Рис. 19.3

Третий способ. Построим графики функций $y = |x+1|$ и $y = |x-3|$ (рис. 19.4).

Эти графики пересекаются в точке $(1; 2)$. При $x < 1$ график функции $y = |x+1|$ лежит ниже графика функции $y = |x-3|$, а при $x > 1$ — выше. Поэтому множество решений данного неравенства — промежуток $(-\infty, 1)$.

Пример 4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} (x+1)^2 > 1, \\ (x-1)^2 < 16. \end{cases}$$

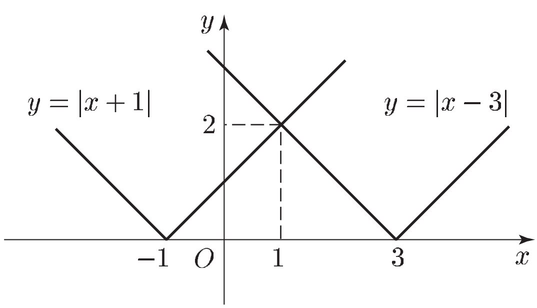

Рис. 19.4

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} |x+1| > 1, \\ |x-1| < 4. \end{cases}$$

Множество E_1 решений первого неравенства этой системы состоит из точек числовой прямой (рис. 19.5), лежащих вне отрезка $[-2, 0]$, т. е. E_1 — объединение промежутков $(-\infty, -2)$ и $(0, +\infty)$.

Множество E_2 решений второго неравенства — интервал длины 8 с центром в точке 1 (рис. 19.5), т. е. $E_2 = (-3, 5)$.

Множество E решений исходной системы — общая часть (пересечение) множеств E_1 и E_2.

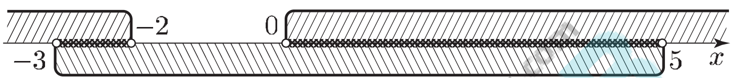

Рис. 19.5

Следовательно, множество E — объединение интервалов $(-3, -2)$ и $(0, 5)$.

Ответ. $-3 < x < -2,\ 0 < x < 5$.

Пример 5. Решить неравенство $(2x-1)(|x+1| - |x-3|) < 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 2x-1 > 0, \\ |x+1| < |x-3|; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 < 0, \\ |x+1| > |x-3|. \end{cases}$$

Множество E_1 решений первой системы — пересечение промежутков $x > \frac{1}{2}$ и $x < 1$ (см. пример 3), т. е. $E_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Множество E_2 решений второй системы — пересечение промежутков $x < \frac{1}{2}$ и $x > 1$, не имеющих общих точек. Поэтому вторая система решений не имеет.

Ответ. $\frac{1}{2} < x < 1$.

Пример 6. Решить неравенство

$$|x+1| + |x-3| > 6. \tag{8}$$

Решение. Первый способ. Используя определение модуля, получаем

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{при} \quad x < -1, \\ x+1 & \text{при} \quad x \geqslant -1; \end{cases} \tag{9}$$

$$|x-3| = \begin{cases} 3-x & \text{при} \quad x < 3, \\ x-3 & \text{при} \quad x \geqslant 3. \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $y = |x+1| + |x-3|$. Тогда из соотношений (9) и (10) следует, что

$$y = \begin{cases} 2 - 2x & \text{при} \quad x < -1, \\ 4 & \text{при} \quad -1 \leqslant x < 3, \\ 2x - 2 & \text{при} \quad x \geqslant 3. \end{cases} \qquad (11)$$

Поэтому неравенство (8) равносильно совокупности следующих систем неравенств:

$$\begin{cases} x < -1, \\ 2 - 2x > 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leqslant x < 3, \\ 4 > 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 3, \\ 2x - 2 > 6. \end{cases}$$

Множество E_1 решений первой из этих систем — промежуток $x < -2$, вторая система не имеет решений, а множество E_2 решений третьей системы — промежуток $x > 4$. Следовательно, множество решений исходной системы — объединение множеств E_1 и E_2.

Ответ. $x < -2$, $x > 4$.

Второй способ. Решить неравенство (8) — значит найти все точки x числовой прямой, сумма расстояний от каждой из которых до точек -1 и 3 больше 6 (рис. 19.6).

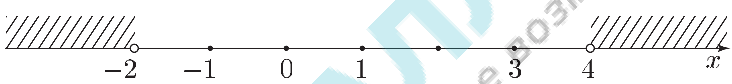

Рис. 19.6

Найдем точку x_0, где $x_0 > 3$, такую, чтобы сумма s расстояний от точки x_0 до точек -1 и 3 была равна 6. Если r — расстояние от точки x_0 до точки 3, то $s = 4 + 2r$, так как длина отрезка $[-1, 3]$ равна 4. Поэтому $s = 6$ при $r = 1$. Следовательно, $x_0 = 4$ и все значения x такие, что $x > x_0$, являются решениями неравенства (8). Аналогично, решениями неравенства (8) являются значения x такие, что $x < -2$ (точки -2 и 4 расположены симметрично относительно точки 1 — середины отрезка $[-1, 3]$).

Третий способ. Используя соотношения (11), построим график функции $y = |x+1| + |x-3|$ (рис. 19.7).

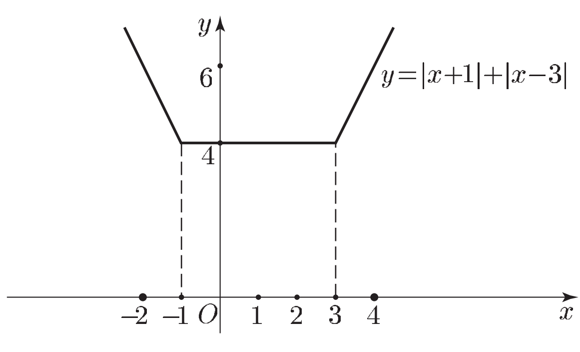

Рис. 19.7

При $x < -2$ и при $x > 4$ график расположен выше прямой $y = 6$. Поэтому решениями неравенства (8) являются все x такие, что $x < -2$, а также все x такие, что $x > 4$.

Задачи

Выяснить, являются ли равносильными на множестве **R** следующие неравенства (1–24):

1. $x^2 < 2 - x$ и $x^2 + x - 2 < 0$.

2. $4 - x^2 + 3x \geqslant 0$ и $(x-4)(x+1) \leqslant 0$.

3. $x^2 > 0$ и $x > 0$.

4. $x - 1 > 0$ и $(x-1)(x^2+4) > 0$.

5. $2x^2 < -1$ и $-(1+3x^2) > 0$.

6. $\sqrt{x^2+1} > 1$ и $x > 0$.

7. $x^2 > x$ и $x^2 + \dfrac{1}{x-2} > x + \dfrac{1}{x-2}$.

8. $x^2 > 4$ и $x^4 > 16$.

9. $\dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{x^4+1}$ и $x^2 > x^4$.

10. $\sqrt{x^2} < 1$ и $x < 1$.

11. $2x \geqslant 0$ и $2x + \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{x}$.

12. $\dfrac{x-2}{x-4} > 0$ и $(x-2)(x-4) > 0$.

13. $\dfrac{x^2-x}{x-1} > 0$ и $x > 0$.

14. $x - 2 > 4$ и $(x-2)(x+1)^2 > 4(x+1)^2$.

15. $\dfrac{1}{1-x} > 1$ и $\dfrac{x}{1-x} > 0$.

16. $\dfrac{1}{x-2} > 3$ и $1 > 3(x-2)$.

17. $x < \dfrac{1}{2}$ и $4x^2 < 1$.

18. $x^2 > 9$ и $|x| > 3$.

19. $(x-1)^2 < 4$ и $-1 < x < 3$.

20. $|x+1| < |x-1|$ и $x < 0$.

21. $\dfrac{1}{(x+4)^2} > \dfrac{1}{(x+2)^2}$ и $(x+4)^2 < (x+2)^2$.

22. $\dfrac{x-2}{x^2(x-5)} < 0$ и $(x-2)(x-5) < 0$.

23. $x^3 < 8$ и $x < 2$.

24. $\dfrac{x-3}{x+1} \geqslant 0$ и $(x-3)(x+1) \geqslant 0$.

Решить неравенство (25–30):

25. $(x+2)^2 < 9$.

26. $(x+3)^2 > 4$.

27. $|x+2| > |x-4|$.

28. $|2x+3| < |2x-5|$.

29. $(x-2)(|x+5| - |x-1|) < 0$.

30. $|x+3| + |x-1| > 5$.

Решить систему неравенств (31–32):

31. $\begin{cases} 2x - 7 < 0, \\ |x+1| > 3. \end{cases}$

32. $\begin{cases} (x+2)^2 > 4, \\ (x-1)^2 < 36. \end{cases}$

Ответы

1. Да. **2.** Да. **3.** Нет. **4.** Да. **5.** Да. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** Да. **9.** Да. **10.** Нет. **11.** Нет. **12.** Да. **13.** Нет. **14.** Да. **15.** Да. **16.** Нет. **17.** Нет. **18.** Да. **19.** Да. **20.** Да. **21.** Нет. **22.** Да. **23.** Да. **24.** Нет.
25. $-5 < x < 1$. **26.** $x < -5$, $x > -1$. **27.** $x > 1$. **28.** $x < \frac{1}{2}$. **29.** $-2 < x < 2$.
30. $x < -\frac{7}{2}$, $x > \frac{3}{2}$. **31.** $x < -4$, $2 < x < \frac{7}{2}$. **32.** $-5 < x < -4$, $0 < x < 7$.

§ 20. Квадратный трехчлен и квадратные неравенства

Умение решать квадратные неравенства необходимо каждому учащемуся, готовящемуся к выпускным экзаменам в школе и вступительным экзаменам в вузе. Чтобы успешно решать квадратные неравенства и сводящиеся к ним, следует твердо знать свойства квадратного трехчлена и квадратичной функции.

Справочные сведения

1. ***График квадратичной функции.*** Функцию

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$, называют *квадратичной*. Область ее определения — множество $\mathbf{R}$ действительных чисел.

Применив метод выделения полного квадрата, запишем квадратичную функцию (1) в виде

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}, \tag{2}$$

где $D = b^2 - 4ac$.

Введем следующие обозначения:

$$m = -\frac{b}{2a}, \qquad l = -\frac{D}{4a}. \tag{3}$$

Тогда формула (1) примет вид

$$y = a(x - m)^2 + l. \tag{4}$$

Из формулы (4) следует, что графиком квадратичной функции является такая же парабола, как $y = ax^2$, но сдвинутая вдоль оси Ox на $|m|$ единиц и вдоль оси Oy на $|l|$ единиц так, что ее вершина — точка $A(m; l)$.

Знак числа a определяет направление ветвей параболы: при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ — вниз. Ось симметрии параболы — прямая, параллельная оси Oy и проходящая через вершину A параболы.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ можно построить, используя следующую схему:

1) найти координаты вершины $A(m; l)$ параболы, пользуясь формулами (3) или применяя метод выделения полного квадрата;
2) построить ось параболы;
3) найти точки пересечения параболы с осью Oy и осью Ox (найти корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$);
4) нарисовать эскиз графика функции, используя найденные точки и учитывая роль знака числа a.

Для более точного изображения параболы найти координаты нескольких ее точек.

На рис. 20.1 изображен график функции $y = 4x - x^2 = x(4 - x)$.

Теорема 1. *Квадратичная функция* $y = ax^2+bx+c$ *принимает при* $x = -\dfrac{b}{2a}$ *наименьшее значение, если* $a > 0$, *и наибольшее значение, если* $a < 0$.

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться формулой

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a(x - m)^2 + l, \qquad (5)$$

где $D = b^2 - 4ac$, $m = -\dfrac{b}{2a}$, $l = -\dfrac{D}{4a} = y(m)$.

Замечание. Эта теорема имеет простой геометрический смысл. Если $a > 0$, то самая нижняя точка параболы $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 20.2) — ее вершина $A(m; l)$. Ордината l вершины и есть наименьшее значение функции $y = ax^2 + bx + c$, т. е. $y_{\min} = -\dfrac{D}{4a} = l$. Значение l функция принимает при $x = m = -\dfrac{b}{2a}$.

Аналогично рассматривается случай $a < 0$.

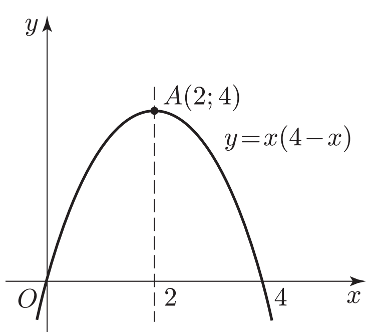

Рис. 20.1

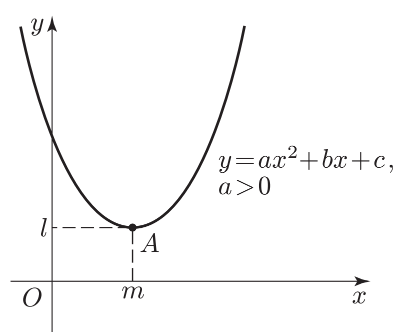

Рис. 20.2

2. *Исследование квадратного трехчлена.*

Теорема 2. *Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то при всех $x \in \mathbf{R}$ знак квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком числа a* (рис. 20.3 и 20.4).

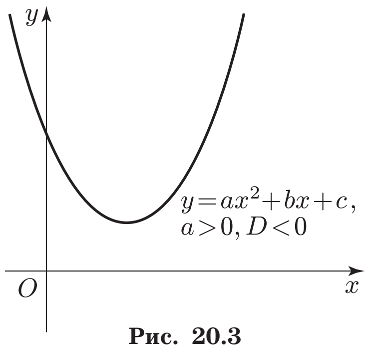

Рис. 20.3

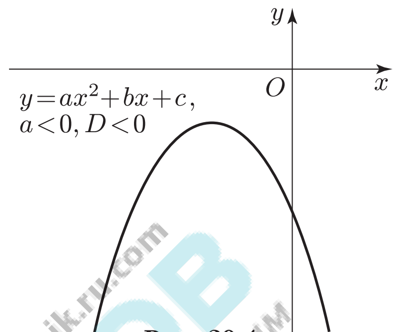

Рис. 20.4

Теорема 3. *Если $D = 0$, то при всех $x \in \mathbf{R}$, кроме $x = -\frac{b}{2a}$, знак квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком числа a; при $x = -\frac{b}{2a}$ квадратичная функция обращается в нуль* (рис. 20.5 и 20.6).

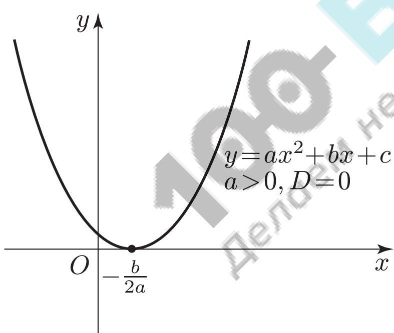

Рис. 20.5

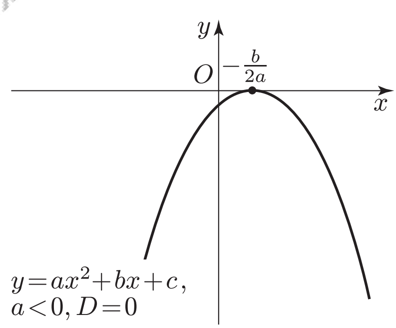

Рис. 20.6

Теорема 4. *Если $D > 0$, то знак квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$:*

а) *совпадает со знаком числа a для всех x, лежащих вне отрезка $[x_1, x_2]$, где x_1, x_2 — корни уравнения*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

такие, что $x_1 < x_2$ (рис. 20.7 и 20.8),

б) *противоположен знаку числа a при всех x таких, что $x_1 < x < x_2$* (рис. 20.7 и 20.8).

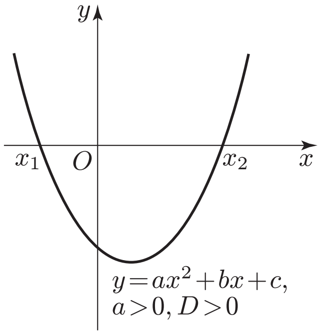

Рис. 20.7

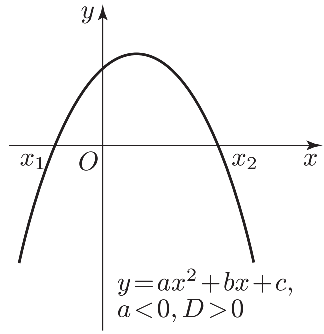

Рис. 20.8

Теоремы 2 и 3 можно доказать с помощью формулы (5), записанной в виде

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right],$$

а теорему 4 — с помощью разложения квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Теорема 5. *Квадратичная функция*

$$y = ax^2 + bx + c$$

принимает положительные значения при всех $x \in \mathbf{R}$ *тогда и только тогда, когда*

$$D = b^2 - 4ac < 0 \quad \text{и} \quad a > 0.$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 2. В самом деле, если $D < 0$, то по теореме 2 знак y совпадает со знаком числа a: $y > 0$ при $a > 0$ и $y < 0$ при $a < 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

Докажем необходимость, т. е. покажем, что если $y > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, то $D < 0$ и $a > 0$. Предположим, что условие $D < 0$ не выполняется, тогда $D \geqslant 0$ и поэтому квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2 ($x_1 = x_2$ при $D = 0$), т. е.

$$y(x_1) = y(x_2) = 0,$$

что противоречит условию ($y > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$). Итак, $D < 0$ и в силу теоремы 2 имеем $a > 0$.

3. ***Квадратные неравенства.***

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — заданные числа, причем $a \neq 0$, x — неизвестное. Тогда неравенства вида

$$f(x) > 0, \qquad f(x) < 0, \qquad f(x) \geqslant 0, \qquad f(x) \leqslant 0$$

называют *квадратными неравенствами* или *неравенствами второй степени*, причем первые два из этих неравенств называют *строгими*, остальные — *нестрогими*.

Перейдем к нахождению решений квадратных неравенств. Ограничимся рассмотрением строгих неравенств и заметим, что всякое строгое квадратное неравенство можно привести к одному из следующих видов:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{при} \quad a > 0, \tag{1}$$
$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{при} \quad a > 0. \tag{2}$$

Из теорем 2–4 следует:

1) если $D = b^2 - 4ac < 0$, то решениями неравенства (1) являются все действительные числа (см. рис. 20.3), а неравенство (2) не имеет решений;

2) если $D = 0$, то решениями неравенства (1) являются все действительные значения x, кроме $x = -\dfrac{b}{2a}$ (см. рис. 20.5), а неравенство (2) не имеет решений;

3) если $D > 0$, то решениями неравенства (1) являются все числа x такие, что $x < x_1$ или $x > x_2$ (см. рис. 20.7), где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, т. е. все значения x, лежащие вне отрезка $[x_1, x_2]$; решениями неравенства (2) являются числа x такие, что $x_1 < x < x_2$ (см. рис. 20.7), т. е. все значения x из интервала (x_1, x_2).

Примеры с решениями

Пример 1. Определить знаки чисел a, b, c, если парабола $y = ax^2+bx+c$ расположена так, как указано на рис. 20.9.

Решение. Ветви параболы направлены вверх и поэтому $a > 0$. Из рис. 20.9 видно, что абсцисса m вершины A параболы отрицательна, т. е. $m = -\dfrac{b}{2a} < 0$, откуда следует, что $b > 0$, так как $a > 0$. Наконец, $c < 0$, поскольку $c = y(0)$ — ордината точки B, в которой парабола пересекает ось Oy.

Ответ. $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$.

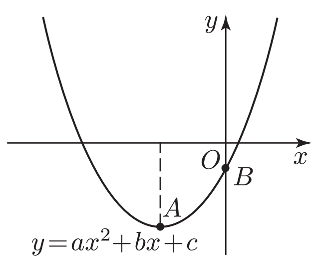

Рис. 20.9

Пример 2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ при $x = -3$ принимает наибольшее значение $y_{\max}$, равное 18, а при $x = -6$ она обращается в нуль. Найти значение этой функции при $x = 1$.

Решение. Так как $y_{\max} = 18$ — значение функции $y = ax^2+bx+c$ при $x = -3$, то в формуле (5) $m = -3$, $l = 18$ и поэтому $y = a(x+3)^2 + 18$.

По условию $y(-6) = 0$, т. е. $9a + 18 = 0$, откуда $a = -2$. Итак, $y = -2(x+3)^2 + 18$, откуда находим $y(1) = -14$.

Ответ. -14.

Пример 3. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет действительных корней, а его коэффициенты связаны условием $a - b + c < 0$. Определить знак числа c.

Решение. По условию график квадратичной функции $y = ax^2+bx+c$ не пересекает ось Ox. Это означает, что либо $y > 0$, либо $y < 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Заметим, что $a - b + c = y(-1) < 0$, и поэтому $y < 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$. В частности, $y(0) = c < 0$.

Ответ. $c < 0$.

Пример 4. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает при $x = -1$ положительное значение, а при $x = 2$ — отрицательное значение. Можно ли утверждать, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни?

Решение. Предположим, что квадратный трехчлен не имеет действительных корней. Тогда парабола $y = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось Ox и поэтому либо $y > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, либо $y < 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, что противоречит условиям данного примера. Следовательно, квадратный трехчлен имеет действительные корни.

Пример 5. Решить неравенство:

а) $x^2 - 5x + 7 > 0$; б) $4x - 4 \geqslant x^2$;
в) $2x^2 + 3x - 2 > 0$; г) $3x^2 - 8x - 3 \leqslant 0$.

Решение. а) Неравенство $x^2 - 5x + 7 > 0$ равносильно неравенству $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, а его решениями являются все значения x.

б) Неравенство $4x - 4 \geqslant x^2$ равносильно неравенству $(x-2)^2 \leqslant 0$ и имеет единственное решение $x = 2$.

в) Уравнение $2x^2 + 3x - 2 = 0$ имеет корни $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, а решения неравенства $2x^2 + 3x - 2 > 0$ — все числа x, лежащие вне отрезка $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$, т. е. все значения x такие, что $x < -2$ или $x > \frac{1}{2}$.

г) Уравнение $3x^2 - 8x - 3 = 0$ имеет корни $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 3$, а решения неравенства $3x^2 - 8x - 3 \leqslant 0$ — все числа x из отрезка $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$, т. е. $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3$.

Пример 6. Решить неравенство $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$.

Решение. Полагая $x^2 = t$, получаем неравенство $t^2 - 5t + 4 > 0$, равносильное неравенству $(t-1)(t-4) > 0$, откуда находим $t < 1$, $t > 4$. Поэтому множество решений исходного неравенства — объединение множеств решений неравенств $x^2 < 1$ и $x^2 > 4$, которые равносильны неравенствам $|x| < 1$ и $|x| > 2$ соответственно.

Ответ. $x < -2$, $-1 < x < 1$, $x > 2$.

Пример 7. Найти все значения r, при которых неравенство

$$(r^2-1)x^2 + 2(r-1)x + 2 > 0 \tag{3}$$

верно для всех $x \in \mathbf{R}$.

Решение. Если $r = 1$, то неравенство (3) справедливо ($2 > 0$). Если $r = -1$, то неравенство (3) имеет вид $-4x + 2 > 0$ и не является верным для всех $x \in \mathbf{R}$ (например, число $x = 1$ не является решением этого неравенства).

Пусть $r^2 - 1 \neq 0$, т. е. $r \neq 1$ и $r \neq -1$. Тогда задачу можно сформулировать так: найти все значения r, при которых квадратичная функция

$$y = (r^2-1)x^2 + 2(r-1)x + 2 \tag{4}$$

принимает положительные значения для всех $x \in \mathbf{R}$.

По теореме 5 это имеет место тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трехчлена (4) отрицателен, а коэффициент при x^2 положителен, т. е. для всех r, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 4(r-1)^2 - 8(r^2-1) < 0, & (5)\\ r^2 - 1 > 0. & (6) \end{cases}$$

Неравенство (5) равносильно каждому из неравенств $r^2 + 2r - 3 > 0$, $(r+3)(r-1) > 0$, а его решения — значения r такие, что $r < -3$ или $r > 1$.

Неравенство (6) справедливо при $r < -1$ и $r > 1$.

Следовательно, решениями системы (5), (6) являются значения r такие, что $r < -3$ или $r > 1$.

Ответ. $r < -3$, $r \geqslant 1$.

Пример 8. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{8x^2 - 4x + 3}{4x^2 - 2x + 1} \leqslant a$$

верно для всех значений x.

Решение. Так как

$$4x^2 - 2x + 1 = 4\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) + \frac{3}{4} = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

для всех x, то, умножая обе части исходного неравенства на $4x^2-2x+1$, получаем равносильное неравенство

$$8x^2-4x+3\leqslant a(4x^2-2x+1). \tag{7}$$

Неравенство

$$(8-4a)x^2+(2a-4)x+3-a\leqslant 0, \tag{8}$$

равносильное неравенству (7), не является верным при $a=2$.

Если $a\neq 2$, то неравенство (8) является квадратным и справедливо для всех $x\in\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда $a>2$ и

$$D=4(a-2)^2-16(2-a)(3-a)=4(a-2)(10-3a)\leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $10-3a\leqslant 0$, т. е. $a\geqslant\frac{10}{3}$.

Ответ. $a\geqslant\frac{10}{3}$.

Пример 9. Найти все значения a, при которых неравенство

$$(x^2-a)(2x+8-a)\geqslant 0 \tag{9}$$

верно для всех значений $x\in[-1,1]$.

Решение. Пусть неравенство (9) является верным для каждого $x\in[-1,1]$. Тогда оно верно при $x=0$ и $x=1$. Подставляя эти значения в (9), получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a(a-8)\geqslant 0,\\ (a-1)(a-10)\geqslant 0.\end{cases} \tag{10}$$

Первому неравенству системы (10) удовлетворяют значения $a\leqslant 0$ и $a\geqslant 8$, второму — значения $a\leqslant 1$ и $a\geqslant 10$, откуда следует, что множество решений системы (10) — совокупность промежутков

$$a\leqslant 0,\qquad a\geqslant 10. \tag{11}$$

Таким образом, условия (11) являются необходимыми (искомыми значениями a могут быть только такие значения, которые содержатся в промежутках $a\leqslant 0$ и $a\geqslant 10$).

Покажем, что условия (11) являются достаточными.

Пусть $a\leqslant 0$ и $x\in[-1,1]$; тогда $x^2-a\geqslant 0$, $2x+8-a>0$ и, значит, неравенство (9) — верное.

Пусть $a\geqslant 10$ и $x\in[-1,1]$; тогда $x^2-a<0$, $2x+8-a\leqslant 0$ и поэтому неравенство (9) справедливо.

Ответ. $a\leqslant 0$, $a\geqslant 10$.

Пример 10. Решить неравенство $|x^2-x-3|<9$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-x-3<9,\\ x^2-x-3>-9,\end{cases}$$

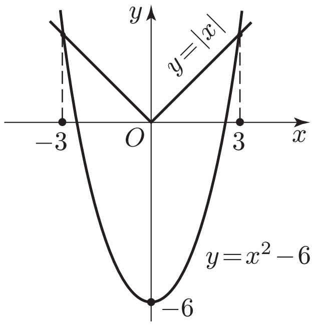

Рис. 20.10

которая равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} (x+3)(x-4) < 0, \\ x^2 - x + 6 > 0. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства — интервал $(-3, 4)$, второе неравенство является верным при всех $x \in \mathbf{R}$.

Ответ. $-3 < x < 4$.

Пример 11. Решить неравенство $x^2 - 6 > |x|$.

Решение. На рис. 20.10 изображены графики четных функций $y = x^2 - 6$ и $y = |x|$. Решив уравнение $x^2 - 6 = x$, найдем его положительный корень $x = 3$.

График функции $y = x^2 - 6$ лежит выше графика функции $y = |x|$ вне отрезка $[-3, 3]$. Поэтому множество решений данного неравенства — совокупность промежутков $x < -3$ и $x > 3$.

Ответ. $x < -3$, $x > 3$.

Пример 12. Решить неравенство $|x^2 - 5x + 2| > 2$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$x^2 - 5x + 2 > 2$$

и

$$x^2 - 5x + 2 < -2.$$

Множество решений первого неравенства, равносильного неравенству

$$x(x-5) > 0,$$

представляет собой объединение промежутков $x < 0$ и $x > 5$. Множество решений второго неравенства, равносильного неравенству

$$(x-1)(x-4) < 0,$$

есть интервал $(1, 4)$.

Ответ. $x < 0$, $1 < x < 4$, $x > 5$.

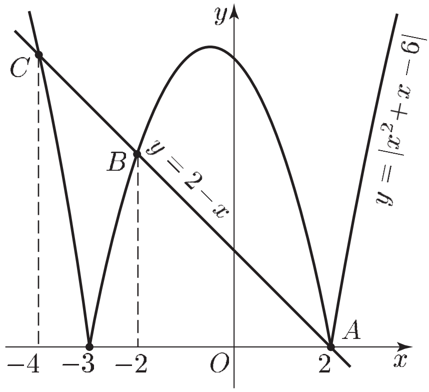

Рис. 20.11

Пример 13. Решить неравенство $|x^2+x-6| > 2-x$.

Решение. Первый способ. Число $x=2$ не является решением данного неравенства, а при $x>2$ неравенство справедливо: его левая часть неотрицательна при всех $x \in \mathbf{R}$, а правая отрицательна.

Если $x<2$, то исходное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$x^2+x-6 > 2-x \quad \text{и} \quad x^2+x-6 < -2+x.$$

Эти неравенства равносильны неравенствам

$$(x+4)(x-2) > 0 \quad \text{и} \quad (x+2)(x-2) < 0$$

соответственно.

Решив систему

$$\begin{cases} x<2, \\ (x+4)(x-2)>0, \end{cases}$$

получаем $x<-4$.

Аналогично, из системы

$$\begin{cases} x<2, \\ (x+2)(x-2)<0 \end{cases}$$

следует, что $-2<x<2$. Итак, множество решений данного неравенства — объединение промежутков $x<-4$, $-2<x<2$, $x>2$.

Ответ. $x<-4$, $-2<x<2$, $x>2$.

Второй способ. Построим графики функций $y=|x^2+x-6|$ и $y=2-x$ (рис. 20.11).

Эти графики имеют общую точку $A(2;0)$. Две другие общие точки получим, найдя отрицательные корни уравнений $6-x^2-x=2-x$ и $x^2+x-6=2-x$. Такими корнями являются $x=-2$ и $x=-4$. При $x<-4$, $-2<x<2$ и $x>2$ график функции $y=|x^2+x-6|$ лежит выше графика функции $y=2-x$.

Пример 14. Решить неравенство

$$|x^2 - 6x + 5| \leqslant |x^2 - 2x - 3|.$$

Решение. Воспользуемся тем, что неравенство $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ равносильно каждому из неравенств $f^2(x) \leqslant g^2(x)$, $(f(x) + g(x)) \times \times (f(x) - g(x)) \leqslant 0$. Тогда данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств $(2x^2 - 8x + 2)(-4x + 8) \leqslant 0$, $(x^2 - 4x + 1)(x - 2) \geqslant 0$, $(x - x_1)(x - 2)(x - x_2) \geqslant 0$, где $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$. Отсюда находим множество решений неравенства: $x_1 \leqslant x \leqslant 2$, $x \geqslant x_2$.

Ответ. $2 - \sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2$, $x \geqslant 2 + \sqrt{3}$.

Пример 15. Найти множество значений функции $f(x)$, если:

а) $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

Решение. а) Число a принадлежит множеству значений функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = a$ имеет действительные корни. Функция $\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ определена при $x \neq -1$, а уравнение

$$\frac{x+2}{(x+1)^2} = a$$

можно записать в виде $a(x+1)^2 - (x+2) = 0$ или в виде

$$ax^2 + (2a-1)x + a - 2 = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) при $a = 0$ имеет корень $x = -2$, а при $a \neq 0$ является квадратным и имеет действительные корни тогда и только тогда, когда $D \geqslant 0$, где $D = (2a-1)^2 - 4a(a-2) \geqslant 0$. Отсюда получаем $a \geqslant -\dfrac{1}{4}$.

Ответ. $\left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

б) Пусть $t = \cos x$, тогда $-1 \leqslant t \leqslant 1$ и

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(t)}, \quad \text{где} \quad \varphi(t) = 3 - t^2 + t = \frac{13}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

График функции $y = \varphi(t)$ на отрезке $[-1, 1]$ изображен на рис. 20.12.

Из рис. 20.12 видно, что $\varphi(-1) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$, т. е. $1 \leqslant \varphi(t) \leqslant \dfrac{13}{4}$, причем функция $\varphi(t)$ принимает все значения из отрезка $\left[1, \dfrac{13}{4}\right]$. Следовательно,

$$\frac{4}{13} \leqslant \frac{1}{\varphi(t)} \leqslant 1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{4}{13} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Ответ. $\left[\dfrac{4}{13}, 1\right]$.

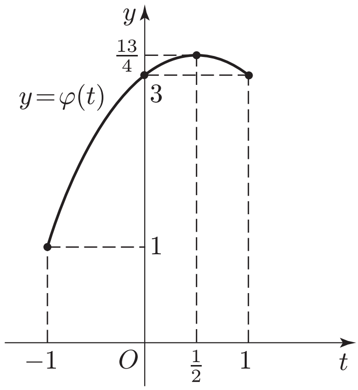

Рис. 20.12

Пример 16. Найти все значения a, при которых расстояние между вершинами парабол $y = 2x^2 + 3ax + 1$ и $y = x^2 + ax - \frac{3}{8}a^2$ меньше $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Для нахождения координат вершин парабол воспользуемся методом выделения полного квадрата. Получим

$$y = 2x^2 + 3ax + 1 = 2\left(x + \frac{3a}{4}\right)^2 + 1 - \frac{9a^2}{8},$$

$$y = x^2 + ax - \frac{3}{8}a^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{5}{8}a^2.$$

Пусть $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ — вершины парабол, ρ — расстояние между вершинами. Тогда

$$x_1 = -\frac{3a}{4}, \; y_1 = 1 - \frac{9a^2}{8};$$

$$x_2 = -\frac{a}{2}, \; y_2 = -\frac{5}{8}a^2;$$

$$\rho^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \left(-\frac{a}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^2 = \frac{a^4}{4} - \frac{15}{16}a^2 + 1.$$

Пусть $\frac{a^2}{2} = t$, тогда $\rho^2 = t^2 - \frac{15}{8}t + 1$. По условию $\rho < \frac{\sqrt{5}}{2}$, откуда $\rho^2 < \frac{5}{4}$, т. е. $t^2 - \frac{15}{8}t - \frac{1}{4} < 0$ или

$$(t - 2)\left(t + \frac{1}{8}\right) < 0.$$

Так как $t > 0$, то полученное неравенство равносильно неравенству $t < 2$, т. е. $\frac{a^2}{2} < 2$, откуда $-2 < a < 2$.

Ответ. $-2 < a < 2$.

Задачи

1. Определить знаки коэффициентов a, b, c в уравнении параболы $y = ax^2 + bx + c$, если ветви параболы направлены вниз, а вершина параболы лежит в IV четверти ($x > 0$, $y < 0$).
2. Определить знак числа c, если парабола $y = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось Ox и справедливо неравенство $4a - 2b + c > 0$.
3. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ принимает при $x = 1$ наибольшее значение, равное 3, а при $x = -1$ обращается в нуль. Найти значение квадратного трехчлена при $x = 5$.
4. Найти все значения r, при которых функция $y = (r-2)x^2 + 2rx + 2r$ принимает отрицательные значения для всех $x \in \mathbf{R}$.
5. Квадратичная функция $y = ax^2+bx+c$ принимает при $x = -2$ и $x = 12$ равные значения, а значения этой функции при $x = -4$ и $x = 4$ отличаются только знаком, т. е. $y(-4) = -y(4)$. Найти корни уравнения $ax^2+bx+c = 0$.
6. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ при $x = -1; 0; 2$ принимает значения, соответственно равные $-3; -1; 15$. Найти значения этой функции при $x = 5$.

Решить неравенство (7–22):

7. $x^2 + 7 < 4x$.
8. $4x^2 + 1 > 4x$.
9. $9x^2 - 12x + 4 \leqslant 0$.
10. $2x^2 - 7x + 7 > 0$.
11. $5x + 6 \geqslant 6x^2$.
12. $x^2 - x - 2 > 0$.
13. $\dfrac{x - x^2}{x^2 - 3x + 5} < 0$.
14. $x^4 - 3x^2 - 4 > 0$.
15. $4x^4 - 37x^2 + 9 < 0$.
16. $|x^2 + x + 1| \leqslant |x^2 + 3x + 4|$.
17. $|x^2 + 5x| < 6$.
18. $x^2 - |x| > 2$.
19. $|2x^2 - 9x + 15| \geqslant 20$.
20. $|x^2 + 2x - 3| + 3(x + 1) < 0$.
21. $|x^2 - x - 6| > x + 3$.
22. $|x^2 - 2|x| - 3| < 2$.
23. Найти все значения a, при которых неравенство
$$\frac{6x^2 - 2x + 1}{9x^2 - 3x + 1} \geqslant a$$
является верным для всех значений x.
24. Найти все значения a, при которых расстояние между вершинами парабол
$$y = x^2 + ax + \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad y = 3x^2 + 5ax + \frac{19}{12}a^2$$
больше $\dfrac{\sqrt{29}}{3}$.
25. Найти все значения r, при которых функция
$$y = rx^2 + 2(r + 2)x + 2r + 4$$
принимает отрицательные значения для всех $x \in \mathbf{R}$.
26. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ на отрезке $[-1, 1]$.
27. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 + 3x^2 + 2$ на отрезке $[-2, 3]$.

28. Найти множество значений функции $f(x)$, если:

а) $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x - \sin x + 2}$.

Ответы

1. $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$. **2.** $c > 0$. **3.** -9. **4.** $r < 0$. **5.** $x_1 = 5-\sqrt{41}$, $x_2 = 5+\sqrt{41}$. **6.** 69. **7.** Нет решений. **8.** $x \neq \frac{1}{2}$. **9.** $x = \frac{2}{3}$. **10.** $x \in \mathbf{R}$. **11.** $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$.
12. $x < -1$, $x > 2$. **13.** $x < 0$, $x > 1$. **14.** $x < -2$, $x > 2$.
15. $-3 < x < -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < 3$. **16.** $x \geqslant -\frac{3}{2}$. **17.** $-6 < x < -3$, $-2 < x < 1$.
18. $x < -2$, $x > 2$. **19.** $x \leqslant -\frac{1}{2}$, $x \geqslant 5$. **20.** $-5 < x < -2$.
21. $x < 1 - \sqrt{10}$, $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, $x > 1 + \sqrt{10}$.
22. $-(1+\sqrt{6}) < x < -(1+\sqrt{2})$, $1+\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{6}$. **23.** $a \leqslant \frac{2}{3}$.
24. $a < -2$, $a > 2$. **25.** $r < -2$. **26.** $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$. **27.** 110 и 2.
28. а) $(-\infty, 1]$; б) $\left[\frac{4}{13}, 1\right]$.

§ 21. Рациональные неравенства

1. Метод интервалов

Примеры с решениями

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-4)} > 0. \qquad (1)$$

Решение. Заметим, что линейная функция $x - a$ меняет знак при переходе через точку a, причем правее точки a эта функция положительна, а левее точки a — отрицательна.

Отметив на числовой оси точки $-3, -1, 2, 4$, которые являются нулями (корнями) многочленов, стоящих в числителе и знаменателе дроби (1), разобьем числовую ось на пять промежутков (рис. 21.1).

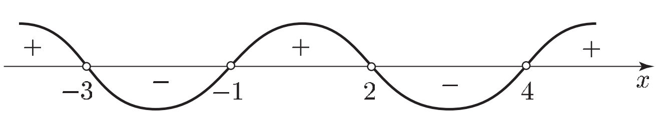

Рис. 21.1

На самом правом промежутке ($x > 4$) дробь (1) положительна, так как все множители в числителе и знаменателе этой дроби положительны при $x > 4$.

При переходе через каждую из отмеченных точек один и только один из этих множителей меняет знак, и поэтому знак дроби каждый раз меняется. Учитывая это, расставим знаки дроби (рис. 21.1). Итак, множество решений — объединение интервалов $(-\infty, -3)$, $(-1, 2)$ и $(4, +\infty)$.

Ответ. $x < -3$, $-1 < x < 2$, $x > 4$.

Рассмотренный способ решения неравенств называется *методом интервалов*. Он применяется обычно при решении рациональных неравенств, т. е. неравенств вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \tag{2}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Пример 2. Решить неравенство

$$1 + \frac{2}{x+4} \leqslant \frac{7}{6-x}. \tag{3}$$

Решение. Преобразуем неравенство (3) к стандартному виду (2):

$$1 + \frac{2}{x+4} + \frac{7}{x-6} \leqslant 0,$$

$$\frac{(x+4)(x-6) + 2(x-6) + 7(x+4)}{(x+4)(x-6)} \leqslant 0,$$

$$\frac{x^2 + 7x - 8}{(x+4)(x-6)} \leqslant 0,$$

$$\frac{(x+8)(x-1)}{(x+4)(x-6)} \leqslant 0. \tag{4}$$

Неравенство (4) равносильно неравенству (3). Отметив на числовой оси точки $-8, -4, 1, 6$ (рис. 21.2), определим знаки рациональной функции, стоящей в левой части неравенства (4).

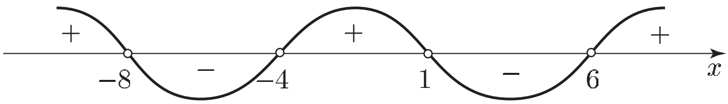

Рис. 21.2

Заметим, что числа -8 и 1 являются решениями неравенства (4), а числа -4 и 6 не принадлежат множеству решений.

Ответ. $-8 \leqslant x < -4$, $1 \leqslant x < 6$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{(2x^2-5x-3)(x-1)^3}{(3x-7)(x-2)^2(3x^2-4x+2)} \geqslant 0.$$

Решение. Квадратный трехчлен $2x^2-5x-3$ имеет корни $x=-\frac{1}{2}$ и $x=3$. Поэтому $2x^2-5x-3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)$. Квадратный трехчлен $3x^2-4x+2$ принимает положительные значения при всех $x \in \mathbf{R}$, так как его дискриминант $D=16-24<0$, а старший коэффициент положителен.

Обозначим левую часть неравенства через $P(x)$. Функция $P(x)$ не определена при $x=\frac{7}{3}$ и $x=2$ и меняет знак при переходе через точки $-\frac{1}{2}$, 1, $\frac{7}{3}$ и 3. Числа $-\frac{1}{2}$, 1 и 3 (корни уравнения $P(x)=0$) являются решениями данного неравенства. Строгое неравенство $P(x)>0$ при $x \neq 2$ равносильно неравенству $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)(x-3)>0$. Применяя метод интервалов (рис. 21.3), находим все решения исходного неравенства с учетом того, что числа $-\frac{1}{2}$, 1 и 3 принадлежат множеству решений неравенства, а число 2 не принадлежит этому множеству.

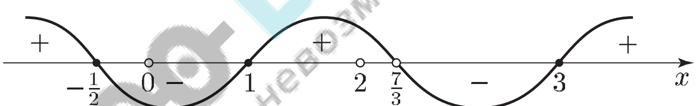

Рис. 21.3

Ответ. $x \leqslant -\frac{1}{2}$, $1 \leqslant x < 2$, $2 < x < \frac{7}{3}$, $x \geqslant 3$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{15-4x}{x^2-x-12} < 4.$$

Решение. Данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\frac{15-4x-4x^2+4x+48}{x^2-x-12} < 0, \qquad \frac{-4x^2+63}{(x-4)(x+3)} < 0,$$

$$\frac{\left(x+\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)}{(x+3)(x-4)} > 0.$$

Заметив, что $\frac{3\sqrt{7}}{2} < 4$, а $-\frac{3\sqrt{7}}{2} < -3$ (поскольку $\frac{63}{4} < 16$, $\frac{63}{4} > 9$), и применив метод интервалов (рис. 21.4), найдем решения исходного неравенства.

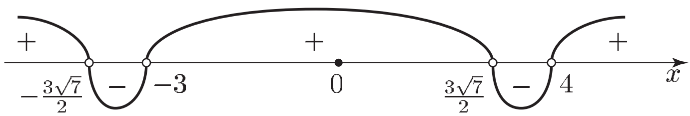

Рис. 21.4

Ответ. $x < -\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $-3 < x < \frac{3\sqrt{7}}{2}$, $x > 4$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 8|x| + 12}{x^2 - 10x + 25} < 0.$$

Решение. Рассмотрим два случая: 1) $x \leqslant 0$; 2) $x > 0$.

1) Если $x \leqslant 0$, то $|x| = -x$ и неравенство примет вид

$$\frac{x^2 + 8x + 12}{x^2 - 10x + 25} < 0.$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$\frac{(x+6)(x+2)}{(x-5)^2} < 0.$$

Отсюда находим $-6 < x < -2$.

2) Если $x > 0$, то исходное неравенство (при условии $x \neq 5$) равносильно неравенству $(x-6)(x-2) < 0$, откуда получаем $2 < x < 5$, $5 < x < 6$.

Ответ. $-6 < x < -2$, $2 < x < 5$, $5 < x < 6$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - |2x+3|}{x^2 - |x+2|} \leqslant 1.$$

Решение. Разобьем числовую прямую на три промежутка точками -2 и $-\frac{3}{2}$, при переходе через которые меняют знак линейные функции $x+2$ и $2x+3$ соответственно.

1) Если $x \leqslant -2$, то исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 2} \leqslant 1, \qquad \frac{x+1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \leqslant 0, \qquad x + 1 \leqslant 0,$$

откуда, учитывая условие $x \leqslant -2$, получаем $x \leqslant -2$.

2) Если $-2 < x \leqslant -\frac{3}{2}$, то исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\frac{x^2+2x+3}{x^2-x-2} \leqslant 1, \qquad \frac{3\left(x+\frac{5}{3}\right)}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0,$$

откуда $-2 < x \leqslant -\frac{5}{3}$.

3) Если $x > -\frac{3}{2}$, то исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2} \leqslant 1, \qquad \frac{-x-1}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0, \qquad \frac{1}{x-2} \geqslant 0,$$

откуда $x > 2$.

Ответ. $x \leqslant -\frac{5}{3}$, $x > 2$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{a}{6a-x} > 1. \tag{5}$$

Решение. Неравенство (5) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\frac{a-(6a-x)}{6a-x} > 0, \qquad \frac{x-5a}{6a-x} > 0, \qquad \frac{x-5a}{x-6a} < 0. \tag{6}$$

При $a = 0$ неравенство (6) не имеет решений.

Пусть $a > 0$, тогда $5a < 6a$ и множество решений неравенства (6) — интервал $(5a, 6a)$.

Пусть $a < 0$, тогда $6a < 5a$ и множество решений неравенства (6) — интервал $(6a, 5a)$.

Ответ. Если $a < 0$, то $6a < x < 5a$; если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $5a < x < 6a$.

Пример 8. Найти все значения r, при которых вершины двух парабол

$$y = x^2 - 2(r+1)x + 1 \quad \text{и} \quad y = rx^2 - x + r$$

лежат по разные стороны от прямой $y = \frac{3}{4}$.

Решение. Вершины парабол лежат по разные стороны от прямой $y = \frac{3}{4}$ тогда и только тогда, когда числа $y_1 - \frac{3}{4}$ и $y_2 - \frac{4}{3}$, где y_1 и y_2 — ординаты вершин парабол, имеют разные знаки, т. е.

$$\left(y_1 - \frac{3}{4}\right)\left(y_2 - \frac{3}{4}\right) < 0. \tag{7}$$

Чтобы найти y_1 и y_2, воспользуемся методом выделения полного квадрата. Получим

$$y = x^2 - 2(r+1)x + (r+1)^2 + 1 - (r+1)^2$$

и

$$y = r\left(x^2 - 2\cdot\frac{x}{2r} + \frac{1}{4r^2}\right) + r - \frac{1}{4r}.$$

Отсюда следует, что

$$y_1 = 1 - (r+1)^2 = -r^2 - 2r, \qquad y_2 = r - \frac{1}{4r} = \frac{4r^2-1}{4r}.$$

Подставляя выражения для y_1 и y_2 в левую часть неравенства (7), получаем неравенство

$$\left(-r^2 - 2r - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{4r^2-1}{4r} - \frac{3}{4}\right) < 0,$$

равносильное следующему:

$$r(4r^2 + 8r + 3)(4r^2 - 3r - 1) > 0. \tag{8}$$

Разложив левую часть неравенства (8) на множители, получим равносильное ему неравенство

$$\left(r + \frac{3}{2}\right)\left(r + \frac{1}{2}\right)\left(r + \frac{1}{4}\right)r(r-1) > 0.$$

С помощью метода интервалов (рис. 21.5) найдем искомые значения r.

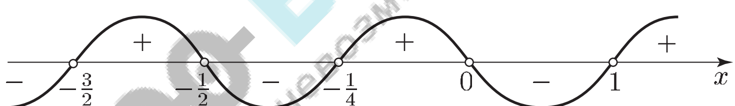

Рис. 21.5

Ответ. $-\frac{3}{2} < r < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4} < r < 0$, $r > 1$.

2. Расположение корней квадратного трехчлена на числовой оси

Справочные сведения

Решение многих задач с параметрами, предлагаемых на вступительных экзаменах, требует умения правильно формулировать необходимые и достаточные условия, соответствующие различным случаям расположения корней квадратного трехчлена на числовой оси.

Пусть квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$, M и K — заданные числа.

Справедливы следующие утверждения, связанные с расположением точек x_1 и x_2 на числовой оси.

1°. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше M ($x_1 < M$, $x_2 < M$), необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ x_0 = -\dfrac{b}{2a} < M, \\ af(M) > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $f(M) = aM^2 + bM + c$ — значение квадратного трехчлена при $x = M$ (рис. 21.6 и 21.7).

В частности, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ ($M = 0$) тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ ab > 0, \\ ac > 0. \end{cases} \tag{2}$$

2°. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше M ($x_1 > M$, $x_2 > M$), необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > M, \\ af(M) > 0 \end{cases} \tag{3}$$

(рис. 21.8 и 21.9).

В частности, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ ab < 0, \\ ac > 0. \end{cases} \tag{4}$$

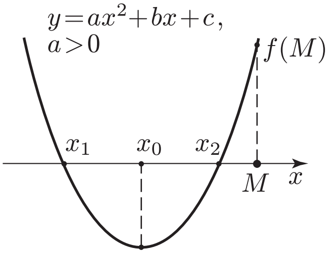

Рис. 21.6

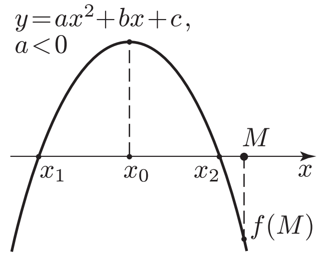

Рис. 21.7

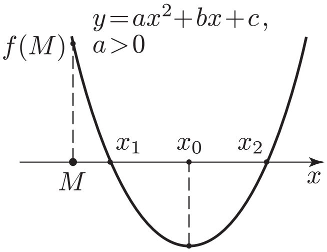

Рис. 21.8

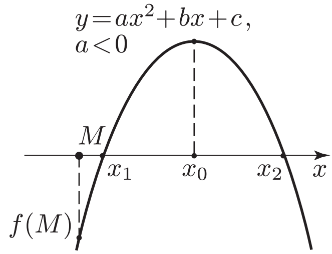

Рис. 21.9

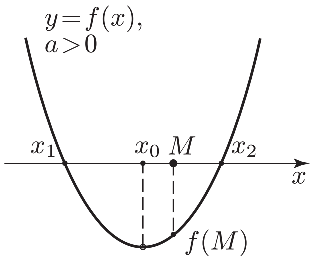

Рис. 21.10

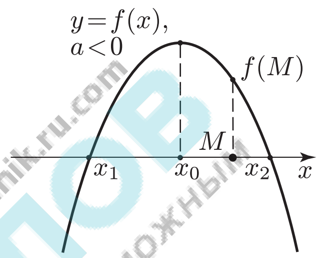

Рис. 21.11

3°. *Для того чтобы число M было расположено между корнями квадратного трехчлена* $(x_1 < M < x_2)$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$af(M) < 0 \tag{5}$$

(рис. 21.10 и 21.11).

4°. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена лежали в интервале* (K, M), *т. е.* $K < x_1 < M$, $K < x_2 < M$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ K < -\dfrac{b}{2a} < M, \\ af(M) > 0, \\ af(K) > 0 \end{cases} \tag{6}$$

(рис. 21.12 и 21.13).

Заметим, что в условиях (6) последние два неравенства можно заменить одним неравенством

$$f(K)f(M) > 0.$$

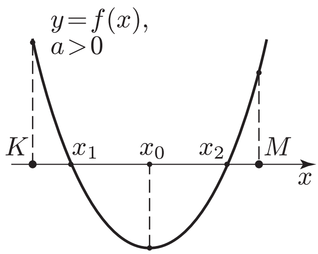

Рис. 21.12

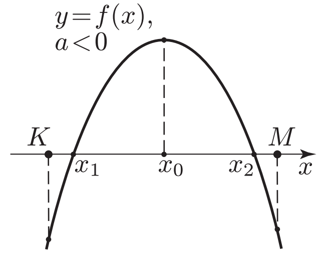

Рис. 21.13

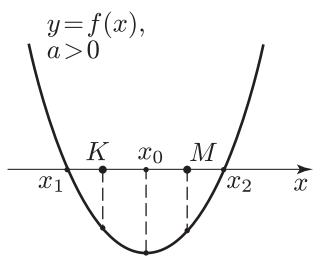

Рис. 21.14

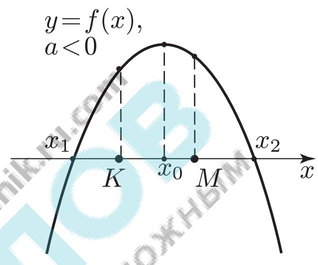

Рис. 21.15

5°. *Для того чтобы отрезок* $[K, M]$ *лежал в интервале* (x_1, x_2), *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} af(K) < 0, \\ af(M) < 0 \end{cases} \tag{7}$$

(рис. 21.14 и 21.15).

Ограничимся доказательством утверждения 1°. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2 тогда и только тогда, когда

$$D = b^2 - 4ac \geqslant 0. \tag{8}$$

Эти корни удовлетворяют условиям $x_1 < M$, $x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$x_1 - M < 0, \qquad x_2 - M < 0. \tag{9}$$

Неравенства (9) выполняются в том и только в том случае, когда, наряду с условием (8), справедливы неравенства

$$\begin{cases} (x_1 - M) + (x_2 - M) < 0, \\ (x_1 - M)(x_2 - M) > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Используя формулы Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

получим систему неравенств

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{a} < 2M, \\[2mm] \dfrac{c}{a} + M\dfrac{b}{a} + M^2 > 0, \end{cases}$$

в которой второе неравенство равносильно неравенству $af(M) > 0$.

Итак, корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена ax^2+bx+c удовлетворяют условиям $x_1 < M$, $x_2 < M$ тогда и только тогда, когда коэффициенты a, b, c удовлетворяют системе неравенств (1).

Аналогично доказываются утверждения 2°–5°, связанные с расположением корней квадратного трехчлена.

Примеры с решениями

Пример 1. Найти все значения r, при которых корни уравнения

$$(r-1)x^2 - 2rx + r + 3 = 0 \tag{11}$$

положительны.

Решение. Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ положительны тогда и только тогда, когда выполняются условия (4). Для уравнения (11) при $r \neq 1$ эти условия записываются в виде:

$$\begin{cases} 4r^2 - 4(r-1)(r+3) \geqslant 0, \\ -2r(r-1) < 0, \\ (r-1)(r+3) > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Первые два неравенства системы (12) равносильны соответственно неравенствам

$$2r - 3 \leqslant 0, \qquad r(r-1) > 0. \tag{13}$$

Первое из неравенств (13) справедливо при $r \leqslant \dfrac{3}{2}$ (рис. 21.16), второе — при $r < 0$, а также при $r > 1$. Решениями третьего неравенства системы (12) являются значения r такие, что $r < -3$ или $r > 1$. Таким образом, множество решений системы (12) — объединение промежутков $(-\infty, -3)$ и $\left(1, \dfrac{3}{2}\right]$.

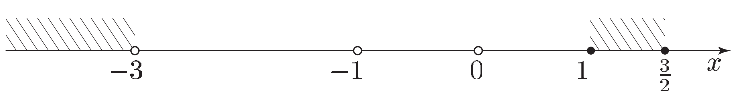

Рис. 21.16

Если $r=1$, то уравнение (11) примет вид $-2x+4=0$, откуда $x=2$, т. е. корень уравнения (11) при $r=1$ положителен.

Ответ. $r<-3,\ 1\leqslant r\leqslant \frac{3}{2}$.

Пример 2. Найти все значения r, при которых квадратный трехчлен

$$f(x)=rx^2-(r+1)x+2$$

имеет действительные корни x_1 и x_2 такие, что $-1<x_1<1$, $-1<x_2<1$.

Решение. В силу утверждения 4°, искомые значения r являются решениями системы неравенств (6), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases}(r+1)^2-8r\geqslant 0,\\ -1<\dfrac{r+1}{2r}<1,\\ r(2r+3)>0,\\ r>0.\end{cases}$$

Эта система равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases}r^2-6r+1\geqslant 0,\\ r>0,\\ r>1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(r-(3+2\sqrt{2}))(r-(3-2\sqrt{2}))\geqslant 0,\\ r>1.\end{cases}$$

Так как $3-2\sqrt{2}<1$, то в результате получаем $r\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

Ответ. $r\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

Задачи

Решить неравенство (1–14):

1. $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-8x+7}>0$. **2.** $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-12}\leqslant 0$. **3.** $\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-3}<0$.

4. $\dfrac{9}{x+1}+1<\dfrac{14}{x-1}$. **5.** $\dfrac{5-4x}{3x^2-x-4}<4$. **6.** $\dfrac{17-42x}{5x^2-7x+2}>6$.

7. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{2x^2-5x-3}>0$. **8.** $\dfrac{x^4-8x^2-9}{x^3-1}\leqslant 0$. **9.** $\left|\dfrac{2x+1}{x+1}\right|>2$.

10. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2+6x+9}<0$. **11.** $\dfrac{|x+3|}{|x+2|-1}\geqslant 1$. **12.** $\dfrac{|1+2x|}{x^2+x-2}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

13. $\dfrac{|x+3|}{x^2+5x+6}\geqslant 2$. **14.** $\dfrac{x^2-|x|-12}{x+3}\leqslant 2x$.

15. Найти все значения a, при которых для всех $x \in \mathbf{R}$ является верным двойное неравенство

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2.$$

16. Найти все значения a, при которых вершины двух парабол $y = x^2 + 4ax - a$ и $y = -ax^2 + 4x + a + 2$ лежат по одну сторону от прямой $y = -3$.

17. Найти все значения r, при которых корни уравнения

$$rx^2 - 2(r-2)x + 3(r-2) = 0:$$

а) действительны; б) положительны.

18. Найти все значения b, при которых квадратный трехчлен $x^2 + 2bx + 4b$ имеет действительные корни x_1 и x_2 такие, что $x_1 > -1$, $x_2 > -1$.

19. Найти все значения b, при которых квадратный трехчлен $x^2 - bx + 2$ имеет действительные корни, принадлежащие интервалу $(0, 3)$.

20. Найти все значения b, при которых квадратный трехчлен $x^2 - 2bx - 1$ имеет действительные корни x_1, x_2 такие, что $|x_1| < 2$, $|x_2| < 2$.

21. Найти все значения параметра a, при которых для каждого x из отрезка $[1, 2]$ верно неравенство

$$\frac{x + 1 + 2a}{x + a} < 0.$$

Ответы

1. $x < 1$, $x > 7$. **2.** $-4 < x \leqslant -2$, $1 \leqslant x < 3$. **3.** $-1 < x < -\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2} < x < 2$.

4. $-3 < x < -1$, $1 < x < 8$. **5.** $x < -\frac{\sqrt{7}}{2}$, $-1 < x < \frac{\sqrt{7}}{2}$, $x > \frac{4}{3}$.

6. $-\frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{2}{5}$, $\frac{1}{\sqrt{6}} < x < 1$. **7.** $-\frac{1}{2} < x < 1$, $x > 3$. **8.** $x \leqslant -3$, $1 < x \leqslant 3$.

9. $x < -1$, $-1 < x < -\frac{3}{4}$. **10.** $-5 < x < -3$, $-3 < x < -2$, $2 < x < 5$.

11. $x < -3$, $x > -1$. **12.** $x \leqslant -5$, $-2 < x < 1$, $x \geqslant 4$. **13.** $-2 < x \leqslant -\frac{3}{2}$.

14. $x > -3$. **15.** $-1 < a < 2$. **16.** $a < -4$, $0 < a < \frac{3}{4}$.

17. а) $-1 \leqslant r \leqslant 2$; б) $-1 \leqslant r \leqslant 0$. **18.** $-\frac{1}{2} < b < 0$. **19.** $2\sqrt{2} \leqslant b < \frac{11}{3}$.

20. $-\frac{3}{4} < b < \frac{3}{4}$. **21.** $-1 < a < -\frac{1}{2}$.

§ 22. Иррациональные неравенства

Справочные сведения

Иррациональными называют неравенства, в которых неизвестное или рациональная функция от неизвестного содержатся под знаками радикалов.

При решении иррационального неравенства следует сначала найти его ОДЗ, т. е. все значения неизвестного, при которых обе части неравенства определены (имеют смысл).

Иррациональное неравенство обычно сводят к рациональному, возводя обе его части в натуральную степень. Так как при этой операции может получиться неравенство, неравносильное исходному, то следует установить, при каких значениях неизвестного левая и правая части заданного неравенства принимают положительные или отрицательные значения.

Если обе части неравенства неотрицательны на некотором множестве, то при возведении их в натуральную степень получится неравенство, равносильное исходному на этом множестве.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - x - 2} > \frac{2}{5} - \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Решение. Множество E допустимых значений (ОДЗ неравенства) определяется условием $x^2 - x - 2 \geqslant 0$, откуда находим $x \leqslant -1$, $x \geqslant 2$. При всех $x \in E$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая часть — отрицательное число, так как $\frac{4}{25} < \frac{1}{6}$. Следовательно, все значения $x \in E$ и только эти значения являются решениями неравенства.

Ответ. $x \leqslant -1$, $x \geqslant 2$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{6 + x - x^2} < \frac{4}{7} - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение. Заметим, что $\frac{4}{7} - \frac{1}{\sqrt{3}} < 0$, поскольку $\frac{16}{49} < \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$, а левая часть неравенства неотрицательна. Поэтому данное неравенство не имеет решений.

Ответ. Нет решений.

Пример 3. Решить неравенство

$$\sqrt{1 - x^2} + 1 < \sqrt{3 - x^2}. \qquad (1)$$

Решение. Левая часть неравенства (1) определена при условии $1 - x^2 \geqslant 0$, т. е. на множестве $E_1 = [-1, 1]$, а правая часть — на множестве $E_2 = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Поэтому ОДЗ неравенства (1) — пересечение множеств E_1 и E_2, т. е. множество $E = E_1 = [-1, 1]$. На множестве E обе части неравенства (1) определены и неотрицательны и поэтому оно равносильно неравенству

$$2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2} < 3 - x^2, \qquad (2)$$

полученному возведением в квадрат обеих частей неравенства (1). Далее, неравенство (2) равносильно неравенству

$$2\sqrt{1 - x^2} < 1,$$

которое равносильно на множестве E каждому из неравенств

$$4(1-x^2) < 1, \qquad 4x^2 > 3, \qquad x^2 > \frac{3}{4},$$

$$|x| > \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{3}$$

Таким образом, решениями неравенства (1) являются все те и только те числа x из отрезка $[-1, 1]$, которые удовлетворяют условию (3).

Ответ. $-1 \leqslant x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < x \leqslant 1$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+4x-5} < 10-2x. \tag{4}$$

Решение. Первый способ. Область допустимых значений неравенства (4) определяется условием

$$x^2+4-5 \geqslant 0, \tag{5}$$

а множество E решений неравенства (5) — объединение промежутков $(-\infty, -5]$ и $[1, +\infty)$. Числа из множества E, и только они, могут быть решениями неравенства (4).

Заметим, что левая часть неравенства (4) неотрицательна при всех $x \in E$, а правая часть меняет знак при переходе через точку $x = 5$. Поэтому следует рассмотреть два возможных случая: $x < 5$ и $x \geqslant 5$.

1) Если $x \geqslant 5$, то $10-2x \leqslant 0$ и неравенство (4) не имеет решений, так как его левая часть неотрицательна.

2) Если $x < 5$ и $x \in E$, то обе части неравенства (4) определены и неотрицательны, поэтому оно равносильно неравенству

$$x^2+4x-5 < (10-2x)^2, \tag{6}$$

а неравенство (6) равносильно неравенству

$$3x^2-44x+105 > 0. \tag{7}$$

Чтобы решить неравенство (7), найдем корни уравнения

$$3x^2-44x+105 = 0. \tag{8}$$

Получим

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{484-315}}{3} = \frac{22 \pm 13}{3},$$

откуда $x_1 = 3$, $x_2 = \dfrac{35}{3}$. Поэтому множество E_1 решений неравенства (7) — объединение интервалов $(-\infty, 3)$ и $\left(\dfrac{35}{3}, +\infty\right)$. Условиям $x \in E$, $x < 5$ и $x \in E_1$ удовлетворяют значения x из промежутков $(-\infty, -5]$ и $[1, 3)$.

Ответ. $x \leqslant -5$, $1 \leqslant x < 3$.

Замечание. Рассуждения, приведенные при решении неравенства (4), дают основания утверждать, что неравенство

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

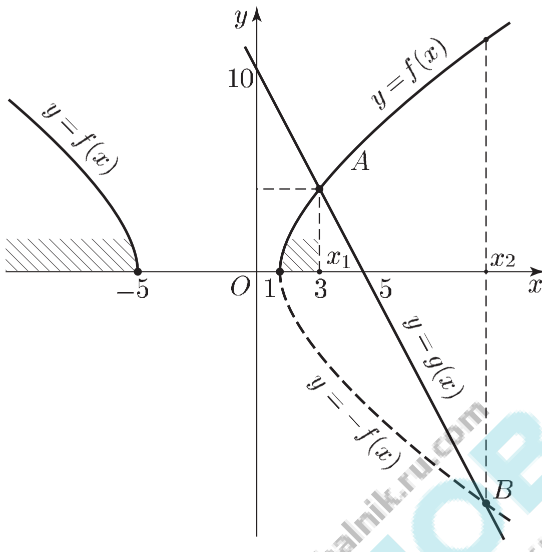

Рис. 22.1

равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Второй способ. Построим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$, $g(x) = 10 - 2x$ (рис. 22.1).

Решить неравенство (4) — это значит найти все значения $x \in E$, при которых график функции $f(x)$ лежит ниже графика функции $g(x)$. Абсциссы точек пересечения этих графиков — корни уравнения $f(x) = g(x)$. Это уравнение — следствие уравнения $f^2(x) = g^2(x)$, т. е. уравнения $x^2 + 4x - 5 = (10 - 2x)^2$, которое равносильно уравнению (8). Из рис. 22.1 видно, что прямая $y = 10 - 2x$ пересекает график функции $y = f(x)$ только в точке A, абсцисса x_0 которой — корень уравнения (8), принадлежащий отрезку $[1, 5]$, т. е. $x_0 = x_1 = 3$. Заметим, что корень x_2 уравнения (8) — это корень уравнения $-f(x) = g(x)$ (рис. 22.1), т. е. абсцисса точки B, в которой прямая $y = 10 - 2x$ пересекает график функции $y = -f(x)$.

Из рис. 22.1 заключаем, что график функции $f(x)$ лежит ниже графика функции $g(x)$ на промежутках $(-\infty, -5]$ и $[1, 3)$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + x - 12} > x. \tag{9}$$

Решение. Решив неравенство $x^2 + x - 12 \geqslant 0$, найдем ОДЗ неравенства (9), т. е. множество E (рис. 22.2), которое является объединением промежутков $(-\infty, -4]$ и $[3, +\infty)$. Как и в примере 4, рассмотрим два случая: $x \geqslant 0$ и $x < 0$.

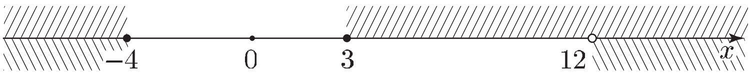

Рис. 22.2

1) Пусть $x \in E$ и $x \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 3$.

Тогда обе части неравенства (9) неотрицательны. Возводя их в квадрат, получаем

$$x^2 + x - 12 > x^2, \qquad \text{откуда} \quad x > 12.$$

Таким образом, все значения x из промежутка $(12, +\infty)$ принадлежат множеству решений неравенства (9).

2) Пусть $x < 0$, тогда правая часть неравенства (9) отрицательна, а его левая часть неотрицательна. Поэтому все значения x такие, что $x < 0$ и $x \in E$ (рис. 22.2), т. е. значения x из промежутка $(-\infty, -4]$, являются решениями неравенства (9).

Ответ. $x \leqslant -4$, $x > 12$.

Замечания. 1) Метод решения неравенства, использованный в примере 5, основан на том, что неравенство

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

2) Многие абитуриенты, возводя в квадрат обе части неравенства (9) без учета знака его правой части, теряли множество $M = (-\infty, 4]$ решений этого неравенства.

Пример 6. Решить неравенство

$$\sqrt{3x^2 + 8x - 3} > \frac{1 + 2x}{3}.$$

Решение. Так как уравнение $3x^2 + 8x - 3 = 0$ имеет корни $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{3}$, то область E допустимых значений неравенства — совокупность интервалов $E_1 = (-\infty, -3)$ и $E_2 = \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$. Решить данное неравенство — это значит найти все значения $x \in E$, при которых график функции $y = \sqrt{3x^2 + 8x - 3}$ лежит выше прямой $y = \frac{1 + 2x}{3}$ (рис. 22.3).

Значения $x \in E_1$ являются решениями неравенства, так как $\sqrt{3x^2 + 8x - 3} \geqslant 0$ при $x \leqslant -3$, а $\frac{1 + 2x}{3} < 0$ при $x \leqslant -3$ (рис. 22.3).

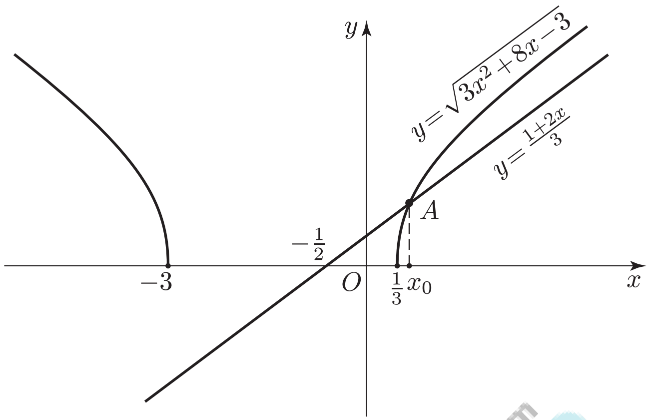

Рис. 22.3

Пусть $x \geqslant \dfrac{1}{3}$, тогда $\sqrt{3x^2+8x-3} \geqslant 0$, $\dfrac{1+2x}{3} > 0$ и исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $3x^2+8x-3 > \left(\dfrac{1+2x}{3}\right)^2$, $23x^2+68x-28 > 0$. Уравнение $23x^2+68x-28=0$ имеет корни x_1 и x_2, где $x_1 = -\dfrac{34+30\sqrt{2}}{23} < 0$, $x_2 = \dfrac{30\sqrt{2}-34}{23}$ (рис. 22.3). Поэтому решениями исходного неравенства на множестве E_2 являются все точки интервала $(x_2, +\infty)$.

Ответ. $x \leqslant -3$, $x > \dfrac{30\sqrt{2}-34}{23}$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\sqrt{2-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{10}$$

Решение. Первый способ. Неравенство (10) равносильно неравенству

$$\sqrt{2-x} > \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{11}$$

область определения которого — множество $E = [-1, 2]$.

Так как обе части неравенства (11) неотрицательны, то на множестве E оно равносильно неравенству

$$2 - x > x + \frac{6}{5} + 2\sqrt{\frac{x+1}{5}},$$

полученному возведением в квадрат обеих частей неравенства (11). Отсюда следует, что неравенство (11) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2, & (12)\\ \dfrac{2}{5} - x > \sqrt{\dfrac{x+1}{5}}. & (13) \end{cases}$$

Если $\frac{2}{5} - x < 0$, т. е. $x > \frac{2}{5}$, то неравенство (13) не имеет решений.

Если $\frac{2}{5} - x \geqslant 0$ и $x \in E$, т. е. $-1 \leqslant x \leqslant \frac{2}{5}$, то система (12), (13) равносильна каждому из неравенств

$$\left(\frac{2}{5} - x\right)^2 > \frac{x+1}{5}, \qquad x^2 - x - \frac{1}{25} > 0,$$

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0, \tag{14}$$

где числа $x_1 = \frac{5-\sqrt{29}}{10}$, $x_2 = \frac{5+\sqrt{29}}{10}$ являются корнями уравнения

$$x^2 - x - \frac{1}{25} = 0. \tag{15}$$

Решив неравенство (14) на множестве $\left[-1, \frac{2}{5}\right]$ и учитывая, что $-1 < x_1 < 0$, $x_2 > 1$ (рис. 22.4), находим множество $E = [-1, x_1)$ решений неравенства (10).

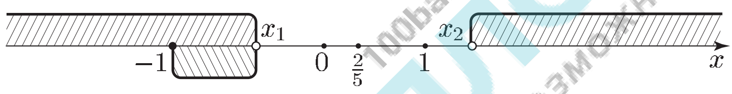

Рис. 22.4

Ответ. $-1 \leqslant x < \frac{5-\sqrt{29}}{10}$.

Второй способ. Рассмотрим $f(x) = \sqrt{2-x}$ и $g(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}$; общая область определения этих функций — отрезок $E = [-1, 2]$, а эскизы графиков представлены на рис. 22.5.

Решить неравенство (11) — это значит найти все значения $x \in E$, при которых график функции $y = f(x)$ лежит выше графика функции $y = g(x)$. Функция $g(x)$ является возрастающей, а функция $f(x)$ — убывающей на множестве E, причем $f(-1) > g(-1)$,

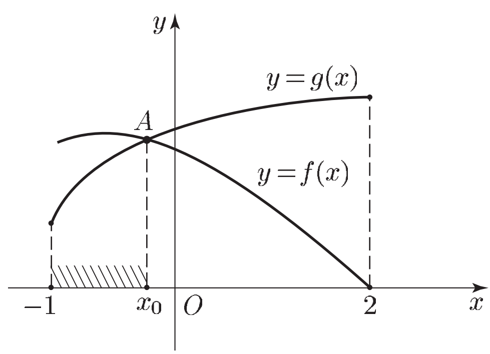

Рис. 22.5

а $f(2) < g(2)$. Поэтому на отрезке $[-1, 2]$ графики этих функций имеют единственную общую точку $A(x_0; y_0)$, где x_0 (рис. 22.5) — корень уравнения $f(x) = g(x)$, т. е. уравнения (15). Заметим, что $x_0 < 0$, так как $f(0) = \sqrt{2}$, $g(0) = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$, а $f(0) < g(0)$. Следовательно, $x_0 = x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{10}$, а искомое множество решений неравенства (10) — промежуток $[-1, x_1)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\frac{7 - 3x + \sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x - 3} < -1.$$

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{4 - 2x + \sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x - 3} < 0, \tag{16}$$

а неравенство (16) равносильно совокупности следующих двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3x - 4} < 2x - 4, \\ x > 3; \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3x - 4} > 2x - 4, \\ x < 3. \end{cases} \tag{18}$$

Множество допустимых значений x для систем (17) и (18) определяется условием $x^2 + 3x - 4 \geqslant 0$, откуда $x \leqslant -4$, $x \geqslant 1$.

а) При $x > 3$ обе части первого неравенства системы (17) положительны, а система (17) равносильна каждой из систем

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 4(x - 2)^2, \\ x > 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x - 5)\left(x - \frac{4}{3}\right) > 0, \\ x > 3, \end{cases}$$

откуда следует, что $x > 5$.

б) Системе (18) удовлетворяют значения $x \leqslant -4$, так как при $x \leqslant -4$ левая часть первого неравенства системы (18) определена и неотрицательна, а правая отрицательна; значения $x \leqslant -4$ удовлетворяют и второму неравенству системы (18).

Значения x из отрезка $[1, 2]$ удовлетворяют системе (18), а при $x > 2$ система (18) равносильна каждой из систем

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 4(x - 2)^2, \\ 2 < x < 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x - 5)\left(x - \frac{4}{3}\right) < 0, \\ 2 < x < 3, \end{cases}$$

откуда следует, что $2 < x < 3$.

Ответ. $2 < x < 3$, $x > 5$.

Замечание. Системы (17) и (18) можно решить, построив графики функций $y = 2x - 4$ и $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ (рис. 22.6).

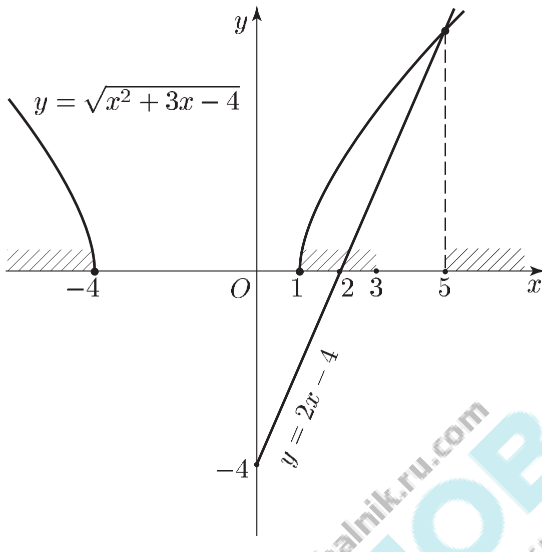

Рис. 22.6

Задачи

Решить неравенство (1–26):

1. $\sqrt{4+3x-x^2} > \frac{\sqrt{6}}{5} - \frac{1}{2}$. **2.** $\sqrt{x^2-2x-3} < \frac{\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{3}$.

3. $(x+1)\sqrt{4-x^2} \leqslant 0$. **4.** $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3-x}$.

5. $\sqrt{x^2-3x-4} < x-2$. **6.** $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$.

7. $3\sqrt{6+x-x^2} > 4x-2$. **8.** $\sqrt{x^2-4x} > x-3$.

9. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \sqrt{x-1}$. **10.** $\sqrt{x+3} < \sqrt{7-x} + \sqrt{10-x}$.

11. $\dfrac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}} \leqslant 0$. **12.** $\dfrac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4} < \dfrac{1}{2}$.

13. $\sqrt{3-x} > |x+3|$. **14.** $\sqrt{x^2-x+1} > 1+x-x^2$.

15. $\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \leqslant x$. **16.** $\dfrac{4x^2-9}{\sqrt{3x^2-3}} \leqslant \dfrac{2}{3}x+1$.

17. $\sqrt[3]{x-3} < 2 + \sqrt[3]{x+5}$. **18.** $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1+x$.

19. $\sqrt{2x^2-7x-4} > -x - \dfrac{1}{4}$. **20.** $\dfrac{13-6x+\sqrt{4x^2-2x-6}}{5-2x} > 1$.

21. $\sqrt{x^2+4x+3} < 1 + \sqrt{x^2-2x+2}$.

22. $\dfrac{2x+15-x^2}{\sqrt{2x+15}+x} \geqslant 0$. **23.** $\dfrac{\sqrt{-x^2-6x-5}}{|x^2+x-2|-|x^2+7x+6|} \geqslant 0$.

24. $\dfrac{1}{4-\sqrt{x^2-2x-8}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^2+12}}$.

25. $\dfrac{\sqrt{2x^3-22x^2+60x}}{x-6} \geqslant 2x-10$. **26.** $\sqrt{\dfrac{x^2+30x-675}{x-3}} > 15-|x|$.

Ответы

1. $-1 \leqslant x \leqslant 4$. **2.** Нет решений. **3.** $-2 \leqslant x \leqslant -1$, $x = 2$. **4.** $\frac{2}{3} < x \leqslant 3$.
5. $4 \leqslant x < 8$. **6.** $x < -\frac{7}{9}$. **7.** $-2 \leqslant x < 2$. **8.** $x \leqslant 0$, $x > \frac{9}{2}$. **9.** $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$.
10. $-3 \leqslant x < 6$. **11.** $6 < x \leqslant 8$. **12.** $x < -4$, $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{8}{7}$. **13.** $-6 < x < -1$.
14. $x < 0$, $x > 1$. **15.** $-2 \leqslant x < -1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. **16.** $-\frac{3}{2} \leqslant x < -1$, $1 < x \leqslant 2$.
17. $x \in \mathbf{R}$. **18.** $x < -1$, $-1 < x < 0$, $x > 2$. **19.** $x < \frac{15 - \sqrt{290}}{4}$, $x \geqslant 4$.
20. $x \leqslant -1$, $\frac{3}{2} \leqslant x < \frac{5}{2}$, $x > \frac{7}{2}$. **21.** $x \leqslant -3$, $-1 \leqslant x < \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$.
22. $-\frac{15}{2} \leqslant x < -3$, $-3 < x \leqslant 5$. **23.** $-5 \leqslant x < -2 - \sqrt{2}$, $-\frac{4}{3} < x < -1$.
24. $x < -4$, $x = -2$, $x > 6$. **25.** $0 \leqslant x \leqslant 4$, $x = 5$, $6 < x \leqslant \frac{15}{2}$.
26. $-45 \leqslant x < -5$, $0 < x < 3$, $x > 15$.

Глава 7

Показательные, логарифмические и тригонометрические неравенства

§ 23. Показательные неравенства

Справочные сведения

При решении показательных неравенств используются свойства показательной функции.

Показательная функция $y = a^x$ определена на множестве вещественных чисел $\mathbf{R}$, является *возрастающей* при $a > 1$ (рис. 23.1) и *убывающей* при $0 < a < 1$ (рис. 23.2), множество значений этой функции — совокупность всех положительных чисел.

Неравенства вида

$$a^x > b \tag{1}$$

и

$$a^x < b \tag{2}$$

называют *простейшими показательными неравенствами*.

Если $b \leqslant 0$, то неравенство (1) является верным при всех $x \in \mathbf{R}$, а неравенство (2) не имеет решений.

Пусть $b > 0$, тогда:

а) если $a > 1$, то неравенство (1) справедливо при $x > \log_a b$, а неравенство (2) — при $x < \log_a b$ (рис. 23.1);

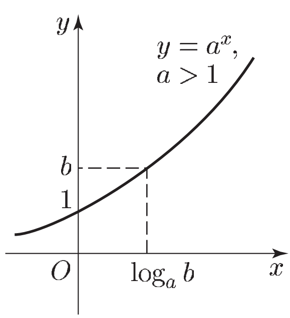

Рис. 23.1

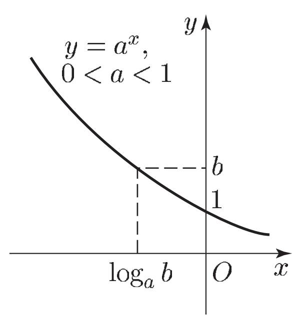

Рис. 23.2

б) если $0 < a < 1$, то множество решений неравенства (1) — промежуток $(-\infty, \log_a b)$, а множество решений неравенства (2) — промежуток $(\log_a b, +\infty)$ (рис. 23.2).

Неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \tag{3}$$

при $a > 1$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, а в случае, когда $0 < a < 1$, неравенство (3) равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить неравенство $3^{6x^2} \leqslant 729$.

Решение. Данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$3^{6x^2} \leqslant 3^6, \qquad 6x^2 \leqslant 6, \qquad x^2 \leqslant 1,$$

откуда $|x| \leqslant 1$.

Ответ. $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Пример 2. Решить неравенство

$$0{,}25^{2x} > 4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)}.$$

Решение. Запишем данное неравенство в виде (3), где $a = 0{,}5$. Получим неравенство

$$0{,}5^{4x} > (0{,}5)^{x(x+3)-2},$$

равносильное каждому из следующих неравенств:

$$4x < x(x+3) - 2, \qquad x^2 - x - 2 > 0, \qquad (x+1)(x-2) > 0.$$

Искомое множество решений — объединение промежутков $(-\infty, -1)$ и $(2, +\infty)$.

Ответ. $x < -1$, $x > 2$.

Пример 3. Решить неравенство

$$2 \cdot 16^x + 5 \cdot 2^{2x} - 3 > 0. \tag{4}$$

Решение. Неравенство (4) сведем к квадратному, полагая $4^x = t$. Получим неравенство

$$2t^2 + 5t - 3 > 0. \tag{5}$$

Так как уравнение $2t^2 + 5t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = -3$, $t_2 = \frac{1}{2}$, то неравенство (5) можно записать в виде

$$2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t + 3) > 0, \tag{6}$$

где $t = 4^x > 0$. Поэтому неравенство (6) равносильно неравенству $t - \frac{1}{2} > 0$. Итак, $t > \frac{1}{2}$ или $4^x > \frac{1}{2}$, или $4^x > 4^{-1/2}$, откуда $x > -\frac{1}{2}$.

Ответ. $x > -\frac{1}{2}$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{15 - 16^{x+1}}{4^{2x} - 4} \geqslant 2^{4x+1} - 3. \qquad (7)$$

Решение. Положим $t = 16^x$, тогда неравенство (7) примет вид

$$\frac{15 - 16t}{t - 4} \geqslant 2t - 3. \qquad (8)$$

Неравенство (8) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\frac{2t^2 + 5t - 3}{t - 4} \leqslant 0,$$

$$\frac{(t+3)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{t - 4} \leqslant 0. \qquad (9)$$

Так как $t > 0$, то неравенство (9) равносильно неравенству

$$\frac{t - \frac{1}{2}}{t - 4} \leqslant 0,$$

откуда получаем $\frac{1}{2} \leqslant t < 4$, т. е. $\frac{1}{2} \leqslant 16^x < 4$.

Ответ. $-\frac{1}{4} \leqslant x < \frac{1}{2}$.

Пример 5. Решить неравенство

$$2 \cdot 4^x \geqslant 6^x + 3 \cdot 9^x.$$

Решение. Разделив обе части данного неравенства на 9^x и полагая $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, получим неравенство

$$2t^2 - t - 3 \geqslant 0,$$

равносильное неравенству

$$2\left(t - \frac{3}{2}\right)(t+1) \geqslant 0,$$

откуда $t \geqslant \frac{3}{2}$, так как $t > 0$. Значит, исходное неравенство равносильно неравенству $\left(\frac{2}{3}\right)^x \geqslant \frac{3}{2}$, откуда $x \leqslant -1$.

Ответ. $x \leqslant -1$.

Пример 6. Решить неравенство

$$7 \cdot 49^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant \frac{1}{49} \cdot 7^{|x^2+5x|}. \tag{10}$$

Решение. Неравенство (10) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$7^{1-x^2} \leqslant 7^{|x^2+5x|-2},$$
$$|x^2+5x| + x^2 - 3 \geqslant 0. \tag{11}$$

1) Если $x \leqslant -5$ или $x \geqslant 0$, то $x^2 + 5x \geqslant 0$ и неравенство (11) равносильно каждому из неравенств

$$2x^2 + 5x - 3 \geqslant 0, \qquad (x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0,$$

откуда следует, что либо $x \leqslant -3$, либо $x \geqslant \frac{1}{2}$. В этом случае решениями неравенства (11) являются все числа x такие, что $x \leqslant -5$, а также все числа x из промежутка $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

2) Если $-5 < x < 0$, то $|x^2 + 5x| = -x^2 - 5x$ и неравенство (11) примет вид $-5x - 3 \geqslant 0$, откуда $x \leqslant -\frac{3}{5}$. В этом случае множество решений неравенства (11) — промежуток $\left(-5, -\frac{3}{5}\right]$.

Таким образом, множество всех решений неравенства (10) — объединение промежутков $(-\infty, -5]$, $\left(-5, -\frac{3}{5}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Ответ. $x \leqslant -\frac{3}{5}$, $x \geqslant \frac{1}{2}$.

Пример 7. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$a^2 - 2a \cdot 3^x - 3 \cdot 9^x > 0. \tag{12}$$

Решение. При $a = 0$ неравенство (12) не имеет решений, так как $-3 \cdot 9^x < 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Пусть $a \neq 0$; тогда, полагая $3^x = t$, запишем неравенство (12) в виде

$$a^2 - 2at - 3t^2 > 0. \tag{13}$$

Так как квадратное уравнение $3t^2 + 2at - a^2 = 0$ имеет корни $t_1 = -a$ и $t_2 = \frac{a}{3}$, то неравенство (13) равносильно неравенству

$$(t+a)\left(t - \frac{a}{3}\right) < 0. \tag{14}$$

Рассмотрим два возможных случая: $a > 0$, $a < 0$.

1) Если $a > 0$, то $t_1 < t_2$ и множество решений неравенства (14) — интервал $\left(-a, \frac{a}{3}\right)$, т. е. $-a < t < \frac{a}{3}$ или $-a < 3^x < \frac{a}{3}$, откуда $x < \log_3 a - 1$.

2) Если $a < 0$, то $t_2 < t_1$ и множество решений неравенства (14) — интервал $\left(\frac{a}{3}, -a\right)$, т. е. $\frac{a}{3} < t < -a$ или $\frac{a}{3} < 3^x < -a$, откуда $x < \log_3(-a)$.

Ответ. Если $a = 0$, то неравенство не имеет решений. Если $a > 0$, то $x < \log_3 a - 1$; если $a < 0$, то $x < \log_3(-a)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\sqrt{32^x + 4} - \sqrt{|32^x - 7|} < 1. \tag{15}$$

Решение. Полагая $t = 32^x$, где $t > 0$, запишем неравенство (15) в виде

$$\sqrt{t + 4} < 1 + \sqrt{|t - 7|}. \tag{16}$$

При $t > 0$ обе части неравенства (16) определены и положительны. Возводя их в квадрат, получаем неравенство

$$t + 4 < 1 + |t - 7| + 2\sqrt{|t - 7|}, \tag{17}$$

равносильное неравенству (16) при $t > 0$.

Рассмотрим два случая: $t \geqslant 7$, $0 < t < 7$.

1) Если $t \geqslant 7$, то $|t - 7| = t - 7$ и неравенство (17) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\sqrt{t - 7} > 5, \qquad t > 32.$$

Итак, $32^x > 32$, откуда $x > 1$.

2) Если $0 < t < 7$, то неравенство (17) можно записать в виде

$$t + 4 < 1 + 7 - t + 2\sqrt{7 - t}$$

или

$$t - 2 < \sqrt{7 - t}. \tag{18}$$

Пусть $0 < t \leqslant 2$, тогда неравенство (18) является верным.

Пусть $2 < t < 7$, тогда неравенство (18) равносильно каждому из неравенств

$$(t - 2)^2 < 7 - t,$$
$$t^2 - 3t - 3 < 0. \tag{19}$$

Так как уравнение $t^2 - 3t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$, $t_2 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$, где $t_1 < 0$, $t_2 > 2$, то решениями неравенства (19) при $2 < t < 7$ являются значения t из интервала $(2, t_2)$. Итак, решения неравенства (18) образуют интервал $(0, t_2)$, т. е. $0 < 32^x < t_2$, откуда $x < \log_{32} t_2$.

Ответ. $x < \log_{32} \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$, $x > 1$.

Задачи

Решить неравенство (1–30):

1. $4^x \geqslant 2.$ **2.** $9^x \leqslant 3.$ **3.** $2^{x-x^2} \geqslant \frac{1}{4}.$ **4.** $3^x + 3^{x+2} < 30.$

5. $4^{x+1} + 4^{x-1} > 68.$ **6.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x+1} \geqslant 1.$ **7.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3} \leqslant 1.$

8. $25^x - 5^x - 20 < 0.$ **9.** $9^x + 2\cdot 3^x - 15 > 0.$

10. $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \leqslant 112.$ **11.** $2^{3x} + 2^{3x-1} + 2^{3x-2} \leqslant 448.$

12. $\sqrt{32}\cdot 2^{-4x^2} \geqslant 8^{3x}.$ **13.** $\sqrt{27}\cdot 3^{-6x^2} \geqslant 9^{4x}.$ **14.** $81^x + 3^{2x+1} > 54.$

15. $2^x - 1 < 3\cdot 2^{1-x}.$ **16.** $5\cdot 3^{1-x} > 3^x - 2.$ **17.** $18 - 16^x < 7\cdot 2^{2x}.$

18. $8^x < 6\cdot 4^{\frac{3-x}{2}} + 2^{x+1}.$ **19.** $\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{x-2} + 8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x-1}{2}} < 3^x.$

20. $9^{\frac{x+1}{2}} + 3^{2-x} < 2\cdot 27^{1-x}.$ **21.** $125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \leqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}.$

22. $5\cdot 25^x - 2\cdot 15^x \leqslant 3\cdot 9^x.$ **23.** $(0{,}4)^x - (2{,}5)^{x+1} > 1{,}5.$

24. $5\cdot 4^x + 2\cdot 25^x > 7\cdot 10^x.$ **25.** $\dfrac{9^{x+0{,}5}+1}{3-3^{2x}} \leqslant 3^{2x}+1.$ **26.** $\dfrac{4^x}{4^x-3^x} < 4.$

27. $\dfrac{15-16^{x+1}}{4^{2x}-4} \geqslant 2^{4x+1} - 3.$ **28.** $125\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{x^2}{2}} \leqslant 5^{|x^2+6x|-5}.$

29. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-\frac{x^2}{2}} \geqslant 3^{|3x-12|+2x}.$ **30.** $3^x\left(\sqrt{9^{1-x}-1}+1\right) < 3|3^x-1|.$

Ответы

1. $x \geqslant \frac{1}{2}.$ **2.** $x \leqslant \frac{1}{2}.$ **3.** $-1 \leqslant x \leqslant 2.$ **4.** $x < 1.$ **5.** $x > 2.$

6. $x \leqslant -\frac{1}{3}.$ **7.** $x \geqslant \frac{3}{2}.$ **8.** $x < 1.$

9. $x > 1.$ **10.** $x \leqslant \frac{7}{2}.$ **11.** $x \leqslant \frac{8}{3}.$ **12.** $-\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}.$ **13.** $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{6}.$

14. $x > \log_9 6.$ **15.** $x < \log_2 3.$ **16.** $x < \log_3 5.$ **17.** $x > \frac{1}{2}.$ **18.** $x < \frac{3}{2}.$

19. $x > \frac{3}{2}.$ **20.** $x < \frac{1}{2}.$ **21.** $x \leqslant -3,\ x \geqslant \frac{1}{3}.$ **22.** $x \leqslant 0.$ **23.** $x < -1.$

24. $x < 0,\ x > 1.$ **25.** $x \leqslant 0,\ x > \frac{1}{2}.$ **26.** $x < 0,\ x > 1.$ **27.** $-\frac{1}{4} \leqslant x < \frac{1}{2}.$

28. $x \leqslant -\frac{4}{3},\ x > 1.$ **29.** $x \leqslant -3,\ x > 4.$ **30.** $\log_3 \frac{12}{5} < x \leqslant 1.$

§ 24. Логарифмические неравенства

1. Логарифмические неравенства с постоянными основаниями

Справочные сведения

Рассмотрим свойства функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, используемые при решении логарифмических неравенств.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена при $x > 0$, является *возрастающей* при $a > 1$ (рис. 24.1) и *убывающей* при $0 < a < 1$ (рис. 24.2), множество значений этой функции — множество $\mathbf{R}$.

Простейшие логарифмические неравенства

$$\log_a x > b, \tag{1}$$

$$\log_a x < b \tag{2}$$

имеют решения при любом $b \in \mathbf{R}$.

Если $a > 1$, то неравенство (1) справедливо при $x > a^b$, а неравенство (2) является верным при $0 < x < a^b$ (рис. 24.1).

Если $0 < a < 1$, то множеством решений неравенства (1) является интервал $(0, a^b)$, а неравенство (2) является верным при $x > a^b$ (рис. 24.2).

Неравенство

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \tag{3}$$

при $a > 1$ равносильно двойному неравенству

$$f(x) > g(x) > 0,$$

а при $0 < a < 1$ неравенство (3) равносильно неравенству

$$0 < f(x) < g(x).$$

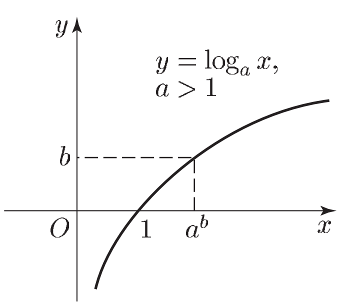

Рис. 24.1

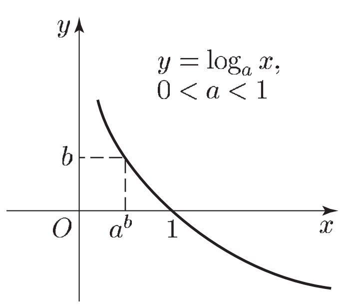

Рис. 24.2

Примеры с решениями

Пример 1. Решить неравенство $\log_3(x-2) \geqslant 2$.

Решение. Запишем данное неравенство в виде

$$\log_3(x-2) \geqslant \log_3 9$$

и воспользуемся тем, что логарифмическая функция с основанием, большим единицы, является возрастающей (см. рис. 24.1). Получим $x - 2 \geqslant 9$, откуда $x \geqslant 11$.

Ответ. $x \geqslant 11$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{1/3}(x+1) \leqslant -3$.

Решение. Так как $-3 = \log_{1/3} 27$, а логарифмическая функция с основанием, меньшим единицы, является убывающей (см. рис. 24.2), то данное неравенство равносильно неравенству $x + 1 \geqslant 27$, откуда $x \geqslant 26$.

Ответ. $x \geqslant 26$.

Пример 3. Решить неравенство

$$3 - x < \log_5(20 + 5^x).$$

Решение. Данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\log_5 5^{3-x} < \log_5(20+5^x), \quad 5^{3-x} < 20 + 5^x,$$
$$5^{2x} + 20 \cdot 5^x - 125 > 0, \quad (5^x - 5)(5^x + 25) > 0, \quad 5^x > 5,$$

откуда $x > 1$.

Ответ. $x > 1$.

Пример 4. Решить неравенство $\log_2(x^2 - x) < 1$.

Решение. Данное неравенство, записанное в виде

$$\log_2(x^2 - x) < \log_2 2,$$

равносильно двойному неравенству

$$0 < x^2 - x < 2.$$

Множество E_1 решений неравенства $x^2 - x > 0$ представляет собой объединение промежутков $x < 0$ и $x > 1$ (рис. 24.3), а множество решений неравенства $x^2 - x < 2$, равносильного неравенству $(x-2)(x+1) < 0$, — интервал $E_2 = (-1, 2)$ (см. рис. 24.3).

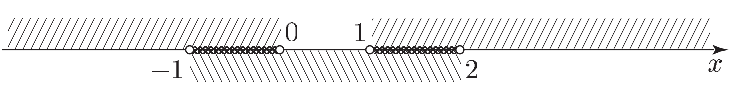

Рис. 24.3

Множество E решений исходного неравенства — это пересечение (общая часть) множеств E_1 и E_2. Следовательно, E является объединением интервалов $(-1, 0)$ и $(1, 2)$.

Ответ. $-1 < x < 0,\ 1 < x < 2.$

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_{1/2}(x^2 - 2x - 8) \geqslant -4.$$

Решение. Данное неравенство, записанное в виде

$$\log_{1/2}(x^2 - 2x - 8) \geqslant \log_{1/2} 16,$$

равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0, \\ x^2 - 2x - 8 \leqslant 16. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства этой системы, равносильного неравенству $(x + 2)(x - 4) > 0$, есть объединение промежутков $x < -2$ и $x > 4$ (см. рис. 24.4).

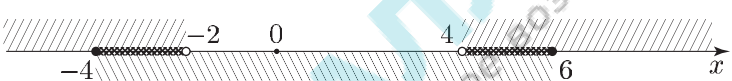

Рис. 24.4

Множество решений второго неравенства системы, равносильного каждому из неравенств $x^2 - 2x - 24 \leqslant 0$, $(x + 4)(x - 6) \leqslant 0$, есть отрезок $[-4, 6]$ (см. рис. 24.4).

Поэтому множество решений системы неравенств представляет собой объединение промежутков $[-4, -2)$ и $(4, 6]$.

Ответ. $-4 \leqslant x < -2,\ 4 < x \leqslant 6.$

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_3 x + \log_3(x + 2) \geqslant 1. \qquad (4)$$

Решение. Так как $1 = \log_3 3$, то, заменив сумму логарифмов на логарифм произведения, получим неравенство

$$\log_3 [x(x + 2)] \geqslant \log_3 3, \qquad (5)$$

которое неравносильно неравенству (4). Действительно, в неравенстве (4) левая часть определена при $x > 0$, а в неравенстве (5) — при $x > 0$ и $x < -2$. Таким образом, при переходе от (4) к (5) область определения неравенства расширилась. Неравенства (4) и (5) равносильны, если

$$x > 0. \qquad (6)$$

Из (5) следует, что

$$x(x+2) \geqslant 3, \tag{7}$$

а исходное неравенство (4) равносильно системе (6), (7). Неравенство (7) равносильно каждому из неравенств

$$x^2 + 2x - 3 \geqslant 0,$$
$$(x+3)(x-1) \geqslant 0, \tag{8}$$

а система (6), (7) равносильна неравенству $x - 1 \geqslant 0$.

Ответ. $x \geqslant 1$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\log_3(2 - 3^{-x}) < x + 1 - \log_3 4. \tag{9}$$

Решение. Допустимые значения x определяются условием

$$3^x > \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Если выполняется условие (10), то неравенство (9) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\log_3 4(2 - 3^{-x}) < \log_3 3^{x+1},$$
$$8 - 4 \cdot 3^{-x} < 3 \cdot 3^x,$$
$$3 \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 3^x + 4 > 0,$$
$$(3^x - 2)\left(3^x - \frac{2}{3}\right) > 0. \tag{11}$$

Таким образом, неравенство (9) равносильно системе неравенств (10), (11). Решив неравенство (11), находим, что либо $3^x < \frac{2}{3}$, либо $3^x > 2$.

Следовательно, неравенство (9) равносильно совокупности неравенств

$$\frac{1}{2} < 3^x < \frac{2}{3}, \qquad 3^x > 2.$$

Ответ. $\log_3 \frac{1}{2} < x < \log_3 \frac{2}{3}$, $x > \log_3 2$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\log_{1/2}(x+2) > \log_2(1-x). \tag{12}$$

Решение. Неравенство (12) имеет смысл, если $-2 < x < 1$, и равносильно неравенству

$$\log_2 \frac{1}{x+2} > \log_2(1-x), \tag{13}$$

так как $\log_{1/2} t = \log_2 \frac{1}{t}$.

Неравенство (13) на интервале $(-2, 1)$ равносильно каждому из неравенств

$$\frac{1}{x+2} > 1 - x, \qquad (x+2)(1-x) < 1,$$

$$x^2 + x - 1 > 0. \tag{14}$$

Уравнение $x^2 + x - 1 = 0$ имеет корни $x_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, где $-2 < x_1 < 0$, $0 < x_2 < 1$, а решениями неравенства (14) являются все числа из интервалов $x < x_1$ и $x > x_2$ (см. рис. 24.5).

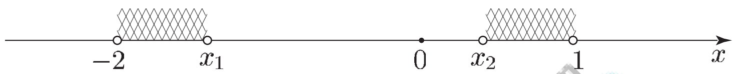

Рис. 24.5

Решениями неравенства (12) являются те и только те числа из интервалов $x < x_1$, $x > x_2$, которые принадлежат интервалу $(-2, 1)$.

Ответ. $-2 < x < -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1$.

Пример 9. Решить неравенство

$$\frac{\log_x[(x-2)(x-3)]}{\log_x 2} < \log_2(x+1). \tag{15}$$

Решение. Неравенство (15) имеет смысл в том случае, если $x > 0$, $x \neq 1$, $(x-2)(x-3) > 0$. Пусть E — область определения неравенства (15), тогда множество E — это объединение интервалов $0 < x < 1$, $1 < x < 2$, $x > 3$ (см. рис. 24.6).

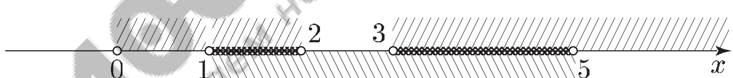

Рис. 24.6

Используя формулу $\frac{\log_x t}{\log_x 2} = \log_2 t$, запишем неравенство (15) в виде

$$\log_2[(x-2)(x-3)] < \log_2(x+1). \tag{16}$$

Неравенство (16) на множестве E равносильно каждому из неравенств

$$(x-2)(x-3) < x+1, \qquad x^2 - 6x + 5 < 0,$$

$$(x-1)(x-5) < 0. \tag{17}$$

Множество всех решений неравенства (17) — интервал $(1, 5)$, а множество всех решений неравенства (15) — пересечение этого интервала и множества E (см. рис. 24.6).

Ответ. $1 < x < 2$, $3 < x < 5$.

Пример 10. Решить неравенство

$$\frac{\log_2 x \cdot \log_4(2x)}{\log_8(4x)} \leqslant \log_{16}(8x). \tag{18}$$

Решение. Допустимые значения x определяются условиями $x > 0$, $x \neq \frac{1}{4}$. Полагая $t = \log_2 x$ и переходя к логарифмам по основанию 2, запишем неравенство (18) в виде

$$\frac{t \cdot \frac{1}{2}(1+t)}{\frac{1}{3}(t+2)} \leqslant \frac{1}{4}(3+t). \tag{19}$$

Неравенство (19) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\frac{6t(t+1)-(t+2)(t+3)}{2(t+2)} \leqslant 0, \qquad \frac{5t^2+t-6}{t+2} \leqslant 0,$$

$$\frac{\left(t+\frac{6}{5}\right)(t-1)}{t+2} \leqslant 0. \tag{20}$$

Решив неравенство (20) методом интервалов, получим

$$t < -2, \qquad -\frac{6}{5} \leqslant t \leqslant 1.$$

Если $t < -2$, то $\log_2 x < -2$, откуда $0 < x < \frac{1}{4}$.

Если $t \in \left[-\frac{6}{5}, 1\right]$, то $-\frac{6}{5} \leqslant \log_2 x \leqslant 1$, откуда $2^{-\frac{6}{5}} \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ. $0 < x < \frac{1}{4}$, $2^{-\frac{6}{5}} \leqslant x \leqslant 2$.

Пример 11. Решить неравенство

$$\frac{\log_9 x + 4}{1 + \log_9 x} \leqslant 4\log_x 3 - 1. \tag{21}$$

Решение. Неравенство (21) имеет смысл, если $x > 0$, $x \neq \frac{1}{9}$, $x \neq 1$. Положим $t = \log_9 x$ и воспользуемся формулой $\log_x 3 = \frac{1}{2\log_9 x}$. Тогда неравенство (21) примет вид

$$\frac{t+4}{t+1} \leqslant \frac{2}{t} - 1. \tag{22}$$

Неравенство (22) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\frac{t(t+4)+(t-2)(t+1)}{t(t+1)} \leqslant 0, \qquad \frac{2t^2+3t-2}{t(t+1)} \leqslant 0,$$

$$\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+2)}{t(t+1)} \leqslant 0. \tag{23}$$

Решив неравенство (23) методом интервалов, получим $-2 \leqslant t < -1$, $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$. Таким образом, задача сводится к решению неравенств $-2 \leqslant \log_9 x < -1$ и $0 < \log_9 x \leqslant \frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{81} \leqslant x < \frac{1}{9}$, $1 < x \leqslant 3$.

Пример 12. Решить неравенство

$$\log_x[\log_2(4^x - 6)] \leqslant 1. \tag{24}$$

Решение. Область определения неравенства (24) — это множество E чисел, удовлетворяющих условиям

$$x > 0, \qquad x \neq 1, \qquad 4^x - 6 > 0. \tag{25}$$

На множестве E неравенство (24) равносильно неравенству

$$\frac{\log_2[\log_2(4^x - 6)]}{\log_2 x} \leqslant 1. \tag{26}$$

Так как $4^x > 6$ в силу условий (25), то $x > 1$, $\log_2 x > 0$ и поэтому неравенство (26) равносильно каждому из неравенств

$$\log_2[\log_2(4^x - 6)] - \log_2(\log_2 2^x) \leqslant 0,$$

$$0 < \frac{\log_2(4^x - 6)}{\log_2 2^x} \leqslant 1. \tag{27}$$

Неравенство (27) равносильно каждой из следующих систем неравенств:

$$\begin{cases} \log_2(4^x - 6) > 0, \\ \log_2(4^x - 6) - \log_2 2^x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^x - 6 > 1, & (28) \\ 2^x - 6 \cdot 2^{-x} \leqslant 1. & (29) \end{cases}$$

Множество решений неравенства (28) — интервал $x > \log_4 7$. Неравенство (29) равносильно каждому из неравенств

$$2^{2x} - 2^x - 6 \leqslant 0, \qquad (2^x - 3)(2^x + 2) \leqslant 0, \qquad 2^x \leqslant 3,$$

откуда $x \leqslant \log_2 3$.

Ответ. $\log_4 7 < x \leqslant \log_2 3$.

Пример 13. Решить неравенство

$$\log_{1/2} \log_3 \frac{x-4}{x-6} > 0. \tag{30}$$

Решение. Функция $\log_{1/2} t$ определена при $t > 0$ и убывает, а неравенство $\log_{1/2} t > 0$ является верным тогда и только тогда, когда $0 < t < 1$ (см. рис. 24.2).

Следовательно, неравенство (30) равносильно неравенству

$$0 < \log_3 \frac{x-4}{x-6} < 1. \tag{31}$$

Функция $\log_3 z$ является возрастающей (см. рис. 24.1), а ее значения принадлежат интервалу $(0, 1)$ в том и только в том случае, когда $1 < z < 3$.

Поэтому неравенство (31) равносильно неравенству

$$1 < \frac{x-4}{x-6} < 3. \tag{32}$$

Двойное неравенство (32) можно записать в виде следующей системы рациональных неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x-6-x+4}{x-6} < 0, \\ \dfrac{3(x-6)-(x-4)}{x-6} > 0, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} x > 6, \\ \dfrac{x-7}{x-6} > 0, \end{cases} \tag{33}$$

откуда находим, что $x > 7$.

Ответ. $x > 7$.

Замечание. При решении неравенства (30) многие абитуриенты допустили ошибку: вместо неравенства (31) записывали неравенство

$$\log_3 \frac{x-4}{x-6} < 1, \tag{34}$$

затем получали неравенство (33) и, решив его с учетом ОДЗ неравенства (34), приходили к выводу, что множество решений неравенства (30) — объединение промежутков $(-\infty, 4)$ и $(7, +\infty)$.

Пример 14. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_4(21 - 5 \cdot 4^{2-x^2})} > x. \tag{35}$$

Решение. Область допустимых значений неравенства (35) найдем из неравенства

$$\log_4(21 - 5 \cdot 4^{2-x^2}) \geqslant 0,$$

равносильного каждому из следующих неравенств:

$$21 - 5 \cdot 4^{2-x^2} \geqslant 1, \qquad 4^{2-x^2} \leqslant 4, \qquad 2 - x^2 \leqslant 1, \qquad |x| \geqslant 1.$$

Рассмотрим два случая: $x \leqslant -1$, $x \geqslant 1$.

1) Если $x \leqslant -1$, то левая часть неравенства (35) определена и принимает неотрицательные значения, а правая часть отрицательна. Поэтому значения $x \in (-\infty, -1]$ являются решениями неравенства (35).

2) Если $x \geqslant 1$, то неравенство (35) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\log_4(21 - 5 \cdot 4^{2-x^2}) \geqslant x^2,$$

$$21 - 5 \cdot 4^{2-x^2} \geqslant 4^{x^2}. \tag{36}$$

Пусть $t = 4^{x^2}$, тогда неравенство (36) примет вид

$$21 - \frac{80}{t} > t \quad \text{или} \quad (t-16)(t-5) < 0,$$

откуда $5 < t < 16$. Решив неравенство $5 < 4^{x^2} < 16$ на множестве $x \geqslant 1$, получим

$$\sqrt{\log_4 5} < x < \sqrt{2}.$$

Ответ. $x \leqslant -1$, $\sqrt{\log_4 5} < x < \sqrt{2}$.

Пример 15. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} \log_5 \left(\frac{10}{3} - 5^{-x}\right) > 1. \tag{37}$$

Решение. 1) Пусть $x > 0$, тогда неравенство (37) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\log_5 \left(\frac{10}{3} - 5^{-x}\right) > x, \qquad \log_5 \left(\frac{10}{3} - 5^{-x}\right) > \log_5 5^x,$$

$$\frac{10}{3} - 5^{-x} > 5^x, \qquad 3 \cdot 5^{2x} - 10 \cdot 5^x + 3 < 0,$$

$$(3 \cdot 5^x - 1)(5^x - 3) < 0, \qquad \frac{1}{3} < 5^x < 3,$$

откуда, учитывая условие $x > 0$, получаем $0 < x < \log_5 3$.

2) Аналогично, при $x < 0$ неравенство (37) равносильно каждому из неравенств

$$\log_5 \left(\frac{10}{3} - 5^{-x}\right) < \log_5 5^x,$$

$$\log_5 \frac{10 - 3 \cdot 5^{-x}}{3 \cdot 5^x} < 0,$$

$$0 < 10 - 3 \cdot 5^{-x} < 3 \cdot 5^x. \tag{38}$$

Неравенство (38) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5^x > \dfrac{3}{10}, \\ \left(5^x - \dfrac{1}{3}\right)(5^x - 3) > 0. \end{cases}$$

Решив эту систему с учетом условия $x < 0$, получим $\frac{3}{10} < 5^x < \frac{1}{3}$, откуда

$$\log_5 \frac{3}{10} < x < \log_5 \frac{1}{3}.$$

Ответ. $\log_5 \frac{3}{10} < x < \log_5 \frac{1}{3}$, $0 < x < \log_5 3$.

Пример 16. Решить неравенство

$$x \cdot 3^{\log_{1/9}(16x^4 - 8x^2 + 1)} < \frac{1}{3}. \tag{39}$$

Решение. Так как $16x^4 - 8x^2 + 1 = (4x^2 - 1)^2$, то допустимые значения x определяются условием

$$|x| \neq \frac{1}{2}. \tag{40}$$

Воспользуемся равенством $\log_{1/9} a = \log_3 a^{-\frac{1}{2}}$, тогда неравенство (39) можно заменить (при условии (40)) каждым из следующих неравенств:

$$\frac{x}{\sqrt{(4x^2 - 1)^2}} < \frac{1}{3}, \qquad \frac{x}{|4x^2 - 1|} < \frac{1}{3},$$

$$|4x^2 - 1| > 3x. \tag{41}$$

Левая часть неравенства (41) неотрицательна, поэтому все значения x такие, что $x \leqslant 0$, $x \neq -\frac{1}{2}$, являются решениями неравенства (39).

Пусть $x > 0$. Рассмотрим два случая: $x > \frac{1}{2}$ и $0 < x < \frac{1}{2}$.

Если $x > \frac{1}{2}$, то $4x^2 - 1 > 0$, и неравенство (41) равносильно каждому из неравенств

$$4x^2 - 1 > 3x, \qquad (x - 1)(4x + 1) > 0,$$

откуда, учитывая, что $x > \frac{1}{2}$, получаем $x > 1$.

Если $0 < x < \frac{1}{2}$, то $4x^2 - 1 < 0$ и неравенство (41) равносильно каждому из неравенств

$$1 - 4x^2 > 3x, \qquad (x + 1)(4x - 1) < 0,$$

откуда $0 < x < \frac{1}{4}$.

Ответ. $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{4}$, $x > 1$.

2. Логарифмические неравенства с переменными основаниями

Справочные сведения

Решение логарифмических неравенств с переменными основаниями основано на свойствах логарифмической функции (§ 24, п. 1).

Рассмотрим неравенство

$$\log_a b > 0. \tag{1}$$

Если верно неравенство (1), то либо (рис. 24.1)

$$a > 1, \quad b > 1, \tag{2}$$

либо (рис. 24.2)

$$0 < a < 1, \quad 0 < b < 1. \tag{3}$$

Обратно, из (2) и (3) следует (1), т. е. неравенство (1) равносильно совокупности неравенств (2) и (3).

Отсюда следует, что неравенство

$$\log_{f(x)} g(x) > 0 \tag{4}$$

равносильно совокупности двух систем неравентсв

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > 1; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < g(x) < 1. \end{cases} \tag{6}$$

Примеры с решениями

Пример 1. Решить неравенство

$$\log_{x^2-3}(4x+7) > 0. \tag{7}$$

Решение. Неравенство (7) — это неравенство вида (4), в котором $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = 4x + 7$. Поэтому неравенство (7) равносильно совокупности систем вида (5) и (6), которые запишутся так:

$$\begin{cases} x^2 - 3 > 1, \\ 4x + 7 > 1; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} 0 < x^2 - 3 < 1, \\ 0 < 4x + 7 < 1. \end{cases} \tag{9}$$

Система (8) равносильна системе

$$\begin{cases} |x| > 2, \\ x > -\dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

откуда находим $x > 2$.

Система (9) равносильна системе

$$\begin{cases} \sqrt{3} < |x| < 2, \\ -\dfrac{7}{4} < x < -\dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

откуда следует, что $-\dfrac{7}{4} < x < -\sqrt{3}$, так как $\dfrac{7}{4} > \sqrt{3}$.

Ответ. $-\dfrac{7}{4} < x < -\sqrt{3}$, $x > 2$.

Заметим, что из (2) следует, что $a - 1 > 0$, $b - 1 > 0$ и поэтому

$$(a-1)(b-1) > 0. \tag{10}$$

Аналогично, из (3) следует (10). Обратно, если $a > 0$, $b > 0$ и выполняется условие (10), то либо справедливы неравенства (2), либо являются верными неравенства (3). Таким образом, неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$a > 0, \quad b > 0, \quad (a-1)(b-1) > 0.$$

Отсюда следует, что неравенство (4) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (f(x)-1)(g(x)-1) > 0. \end{cases} \tag{11}$$

Пример 2.

Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}-\frac{3x}{5}}(1-x^2) > 0. \tag{12}$$

Решение. Система (11) для неравенства (12) равносильна каждой из следующих систем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} - \dfrac{3x}{5} > 0, \\ 1 - x^2 > 0, \\ \left(-\dfrac{3x}{5} - \dfrac{3}{4}\right)(-x^2) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \dfrac{5}{12}, \\ -1 < x < 1, \\ \left(x + \dfrac{5}{4}\right)x^2 > 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $-1 < x < \dfrac{5}{12}$, $x \neq 0$.

Ответ. $-1 < x < 0$, $0 < x < \dfrac{5}{12}$.

Замечание. Метод сведения неравенства (4) к равносильной ему системе (11), использованный в примере 2, часто оказывается более эффективным, чем метод замены этого неравенства на равносильную ему совокупность неравенств (5), (6) (см. пример 1).

Обращаясь к неравенству

$$\log_{f(x)} g(x) < 0, \tag{13}$$

отметим, что неравенство $\log_a b < 0$ является верным при $0 < a < 1$ и $b > 1$ (см. рис. 24.2), а также при $a > 1$ и $0 < b < 1$ (см. рис. 24.1). Отсюда следует, что неравенство (13) равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > 1; \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < g(x) < 1. \end{cases} \tag{15}$$

Как и для неравенства (4), совокупность систем (14) и (15) можно заменить следующей системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (f(x) - 1)(g(x) - 1) < 0, \end{cases} \tag{16}$$

которая равносильна неравенству (13).

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x-1}{5x-6}} (\sqrt{6} - 2x) < 0. \tag{17}$$

Решение. Для неравенства (17) равносильная ему система (16) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{5x-6} > 0, \\ \sqrt{6} - 2x > 0, \\ \left(\dfrac{x-1}{5x-6} - 1\right)(\sqrt{6} - 2x - 1) < 0. \end{cases} \tag{18}$$

Система (18) равносильна следующей

$$\begin{cases} (x-1)\left(x - \dfrac{6}{5}\right) > 0, \\ x < \dfrac{\sqrt{6}}{2}, \\ \left(x - \dfrac{\sqrt{6}-1}{2}\right)\left(x - \dfrac{6}{5}\right)\left(x - \dfrac{5}{4}\right) < 0. \end{cases} \tag{19}$$

Так как $\dfrac{\sqrt{6}-1}{2} < 1 < \dfrac{6}{5} < \dfrac{\sqrt{6}}{2} < \dfrac{5}{4}$, то множество решений системы (19) состоит из двух промежутков: $x < \dfrac{\sqrt{6}-1}{2}$, $\dfrac{6}{5} < x < \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Ответ. $x < \dfrac{\sqrt{6}-1}{2}$, $\dfrac{6}{5} < x < \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Рассмотрим неравенство

$$\log_{f(x)} g(x) < \log_{f(x)} g_1(x). \tag{20}$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\log_{f(x)} \frac{g(x)}{g_1(x)} < 0$$

при условии, что $g(x) > 0$, $g_1(x) > 0$ (если $g(x) \leqslant 0$ или $g_1(x) \leqslant 0$, то неравенство (20) теряет смысл).

Для получения системы неравенств, равносильной неравенству (20), нужно в системе (16) добавить условие $g_1(x) > 0$ и заменить $g(x)$ на $\frac{g(x)}{g_1(x)}$.

В результате имеем систему неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g_1(x) > 0, \\ (f(x) - 1)(g(x) - g_1(x)) < 0, \end{cases} \tag{21}$$

равносильную неравенству (20).

Замечание. Нестрогое неравенство

$$\log_{f(x)} g(x) \leqslant \log_{f(x)} g_1(x)$$

равносильно системе неравенств, которая получается из системы (21) заменой последнего ее неравенства на неравенство

$$(f(x) - 1)(g(x) - g_1(x)) \leqslant 0$$

с добавлением условия $f(x) \neq 1$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_{3-x} \frac{4-x}{5-x} \leqslant 1. \tag{22}$$

Решение. Неравенство (22) равносильно неравенству:

$$\log_{3-x} \frac{4-x}{5-x} \leqslant \log_{3-x}(3-x).$$

Для этого неравенства равносильная ему система неравенств (21), с учетом замечания 2, имеет вид

$$\begin{cases} 3 - x > 0, \\ 4 - x > 0, \\ 5 - x > 0, \\ (2 - x)\left(\dfrac{4 - x}{5 - x} - (3 - x)\right) \leqslant 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} x < 3, \\ (x - 2)(x - 5)(x^2 - 7x + 11) \geqslant 0, \\ x \neq 2, \quad x \neq 5. \end{cases} \qquad (23)$$

Так как уравнение $x^2 - 7x + 11 = 0$ имеет корни $x_1 = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{7 + \sqrt{5}}{2}$ и выполняются неравенства $2 < x_1 < 3 < x_2 < 5$, то множество решений системы (23) — совокупность двух промежутков $x < 2$ и $x_1 \leqslant x < 3$.

Ответ. $x < 2$, $\frac{7 - \sqrt{5}}{2} \leqslant x < 3$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_{x^2} |5x + 2| < \frac{1}{2}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{x^2} |5x + 2| < \log_{x^2} |x|,$$

которое равносильно совокупности следующих двух систем неравенств:

$$\begin{cases} |x| > 1, \\ |5x + 2| < |x|; \end{cases} \qquad (24)$$

$$\begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ |5x + 2| > |x|. \end{cases} \qquad (25)$$

Чтобы решить системы неравенств (24) и (25), построим графики функций $y = |x|$ и $y = |5x + 2|$ (рис. 24.7).

Эти графики пересекаются в точках A и B, абсциссы x_1 и x_2 которых являются корнями соответственно уравнений $5x + 2 = -x$ и $-5x - 2 = -x$, откуда находим $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

1) Если $|x| > 1$, то график функции $y = |5x + 2|$ лежит выше графика функции $y = |x|$. Поэтому система (24) не имеет решений.

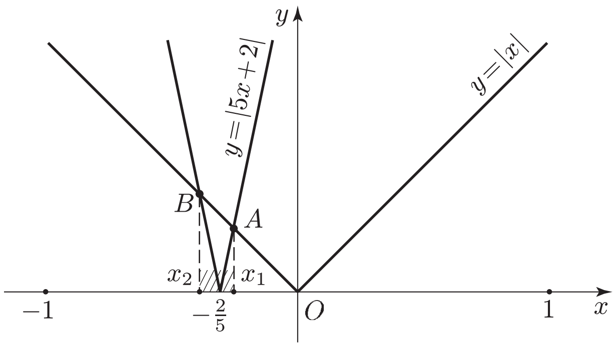

Рис. 24.7

2) Если $0 < |x| < 1$, то график функции $y = |5x+2|$ лежит выше графика функции $y = |x|$ на интервалах $\Delta_1 = (-1, x_2)$, $\Delta_2 = (x_1, 0)$ и $\Delta_3 = (0, 1)$. Поэтому множество решений системы (25) — объединение интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Ответ. $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} < x < 0$, $0 < x < 1$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{2|x|+1}(7x+4) - \log_{7x+4}(2|x|+1) > 0. \qquad (26)$$

Решение. Полагая $t = \log_{2|x|+1}(7x+4)$ и используя формулу $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, запишем неравенство (26) в виде

$$t - \frac{1}{t} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{(t-1)(t+1)}{t} > 0,$$

откуда следует, что либо $t > 1$, либо $-1 < t < 0$.

1) Пусть $t > 1$, т. е.

$$\log_{2|x|+1}(7x+4) > 1. \qquad (27)$$

При $x = 0$ неравенства (26) и (27) теряют смысл, а при $x \neq 0$ неравенство (27) равносильно неравенству

$$7x + 4 > 2|x| + 1. \qquad (28)$$

Если $x > 0$, то неравенство (28) принимает вид $7x+4 > 2x+1$, откуда следует, что $x > -\frac{3}{5}$. Таким образом, все положительные значения x являются решениями неравенства (28) и исходного неравенства (26).

Если $x < 0$, то из (28) получаем $7x + 4 > -2x + 1$, откуда $x > -\frac{1}{3}$. Значит, решениями неравенства (28), а также неравенства (26) являются все значения x из интервала $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

2) Пусть $-1 < t < 0$, т. е.

$$-1 < \log_{2|x|+1}(7x+4) < 0. \tag{29}$$

Неравенство (29) равносильно неравенству

$$\frac{1}{2|x|+1} < 7x+4 < 1. \tag{30}$$

Если $x > 0$, то неравенство (30) примет вид

$$\frac{1}{2x+1} < 7x+4 < 1. \tag{31}$$

Неравенство (31) не имеет решений, так как $7x+4 > 4$ при $x > 0$.

Если $x < 0$, то неравенство (30) записывается в виде

$$\frac{1}{1-2x} < 7x+4 < 1. \tag{32}$$

Неравенство $7x+4 < 1$ равносильно неравенству

$$x < -\frac{3}{7}, \tag{33}$$

а неравенство $\dfrac{1}{1-2x} < 7x+4$ равносильно каждому из неравенств

$$\frac{(2x-1)(7x+4)+1}{1-2x} < 0, \qquad \frac{14x^2+x-3}{2x-1} > 0,$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{7}\right)}{x-\frac{1}{2}} > 0. \tag{34}$$

Решив неравенство (34) при условии (33), получим $-\dfrac{1}{2} < x < -\dfrac{3}{7}$.

Ответ. $-\dfrac{1}{2} < x < -\dfrac{3}{7}$, $-\dfrac{1}{3} < x < 0$, $x > 0$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\log_{|2x+2|}(1-9^x) < \log_{|2x+2|}(1+3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right). \tag{35}$$

Решение. Неравенство (35) равносильно неравенству

$$\log_{|2x+2|}(1-9^x) < \log_{|2x+2|}\left[(1+3^x)\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right)\right], \tag{36}$$

а неравенство (36) равносильно совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} 0 < |2x+2| < 1, \\ 1-9^x > (1+3^x)\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right); \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} |2x+2| > 1, \\ 0 < 1-9^x < (1+3^x)\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right). \end{cases} \tag{38}$$

1) Рассмотрим систему (37). Первое неравенство этой системы можно записать в виде $0 < |x+1| < \frac{1}{2}$, а множество решений этого неравенства — интервал $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ с выброшенной из него точкой $x = -1$.

Так как $1 + 3^x > 0$, то второе неравенство системы (37) равносильно каждому из неравенств

$$1 - 3^x > \frac{5}{9} + 3^{x-1}, \qquad \frac{4}{9} > 3^{x-1} \cdot 4, \qquad 3^{x+1} < 1,$$

откуда $x < -1$. Следовательно, множество решений системы (37) — интервал $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$.

2) Обратимся к системе (38). Первое неравенство этой системы равносильно неравенству $|x+1| > \frac{1}{2}$, которому удовлетворяют все точки, лежащие вне отрезка $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Второе неравенство системы (38) равносильно системе

$$\begin{cases} 9^x < 1, \\ 1 - 3^x < \frac{5}{9} + 3^{x-1}, \end{cases}$$

откуда следует, что $x < 0$ и $3^{x+1} > 1$.

Значит, второму неравенству системы (38) удовлетворяют значения x из интервала $(-1, 0)$, а системе (38) — точки из интервала $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Ответ. $-\frac{3}{2} < x < -1$; $-\frac{1}{2} < x < 0$.

Задачи

Решить неравенство (1–66):

1. $\log_2(x-1) > 1$.

2. $\log_{0,5}(2x-1) < -3$.

3. $\log_{1/3}(x^2-1) > 0$.

4. $\log_{1/2}(x+2) > \log_{1/2}(3x-1)$.

5. $\log_3(2x-3) < \log_3(x+1)$.

6. $\log_{1/5}(2x+3) > \log_{1/5}(x+1)$.

7. $\log_{1/3} x + \log_{1/3}(x-2) \geqslant -1$.

8. $\log_3(x^2+7x-5) > 1$.

9. $\log_{1/3}(x^2-5x+6) > 0$.

10. $\log_{0,1}(x^2+2) < \log_{0,1}(2x-5)$.

11. $\log^2_{1/2} x^2 > 1$.

12. $\log_{1/3} \log_2 x^2 > 0$.

13. $\log_3 \log_{1/2}(x^2-1) < 1$.

14. $\lg \frac{x+3}{x+4} > \lg \frac{x+5}{x+2}$.

15. $\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} < 1$.

16. $\log_2(x+1) < 1 - 2\log_4 x$.

17. $\log_2(6+2^x) > 4-x$.

18. $\log_3(26+3^{-x}) < x+3$.

19. $\log_2(3-4^x) < \log_2 11 - 2x - 4$.

20. $4x + \log_2 9 > \log_2(9\cdot 2^{2x+1} - 5)$.

21. $\log_3 x \geqslant 2 + \log_{1/3}(x+8)$.

22. $\dfrac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_x 2} \geqslant 2\log_2 x$.

23. $\log_3(1+x) > \log_3 x(1 - \log_x(1-x))$.

24. $\sqrt{\log_3(9x-3)} \leqslant \log_3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$.

25. $\sqrt{\log_3(9x+18)} \leqslant \log_3(x+2)$.

26. $\sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_x 2} \geqslant \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

27. $\log_3(x+3) - 1 > \dfrac{\log_x(x^2-3x+2)}{\log_x 3}$.

28. $\log_2(1-x) < (2 - \log_{2x}(1+2x))\log_2(2x)$.

29. $\log_2(x^2-4x+4) + 2x > 2 - (x+1)\log_{1/2}(2-x)$.

30. $\log_2(x^2-4) - 3\log_2\dfrac{x+2}{x-2} > 2$.

31. $\dfrac{3 - \log_2(x^2-6x+8)}{x-3} > 0$.

32. $(3 - 10x - 8x^2)\log_2\left(1 - \dfrac{7}{9(x^2+x+1)}\right) \leqslant 0$.

33. $(5 - 7x - 6x^2)\log_3\left(1 - \dfrac{5}{4(x^2+2x+2)}\right) \leqslant 0$.

34. $\log_{1/2}\log_3\dfrac{x-2}{x-4} > 0$.

35. $\log_2(x+2) < 1 - 3\log_8(x+1)$.

36. $\dfrac{\log_3(3^x-1)}{x-1} \geqslant 1$.

37. $\dfrac{x+1}{\log_2(1-2^x)-1} \leqslant 1$.

38. $\dfrac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x} \geqslant 1$.

39. $\dfrac{\log_{\sqrt{3}} x \cdot \log_{27}(9x)}{\log_3(3x)} \leqslant \log_9\dfrac{27}{x}$.

40. $2^{\log_4(25x^4-10x^2+1)} > 4x$.

41. $x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_4\left(x^2-4+\frac{4}{x^2}\right)} \leqslant 2$.

42. $\log_{x-2} 6 + \log_{x+2} 6 > \log_{x-2} 6 \cdot \log_{x+2} 6$.

43. $\log_{x^2+2}(3x+6) \leqslant 1$.

44. $\log_{\frac{1}{1+x^2}}(4x-2) > -1$.

45. $\log_{x+2} x^2 > 1$.

46. $\log_{x+3} 4 + \log_{x-3} 4 > 2\log_{x+3} 4 \cdot \log_{x-3} 4$.

47. $\dfrac{1}{x}\log_7\left(\dfrac{9}{2} - 2\cdot 7^{-x}\right) > 1$.

48. $\sqrt{\log_5(31 - 6\cdot 5^{2-x^2})} > x$.

49. $\log_{2-x}\dfrac{3-x}{4-x} \leqslant 1$.

50. $\log_{5x-4x^2}(4^x-2) < 0$.

51. $\log_{0,25+3x}(1-25x^2) > 0$.

52. $\log_{8x^2-0,5}(\log_{0,5} x) < 0$.

53. $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$.

54. $\log_x\dfrac{4x+5}{6-5x} < -1$.

55. $\log_{\frac{3x-1}{3x+1}}\left(x - \dfrac{1}{3}\right) \geqslant 1$.

56. $\log_{x+1}\dfrac{x^2+3x-4}{2x-4} \leqslant 1$.

57. $\log_{\frac{x^2-18x+91}{90}}\left(5x - \dfrac{3}{10}\right) \leqslant 0$.

58. $\log_{|x|}\dfrac{|x+3|-|x|}{2-x} > 1$.

59. $\log_{2x^2-x}(|x+2|-|x|) > \log_{2x^2-x}\sqrt{2-x^2}$.

60. $\log_{2|x|+1}(3x+2) - \log_{3x+2}(2|x|+1) > 0$.

61. $\log_{|x-2|}(9^x-4^x) < \log_{|x-2|}(3^x+2^x) + \log_{|x-2|}(3^{x-2}+2^x)$.

62. $\log_7\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x^2+|x|-30}{x+6} < 0$.

63. $2\log_{2x-10}(\sqrt{x+2} - \sqrt{8-x}) < 1$.

64. $\dfrac{1}{|\log_3 9x| - 3} \leqslant \dfrac{1}{|\log_9 x^2| - 1}$.

65. $\log_{\sqrt[3]{x-3}}\left(\dfrac{x-10}{x^2-6x+5}\right) + 3 \leqslant 0$.

66. $\log_{x+3}(6 + x - x^2) + \log_{\sqrt{6+x-x^2}}(x+3) \leqslant 3$.

Ответы

1. $x > 3$. **2.** $x > 4{,}5$. **3.** $-\sqrt{2} < x < -1,\ 1 < x < \sqrt{2}$. **4.** $x > \dfrac{3}{2}$.

5. $\dfrac{3}{2} < x < 4$. **6.** Решений нет. **7.** $2 < x \leqslant 3$. **8.** $x < -8,\ x > 1$.

9. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} < x < 2,\ 3 < x < \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$. **10.** $x > \dfrac{5}{2}$.

11. $x < -\sqrt{2},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 0,\ 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x > \sqrt{2}$.

12. $-\sqrt{2} < x < -1,\ 1 < x < \sqrt{2}$. **13.** $-\sqrt{2} < x < -\dfrac{3}{2\sqrt{2}},\ \dfrac{3}{2\sqrt{2}} < x < \sqrt{2}$.

14. $x < -5$. **15.** $0 < x < 1,\ x > 10$. **16.** $0 < x < 1$. **17.** $x > 1$.

18. $x > 0$. **19.** $x < -1,\ \log_4 \dfrac{11}{4} < x < \log_4 3$.

20. $\log_4 \dfrac{5}{81} < x < \log_4 \dfrac{1}{3},\ x > \log_4 \dfrac{5}{3}$. **21.** $x \geqslant 1$. **22.** $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2},\ 1 < x < 4$.

23. $0 < x < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **24.** $x \geqslant \dfrac{28}{3}$. **25.** $x \geqslant 7$. **26.** $1 < x \leqslant \sqrt[3]{2},\ x \geqslant 8$.

27. $\dfrac{1}{3} < x < 1,\ 2 < x < 3$. **28.** $\dfrac{1}{2} < x < 1$. **29.** $x < -2,\ 1 < x < 2$.

30. $x < -2,\ x > 6$. **31.** $x < 0,\ 4 < x < 6$. **32.** $-\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant -\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3} < x \leqslant \dfrac{1}{4}$.

33. $-\dfrac{5}{3} \leqslant x < -\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$. **34.** $x > 5$. **35.** $-1 < x < 0$.

36. $0 < x < \log_3 \dfrac{3}{2},\ x > 1$. **37.** $-\log_2 5 \leqslant x \leqslant 0$. **38.** $\log_2 \dfrac{2}{3} < x < 0,\ x \geqslant 1$.

39. $\dfrac{1}{3} < x \leqslant 3$. **40.** $x < -\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} < x < \dfrac{1}{5},\ x > 1$.

41. $x < -\sqrt{2},\ -\sqrt{2} < x < 0,\ 0 < x \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}},\ x \geqslant 2$. **42.** $2 < x < 3,\ x > \sqrt{10}$.

43. $-2 < x \leqslant -1,\ x \geqslant 4$. **44.** $\dfrac{1}{2} < x < 1,\ x > 3$. **45.** $x > 2$.

46. $3 < x < 4,\ x > 5$. **47.** $\log_7 \dfrac{4}{9} < x < \log_7 \dfrac{1}{2},\ 0 < x < \log_7 4$.

48. $x \leqslant -1,\ \sqrt{\log_5 6} < x < \sqrt{2}$. **49.** $x < 1,\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \leqslant x < 2$.

50. $\dfrac{1}{2} < x < \log_4 3,\ 1 < x < \dfrac{5}{4}$. **51.** $-\dfrac{1}{12} < x < 0,\ 0 < x < \dfrac{1}{5}$.

52. $\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{4},\ \dfrac{1}{2} < x < 1$. **53.** $0 < x < \dfrac{1}{2},\ 1 < x < 2,\ 3 < x < 6$.

54. $\dfrac{1}{2} < x < 1$. **55.** $\dfrac{1}{3} < x \leqslant \dfrac{2}{3}$.

56. $-1 < x < 0,\ 0 < x < 1,\ x \geqslant 5$. **57.** $\dfrac{13}{50} \leqslant x < 9 + 4\sqrt{2}$.

58. $-1 < x < 2 - \sqrt{7},\ 1 < x < 2$. **59.** $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{\sqrt{6}-4}{5},\ 1 < x < \sqrt{2}$.

60. $-\dfrac{1}{2} < x < -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{5} < x < 0,\ x > 0$. **61.** $0 < x < 1,\ 2 < x < 3$.

62. $1-\sqrt{37}<x<\frac{2-\sqrt{292}}{3}$, $\frac{16}{3}<x<6$. **63.** $5<x<\frac{11}{2}$, $6<x<7$.

64. $\frac{1}{243}<x<\frac{1}{3}$, $1\leqslant x<3$, $x>3$. **65.** $\frac{25}{7}\leqslant x<4$, $x>10$.

66. $-2<x<\frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant-\frac{3}{2}$, $-1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$, $\frac{1+\sqrt{21}}{2}<x<3$.

§ 25. Тригонометрические неравенства

Рассмотрим примеры тригонометрических неравенств. При решении таких неравенств используются свойства тригонометрических функций и их графики.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить неравенство

$$\cos x\leqslant\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Решение. Первый способ. Построим график функции $y=\cos x$ и проведем прямую $y=\frac{1}{2}$ (рис. 25.1).

Решить неравенство (1) — значит найти все значения x, при которых соответствующие точки графика функции $y=\cos x$ лежат ниже прямой $y=\frac{1}{2}$ и на этой прямой.

Так как функция $y=\cos x$ является периодической с периодом 2π, то достаточно найти решения неравенства (1) на отрезке длиной 2π. В качестве такого отрезка возьмем отрезок $[0,2\pi]$.

Прямая $y=\frac{1}{2}$ при $x\in[0,2\pi]$ пересекает график функции $y=\cos x$ в точках A и B (рис. 25.1), абсциссы которых служат

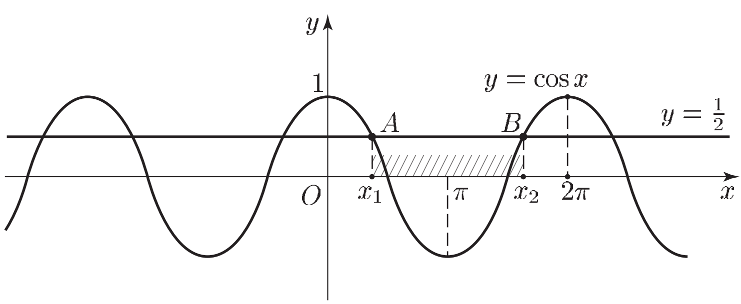

Рис. 25.1

корнями уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Одним из корней этого уравнения является $x_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, другим — значение $x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{5\pi}{3}$.

Следовательно, значения x из отрезка $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, и только эти значения, являются решениями неравенства (1) на отрезке $[0, 2\pi]$, а множество всех решений неравенства (1) — это объединение всех отрезков, каждый из которых получается из отрезка $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ сдвигом по оси Ox на $2k\pi$, где $k \in \mathbf{Z}$, т. е. совокупность отрезков вида

$$\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right], \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Ответ. $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Второй способ. Решим неравенство (1) с помощью единичной окружности. Построим угол, косинус которого равен $\frac{1}{2}$. Для этого отметим на оси Ox точку с абсциссой, равной $\frac{1}{2}$, и проведем через эту точку прямую l, параллельную оси Oy (рис. 25.2).

Прямая l пересекает единичную окружность в точках M_1 и M_2. Точке M_1 соответствует угол в $\frac{\pi}{3}$ радиан, а точке M_2 — угол в $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ радиан.

Из рис. 25.2 видно, что абсциссу, меньшую или равную $\frac{1}{2}$, имеют все точки единичной окружности, расположенные слева от прямой l и на самой прямой. Итак, множество всех решений неравенства (1) представляет собой совокупность отрезков вида (2).

Пример 2. Решить неравенство

$$\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{3}$$

Решение. Построим график функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и проведем прямую $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 25.3).

Эта прямая пересекает график функции $y = \cos x$, $x \in [-\pi, \pi]$ в точках A и B, абсциссы x_1 и x_2 которых равны $-\frac{-5\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$ соответственно. Из рис. 25.3 видно, что решения неравенства (3) на отрезке $[-\pi, \pi]$ образуют интервал $\Delta = \left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, а множество всех решений неравенства (3) — это совокупность интервалов, каждый

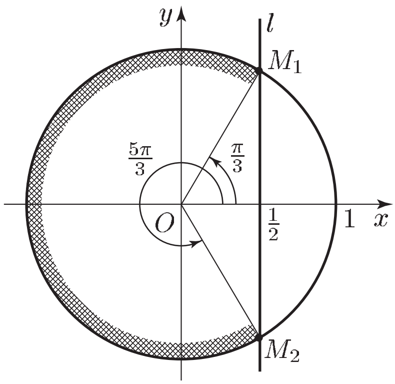

Рис. 25.2

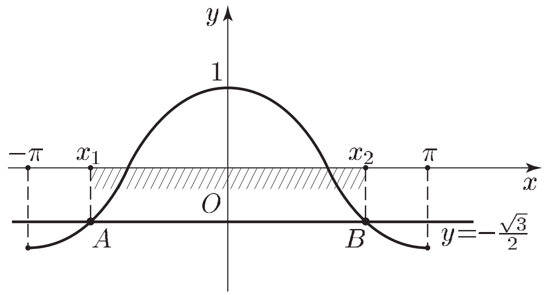

Рис. 25.3

из которых можно получить сдвигом интервала Δ по оси Ox на $2k\pi$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $-\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{4}$$

Решение. Первый способ. Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (рис. 25.4). Функция $y = \sin x$ является периодической с периодом 2π. Поэтому достаточно найти решения неравенства (4) на отрезке длиной 2π. В качестве такого отрезка выберем отрезок $\Delta = \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right]$. На этом отрезке прямая $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ пересекает график функции $y = \sin x$ в точках A и B, абсциссы x_1 и x_2 которых равны $\dfrac{3\pi}{4}$ и $\dfrac{9\pi}{4}$ соответственно. Из рис. 25.4 видно, что решениями неравенства (4) на отрезке Δ являются все числа интервала

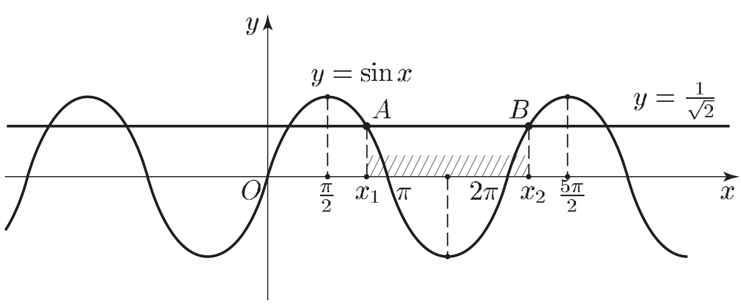

Рис. 25.4

$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right)$. Поэтому множество всех решений неравенства (4) — это объединение интервалов вида

$$\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{9\pi}{4} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{5}$$

Ответ. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{9\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$

Второй способ. Построим единичную окружность и проведем через точку оси Oy с ординатой $\frac{1}{\sqrt{2}}$ прямую l, параллельную оси Ox (см. рис. 25.5).

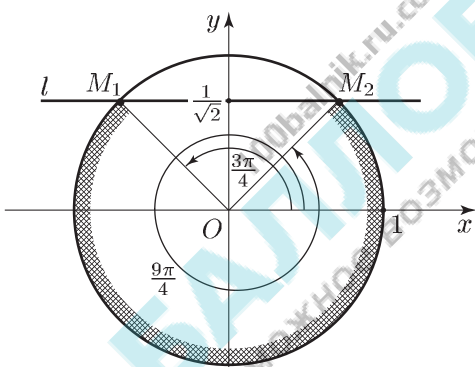

Рис. 25.5

Прямая l пересекает единичную окружность в точках M_1 и M_2. Точке M_1 соответствует угол в $\frac{3\pi}{4}$ радиан, а точке M_2 — угол в $2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ радиан. Из рис. 25.5 видно, что все точки единичной окружности, расположенные ниже прямой l, имеют ординату, меньшую $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Итак, множество всех решений неравенства (4) представляет собой совокупность интервалов вида (5).

Пример 4. Решить неравенство

$$\sin^2 x > \frac{1}{4}. \tag{6}$$

Решение. Неравенство (6) равносильно неравенству

$$|\sin x| > \frac{1}{2}. \tag{7}$$

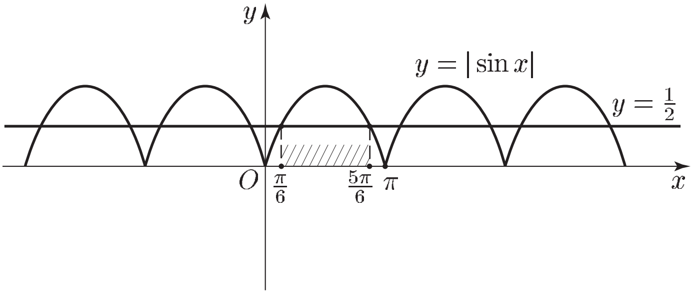

Рис. 25.6

Построим график функции $y = |\sin x|$ и проведем прямую $y = \dfrac{1}{2}$ (рис. 25.6). Функция $y = |\sin x|$ является периодической с периодом π, а на отрезке $[0, \pi]$ уравнение $|\sin x| = \dfrac{1}{2}$ имеет корни $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ и $x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$. Из рис. 25.6 видно, что решениями неравенства (7) на отрезке $[0, \pi]$ являются все числа из интервала $\Delta = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$. Множество решений неравенства (7) — это объединение интервалов, каждый из которых можно получить сдвигом интервала Δ по оси Ox на $k\pi$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{6} + k\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad (8)$$

Решение. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической с периодом π. Построим график функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\Delta = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и проведем прямую $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (см. рис. 25.7). Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале Δ, а прямая $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ пересекает график этой функции в точке с абсциссой $\dfrac{\pi}{6}$.

Поэтому решениями неравенства (8) на интервале Δ являются все числа x из интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right)$, а множество всех решений неравенства (8) представляет собой совокупность интервалов вида

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{6} + \pi k\right), \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ. $-\dfrac{\pi}{2} + \pi k < x < \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

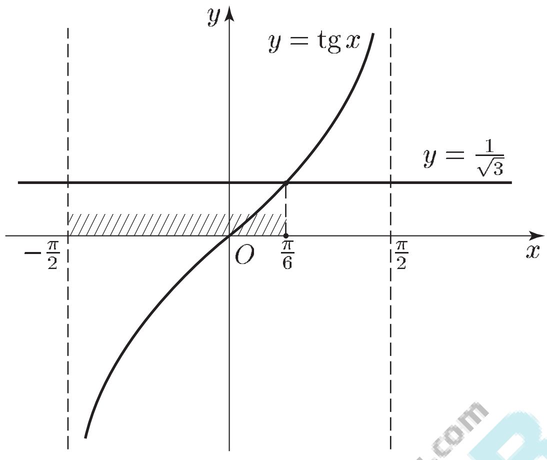

Рис. 25.7

Пример 6. Решить неравенство

$$4\cos^2 x - 8\cos x + 3 < 0. \qquad (9)$$

Решение. Полагая $\cos x = t$, получаем квадратное неравенство $4t^2 - 8t + 3 < 0$, равносильное неравенству $\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{3}{2}\right) < 0$. Поэтому неравенство (9) равносильно каждому из неравенств

$$\left(\cos x - \frac{3}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) < 0,$$

$$\left(\frac{3}{2} - \cos x\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) > 0,$$

$$\cos x > \frac{1}{2}. \qquad (10)$$

На отрезке $[-\pi, \pi]$ уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ имеет корни $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$ (см. рис. 25.1), а решениями неравенства (10) на этом отрезке являются все числа из интервала $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. Множество решений неравенства (10) и равносильного ему неравенства (9) представляет собой объединение интервалов вида

$$\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Пример 7. Решить неравенство

$$3\sin^2 x + \sin x\cos x > 2. \qquad (11)$$

Решение. Первый способ. Используя тождество $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, заменим неравенство (11) равносильным ему:

$$\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x > 0. \tag{12}$$

Как и при решении однородных тригонометрических уравнений, сведем неравенство (12) к квадратному относительно $t = \operatorname{tg} x$.

Рассмотрим два возможных случая: $\cos x = 0$, $\cos x \neq 0$.

1) Пусть $\cos x = 0$, тогда $\sin^2 x = 1$ и неравенство (12) примет вид $1 > 0$. Следовательно, все значения x, удовлетворяющие уравнению $\cos x = 0$, т. е. числа

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}, \tag{13}$$

являются решениями неравенства (12).

2) Пусть $\cos x \neq 0$, тогда $\cos^2 x > 0$ и неравенство (12) равносильно каждому из неравенств

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 > 0,$$
$$(\operatorname{tg} x + 2)(\operatorname{tg} x - 1) > 0, \tag{14}$$

а неравенство (14) равносильно совокупности неравенств

$$\operatorname{tg} x < -2, \tag{15}$$
$$\operatorname{tg} x > 1. \tag{16}$$

На интервале $(0, \pi)$ решения неравенства (15) — это все числа из интервала $\Delta_1 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \operatorname{arctg} 2\right)$, а решения неравенства (16) — все числа из интервала $\Delta_2 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, на интервале $(0, \pi)$ решениями неравенства (12), равносильного (11), являются все числа из интервалов Δ_1 и Δ_2, а также число $\frac{\pi}{2}$, т. е. все числа, принадлежащие интервалу $\left(\frac{\pi}{4}, \pi - \operatorname{arctg} 2\right)$.

Так как функция $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x$ периодическая с периодом π, то множество всех решений неравенства (12) представляет собой совокупность интервалов вида $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \pi - \operatorname{arctg} 2 + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ.

$$\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \pi - \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{17}$$

Второй способ. Неравенство (11) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\frac{3}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}\sin 2x > 2,$$
$$\sin 2x - 3\cos 2x > 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x > \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\sin(2x-\varphi) > \frac{1}{\sqrt{10}},$$

где $\varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. Отсюда находим

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi k < 2x-\varphi < \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi k,$$

$$\frac{1}{2}\left(\varphi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\varphi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \pi k,$$

$$k \in \mathbf{Z}. \qquad (18)$$

Заметим, что

$$\varphi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = 2\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\varphi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \pi + \varphi - \frac{3\pi}{4},$$

где $\operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3+1}{1-3} = -2$. Поэтому двойное неравенство (18) можно записать в виде (17).

Пример 8. Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5+\cos 4x}{8}} > -\sin x.$$

Решение. Найдем решения неравенства на отрезке длиной 2π. Все значения x из интервала $(0,\pi)$ — решения неравенства, так как $\sin x > 0$ при $0 < x < \pi$, а левая часть неравенства определена и неотрицательна при всех x.

Пусть $\sin \leqslant 0$, тогда исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\frac{5+3\cos 4x}{8} > \sin^4 x, \qquad 5+3\cos 4x > 2(1-2\cos 2x+\cos^2 2x),$$

$$\cos 2x(1+\cos 2x) > 0, \qquad \cos 2x > 0, \qquad \sin^2 x < \frac{1}{2}, \qquad |\sin x| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Так как $\sin x \leqslant 0$, то $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin x \leqslant 0$, откуда $-\frac{\pi}{4} < x \leqslant 0$, $\pi \leqslant x < \frac{5\pi}{4}$.

Итак, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ решениями исходного неравенства являются все числа из интервала $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Ответ. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 9. Доказать, что если A, B, C — углы треугольника, то

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}. \tag{19}$$

Решение. Обозначим левую часть неравенства (19) через y и выразим произведение синусов через разность косинусов. Тогда получим

$$y = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{A+B}{2},$$

так как $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}$. Полагая $\cos\frac{A+B}{2} = x$ и применяя метод выделения полного квадрата, имеем

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \cdot \cos\frac{A-B}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right) + \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} =$$

$$= \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2,$$

откуда следует, что

$$y \leqslant \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Неравенство (19) доказано.

Пример 10. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{4}$, то верно неравенство

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8. \tag{20}$$

Решение. Так как $\cos x > 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{4}$, то, разделив числитель и знаменатель левой части неравенства (20) на $\cos^3 x$, получим равносильное ему неравенство

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x(1 - \operatorname{tg} x)} > 8. \tag{21}$$

Обозначим левую часть неравенства (21) через y и воспользуемся формулой $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Тогда задача сведется к доказательству неравенства

$$y > 8, \qquad \text{где} \quad y = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x(1 - \operatorname{tg} x)}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}.$$

Полагая $\operatorname{tg} x = t$, получаем $y = \dfrac{1+t^2}{t^2(1-t)}$, где $0 < t < 1$. Заметим, что

$$\frac{1+t^2}{t} > 2 \qquad \text{при} \quad 0 < t < 1,$$

$$t(1-t) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \leqslant \frac{1}{4},$$

и поэтому

$$y = \frac{1+t^2}{t} \cdot \frac{1}{t(1-t)} > 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = 8,$$

т. е. $y > 8$, что и требовалось доказать.

Задачи

Решить неравенство (1–16):

1. $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\cos x \geqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **3.** $\sin x < \dfrac{1}{2}$. **4.** $\sin 2x > \dfrac{1}{2}$.

5. $\cos 3x \leqslant \dfrac{1}{2}$. **6.** $\operatorname{tg} x > 1$. **7.** $\cos^2 x > \dfrac{3}{4}$. **8.** $\sin^2 x < \dfrac{1}{2}$.

9. $2\sin^2 x - \sin x - 3 < 0$. **10.** $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 \leqslant 0$.

11. $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 > 0$. **12.** $\sin x > \cos^2 x$.

13. $2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 > 0$. **14.** $\dfrac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$.

15. $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} > \dfrac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$. **16.** $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \dfrac{5}{8}$.

17. Найти все решения неравенства $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$ на интервале $(0, 2\pi)$.

18. Найти все решения неравенства $\sin x \sin 2x < \sin 3x \sin 4x$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

19. Решить неравенство $\sqrt[4]{\dfrac{7 - \cos 4x}{2}} > -2\cos x$.

20. Доказать, что при всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}.$$

21. Доказать, что при всех допустимых значениях x справедливо неравенство $(1 - \operatorname{tg}^2 x)(1 - 3\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x) > 0$.

Ответы

1. $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **2.** $-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

3. $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \dfrac{13\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **4.** $\dfrac{\pi}{12} + \pi k < x < \dfrac{5\pi}{12} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

5. $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbf{Z}$. **6.** $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

7. $-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **8.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

9. При всех $x \in \mathbf{R}$, кроме $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

10. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **11.** $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

12. $\varphi + 2k\pi < x < \pi - \varphi + 2k\pi,\ \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.

13. $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

14. $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

15. $2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k,\ -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

16. $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}$. **17.** $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$.

18. $0 < x < \frac{\pi}{5},\ \frac{2\pi}{5} < x < \frac{\pi}{2}$. **19.** $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Глава 8

Системы неравенств с двумя переменными

§ 26. Неравенства и системы линейных неравенств с двумя переменными

1. Прямая на плоскости

Справочные сведения

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Тогда уравнение

$$y = kx + b \tag{1}$$

определяет прямую l (рис. 26.1), пересекающую ось Oy в точке $D(0; b)$ и образующую угол α с положительным направлением оси Ox, где $\operatorname{tg}\alpha = k$. Число k называют *угловым коэффициентом* прямой l.

Если $k = 0$, то прямая l параллельна оси Ox; если $k > 0$, то прямая l образует с осью Ox острый угол, а функция $y = kx + b$ является возрастающей; если $k < 0$, то прямая l образует с осью Ox тупой угол, а функция $y = kx + b$ является убывающей.

Для построения прямой l, заданной уравнением (1), достаточно найти две точки этой прямой. В качестве таких точек можно взять точки пересечения прямой l с осями координат.

На рис. 26.2 изображены прямые, заданные уравнениями $y = x - 1$, $y = -2x + 2$.

Рассмотрим уравнение

$$Ax + By + C = 0, \tag{2}$$

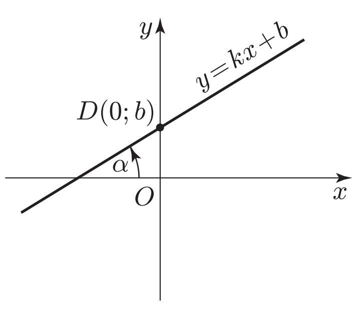

Рис. 26.1

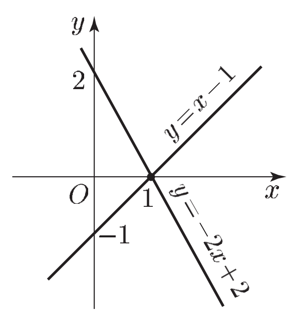

Рис. 26.2

где хотя бы одно из чисел A, B не равно нулю. Если $B \neq 0$, то уравнение (2) можно записать в виде

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

т. е. в виде (1), где $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Следовательно, если $B \neq 0$, то уравнение (2) представляет собой уравнение прямой.

Если $B = 0$, то уравнение (2) можно записать в виде

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Это уравнение прямой, параллельной оси Oy.

Таким образом, если A, B, C — заданные числа такие, что A и B одновременно не равны нулю, то уравнение (2) является уравнением некоторой прямой.

В случае, когда $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, уравнение (2) можно записать так:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (3)$$

где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Уравнение (3) называется *уравнением прямой в отрезках*. Эта прямая пересекает ось Ox в точке $(a; 0)$ и ось Oy в точке $(0; b)$. Например, уравнение

$$2y - 3x - 6 = 0$$

можно записать в виде $2y - 3x = 6$ или в виде (3), т. е.

$$\frac{y}{3} + \frac{x}{-2} = 1.$$

Эта прямая (рис. 26.3) проходит через точки $(-2; 0)$ и $(0; 3)$.

Если прямая l, заданная уравнением (2), проходит через точку M_0 $(x_0; y_0)$, то

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \qquad (4)$$

Вычитая из равенства (2) равенство (4), получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (5)$$

Левую часть равенства (5) можно рассматривать как скалярное произведение векторов $\overline{n} = (A; B)$ и $\overline{MM_0} = (x - x_0; y - y_0)$, где $M(x; y)$ — произвольная точка прямой l. Из (5) следует, что вектор $\overline{n}$ перпендикулярен прямой l (рис. 26.4).

2. Угол между прямыми

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы соответственно уравнениями

$$y = k_1 x + b_1, \qquad (1)$$

$$y = k_2 x + b_2. \qquad (2)$$

Если $k_1 = k_2$, то прямые l_1 и l_2 параллельны.

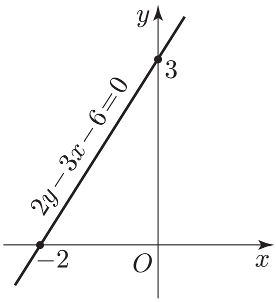

Рис. 26.3

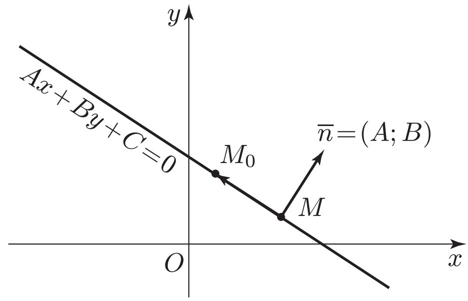

Рис. 26.4

Пусть $k_1 \neq k_2$, тогда прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке M, координаты которой удовлетворяют системе (1), (2). Пересекающиеся прямые l_1 и l_2 образуют две пары равных углов. Углом φ между прямыми l_1 и l_2 называют наименьший из этих углов. Если α_2 и α_1 — углы, образуемые прямыми l_1 и l_2 с осью Ox, то $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, и поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)\right| = \left|\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}\right| = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны и $k_1 \neq 0$, то $k_1 k_2 + 1 = 0$ или

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (4)$$

Если $k_1 = 0$, то $\operatorname{tg}\varphi = k_2$, а прямой, которая перпендикулярна прямой $y = b_1$, является любая прямая вида $x = a$, т. е. прямая, параллельная оси Oy.

Пример. Найти угол φ между прямыми $y = -\frac{x}{2} + 3$ и $y = \frac{x}{3} + 2$.

Решение. По формуле (3), где $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{3}$, находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1,$$

откуда $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

3. Линейные неравенства с двумя переменными

Пример. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$2y - 3x - 6 < 0. \qquad (1)$$

Решение. Уравнение $2y - 3x - 6 = 0$ является уравнением прямой (рис. 26.5), проходящей через точки $(-2; 0)$ и $(0; 3)$.

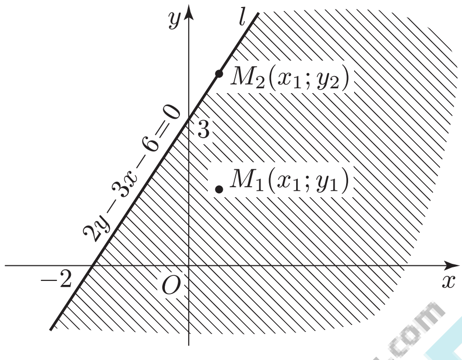

Рис. 26.5

Пусть $M_1(x_1; y_1)$ — точка, лежащая ниже прямой l (в заштрихованной на рис. 26.5 полуплоскости), а M_2 — точка с абсциссой x_1 и ординатой y_2, лежащая на прямой l. Тогда

$$2y_2 - 3x_1 - 6 = 0,$$

а

$$2y_1 - 3x_1 - 6 < 0,$$

так как $y_1 < y_2$.

Таким образом, в любой точке $M(x; y)$, лежащей ниже прямой l, выполняется неравенство (1). Аналогично, в любой точке $M(x; y)$, лежащей выше прямой l, выполняется неравенство

$$2y - 3x - 6 > 0.$$

Точно так же можно решить неравенство общего вида

$$Ax + By + C < 0, \tag{2}$$

где по крайней мере одно из чисел A и B не равно нулю.

Если $B > 0$, то неравенство (2) выполняется во всех точках, лежащих ниже прямой, заданной уравнением

$$Ax + By + C = 0.$$

Если $B < 0$, то неравенство (2) справедливо в точках, лежащих выше этой прямой.

Если $B = 0$, то неравенство (2) примет вид

$$Ax + C < 0.$$

Это неравенство равносильно неравенству $x < -\dfrac{C}{A}$ при $A > 0$ и неравенству $x > -\dfrac{C}{A}$ при $A < 0$.

Например, неравенство $2x+3<0$ равносильно неравенству $x<-\frac{3}{2}$, которому удовлетворяют точки, лежащие слева от прямой $x=-\frac{3}{2}$ (рис. 26.6).

В общем случае прямая

$$Ax+By+C=0$$

разделяет плоскость на две полуплоскости, в одной из которых выполняется неравенство (2), а в другой — неравенство

$$Ax+By+C>0. \qquad (3)$$

Чтобы решить неравенство (2) или (3), достаточно взять какую-нибудь точку $M_1(x_1;y_1)$, не лежащую на прямой $Ax+By+C=0$, и определить знак числа Ax_1+By_1+C.

Например, неравенство

$$3x-4y-12<0$$

верно в полуплоскости, расположенной выше прямой $3x-4y-12=0$ (рис. 26.7), так как при $x=y=0$ выражение $3x-4y-12$ отрицательно. Эта прямая проходит через точки $(4;0)$ и $(0;-3)$.

4. Системы линейных уравнений и неравенств с двумя переменными

Справочные сведения

Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1>0, & (1)\\ A_2x+B_2y+C_2>0, & (2)\end{cases}$$

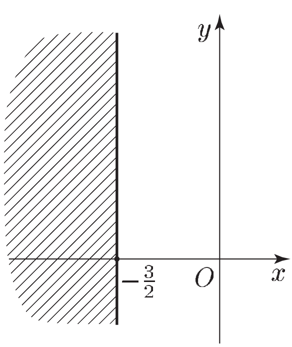

Рис. 26.6

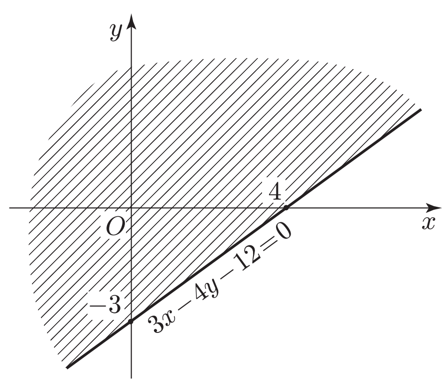

Рис. 26.7

предполагая, что $A_1^2 + B_1^2 > 0$, $A_2^2 + B_2^2 > 0$. Тогда неравенству (1) удовлетворяют точки множества M_1, лежащие по одну сторону от прямой l_1, заданной уравнением

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0.$$

Аналогично, множество M_2 — одна из полуплоскостей, на которые разбивается координатная плоскость прямой l_2, заданной уравнением

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Множество решений системы (1), (2) представляет собой пересечение множеств M_1 и M_2.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x - y > 2, & (3)\\ x + 3y > 6. & (4) \end{cases}$$

Решение. Построим прямые l_1 и l_2 (рис. 26.8), заданные соответственно уравнениями

$$x - y = 2, \qquad (5)$$
$$x + 3y = 6. \qquad (6)$$

Решив систему (5), (6), получим $x_0 = 3$, $y_0 = 1$. Следовательно, прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке $A(3; 1)$.

Так как координаты точки $O(0; 0)$ не удовлетворяют ни одному из неравенств (3), (4), то системе неравенств (3), (4) удовлетворяют координаты тех и только тех точек координатной плоскости, которые лежат ниже прямой l_1 и выше прямой l_2, т. е. точки угла M_1 с вершиной A, заштрихованного на рис. 26.8.

Аналогично решаются системы неравенств, получаемые из системы (1), (2) заменой одного или двух знаков неравенств на противоположные.

Если пересекающиеся в точке A прямые l_1 и l_2 (рис. 26.9) задаются соответственно уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то неравенство

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) > 0 \qquad (7)$$

определяет либо объединение одной пары M_1 и M_2 вертикальных углов с вершиной A (рис. 26.9), либо объединение другой пары N_1 и N_2 вертикальных углов с той же вершиной.

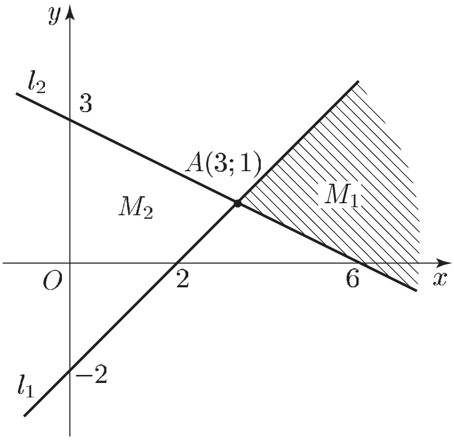

Рис. 26.8

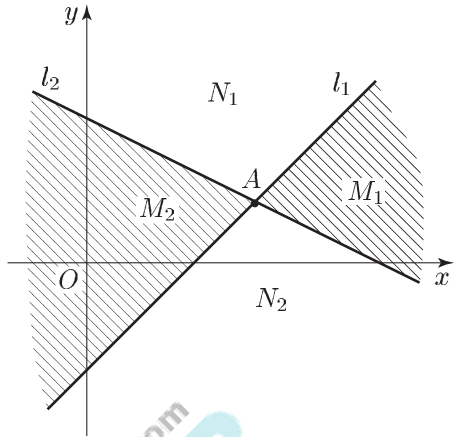

Рис. 26.9

В самом деле, во всех точках каждого из множеств M_1, N_1, M_2, N_2 левая часть неравенства (7) принимает либо положительные, либо отрицательные значения, а при переходе от одного из этих множеств к соседним (через одну из прямых l_1, l_2) знак левой части этого неравенства меняется на противоположный.

Если, например, на множестве M_1 левая часть неравенства (7) положительна, то на множествах N_1 и N_2 она будет отрицательной, а на M_2 — положительной.

Чтобы определить, на каком из двух множеств $M_1 \cup M_2$ или $N_1 \cup N_2$ справедливо неравенство (7), достаточно определить знак левой части этого неравенства в какой-либо точке одного из множеств M_1, M_2, N_1, N_2.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x - y - 2)(x + 3y - 6) > 0. \qquad (8)$$

Решение. Неравенство (8) равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} x - y - 2 > 0, \\ x + 3y - 6 > 0; \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} x - y - 2 < 0, \\ x + 3y - 6 < 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Множеством решений системы (9), равносильной системе (3), (4), является угол с вершиной A (заштрихованный на рис. 26.8), а множеством решений системы (10) — угол M_2 с той же вершиной A, содержащий точку O. Объединение этих углов представляет собой множество всех решений неравенства (8).

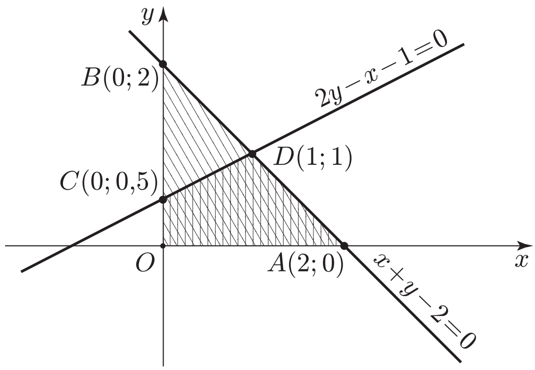

Рис. 26.10

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - y > 4, \\ 3y - 6x > -10. \end{cases}$$

Решение. Второе неравенство этой системы равносильно неравенству $2x - y < \frac{10}{3}$ и поэтому исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 2x - y > 4, \\ 2x - y < \dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Если бы пара чисел $(x_0; y_0)$ была решением этой системы, то число $z_0 = 2x_0 - y_0$ удовлетворяло бы двум условиям $z_0 > 4$ и $z_0 < \frac{10}{3}$, что невозможно. Следовательно, исходная система неравенств не имеет решений.

Пример 4. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x + y - 2 \leqslant 0, \\ 2y - x - 1 \leqslant 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Решение. Первым двум неравенствам системы (11) удовлетворяют все точки, у которых обе координаты неотрицательны, т. е. точки, лежащие в I квадранте (включая точки положительных полуосей Ox и Oy).

Чтобы решить неравенство $x + y - 2 \leqslant 0$, рассмотрим прямую $x + y - 2 = 0$ (рис. 26.10).

Эта прямая проходит через точки $(2; 0)$ и $(0; 2)$. При $x = 0$, $y = 0$ неравенство $x + y - 2 \leqslant 0$ является верным. Следовательно, неравенству $x + y - 2 \leqslant 0$ удовлетворяют все точки, лежащие ниже прямой $x + y - 2 = 0$ и на самой прямой. В результате получаем, что первым трем неравенствам системы (11) удовлетворяют точки, расположенные внутри и на границе треугольника с вершинами $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(0; 2)$.

Решим, наконец, последнее неравенство системы (11), т. е. неравенство $2y - x - 1 \leqslant 0$. Рассмотрим прямую $2y - x - 1 = 0$. Полагая $x = 0$, находим $y = 0{,}5$. Таким образом, прямая проходит через точку $C(0; 0{,}5)$.

Найдем точку D пересечения прямой $2y - x - 1 = 0$ с прямой $x + y - 2 = 0$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ 2y - x - 1 = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Складывая уравнения системы (12), получаем $3y - 3 = 0$, откуда $y = 1$. Подставляя $y = 1$ в первое уравнение системы (12), находим $x = 1$. Значит, точка D имеет координаты $x = y = 1$ (рис. 26.10).

Так как неравенству $2y - x - 1 \leqslant 0$ удовлетворяют точки, лежащие ниже прямой $2y - x - 1 = 0$ (точка $O(0; 0)$ удовлетворяет этому неравенству), то системе (11) удовлетворяют все точки, лежащие внутри и на границе четырехугольника $OADC$ (рис. 26.10).

5. Уравнения, неравенства и системы неравенств с двумя переменными, содержащие знак модуля

Примеры с решениями

Пример 1. Найти множество точек координатной плоскости Oxy, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению:

а) $2x^2 - 8x + y^2 + 6y + 17 = 0$;

б) $|x| = |y|$;

в) $x + |y| = 0$;

г) $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 12 = 0$.

Решение. а) Запишем уравнение в виде

$$2(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $x = 2$, $y = -3$, т. е. данному уравнению удовлетворяют координаты только одной точки $M(2; -3)$.

б) Уравнение равносильно совокупности уравнений $x = y$ и $x = -y$. Искомое множество состоит из всех точек, принадлежащих биссектрисам I и III, а также II и IV координатных углов (рис. 26.11).

в) Уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ y \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0, \\ y < 0. \end{cases}$$

Первой из них удовлетворяют точки, принадлежащие биссектрисе II координатного угла, второй системе — точки, принадлежащие биссектрисе III координатного угла (рис. 26.12).

г) Запишем уравнение в виде

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $A(-2; 3)$ и радиусом 1 (рис. 26.13).

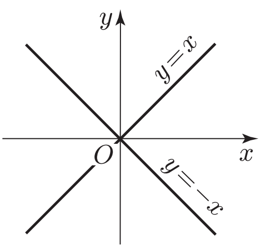

Рис. 26.11

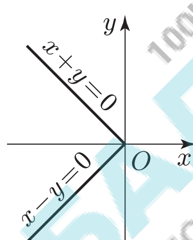

Рис. 26.12

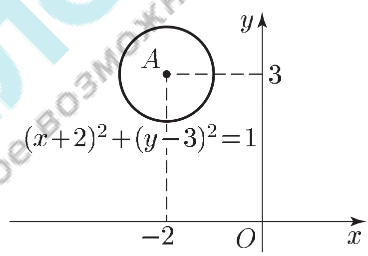

Рис. 26.13

Пример 2. Изобразить на координатной плоскости Oxy фигуру Ф, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y > |x|, & (1) \\ y < 3 - |x - 1|, & (2) \end{cases}$$

и найти площадь S этой фигуры.

Решение. Построим графики функций $y = |x|$ и $y = 3 - |x - 1|$ (рис. 26.14).

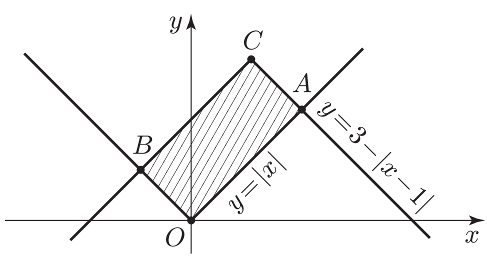

Рис. 26.14

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 3 - (x - 1), \end{cases}$$

находим общую точку $A(2;2)$ этих графиков, лежащую в I квадранте (рис. 26.14). Аналогично, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = 3 - (1 - x), \end{cases}$$

находим общую точку $B(-1;1)$ графиков функций $y=|x|$ и $y=3-|x-1|$, лежащую во II квадранте.

Неравенству (1) удовлетворяют все точки координатной плоскости, расположенные выше графика функции $y = |x|$, а неравенству (2) — все точки координатной плоскости, лежащие ниже графика функции $y = 3 - |x - 1|$.

Следовательно, системе (1), (2) удовлетворяют все точки, лежащие внутри прямоугольника $OACB$, полученного при пересечении графиков функций $y = |x|$ и $y = 3 - |x - 1|$.

Так как $OB = \sqrt{2}$, $OA = 2\sqrt{2}$, то

$$S = OB \cdot OA = 4.$$

Пример 3. Найти все такие пары целых чисел x, y, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - |x^2 - 2x| + \dfrac{1}{2} > 0, \\ y + |x - 1| < 2. \end{cases}$$

Решение. Запишем данную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} y + \dfrac{1}{2} > |x^2 - 2x|, & (3) \\ y < 2 - |x - 1|. & (4) \end{cases}$$

Так как $|x^2 - 2x| \geqslant 0$, $|x - 1| \geqslant 0$, то из неравенств (3) и (4) следует, что

$$-\frac{1}{2} < y < 2. \qquad (5)$$

Целыми числами, удовлетворяющими неравенству (5), являются лишь 0 и 1, поэтому система (3), (4) может иметь целые решения только при $y = 0$ и $y = 1$.

1) Если $y = 0$, то система (3), (4) примет вид

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < \dfrac{1}{2}, \\ |x - 1| < 2. \end{cases}$$

Второму из этих неравенств удовлетворяют целые числа 0, 1 и 2. Проверка показывает, что первому неравенству удовлетворяют

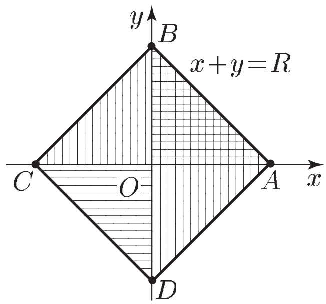

Рис. 26.15

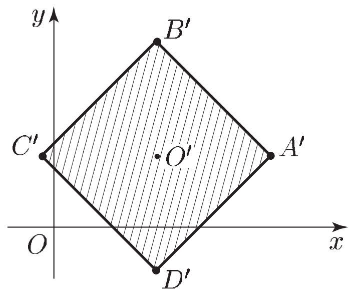

Рис. 26.16

лишь 0 и 2. Следовательно, пары чисел $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_2 = 2$, $y_2 = 0$ образуют решения исходной системы неравенств.

2) Если $y = 1$, то система (3), (4) приводится к виду

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < \dfrac{3}{2}, \\ |x - 1| < 1. \end{cases} \tag{6}$$

Второму неравенству системы (6) удовлетворяет единственное целое число $x = 1$, которое является также и решением первого неравенства.

Ответ. $x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = 2,\ y_2 = 0,\ x_3 = 1,\ y_3 = 1.$

Пример 4. Изобразить на координатной плоскости фигуру Φ, координаты $(x; y)$ точек которой определяются неравенством

$$|x - a| + |y - b| \leqslant R, \qquad R > 0, \tag{7}$$

и найти площадь s фигуры Φ.

Решение. 1) Рассмотрим сначала случай $a = b = 0$. Тогда неравенство (7) примет вид

$$|x| + |y| \leqslant R, \qquad R > 0. \tag{8}$$

Если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то неравенство (8) можно записать так:

$$x + y \leqslant R.$$

Множество точек, удовлетворяющих условиям $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant R$, — это треугольник OAB, образованный прямой $x + y = R$ (рис. 26.15) и координатными полуосями $x = 0$, $y = 0$, $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

Если $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, то неравенство (8) примет вид

$$x - y \leqslant R,$$

а множество точек таких, что $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $x - y \leqslant R$, — это треугольник AOD, симметричный треугольнику AOB относительно оси Ox.

Аналогично рассматриваются случаи $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, которым соответствуют треугольники BOC и DOC, симметричные соответственно треугольникам AOB и AOD относительно оси Oy.

Таким образом, фигура Φ', определяемая неравенством (8), представляет собой квадрат с центром в точке $O(0; 0)$ и вершинами $A(R; 0)$, $B(0; R)$, $C(-R; 0)$, $D(0; -R)$.

Заметим, что симметрия фигуры Φ' относительно координатных осей следует из того, что наряду с точкой $(x; y)$ этой фигуре принадлежат точки $(-x; y)$, $(x; -y)$, $(-x; -y)$, так как $|-x| = |x|$, $|-y| = |y|$. Площадь этой фигуры равна $2R^2$.

2) Рассмотрим теперь неравенство (7). Так как фигуру Φ, определяемую неравенством (7), можно получить из фигуры Φ', заданной неравенством (8), с помощью параллельного переноса (сдвига на вектор $(a; b)$), то Φ — квадрат (рис. 26.16) с центром в точке $(a; b)$ и вершинами $A'(R + a; b)$, $B'(a; R + b)$, $C'(a - R; b)$, $D'(a; b - R)$.

Площадь фигуры Φ, как и фигуры Φ', равна $2R^2$.

Задачи

1. Записать уравнение прямой, проходящей через точки A и B:
а) $a(1; 0)$, $B(0; 2)$; б) $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$;
в) $A(-2; 0)$, $B(0; -1)$; г) $A(5; 0)$, $B(0; -6)$.

2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ и перпендикулярной вектору $\overline{n}$:
а) $M_0(1; -1)$, $\overline{n} = (2; 3)$; б) $M_0(-3; 4)$, $\overline{n} = (1; -1)$;
в) $M_0(1; 0)$, $\overline{n} = (-1; 3)$; г) $M_0(0; 0)$, $\overline{n} = (-2; -5)$.

3. Найти угол между прямыми:

а) $y = 3x + 4$ и $y = 5x - 2$; б) $y = -\frac{x}{3} + 5$ и $y = \frac{x}{4} + 3$.

4. Изобразить на плоскости множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

а) $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$; б) $|x| < 1$, $|y| < 1$;

в) $\begin{cases} x - 2y \leqslant 1, \\ y - 2x \geqslant 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 3y < 3, \\ 3x - 2y < 6; \end{cases}$

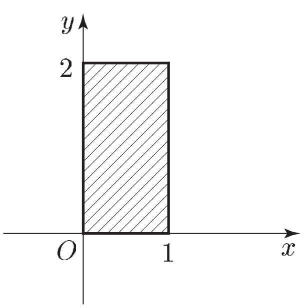

Рис. 26.17

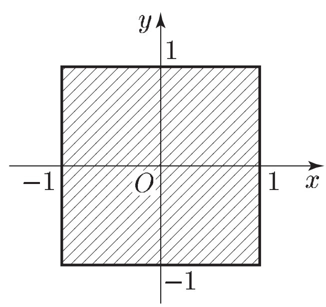

Рис. 26.18

д) $\begin{cases} x + y > 2, \\ x - y < 2, \\ x - 3y > -2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ 2y - x \leqslant 6, \\ 2x - y \leqslant -2. \end{cases}$

5. Найти все пары $(x; y)$ натуральных чисел x и y, которые являются решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases} x - y - 2 < 0, \\ x + 2y - 9 > 0, \\ x - 2y + 3 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3y - 11 > 0, \\ x + y - 8 < 0, \\ x - 2y + 4 > 0. \end{cases}$

6. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $(x - y + 3)(x + y - 1) > 0$;
б) $(2x - y - 4)(2x + y + 2) < 0$;
в) $x^2 - xy - 2y^2 > 0$.

7. Найти множество точек координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 4 = 0$; б) $xy + x - y - 1 = 0$;
в) $y + |y| = x$; г) $y = x|y|$.

8. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств:

а) $\begin{cases} y - x < 2, \\ x + y < 2, \\ y > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y < 3 - |x|, \\ |x + 1| - y < 0. \end{cases}$

Ответы

1. а) $2x + y - 2 = 0$; б) $4x - 3y + 12 = 0$; в) $x + 2y + 2 = 0$; г) $6x - 5y - 30 = 0$.
2. а) $2x + 3y + 1 = 0$; б) $x - y + 7 = 0$; в) $x - 3y - 1 = 0$; г) $2x + 5y = 0$.
3. а) $\operatorname{arctg} \frac{1}{8}$; б) $\operatorname{arctg} \frac{7}{11}$.
4. а) См. рис. 26.17; б) см. рис. 26.18; в) см. рис. 26.19; г) см. рис. 26.20; д) см. рис. 26.21; е) см. рис. 26.22.
5. а) $(4; 3)$; б) $(4; 3)$.
6. а) См. рис. 26.23; б) см. рис. 26.24; в) см. рис. 26.25.
7. а) Точка $(2; 2)$; б) прямые $x = 1$ и $y = -1$; в) лучи $y = \frac{x}{2}$, $y \geqslant 0$ и $x = 0$, $y < 0$; г) ось Ox, лучи $x = 1$, $y > 0$ и $x = -1$, $y < 0$.
8. а) 4; б) 4.

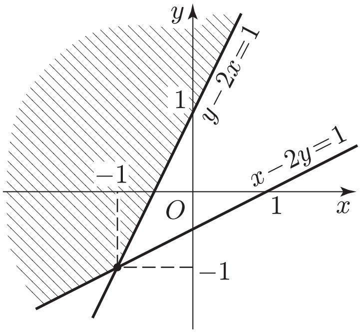

Рис. 26.19

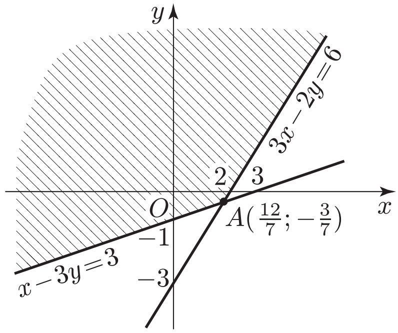

Рис. 26.20

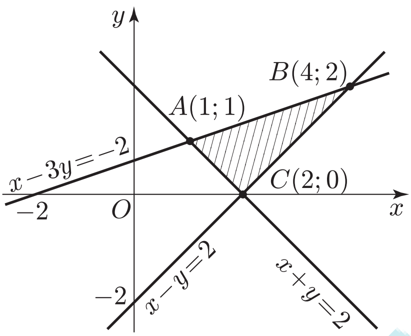

Рис. 26.21

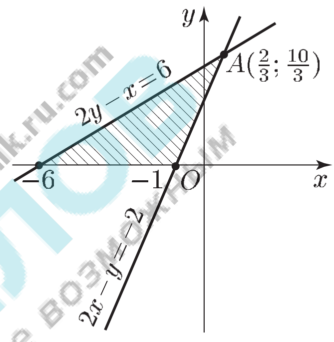

Рис. 26.22

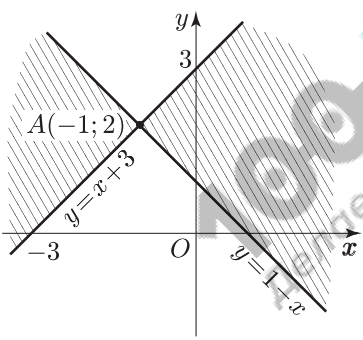

Рис. 26.23

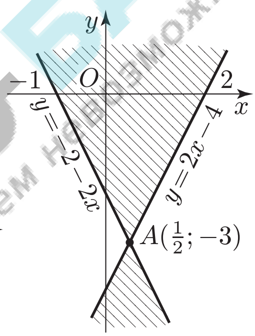

Рис. 26.24

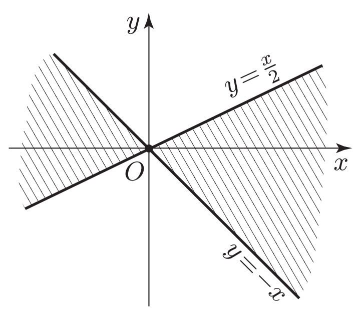

Рис. 26.25

§ 27. Нелинейные системы неравенств с двумя переменными

Примеры с решениями

Пример 1. Изобразить на координатной плоскости Oxy фигуру Φ, заданную системой неравенств, и найти площадь S этой фигуры.

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ x + y > 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ (x-1)^2 + y^2 > 1. \end{cases}$

Решение. а) Неравенство $x^2 + y^2 < 4$ задает множество точек, лежащих внутри окружности с центром в начале координат и радиусом 2 (рис. 27.1), а неравенство $x + y > 2$ — множество точек, расположенных выше прямой $x + y = 2$.

Эта прямая пересекает окружность в точках $A(-2; 0)$ и $B(0; 2)$, а фигура Ф представляет собой сегмент (рис. 27.1). Искомая площадь S равна разности между площадью S_1 четверти круга и площадью S_2 треугольника AOB.

Так как $S_1 = \pi$, $S_2 = 2$, то $S = \pi - 2$.

б) Фигура Ф — это множество точек, лежащих внутри окружности с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом 2, но вне окружности с центром в точке $(1; 0)$ и радиусом 1 (рис. 27.2). Значит, площадь фигуры Ф равна $S = 4\pi - \pi = 3\pi$.

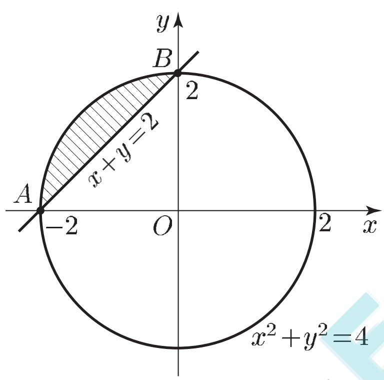

Рис. 27.1

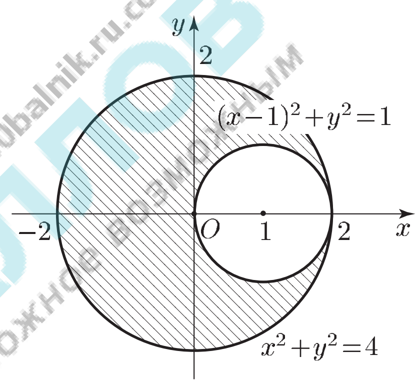

Рис. 27.2

Пример 2. Найти площадь фигуры Ф, которая задается на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 10, & (1) \\ 3x^2 - 4x - 32 \leqslant 0, & (2) \\ (3x - 2y)(3y - x + 10) \geqslant 0. & (3) \end{cases}$$

Решение. Неравенство (1) определяет множество точек, лежащих вне и на границе круга с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом $\sqrt{10}$ (рис. 27.3).

Решив неравенство (2), получим $-\dfrac{8}{3} \leqslant x \leqslant 4$. Поэтому неравенство (2) задает вертикальную полосу, лежащую между прямыми $x = -\dfrac{8}{3}$ и $x = 4$ (включая и точки этих прямых).

Наконец, неравенству (3) удовлетворяют точки множества M, которое состоит из двух острых вертикальных углов, образованных прямыми $3x - 2y = 0$ и $3y - x + 10 = 0$ (включая и точки этих прямых), так как в точке $(4; 0)$, принадлежащей множеству M, левая часть неравенства (3) положительна. Множество M заштриховано на рис. 27.3, а указанные прямые обозначены l_1 и l_2.

Прямая l_1 пересекается с прямыми $x = -\frac{8}{3}$ и $x = 4$ в точках $A\left(-\frac{8}{3}; -4\right)$ и $B(4; 6)$, а прямая l_2 пересекается с теми же прямыми в точках $D\left(-\frac{8}{3}; -\frac{38}{9}\right)$, $C(4; -2)$. Далее, прямая l_2 касается окружности $x^2 + y^2 = 10$, так как система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 3y - x + 10 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(1; -3)$; наконец, прямая l_1 проходит через центр этой окружности.

Итак, фигура Ф — это трапеция $ABCD$, из которой удален полукруг радиуса $\sqrt{10}$ с центром в точке O. Искомая площадь

$$S = \frac{(AD + BC)h}{2} - 5\pi,$$

где $AD = \frac{2}{9}$, $BC = 8$, $h = \frac{20}{3}$.

Ответ. $\frac{740}{27} - 5\pi$.

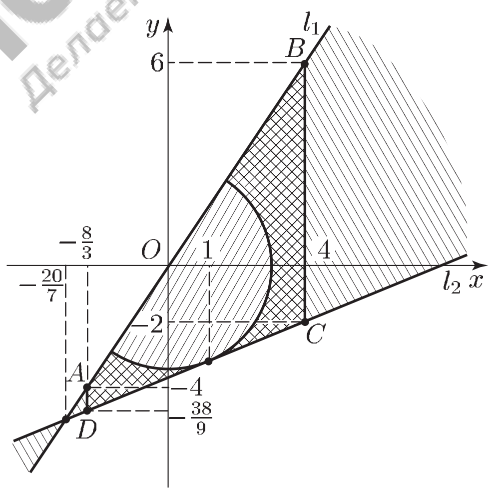

Рис. 27.3

Пример 3. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{xy}{15}} \geqslant y - 2x, & (4) \\ \dfrac{x-25}{x^2+y^2-625} > \dfrac{1}{26}\,. & (5) \end{cases}$$

Изобразить фигуру M и найти ее площадь.

Решение. Неравенство (5), равносильное неравенству

$$\frac{(x-13)^2+y^2-144}{x^2+y^2-625} < 0,$$

является верным в тех и только в тех точках плоскости Oxy, которые лежат вне круга радиуса 12 с центром $(13; 0)$ и внутри круга радиуса 25 с центром в точке O (рис. 27.4).

Неравенство (4) имеет смысл, если

$$xy \geqslant 0, \qquad (6)$$

т. е. для точек I и III квадрантов. Считая условие (6) выполненным, рассмотрим два возможных случая: $y < 2x$; $y \geqslant 2x$.

1) Если

$$y < 2x \quad \text{и} \quad xy \geqslant 0, \qquad (7)$$

то неравенство (4) является верным. Система неравенств (7) задает множество точек I и III квадрантов, лежащих ниже прямой $y = 2x$.

2) Если

$$y \geqslant 2x \quad \text{и} \quad xy \geqslant 0, \qquad (8)$$

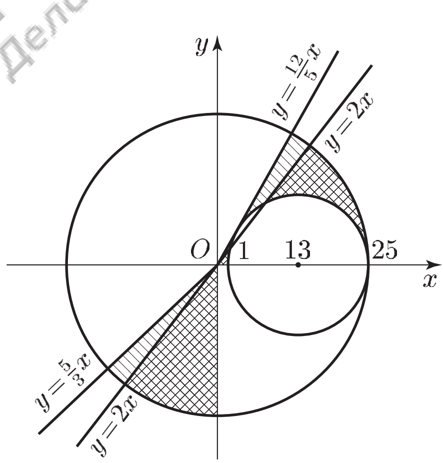

Рис. 27.4

то неравенство (4) равносильно каждому из неравенств

$$\frac{xy}{15} \geqslant y^2 - 4xy + 4x^2,$$

$$\left(y - \frac{12}{5}x\right)\left(y - \frac{5}{3}x\right) \leqslant 0. \qquad (9)$$

Условиями (8), (9) определяется множество тех точек I квадранта, которые заключены между прямыми $y = 2x$ и $y = \frac{12}{5}x$, и точек III квадранта, которые заключены между прямыми $y = 2x$ и $y = \frac{5}{3}x$.

Заметим, что прямая $y = \frac{12}{5}x$ имеет единственную общую точку с окружностью $(x-13)^2 + y^2 = 144$ и, следовательно, касается этой окружности. Площадь S фигуры Φ равна $S_1 - S_2$, где S_1 — сумма площадей двух секторов (им соответствуют центральные углы $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$ и $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$), а S_2 — площадь полукруга радиуса 12.

Ответ. $\frac{625}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{12}{5} + \operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right) - 72\pi$.

Пример 4. Найти площадь фигуры Φ, которая задается на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + 3y^2 - 3} \geqslant 2y + 1, & (10) \\ y + 4 \geqslant 2\sqrt{3}|x|. & (11) \end{cases}$$

Решение. Область определения неравенства (10), а значит, и системы (10), (11) задается условием $3x^2 + 3y^2 - 3 \geqslant 0$, т. е.

$$x^2 + y^2 \geqslant 1. \qquad (12)$$

Неравенство (12) определяет область, внешнюю по отношению к кругу с центром в начале координат и радиусом 1 (включая границу круга, рис. 27.5).

Возможны два случая: $2y + 1 < 0$; $2y + 1 \geqslant 0$.

1) Если $2y + 1 < 0$, т. е.

$$y < -\frac{1}{2}, \qquad (13)$$

то неравенство (10) является верным на множестве $x^2 + y^2 \geqslant 1$.

2) Если $2y + 1 \geqslant 0$, т. е.

$$y \geqslant -\frac{1}{2}, \qquad (14)$$

то неравенство (10) равносильно каждому из неравенств

$$3x^2 + 3y^2 - 3 \geqslant (2y+1)^2,$$

$$y^2 + 4y + 4 \leqslant 3x^2,$$

$$(y + 2 - \sqrt{3}x)(y + 2 + \sqrt{3}x) \geqslant 0. \qquad (15)$$

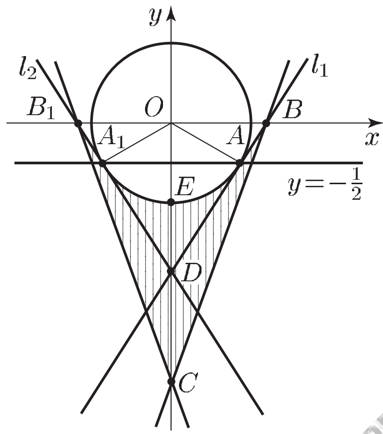

Рис. 27.5

Прямые l_1 и l_2, заданные соответственно уравнениями

$$y+2-\sqrt{3}x=0, \qquad y+2+\sqrt{3}x=0,$$

проходят через точку $D(0;-2)$. Прямая l_1 касается окружности $x^2+y^2=1$ в точке $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, так как система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y+2-\sqrt{3}x=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Прямая l_2, симметричная прямой l_1 относительно оси Oy, касается этой же окружности в точке $A_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

В точке $O(0;0)$ левая часть неравенства (15) положительна и поэтому указанное неравенство справедливо в двух вертикальных углах с вершиной в точке D, содержащих ось Oy.

Рассмотрим неравенство (11). Уравнение

$$y+4=2\sqrt{3}|x|$$

задает два луча, выходящие из точки $C(0;-4)$ и пересекающиеся прямые l_1 и l_2 в точках $B\left(\frac{2}{\sqrt{3}};0\right)$ и $B_1\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};0\right)$. Неравенству (11) удовлетворяют точки, находящиеся внутри и на границе угла B_1CB.

Итак, множеством точек, удовлетворяющих системе неравенств (10), (11) является фигура Ф, выделенная штриховкой на рис. 27.5. Ее граница состоит из отрезков CB, CB_1, BA, B_1A_1 и дуги AEA_1 окружности $x^2+y^2=1$.

Площадь фигуры Ф равна

$$S=S_1-2(S_2+S_3),$$

где S_1 — площадь треугольника CBB_1, S_2 — площадь треугольника OAB, S_3 — площадь сектора OAE. Здесь

$$S_1 = OC \cdot OB = \frac{8}{\sqrt{3}}, \qquad S_2 = \frac{1}{2} OB \cdot OA \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(так как $\angle DOA = \frac{\pi}{3}$),

$$S_3 = \frac{1}{2}(OA)^2 \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ. $\frac{7\sqrt{3}-\pi}{3}$.

Задачи

1. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством:

а) $(x^2+y^2+2x+2y)(4-x^2-y^2) \geqslant 0$;
б) $(x^2+y^2-x-y)(x^2+y^2-1) \leqslant 0$;
в) $2|x|+|y+2x+1| \leqslant 5$.

2. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств:

а) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4x-4y-6, \\ x \geqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 6x+2y+2, \\ y \geqslant -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x+1|+|y| \leqslant 2, \\ (x+2)^2+y^2 \leqslant 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x|+|y-1| \leqslant 2, \\ x^2+y^2 \geqslant 1-\frac{2}{\sqrt{3}}\,y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4x, \\ |y| \geqslant |2-x|. \end{cases}$

3. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-12x+20y+65<0, \\ 4x+2y>3. \end{cases}$$

4. Найти площадь фигуры, заданной на координатой плоскости системой неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 \leqslant 5, \\ x^2+y^2 \geqslant 5, \\ (x+2y+5)(2-y) \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4y^2-25 \leqslant 0, \\ x^2+y^2 \geqslant 5, \\ (3x+y)(2x+y+5) \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x+3y+25 \geqslant 0, \\ y^2 \leqslant 25, \\ x^2+y^2 \geqslant 25; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{16x^4-y^4}{6}} \geqslant xy, \\ y^2+25 \geqslant 10y+\dfrac{1}{4}x^2, \\ x^2+y^2+10x \leqslant 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{xy}{3}} \geqslant 2x - y, \\ \dfrac{y-8}{x^2+y^2-64} > \dfrac{1}{10}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leqslant 2x + 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \sqrt{x^4 - x^2 - y^4 + y^2} + x^2 \geqslant y^2, \\ x^2 \leqslant 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geqslant x + y + 1, \\ x - \sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x. \end{cases}$

Ответы

1. а) $2\pi + 4$; б) $1 + \frac{\pi}{2}$; в) 25.

2. а) $1 + \frac{3\pi}{2}$; б) $3\sqrt{3} + 10\pi$; в) $1 + \frac{\pi}{2}$; г) $\frac{22}{3} - \frac{4}{9}\pi$; д) 2π.

3. $(3; -4)$, $(4; -5)$.

4. а) $9\sqrt{5} - 2 - 5\pi + 5\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; б) $12{,}5 - 2{,}5\pi$; в) $12{,}5(5 - \pi)$;

г) $25\operatorname{arctg}\sqrt{2} + 20 + \frac{25\sqrt{2}}{3}$; д) $32\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}3\right) - \frac{9}{2}\pi$; е) $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$; ж) $3 - \frac{\pi}{2}$;

з) $\dfrac{24 - 12\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - \pi}{12}$.

Глава 9
Планиметрия

§ 28. Треугольник

Справочные сведения

В приведенных ниже формулах используются следующие обозначения:

а) a, b, c — длины сторон треугольника ABC, лежащие против углов A, B и C соответственно;

б) h_a, h_b, h_c — высоты,
m_a, m_b, m_c — медианы,
l_a, l_b, l_c — биссектрисы,
проведенные из вершин A, B и C соответственно;

в) r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC;

г) R — радиус окружности, описанной около треугольника;

д) S — площадь треугольника ABC.

1. ***Теорема синусов:***

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

2. ***Теорема косинусов:***

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

3. Формулы для вычисления ***площади треугольника***:

а) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$;

б) $S = \frac{1}{2}ab\sin C$;

в) $S = rp$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — *полупериметр* треугольника ABC;

г) Формула *Герона*:
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

д) $S = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

4. ***Сумма углов*** треугольника равна 180°. *Внешний угол* треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним (рис. 28.1):

$\angle DAB = \angle ABC + \angle BCA$.

5. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает на них пропорциональные отрезки, т. е. если $DE \| AC$ (рис. 28.2), то

$\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{DA}{EC} = \dfrac{BA}{BC}$.

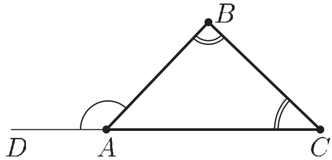

Рис. 28.1

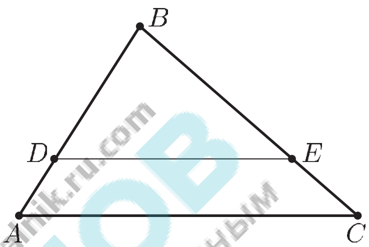

Рис. 28.2

6. ***Медианы*** треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой их пересечения в отношении 2:1, считая от вершины, т. е. если O — точка пересечения медиан AD и BE треугольника ABC (рис. 28.3), то

$AO : OD = BO : OE = 2 : 1$.

Медианы можно выразить через стороны треугольника.

Например,

$m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$.

Для доказательства этой формулы можно воспользоваться тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма $ANBC$ (рис. 28.4) равна сумме квадратов его сторон, т. е.

$4m_c^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2$.

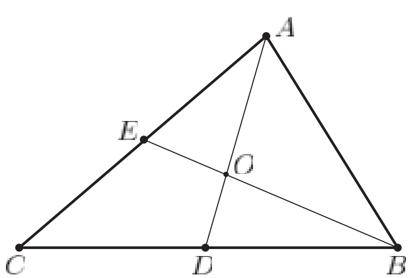

Рис. 28.3

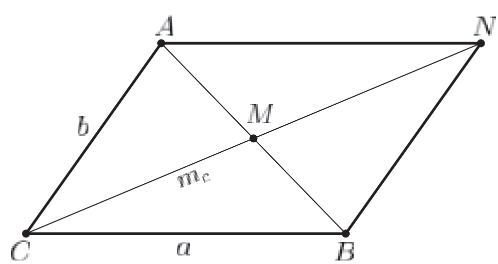

Рис. 28.4

7. ***Биссектриса*** угла треугольника делит противолежащую этому углу сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. если AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 28.5), то
$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Если l_a — биссектриса угла A, то

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Для доказательства этой формулы можно воспользоваться формулой для вычисления площади треугольника, если известны две его стороны и угол между ними (эту формулу следует применить к треугольникам ABC, ABD и ADC).

Если в треугольнике ABC *биссектриса* внешнего угла при вершине A (рис. 28.6) пересекает сторону BC в точке K, то
$\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{AB}{AC}$.

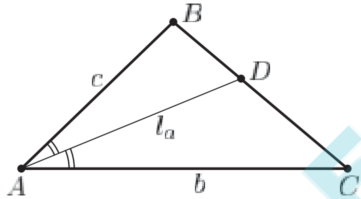

Рис. 28.5

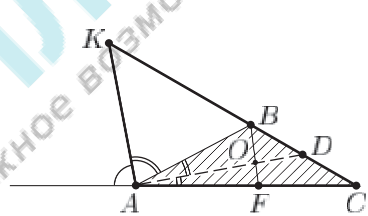

Рис. 28.6

Для доказательства этого утверждения проведем биссектрису AD треугольника ABC и прямую BF, параллельную AK ($F \in AC$) и пересекающую AD в точке O. Тогда $BF \perp AD$ и $AF = AB$ (AO — биссектриса и высота в треугольнике ABF). Так как $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{AF}{AC}$ и $AF = AB$, то
$\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{AB}{AC}$.

8. В любой треугольник можно вписать окружность, ее центром является точка пересечения биссектрис треугольника.

Радиус r вписанной окружности определяется формулой

$$r = \frac{S}{p},$$

где S — площадь треугольника, p — его полупериметр.

Если известна сторона b треугольника ABC и прилежащие к ней углы A и C (рис. 28.7), то r можно найти из равенства

$$b = r\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

9. Около любого треугольника можно *описать окружность*, ее центр — точка пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через их середины.

Радиус R описанной окружности определяется формулами

$R = \dfrac{a}{2\sin A}$, $\quad R = \dfrac{abc}{4S}$.

10. Если ABC — правильный треугольник со стороной a, то

$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\quad S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $\quad r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, $\quad R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

11. Если ABC — прямоугольный треугольник, a, b — его катеты, c — гипотенуза (рис. 28.8), то центром описанной около этого треугольника окружности является середина O его гипотенузы AB,

$a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора),

$a = c\sin A = c\cos B = b\,\mathrm{tg}\,A$,

$m_c = \dfrac{c}{2} = R$,

$a + b = 2(R + r)$.

Последнее равенство следует из равенств $AB = 2R$, $CK = CF = r$ (рис. 28.9), $AK = AE$, $BF = BE$ (K, E, F — точки касания вписанной в прямоугольный треугольник ABC окружности с его сторонами).

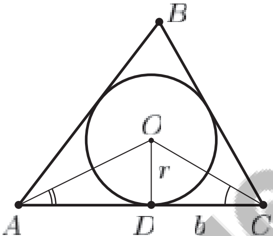

Рис. 28.7

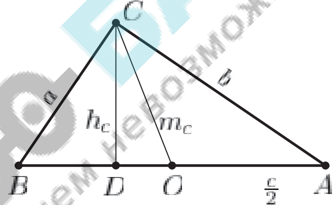

Рис. 28.8

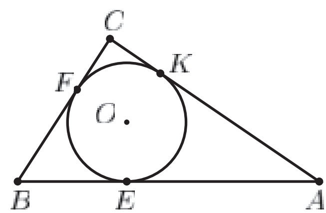

Рис. 28.9

Высота CD (рис. 28.8), опущенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу, т. е.

$h_c^2 = CD^2 = BD \cdot AD$,

а каждый катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу, т. е.

$a^2 = BC^2 = BA \cdot BD$, $\quad b^2 = AC^2 = AB \cdot AD$.

Примеры с решениями

Пример 1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены высота CD и медиана CE (рис. 28.10). Найти гипотенузу AB, если площади треугольников ABC и CDE равны соответственно 10 и 3.

Решение. Пусть $AE = 5x$, тогда $BE = CE = 5x$, $DE = 3x$. Если $CD = h$, то $\frac{1}{2} h \cdot 3x = 3$, откуда $h = \frac{2}{x}$. Применяя теорему Пифагора к треугольнику CDE, получаем

$$\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 9x^2 = 25x^2, \qquad \text{откуда} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$AB = 10x = 5\sqrt{2}.$$

Ответ. $5\sqrt{2}$.

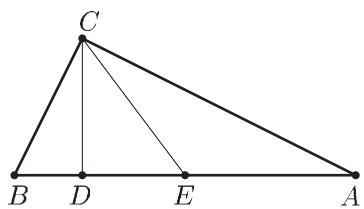

Рис. 28.10

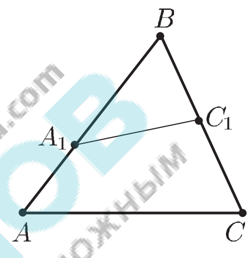

Рис. 28.11

Пример 2. На сторонах AB и BC расположены точки A_1 и C_1 (рис. 28.11) так, что

$$\frac{BA_1}{BA} = p, \qquad \frac{BC_1}{BC} = q.$$

Найти отношение площади треугольника A_1BC_1 к площади треугольника ABC.

Решение. Пусть $\angle ABC = \beta$, S и S_1 — площади треугольников ABC и A_1BC_1 соответственно. Тогда

$$S = \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin\beta,$$

$$S_1 = \frac{1}{2} BA_1 \cdot BC_1 \sin\beta,$$

откуда

$$\frac{S_1}{S} = \frac{BA_1}{BA} \cdot \frac{BC_1}{BC} = pq.$$

Ответ. pq.

Пример 3. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 8$, $BC = 4$, $AC = 6$.

Найти площадь треугольника, радиус вписанной в этот треугольник окружности и радиус описанной около него окружности, а также высоту, медиану и биссектрису, проведенные из вершины B.

Решение. 1) Так как полупериметр $p = \dfrac{8+6+4}{2} = 9$, то по формуле Герона находим $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9\cdot 5\cdot 3} = 3\sqrt{15}$;

2) $h_b = \dfrac{2S}{b} = \dfrac{6\sqrt{15}}{6} = \sqrt{15}$;

3) $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3\sqrt{15}}{9} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$;

4) $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{4\cdot 6\cdot 8}{4\cdot 3\sqrt{15}} = \dfrac{16}{\sqrt{15}}$;

5) $4m_b^2 = 2(a^2+c^2) - b^2 = 2(16+64) - 36 = 124$, откуда $m_b = \sqrt{31}$;

6) $l_b = \dfrac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c} = \dfrac{16}{3}\cos\dfrac{B}{2}$, где $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{11}{16}$,

$2\cos^2\dfrac{B}{2} = 1 + \cos B = \dfrac{27}{16}$, $\cos\dfrac{B}{2} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$, $l_b = 2\sqrt{6}$.

Ответ. $S = 3\sqrt{15}$, $h_b = \sqrt{15}$, $r = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$, $R = \dfrac{16\sqrt{15}}{15}$, $m_b = \sqrt{31}$, $l_b = 2\sqrt{6}$.

Пример 4. В правильном треугольнике ABC проведена средняя линия DE параллельно AC (рис. 28.12). Прямая, проходящая через точку A и середину F отрезка DE, пересекает BC в точке K. Найти длину отрезка AK, если $AC = a$.

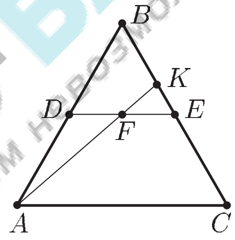

Рис. 28.12

Решение. Так как $EF = \dfrac{1}{2}DE = \dfrac{1}{4}AC$, то из подобия треугольников FKE и AKC следует, что $KE = \dfrac{1}{4}KC$, $EC = \dfrac{a}{2} = \dfrac{3}{4}KC$, откуда $KC = \dfrac{2}{3}a$. Из $\triangle AKC$ по теореме косинусов получаем

$$AK^2 = AC^2 + KC^2 - 2AC\cdot KC\cdot\cos\frac{\pi}{3} = a^2 + \frac{4}{9}a^2 - 2a\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{2} = \frac{7a^2}{9},$$

откуда находим $AK = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Ответ. $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Пример 5. Высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника ABC, если $AO = 5$, а длина высоты AD равна 8 (рис. 28.13).

Решение. Пусть E — середина AC, $AE = EC = x$, $BE = h$. Тогда из подобия треугольников AOE и ADC следует, что

$$\frac{AE}{AO} = \frac{AD}{AC}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{x}{5} = \frac{8}{2x},$$

откуда $x = 2\sqrt{5}$.

Аналогично, из подобия треугольников AOE и BEC находим

$$\frac{AE}{AO} = \frac{BE}{BC}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{h}{\sqrt{h^2+20}},$$

откуда $h^2 = 80$, $h = 4\sqrt{5}$. Искомая площадь $S = xh = 40$.

Ответ. 40.

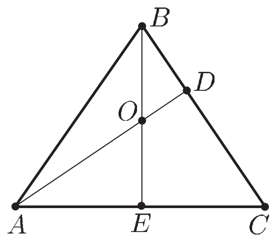

Рис. 28.13

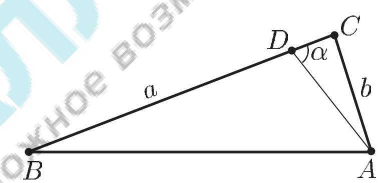

Рис. 28.14

Пример 6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = \frac{\pi}{2}$) на стороне BC расположена точка D так, что $BD = \frac{4\sqrt{10}}{3}$, $\angle ADC = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$ (рис. 28.14). Найти площадь треугольника ABC, если $AB = 5$.

Решение. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $\angle ADC = \alpha$. По теореме Пифагора

$$a^2 + b^2 = 25. \tag{1}$$

Так как $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$, $CD = b\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{3}$, $BC = BD + CD = \frac{4\sqrt{10}}{3} + \frac{b}{3}$, т. е.

$$a = \frac{4\sqrt{10}}{3} + \frac{b}{3}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем квадратное уравнение

$$10b^2 + 8b\sqrt{10} - 65 = 0,$$

откуда находим $b = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ и поэтому из (2) следует, что $a = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$. Искомая площадь $S = \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{15}{4}$.

Ответ. $\dfrac{15}{4}$.

Пример 7. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке E (см. рис. 28.9). Найти площадь треугольника ABC, если $AE = m$, $BE = n$.

Решение. Для вычисления площади S треугольника ABC воспользуемся формулой $S = pr$, где $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2}$, r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Так как $AE = AK = m$, $BF = BE = n$, $CF = CK = r$, то $p = m + n + r$ и поэтому

$$S = r(m + n + r). \tag{1}$$

По теореме Пифагора $(m+n)^2 = (m+r)^2 + (n+r)^2$ или

$$mn = r(m + n + r). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $S = mn$.

Ответ. mn.

Пример 8. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD. Около треугольника ACD описана окружность, а в треугольник BCD вписана окружность. Найти расстояние между центрами этих окружностей, если $BC = 3$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\dfrac{5}{2}$ (рис. 28.15).

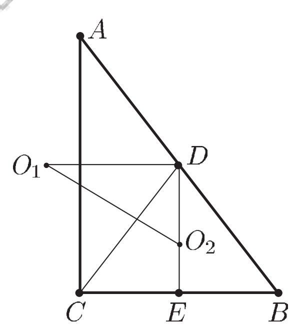

Рис. 28.15

Решение. Пусть O_1 — центр окружности радиуса R, описанной около треугольника ACD; O_2 — центр окружности радиуса r, вписанной в треугольник BCD, E — середина BC. Тогда $O_1D \perp AC$,

$DE \perp BC$, $AB = 5$, $CD = BD = \frac{5}{2}$, $AC = 4$, $\sin A = \frac{3}{5}$, $R = \frac{CD}{2\sin A} = \frac{25}{12} = O_1D$. Пусть S — площадь треугольника BCD, p — его полупериметр. Тогда $S = \frac{1}{4}AC \cdot BC = 3$, $p = 4$, $S = rp$, откуда $r = \frac{3}{4} = O_2E$, $DE = \frac{AC}{2} = 2$, $DO_2 = DE - O_2E = \frac{5}{4}$. Искомое расстояние

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1D^2 + DO_2^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{850}}{12} = \frac{5\sqrt{34}}{12}.$$

Ответ. $\frac{5\sqrt{34}}{12}$.

Пример 9. Из вершины A треугольника ABC проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов, пересекающие прямую BC в точках D и E соответственно. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ADE, если $BC = a$, $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$ (рис. 28.16).

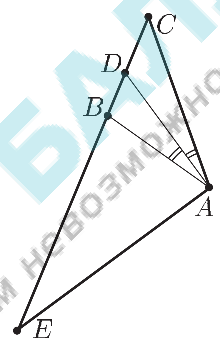

Рис. 28.16

Решение. По свойству биссектрисы угла

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3},$$

откуда следует, что $BD = \frac{2}{5}a$, $DC = \frac{3}{5}a$, так как $BC = a$. По свойству биссектрисы внешнего угла

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}.$$

Пусть $BE = x$, тогда $CE = x + a$ и поэтому $\frac{x}{x+a} = \frac{2}{3}$, откуда находим $x = 2a$, $DE = BE + BD = \frac{12}{5}a$.

Так как биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны, то DE — гипотенуза прямоугольного треугольника, а радиус описанной около него окружности равен $\frac{DE}{2}$.

Ответ. $\frac{6}{5}a$.

Пример 10. В прямоугольном треугольнике ABC $\left(\angle C = \frac{\pi}{2}\right)$ проведены биссектриса AE и медиана BD, которые пересекаются в точке M (рис. 28.17). Найти площадь треугольника ABC, если $AM = 8$, $ME = 5$.

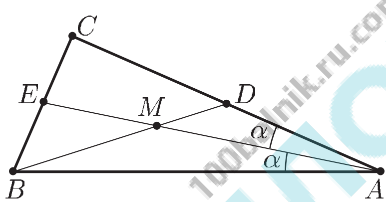

Рис. 28.17

Решение. Пусть $AC = b$, $AB = c$, $\angle CAB = 2\alpha$, тогда получим $\angle CAE = \angle BAE = \alpha$, $\cos 2\alpha = \frac{b}{c}$, $b = AE \cdot \cos\alpha = 13\cos\alpha$, $AD = \frac{b}{2}$.

Пусть S, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 — площади треугольников ABC, AMD, AMB, AEC, ABE и ABD соответственно.

Тогда

$$S = \frac{1}{2}bc\sin 2\alpha, \tag{1}$$

$$S_3 + S_4 = S = \frac{1}{2}b \cdot 13\sin\alpha + \frac{1}{2}c \cdot 13\sin\alpha, \tag{2}$$

$$S_5 = S_1 + S_2 = \frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot 8\sin\alpha + \frac{1}{2}c \cdot 8\sin\alpha, \tag{3}$$

так как $CD = AD = \frac{b}{2}$.

Из равенств (2) и (3) следует, что

$$1 = \frac{13}{8} \cdot \frac{b+c}{b+2c} = \frac{13}{8} \cdot \frac{1 + \frac{b}{c}}{2 + \frac{b}{c}} = \frac{13}{8} \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2 + \cos 2\alpha},$$

откуда находим $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $b = 13\cos\alpha = \frac{26}{\sqrt{5}}$, $C = \frac{b}{\cos 2\alpha} = \frac{26\sqrt{5}}{3}$.

По формуле (1) получаем $S = \dfrac{1352}{15}$.

Ответ. $\dfrac{1352}{15}$.

Пример 11. Медиана AD остроугольного треугольника ABC равна 5, а ортогональные проекции этой медианы на стороны AB и AC равны 4 и $2\sqrt{5}$ соответственно (рис. 28.18). Найти BC.

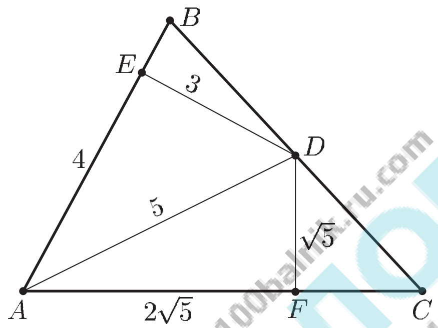

Рис. 28.18

Решение. Пусть $AB = c$, $AC = b$, DE и DF — высоты в треугольниках ABD и ACD. Тогда $AE = 4$, $AF = 2\sqrt{5}$, $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$, $DF = \sqrt{5}$. Из равенства площадей треугольников ABD и ACD (D — середина BC) следует, что $3c = \sqrt{5}b$, откуда получаем

$$c = \frac{\sqrt{5}}{3}\,b. \qquad (1)$$

По теореме Пифагора находим

$$BD^2 = ED^2 + BE^2 = (c-4)^2 + 9,$$
$$CD^2 = DF^2 + FC^2 = 5 + (b - 2\sqrt{5})^2,$$

откуда следует, что

$$(c-4)^2 + 9 = (b - 2\sqrt{5})^2 + 5, \qquad (2)$$

так как $BD = CD$.

Исключая c из системы (1)–(2), получаем

$$4 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\,b - 4\right)^2 = \left(b - 2\sqrt{5}\right)^2$$

или

$$b^2 - b \cdot 3\sqrt{5} = 0,$$

откуда находим

$$b = 3\sqrt{5}, \qquad c = 5.$$

Тогда

$$CD^2 = 5 + \left(b - 2\sqrt{5}\right)^2 = 10,$$

откуда $CD = \sqrt{10}$, $BC = 2CD = 2\sqrt{10}$.

Ответ. $2\sqrt{10}$.

Пример 12. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC расположены точки D и E соответственно так, что CD — биссектриса треугольника ABC, DE — биссектриса треугольника ACD, $EC = ED = \frac{4}{9}$, $BC = 1$. Найти CD и площадь треугольника ABC.

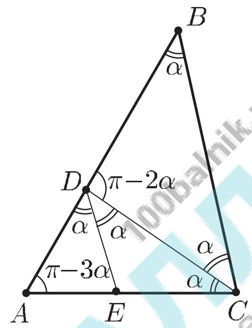

Рис. 28.19

Решение. Пусть $\angle BCD = \angle ACD = \alpha$, тогда $\angle CDE = \angle ADE = \alpha$, $\angle BDC = \pi - 2\alpha$, $\angle BAC = \pi - 3\alpha$, $\angle ABC = \alpha$ (см. рис. 28.19), $DC = 2DE \cdot \cos\alpha = \frac{8}{9}\cos\alpha$. Из $\triangle BDC$ по теореме синусов находим

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{DC}{\sin\alpha},$$

откуда $\cos^2\alpha = \frac{9}{16}$, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Применив теорему синусов в треугольнике ADC, получаем

$$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{DC}{\sin 3\alpha}, \qquad \text{где} \quad \sin 3\alpha = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha) = \frac{5\sqrt{7}}{16},$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \qquad AC = DC\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{4}{5}.$$

Искомая площадь $S = \frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin 2\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{20}$.

Ответ. $\frac{3\sqrt{7}}{20}$.

Пример 13. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC расположены соответственно точки E и F так, что $AE = 5$, $AF = 2\sqrt{37}$, $CE = 11$, $CF = 10$ (рис. 28.20). Найти площадь треугольника ABC.

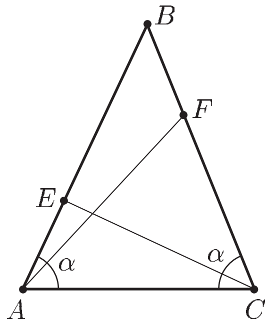

Рис. 28.20

Решение. Пусть $AC = x$, $\angle A = \angle C = \alpha$, S — площадь треугольника ABC. Тогда $S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\alpha$, где $BC = \frac{x}{2\cos\alpha}$, т. е.

$$S = \frac{x^2}{4} \operatorname{tg}\alpha.$$

Для нахождения x и α, воспользуемся теоремой косинусов для треугольников AEC и AFC. Получим

$$EC^2 = 11^2 = 25 + x^2 - 10x\cos\alpha, \quad (1)$$
$$FC^2 = 148 = 100 + x^2 - 20x\cos\alpha. \quad (2)$$

Вычитая из удвоенного равенства (1) равенство (2), находим

$$x^2 = 144, \qquad \text{откуда} \quad x = 12.$$

Подставляя найденное значение x в уравнение (1), получаем $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$ и поэтому

$$S = \frac{12^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2} = 18\sqrt{21}.$$

Ответ. $18\sqrt{21}$.

Пример 14. На сторонах AC и BC треугольника ABC расположены точки D и E (рис. 28.21) так, что

$$\frac{AD}{DC} = p, \qquad \frac{EC}{BE} = q. \quad (1)$$

Прямая, проходящая через точку E, пересекает отрезки BD и AB в точках O и F таких, что

$$\frac{OD}{OB} = r, \qquad \text{где} \quad r > q. \quad (2)$$

Найти отношение $\frac{AF}{BF}$.

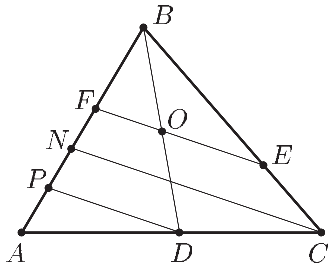

Рис. 28.21

Решение. Пусть N и P — точки, в которых прямые, проведенные через точки C и D параллельно EF, пересекают AB (рис. 28.21). Тогда, используя условия (1) и (2), получаем

$$\frac{PF}{BF} = \frac{OD}{OB} = r, \tag{3}$$

$$\frac{FN}{BF} = \frac{EC}{BE} = q. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$\frac{PN}{BF} = \frac{PF - FN}{BF} = r - q. \tag{5}$$

Аналогично, используя первое из условий (1), находим

$$\frac{AP}{PN} = \frac{AD}{DC} = p. \tag{6}$$

Из (3), (5) и (6) получаем

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AP + PF}{BF} = r + \frac{AP}{PN} \cdot \frac{PN}{BF} = r + p(r - q).$$

Ответ. $r + p(r - q)$.

Пример 15. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O. Прямая, проведенная через точки A и O, пересекает отрезок BC в точке M (рис. 28.22). Найти угол A и площадь треугольника ABC, если $AO = 3$, $OM = \frac{27}{11}$.

Решение. Пусть BD — высота в $\triangle ABC$, $AC = 2a$, $\angle BAC = 2\alpha$, r — радиус вписанной окружности. Тогда $OD = r = a \operatorname{tg} \alpha = AO \cdot \sin \alpha$, откуда

$$a = 3 \cos \alpha. \tag{1}$$

Из $\triangle AMC$ по теореме синусов находим

$$\frac{AM}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin(\pi - 3\alpha)},$$

где $AM = AO + OM = \frac{60}{11}$, $AC = 2a$. Поэтому

$$\frac{60}{11\sin 2\alpha} = \frac{2a}{\sin 3\alpha}\,. \tag{2}$$

Используя формулы $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, из (1) и (2) получаем $5(3 - 4\sin^2\alpha) = 11\cos^2\alpha$, откуда

$$\sin^2\alpha = \frac{4}{9}\,, \qquad \cos 2\alpha = \frac{1}{9}\,, \qquad \angle A = \arccos\frac{1}{9}\,.$$

Так как $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, то из (1) следует, что $a = \sqrt{5}$. Пусть S — площадь треугольника ABC. Тогда $S = BD \cdot a$, где $BD = a\,\mathrm{tg}\,2\alpha$.

Учитывая, что $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos 2\alpha = \frac{1}{9}$, находим

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = 4\sqrt{5}$$

и поэтому $BD = 20$, $S = 20\sqrt{5}$.

Ответ. $\angle A = \arccos\frac{1}{9}$, $S = 20\sqrt{5}$.

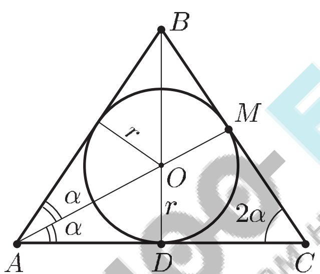

Рис. 28.22

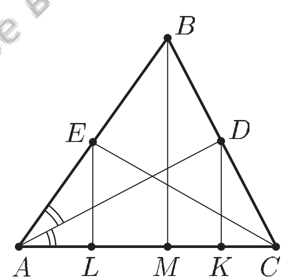

Рис. 28.23

Пример 16. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD и медиана CE, а точки K и L являются ортогональными проекциями на сторону AC точек D и E соответственно, причем $AK = 4KC$, $AL = \frac{3}{7}LC$ (рис. 28.23). Найти отношение $\frac{AD}{CE}$.

Решение. Пусть BM — высота в $\triangle ABC$, $AC = 10x$. Тогда $AL = 3x$, $LC = 7x$, $AK = 8x$, $KC = 2x$. Так как E — середина AB, то EL — средняя линия в $\triangle ABM$, $EL = \frac{BM}{2}$, $LM = AL = 3x$, $AM = 6x$, $MC = 4x$, $MK = KC = 2x$. Поэтому KD — средняя линия в $\triangle MBC$ и $BD = DC$. Таким образом, AD — биссектриса и медиана в $\triangle ABC$, откуда следует, что $AD \perp BC$ и $AC = AB = 10x$.

По свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла, $AD^2 = AC \cdot AK = 80x^2$, $AD = 4\sqrt{5}x$.

Из прямоугольного треугольника ABM, в котором $AB = 10x$, $AM = 6x$, находим $BM = 8x$ и поэтому $EL = \frac{1}{2} BM = 4x$.

Наконец, из $\triangle CEL$ получаем $CE^2 = EL^2 + LC^2 = 16x^2 + 49x^2 = 65x^2$, $CE = x\sqrt{65}$, а искомое отношение

$$\frac{AD}{CE} = \frac{4\sqrt{5}x}{x\sqrt{65}} = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

Ответ. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Пример 17. Медиана AD и высота CE треугольника ABC, в котором $AB = BC$, пересекаются в точке P так, что $CP = 5$, $PE = 2$ (рис. 28.24). Найти площадь треугольника ABC.

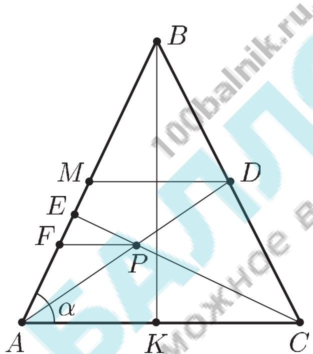

Рис. 28.24

Решение. Пусть $AC = b$, $BC = AB = a$, $\angle BAC = \alpha$. Если $M \in AB$, $F \in AB$ и $MD \| AC$, $PF \| AC$, то $MB = BD = \frac{a}{2}$. Так как $PE = 2$, $CP = 5$, то из подобия треугольников FEP и AEC следует, что

$$\frac{PF}{AC} = \frac{EF}{AE} = \frac{PE}{EC} = \frac{2}{7},$$

откуда получаем

$$PF = \frac{2}{7} b, \qquad EF = \frac{2}{7} AE. \tag{1}$$

Аналогично, учитывая, что $MD = \frac{b}{2}$, $AM = \frac{a}{2}$, из подобия треугольников AFP и AMD и равенств (1) находим:

$$AF = \frac{2}{7} a, \qquad AE = \frac{7}{5} AF = \frac{2}{5} a. \tag{2}$$

Из треугольника AEC, в котором $CE \perp AB$, получаем:

$$AE = AC \cdot \cos\alpha = b\cos\alpha, \tag{3}$$

$EC = AC \cdot \sin\alpha$, т. е.

$$b\sin\alpha = 7. \tag{4}$$

Из прямоугольного треугольника ABK (K — середина AC) находим:

$$\frac{b}{2} = a\cos\alpha. \tag{5}$$

Из (2), (3) и (5) следует, что $\frac{2}{5}a = b\cos\alpha = 2a\cos^2\alpha$, откуда

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}. \tag{6}$$

Пусть S — площадь треугольника ABC, тогда в силу (4)

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{7}{2}a, \tag{7}$$

а из (4), (5) и (7) следует, что $a = \frac{b}{2\cos\alpha} = \frac{7}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{35}{4}$ и поэтому $S = \frac{7}{2}\cdot\frac{35}{4} = \frac{245}{8}$.

Ответ. $\frac{245}{8}$.

Пример 18. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы AM и BK пересекаются в точке O. Площади треугольников BOM и COM (рис. 28.25) равны соответственно 25 и 30. Найти площадь треугольника ABC и проекцию отрезка OM на прямую BC.

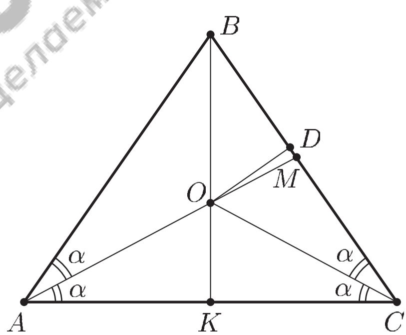

Рис. 28.25

Решение. Пусть K — середина AC, тогда $O \in BK$. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$, $AK = a$, тогда $AC = 2a$,

$$\angle BAO = \angle OAC = \angle OCA = \angle OCB = \alpha.$$

1) Если S_1 и S_2 — площади треугольников BOM и COM соответственно, то

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} = \frac{BM}{MC}.$$

С другой стороны, по свойству биссектрисы

$$\frac{5}{6} = \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{2a},$$

где $\frac{a}{AB} = \cos 2\alpha$. Следовательно, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, откуда

$$\cos^2\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}.$$

Искомая площадь S треугольника ABC равна $2(S_1 + S_2) + 2\sigma$, где σ — площадь треугольника KOC.

Так как $\frac{\sigma}{S_1 + S_2} = \frac{OK}{OB} = \frac{KC}{BC} = \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, а $S_1 + S_2 = 55$, то $\sigma = \frac{3}{5} \cdot 55 = 33$, $S = 2(S_1 + S_2 + \sigma) = 176$.

2) Пусть $D \in BC$ и $OD \perp BC$, тогда DM — проекция отрезка OM на прямую BC. Заметим, что точка D может лежать либо на отрезке BM, либо на отрезке MC. В первом случае $DM = OD \cdot \operatorname{ctg}\beta$, где $\beta = \angle OMB = 3\alpha$ (по свойству внешнего угла треугольника MAC), во втором $DM = OD \cdot \operatorname{ctg}(\pi - 3\alpha) = -OD \cdot \operatorname{ctg} 3\alpha$. Таким образом, $DM = OD \cdot |\operatorname{ctg} 3\alpha|$, где

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{11}$$

и поэтому $DM = \frac{2OD}{11}$, где $OD = \frac{2S_1}{BM}$. Так как $S_1 = 25$, $\frac{BM}{MC} = \frac{5}{6}$, $BM = \frac{5}{11} BC = \frac{5}{11} \frac{a}{\cos 2\alpha} = \frac{25}{33} a$, то $OD = \frac{66}{a}$, $DM = \frac{66}{a} \cdot \frac{2}{11} = \frac{12}{a}$. Чтобы найти a, воспользуемся тем, что $S = 176 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot BK = a^2 \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3} a^2$, откуда $a = 2\sqrt{33}$, $DM = \frac{12}{a} = \frac{6}{\sqrt{33}} = 2\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Ответ. 176, $2\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Задачи

Уровень I

1. В треугольнике ABC известны длины его сторон: $AB = \frac{8}{3}$, $BC = \frac{10}{3}$, $AC = 2$.
Найти:
а) площадь треугольника ABC;
б) высоту, медиану и биссектрису, проведенные из вершины B;
в) радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, и радиус описанной около него окружности.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Найти площадь треугольника ABD, если $BC = a$, $AB = c$, $\angle B = \beta$.

3. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен $\operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен 5. Найти: а) длину высоты, опущенной на гипотенузу; б) радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

4. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найти высоту, биссектрису и медиану, проведенные из вершины прямого угла.

5. В треугольник ABC вписан полукруг так, что его диаметр принадлежит стороне AC. Найти радиус этого полукруга, если $AB = c$, $BC = a$, $\angle ABC = \beta$.

6. Найти боковую сторону и угол при вершине равнобедренного треугольника, если его основание равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5.

7. Найти площадь треугольника, если его основание равно a, а углы при основании равны α и β.

8. В треугольнике ABC угол C прямой, $BC = 4$, радиус описанной окружности равен 5. Найти биссектрису BE.

9. Найти высоту CD треугольника ABC, если $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

10. Найти ортогональную проекцию стороны AC треугольника ABC на сторону AB, если $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$.

11. В равнобедренном треугольнике основание равно 15, высота равна 10. Найти высоту, опущенную на боковую сторону.

12. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC расположены соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = 3$, $CB_1 = B_1A$. Найти отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC.

13. Найти сторону AB треугольника ABC, если $BC = 14$, $AC = 6$, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$.

14. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) основание AC равно 5, а высота $AD = 4$. Найти площадь треугольника ABC.

15. Найти площадь треугольника ABC, если $AC = 10$, медианы AD и CE равны 9 и 12.

16. Найти угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$), если медианы AD и CE взаимно перпендикулярны.

Уровень II

1. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CD. Найти гипотенузу AB, если $CD = AD - BD = \sqrt{5}$.

2. В треугольнике ABC с прямым углом C проведена биссектриса AD. Найти площадь треугольника ABC, если $CD = 4$, $BD = 5$.

3. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найти расстояние от центра вписанной в этот треугольник окружности до высоты, опущенной на гипотенузу.
4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC расположены точки E и F так, что $CE = \sqrt{2}CF$, $AE = EF = FB$. Найти угол B.
5. Прямая, проходящая через вершину A равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) и центр вписанной в него окружности, пересекает сторону BC в точке D. Найти AD, если $AB = c$, $\angle B = \beta$.
6. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$), если радиус вписанной в него окружности равен r, а высота BD равна h.
7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, а через точку D — прямая, параллельная AC и пересекающая AB в точке E. Найти DE, если $AB = c$, $AC = b$.
8. Найти площадь прямоугольного треугольника, если радиус описанной около этого треугольника окружности равен 5, а радиус вписанной в него окружности равен 2.
9. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если радиус описанной около него окружности равен 10, $AB = 12$, $AC = 20$.
10. В треугольнике ABC углы A и C соответственно равны $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{6}$. Найти угол между высотой BD и медианой BE этого треугольника.
11. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CF. Найти FD, если $AC = 6$, $AF = 2$, $CD = 3$.
12. Найти биссектрису AD треугольника ABC, если $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.
13. Медианы BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки P и Q расположены на отрезках BE и CF так, что $\frac{BP}{PE} = \frac{1}{2}$, $\frac{CQ}{QF} = \frac{5}{4}$. Найти площадь треугольника POQ, если площадь треугольника ABC равна 72.
14. Из вершины C прямого угла треугольника ABC проведены высота CD и медиана CE. Найти AB, если площади треугольников ACD и BCE равны соответственно 4 и 10.
15. Через вершину равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) и центр описанной около него окружности проведена прямая, пересекающая BC в точке D. Найти длину отрезка BD, если $AB = c$, $\angle B = \beta$.
16. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC расположены точки D и E так, что $\angle ACD = \angle DCE = \angle BCE$, $4CD = 3\sqrt{3}CE$. Найти угол ABC.
17. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC расположены точки D и E так, что $DE = EC = 2$, $AE = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найти периметр треугольника ABC.
18. На сторонах BC и AB правильного треугольника ABC расположены соответственно точки D и E так, что $BD = \frac{1}{3}BC$, $AE = DE$. Найти CE, если $AB = a$.
19. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD, а из точки D опущены перпендикуляры DE и DF на стороны AB и BC. Найти длину отрезка BD, если $EF = a$, $\angle ABC = \beta$.
20. На стороне AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = \frac{\pi}{2}$) расположена точка D так, что $\angle BDC = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, $AD = \sqrt{6}$. Найти площадь треугольника ABC, если $AB = 6$.

21. Через середину катета AB прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая гипотенузу AC в точке E, а продолжение катета BC за точку B — в точке F. Найти площадь треугольника ABC, если $AE = 2$, $BF = 3$, $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$.

22. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки BM и AN пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника CMN, если площади треугольников AOM, AOB и BON равны соответственно S_1, S_2 и S_3.

23. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. В каком отношении медиана CE делит отрезок AD.

24. В треугольнике ABC проведена высота BD, а через точку D — прямая, пересекающая BC в точке K. Найти отношение $\frac{BK}{KC}$, если отношение площади треугольника DBK к площади треугольника ABC равно $\frac{3}{16}$.

25. Длины сторон треугольника ABC удовлетворяют условию $BC^2 + AC^2 = 5AB^2$. Найти угол между медианами AM и BN.

26. Точки N и M расположены соответственно на сторонах AC и BC треугольника ABC так, что $\frac{CN}{NA} = 5$, а отношение площади треугольника NMC к площади четырехугольника $ANBM$ равно $\frac{5}{6}$. Найти отношение $\frac{CM}{MB}$.

27. Найти отношение площади треугольника ABC и площади треугольника $A_1B_1C_1$, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

28. Из точки P, лежащей внутри правильного треугольника ABC, опущены перпендикуляры PD, PE и PF соответственно на BC, CA и AB. Вычислить $\frac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}$.

29. Найти площадь треугольника ABC, если $AB = 4$, $AC = 3$, а биссектриса AD равна 2.

30. Найти угол между медианой CD и высотой CE треугольника ABC, если $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ и $\beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

31. Найти площадь треугольника ABC, если $AB = 29$, $AC = 27$, а медиана AD равна 26.

32. В треугольнике ABC проведены высота BD и прямая, параллельная BD, пересекающая AC в точке F и делящая площадь треугольника ABC пополам. Найти AF и FC, если $AD = 18$, $DC = 7$.

33. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найти длину отрезка DE, если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

34. Найти сторону BC в треугольнике ABC, если $AB = c$, $AC = b$, $\angle A = 2\angle B$.

Уровень III

1. Биссектриса AE треугольника ABC, в котором $AB = BC$, пересекает высоту BD в точке O, а высота AF пересекает BD в точке K. Найти отношение $\frac{BK}{KD}$, если $OB = 3OD$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медиана AD и биссектриса CE перпендикулярны. Найти угол ADB.

3. В треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AE и высота AD. Площадь треугольника AEM равна $\frac{1}{14}$ площади треугольника ABC, а площадь треугольника ADM равна $\frac{7}{50}$ площади треугольника ABC. Найти углы треугольника ABC.

4. В остроугольном треугольнике ABC высота AD, медиана BE и биссектриса CF пересекаются в точке O. Найти угол C, если $OE = 2OC$.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AE и BK. Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника KEC, если $\frac{BC}{AB} = m$, $\frac{AC}{AB} = n$.

6. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC расположены точки E и D соответственно так, что AD — биссектриса треугольника ABC, DE — биссектриса треугольника ABD, $AE = ED = \frac{9}{16}$, $CD = \frac{3}{4}$. Найти AC и площадь треугольника ABC.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы CM и BK пересекаются в точке O. Площади треугольника BOM и AOM соответственно равны 25 и 40. Найти площадь треугольника ABC и проекцию отрезка OM на прямую AB.

8. Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника ABC, если $CM = 5$, $ME = 1$.

9. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N так, что $\frac{AM}{MB} = p$, $\frac{BN}{NC} = q$. Прямая, проходящая через точку B и общую точку прямых AN и CM, пересекает AC в точке D. Найти отношение $\frac{AD}{DC}$.

10. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и медиана BE, а точки M и N являются ортогональными проекциями на сторону AB точек D и E соответственно, причем $AM = 9MB$, $AN = \frac{2}{3}NB$. Найти отношение $\frac{AD}{BE}$.

11. В прямоугольном треугольнике ABC $\left(\angle C = \frac{\pi}{2}\right)$ проведены медиана BD и биссектриса AE, пересекающиеся в точке M. Найти площадь треугольника ABC, если $AM = 9$, $ME = 5$.

12. В треугольнике ABC точки D и E расположены соответственно на сторонах AB и BC так, что $DE \| AC$, $AD = 8$, $EC = 10$, $DE = 2$. Биссектриса угла C пересекает отрезок AD в его середине. Найти площадь треугольника ABC.

13. Точка E лежит на продолжении стороны AC правильного треугольника ABC за точку C. Точка K — середина отрезка CE. Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно AB, и прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, пересекаются в точке D. Найти углы треугольника BKD.

14. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает продолжение стороны BC в точке M так, что $\frac{MC}{MB} = \frac{1}{5}$.

Перпендикуляр, проходящий через середину стороны BC, пересекает сторону AC в точке N так, что $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$. Определить углы треугольника ABC.

15. Из вершины A треугольника ABC проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов, пересекающие прямую BC в точках D и E соответственно. Определить отношение $\frac{AB}{AC}$, если $\frac{BD}{BE} = \frac{3}{5}$.

16. Медиана BD остроугольного треугольника ABC равна 8, а ортогональные проекции этой медианы на стороны AB и BC равны 6 и $5\sqrt{2}$ соответственно. Найти AC.

17. Доказать, что если P, Q, R суть, соответственно, точки пересечения сторон BC, CA, AB (или их продолжений) треугольника ABC с некоторой прямой, то

$$\frac{PB}{PC}\,\frac{QC}{QA}\,\frac{RA}{RB} = 1.$$

18. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC в 3 раза больше катета AB. Точками K и F катет AC разделен на три равные части. Доказать, что

$$\angle AKB + \angle AFB + \angle ACB = \frac{\pi}{2}.$$

19. Пусть a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — гипотенуза, h — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу. Доказать, что треугольник со сторонами h, $c+h$, $a+b$ является прямоугольным.

20. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине равен 20°. Доказать, что $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

21. Доказать, что угол треугольника будет острым, прямым или тупым, смотря по тому, будет ли противоположная сторона меньше, равна или больше удвоенной соответствующей медианы.

22. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 20°. На боковых сторонах AB и BC взяты, соответственно, точки Q и P так, что $\angle ACQ = 60^\circ$, а $\angle CAP = 50^\circ$. Доказать, что $\angle APQ = 80^\circ$.

23. Доказать, что если между сторонами a, b, c треугольника существует зависимость $a^2 = b^2 + bc$, то углы A и B, противолежащие сторонам a и b, удовлетворяют равенству $\angle A = 2\angle B$.

24. Треугольник AOB повернут в своей плоскости вокруг вершины O на 90°, причем вершина A перешла в A_1, а вершина B — в B_1. Доказать, что в треугольнике OAB_1 медиана стороны AB_1 является высотой для $\triangle OA_1B$ (аналогично медиана стороны A_1B в $\triangle OA_1B$ является высотой для $\triangle OAB_1$).

25. Доказать, что сумма произведений высот остроугольного треугольника на отрезки их от ортоцентра до вершины равна полусумме квадратов сторон. Обобщить это предложение на случай тупоугольного треугольника.

26. Доказать, что квадрат биссектрисы, проведенной через вершину произвольного треугольника, равен произведению боковых сторон без произведения отрезков основания.

27. На сторонах AB и AC треугольника ABC отложены в противоположных направлениях два равных отрезка $BD = CE$. Доказать, что отрезок DE делится стороной BC в отношении, обратном отношению сторон AB и AC.

28. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

29. Доказать, что прямая, симметричная с медианой относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника, делит противоположную сторону на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон.

30. На сторонах треугольника ABC взяты точки P, Q, R так, что три прямые AP, BQ и CR пересекаются в одной точке. Доказать, что

$$AR \cdot BP \cdot CQ = RB \cdot PC \cdot QA.$$

31. Доказать, что в любом треугольнике радиус описанного круга R и радиус вписанного круга r связаны с расстоянием l между центрами этих кругов соотношением

$$l^2 = R^2 - 2Rr.$$

32. Доказать, что в любом треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной не превосходит $\frac{1}{2}$.

33. Вершины A, B и C треугольника соединены с точками A_1, B_1, C_1, расположенными произвольно на противоположных сторонах (но не в вершинах). Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не лежат на одной прямой.

34. Через произвольную точку O, взятую внутри треугольника ABC, проведены прямые DE, FK, MN, параллельные, соответственно, AB, AC, BC, причем F и M лежат на AB, E и K — на BC, N и D — на AC. Доказать, что

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1.$$

35. В треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на наибольшей стороне треугольника. Доказать неравенство $\sqrt{2}r < x < 2r$, где x — длина стороны квадрата, r — радиус круга, вписанного в данный треугольник.

36. Доказать, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков высот, заключенных между каждой из вершин и точкой пересечения высот, представляют собой девять точек, лежащих на одной окружности. Показать, что центр этой окружности лежит на середине отрезка, соединяющего точку пересечения высот данного треугольника с центром описанного круга, а радиус равен половине радиуса описанного круга.

37. В треугольнике из основания каждой высоты опущены перпендикуляры на две другие стороны. Доказать, что: 1) основания этих перпендикуляров являются вершинами шестиугольника, три из сторон которого параллельны сторонам треугольника; 2) вокруг этого шестиугольника можно описать окружность.

38. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ расположены симметрично друг другу относительно центра их общего вписанного круга радиуса r. Доказать, что произведение площадей ABC, $A_1B_1C_1$ и шести треугольников, получившихся при пересечении сторон $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, равно r^{16}.

39. Доказать, что если в треугольнике ABC биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из вершины C, то угол C прямой.

Ответы

Уровень I

1. а) $S = \frac{8}{3}$; б) $h_b = \frac{8}{3}$, $m_b = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $l_b = \frac{8\sqrt{10}}{9}$; в) $r = \frac{2}{3}$, $R = \frac{5}{3}$. **2.** $\frac{ac^2 \sin\beta}{2(a+c)}$.

3. а) 4,8; б) 2. **4.** $h = 4{,}8$, $l = \frac{24\sqrt{2}}{7}$, $m = 5$. **5.** $\frac{ac\sin\beta}{a+c}$. **6.** $6, \arccos\frac{5}{9}$.

7. $\frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **8.** $4\sqrt{\frac{10}{7}}$. **9.** $\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

10. $\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$. **11.** 12. **12.** $\frac{5}{24}$. **13.** 10. **14.** $\frac{25}{3}$. **15.** 72. **16.** $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}$.

Уровень II

1. 5. **2.** 54. **3.** 1. **4.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$. **5.** $\frac{c\sin\beta}{\sin\frac{3}{4}(\pi-\beta)}$. **6.** $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}$. **7.** $\frac{bc}{b+c}$. **8.** 24.

9. 4. **10.** $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **11.** $\frac{\sqrt{145}}{5}$. **12.** $\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{(\sin\beta+\sin\gamma)\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}$.

13. 2. **14.** 10. **15.** $\frac{c\sin\beta}{\sin\frac{3\beta}{2}}$. **16.** $\mathrm{arctg}\,\frac{5}{\sqrt{3}}$. **17.** 30. **18.** $\frac{13}{15}a$. **19.** $\frac{a}{\sin\beta}$.

20. $6\sqrt{2}$. **21.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **22.** $\frac{S_1S_3(S_2+S_1)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$. **23.** 3 : 2. **24.** 3 или $\frac{1}{3}$.

25. $\frac{\pi}{2}$. **26.** $\frac{6}{5}$. **27.** $\frac{4}{3}$. **28.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **29.** $\frac{7\sqrt{95}}{12}$. **30.** $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}(\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta)$.

31. 270. **32.** 15, 10. **33.** $\sqrt{\frac{29}{5}}$. **34.** $\sqrt{b(b+c)}$.

Уровень III

1. 7. **2.** $\pi - \arcsin\frac{\sqrt{10}}{4}$. **3.** $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle B = \arcsin\frac{4}{5}$, $\angle C = \arcsin\frac{3}{5}$. **4.** $\arccos\frac{1}{7}$.

5. $\frac{mn}{(m+1)(n+1)}$. **6.** $AC = 1$, $S = \frac{2\sqrt{5}}{7}$. **7.** $234, 6\sqrt{\frac{6}{13}}$. **8.** 30. **9.** $\frac{1}{pq}$. **10.** $\sqrt{2}$.

11. $\frac{1323}{20}$. **12.** $\frac{128}{3}$. **13.** $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$. **14.** $\mathrm{arctg}\,2$, $\mathrm{arctg}\,3$, $\frac{\pi}{4}$. **15.** 1 : 4. **16.** $8\sqrt{2}$.

§ 29. Четырехугольник

Справочные сведения

1. ***Трапеция.***

а) Если MN — *средняя линия трапеции*, т. е. отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон AB и CD (рис. 29.1), то $MN \| AD$ и $MN = \frac{BC+AD}{2}$, т. е. средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований.

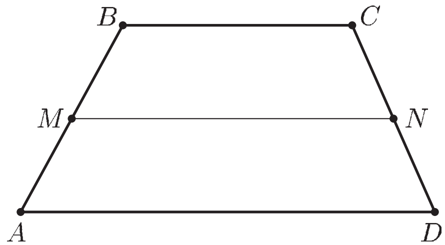

Рис. 29.1

б) *Площадь S трапеции* равна произведению ее средней линии на высоту, т. е. если a и b — основания трапеции, h — ее высота, то $S = \frac{a+b}{2}h$.

в) $\angle A + \angle B = \pi$, $\angle C + \angle D = \pi$ (рис. 29.1).

г) Около трапеции $ABCD$ (рис. 29.1) можно *описать окружность* тогда и только тогда, когда трапеция является равнобедренной (равнобокой), т. е. $AB = CD$.

д) В трапецию $ABCD$ (рис. 29.1) можно *вписать окружность* тогда и только тогда, когда сумма ее оснований равна сумме боковых сторон, т. е.

$$AD + BC = AB + CD.$$

2. *Параллелограмм.*

а) Если $ABCD$ — параллелограмм ($AB \| CD$, $BC \| AD$), то $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (рис. 29.2), т. е. в параллелограмме противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны, а диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ точкой пересечений O делятся пополам, т. е.

$$AO = OC, \qquad BO = OD.$$

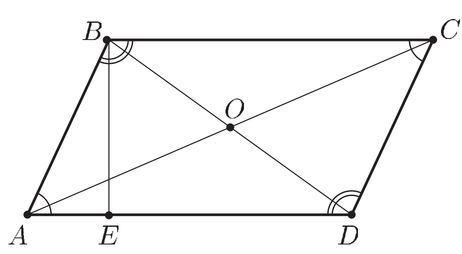

Рис. 29.2

б) *Площадь S параллелограмма $ABCD$* равна произведению его основания AD на высоту BE (рис. 29.2), т. е.

$S = AD \cdot BE$

или

$S = AD \cdot AB \cdot \sin A$.

в) В параллелограмме $ABCD$ сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон, т. е.

$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$.

г) Если параллелограмм $ABCD$ — ромб ($AB = BC$) (рис. 29.2), то его диагонали AC и BD перпендикулярны и делят углы ромба пополам.

3. ***Выпуклый четырехугольник.***

а) *Площадь S выпуклого четырехугольника $ABCD$* (рис. 29.3) равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними, т. е. $S = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha$.

б) В выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны, т. е. $AB + CD = BC + AD$ (рис. 29.3).

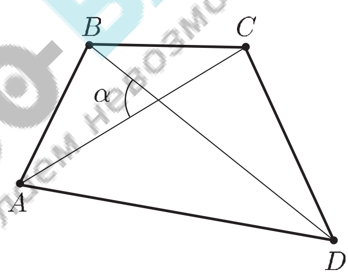

Рис. 29.3

в) Около выпуклого четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны π, т. е. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = \pi$ (рис. 29.3).

Примеры с решениями

Пример 1. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны a и b соответственно ($b < a$). Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает боковые стороны в точках E и F. Найти длину отрезка EF, если:

а) $\dfrac{BE}{AE} = \lambda$;

б) EF проходит через точку пересечения диагоналей трапеции;

в) EF делит трапецию на две равновеликие фигуры.

Решение. а) Проведем через точки C и F прямые, параллельные AB и пересекающие EF и AD в точках M и N (рис. 29.4).

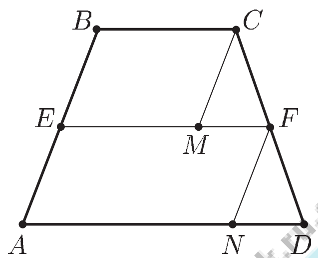

Рис. 29.4

Из подобия треугольников CMF и FDN следует, что

$$\frac{CF}{FD} = \frac{MF}{ND} = \frac{EF - b}{a - EF}.$$

Но $\dfrac{CF}{FD} = \dfrac{BE}{AE} = \lambda$. Отсюда находим $\dfrac{EF - b}{a - EF} = \lambda$,

$$EF = \frac{b + a\lambda}{1 + \lambda}. \qquad (1)$$

б) Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции, h_1 и h_2 — высоты в треугольниках OBC и OAD, проведенные через точку O (рис. 29.5). Тогда $\dfrac{b}{a} = \dfrac{h_1}{h_2}$. С другой стороны, $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{CF}{FD} = \dfrac{BE}{AE}$. Следовательно,

$$\frac{BE}{AE} = \frac{b}{a}.$$

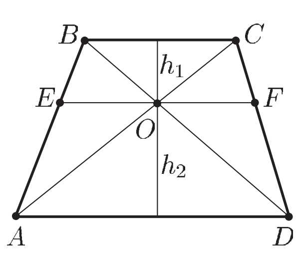

Рис. 29.5

Из формулы (1) при $\lambda = \dfrac{b}{a}$ получаем

$$EF = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}.$$

Таким образом, если прямая параллельна основаниям трапеции и проходит через точку пересечения ее диагоналей, то отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, есть *среднее гармоническое ее оснований*.

в) Пусть H_1 и H_2 — высоты равновеликих трапеций $AEFD$ и $EBCF$ (рис. 29.4), $EF = x$. Тогда

$$\frac{x+a}{2} H_2 = \frac{x+b}{2} H_1,$$

откуда $\dfrac{H_1}{H_2} = \dfrac{x+a}{x+b}$.

Из подобия треугольников CMF и FND получаем

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{x-b}{a-x}.$$

Следовательно, $\dfrac{x+a}{x+b} = \dfrac{x-b}{a-x}$, откуда

$$x = EF = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Таким образом, если прямая параллельна основаниям трапеции и делит площадь трапеции пополам, то отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, есть *среднее квадратическое ее оснований*.

Пример 2. Точки E и F — середины диагоналей трапеции $ABCD$ (рис. 29.6). Найти длину отрезка EF, если $AD = a$, $BC = b$, $a > b$.

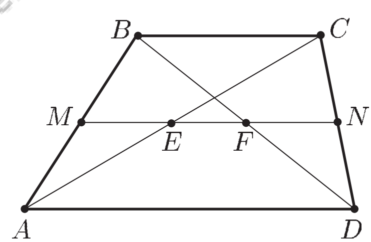

Рис. 29.6

Решение. Так как точки E и F лежат на ее средней линии MN, то $ME = FN = \dfrac{b}{2}$. Следовательно, $EF = MN - (ME + FN) = \dfrac{a+b}{2} - b = \dfrac{a-b}{2}$.

Ответ. $\dfrac{a-b}{2}$.

Пример 3. Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках E и F (рис. 29.7), а сторон основания — в точках P и Q. Найти:

а) EF, PQ и AC, если $AD = a$, $BC = b$;

б) BC, AD и EQ, если радиус окружности равен $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, а $\angle ANQ = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (N — точка пересечения диагоналей AC и BD).

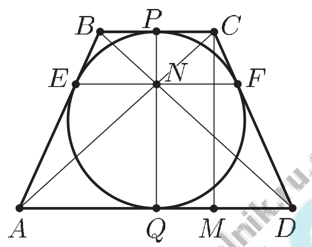

Рис. 29.7

Решение. а) Так как $BE = \dfrac{b}{2}$, $AE = \dfrac{a}{2}$, то $\dfrac{BE}{AE} = \dfrac{b}{a}$. Из формулы (1) при $\lambda = \dfrac{b}{a}$ получаем $EF = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Отсюда (см. пример 1, б) следует, что EF проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на AD. Так как равнобедренная трапеция описана около окружности, то $2CD = a + b$, откуда $CD = \dfrac{a+b}{2}$. Далее, $MD = \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2}$.

По теореме Пифагора находим

$$CM = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2},$$

откуда

$$CM = \sqrt{ab}.$$

Таким образом, *если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то высота трапеции* есть *среднее геометрическое ее оснований*.

Пусть r — радиус вписанной окружности, тогда

$$r = \frac{\sqrt{ab}}{2}. \tag{2}$$

Отрезок AC найдем из треугольника ACM, где $CM = \sqrt{ab}$, $AM = a - MD = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$. Следовательно,

$$AC = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + ab} = \frac{\sqrt{a^2+6ab+b^2}}{2}\,. \qquad (3)$$

б) Пусть $BC = b$, $AD = a$. Тогда $AQ = \dfrac{a}{2}$, $BP = \dfrac{b}{2}$, $NQ = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha$, $NP = \dfrac{b}{2}\operatorname{ctg}\alpha$, где $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Так как $NQ + NP = PQ = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, то

$$a + b = \frac{16}{3}\,.$$

По доказанному выше, $CM = PQ = \sqrt{ab}$. Следовательно,

$$ab = \frac{16}{3}\,.$$

Решая систему, находим

$$a = 4, \qquad b = \frac{4}{3}\,, \quad \text{т. е.} \quad BC = \frac{4}{3}\,, \qquad AD = 4.$$

Пусть $\angle FDQ = \beta$, тогда $\sin\beta = \dfrac{CM}{CD}$, где $CM = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $CD = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{8}{3}$, откуда $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$. Таким образом, $\triangle FDQ$ является равносторонним и поэтому $FQ = \dfrac{a}{2} = 2$.

Пример 4. Окружность вписанная в трапецию $ABCD$ (рис. 29.8), касается боковых сторон AB и CD трапеции в точках F и M. Найти:

а) сумму квадратов расстояний от центра O окружности до вершин трапеции, если $AB = p$, $CD = q$;

б) площадь трапеции, если $AF = m$, $FB = n$, меньшее основание $BC = b$.

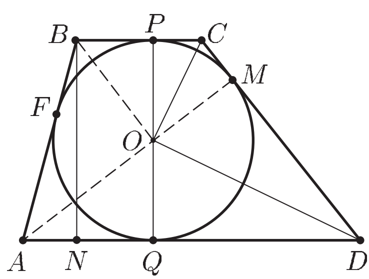

Рис. 29.8

Решение. а) Пусть P и Q — точки, в которых окружности касаются оснований BC и AD трапеции. Из равенства прямоугольных треугольников OPC и COM следует, что ОС — биссектриса угла PCM. Аналогично OD — биссектриса угла MDQ. Но $\angle PCM + \angle MDQ = \pi$. Поэтому $\angle COD = \frac{\pi}{2}$. Аналогично $\angle BOA = \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = p^2 + q^2.$$

б) Пусть h — высота трапеции, r — радиус вписанной в трапецию окружности, тогда $h = 2r$. Проведем через точку B прямую, параллельную PQ и пересекающую AD в точке N, тогда $BN = h$. Так как $AQ = AF = m$, $BP = FB = n$, то $AN = m - n$. Из треугольника ABN находим $h^2 = (m+n)^2 - (m-n)^2 = 4mn$, откуда $h = 2\sqrt{mn}$, $r = \sqrt{mn}$. Так как OM — высота, проведенная из вершины прямого угла COD, то $OM^2 = CM \cdot DM$, где $CM = PC = BC - BP = b - n$. Отсюда находим

$$DM = DQ = \frac{r^2}{b-n} = \frac{mn}{b-n}.$$

Пусть S — площадь трапеции $ABCD$, тогда

$$S = \frac{1}{2}(BC + AD)h,$$

где $BC = b$, $AD = AQ + DQ = m + \frac{mn}{b-n} = \frac{bm}{b-n}$, $BC + AD = b + \frac{bm}{b-n} = \frac{b(b+m-n)}{b-n}$, $h = 2\sqrt{mn}$.

Следовательно, $S = b\sqrt{mn}\left(\frac{b+m-n}{b-n}\right)$.

Пример 5. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, диаметр которой, проведенный через точку A, пересекает боковую сторону CD в точке K так, что $AK \perp CD$ (рис. 29.9). Через точку C проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AD в точке M, а окружность — в точке N так, что $CM : MN = 5 : 2$. Найти $\angle BAD$.

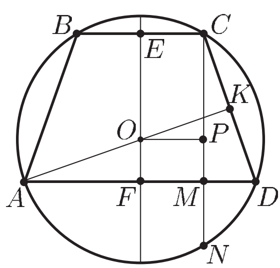

Рис. 29.9

Решение. Пусть O — центр окружности, E, F и P — середины отрезков BC, AD и CN соответственно, $BC = 2b$, $AD = 2a$, R — радиус окружности, h — высота трапеции, $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle CDA = \alpha$, $\angle AOF = \angle CAD = \alpha$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AF}{OF} = \frac{a}{OF}.$$

Выразим OF через h. По условию имеем $\dfrac{MN}{CM} = \dfrac{2}{5}$, откуда $\dfrac{MN+CM}{CM} = \dfrac{CN}{CM} = \dfrac{2CP}{h} = \dfrac{7}{5}$, $CP = \dfrac{7}{10}h$, $MP = \dfrac{3}{10}h$.

Но $OP \perp CN$ и поэтому $OF = MP = \dfrac{3}{10}h$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{3}\cdot\frac{a}{h}. \tag{4}$$

Чтобы найти $\dfrac{a}{h}$, рассмотрим прямоугольные треугольники ACM, OCP и AOF. Заметим, что AK — медиана и высота в треугольнике ACD. Поэтому $AC = AD = 2a$. Далее, $AM = AF + FM = a + b$, $CM = h$, $OC = R$, $OP = b$, $CP = \dfrac{7}{10}h$, $AO = R$, $OF = \dfrac{3}{10}h$, $AF = a$. По теореме Пифагора

$$4a^2 = (a+b)^2 + h^2,$$
$$R^2 = b^2 + \left(\frac{7}{10}h\right)^2, \qquad R^2 = a^2 + \left(\frac{3}{10}h\right)^2.$$

Полагая $\dfrac{a}{h} = x$, $\dfrac{b}{h} = y$, получаем

$$4x^2 = (x+y)^2 + 1, \qquad y^2 + \frac{49}{100} = x^2 + \frac{9}{100},$$

или

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 1, \\ 5x^2 - 5y^2 = 2. \end{cases} \tag{5}$$

Умножая первое уравнение на 2 и вычитая из полученного уравнения второе, находим

$$x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{y}\right) + 3 = 0,$$

откуда $\dfrac{x}{y} = 1$ (это невозможно), $\dfrac{x}{y} = 3$. Подставляя $y = \dfrac{x}{3}$ во второе уравнение системы (5), находим $x = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$, а из (4) получаем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{10}{3}x = \sqrt{5}$.

Таким образом, $\angle BAD = \operatorname{arctg}\sqrt{5}$.

Пример 6. Равнобедренная трапеция $ABCD$ описана около окружности, касающейся боковой стороны AB трапеции в точке E, а основания AD — в точке F (рис. 29.10). Отрезки EF и AC пересекаются в точке K так, что $FK : KE = 2$. Найти отношение радиуса описанной около трапеции окружности к радиусу вписанной в трапецию окружности.

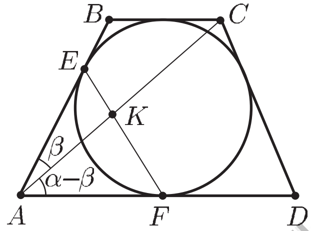

Рис. 29.10

Решение. Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно, $BC = b$, $AC = a$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BAC = \beta$. Тогда $\angle ABC = \pi - \alpha$, $\angle BCA = \alpha - \beta$, $AB = \dfrac{a+b}{2}$.

Из $\triangle ABC$ по теореме синусов находим

$$\frac{AB}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{BC}{\sin\beta}$$

или

$$\frac{\sin\alpha-\beta}{\sin\beta} = \frac{a+b}{2b}. \tag{6}$$

Рассматривая отношение площадей треугольников AEK и AKF, находим

$$\frac{FK}{KE} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}. \tag{7}$$

Так как $FK : KE = 2$, то из (6) и (7) следует, что

$$a = 3b. \tag{8}$$

Заметим, что окружность, описанная около трапеции $ABCD$, является описанной около треугольника ACD. Следовательно, $R = \dfrac{AC}{2\sin\alpha}$.

Воспользуемся формулами (2) и (3), полученными в примере 3. Из этих формул и равенства (8) следует, что $AC = b\sqrt{7}$, $r = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$.

Так как $\sin\alpha = \dfrac{2r}{\frac{a+b}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $R = \dfrac{b\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $\dfrac{R}{r} = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$.

Пример 7. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ расположены точки E и F так, что $BE = 2EC$, $CF = 3FD$. Диагональ BD пересекает отрезки AE и AF в точках P и Q (рис. 29.11). Найти отношение площади треугольника APQ к площади параллелограмма.

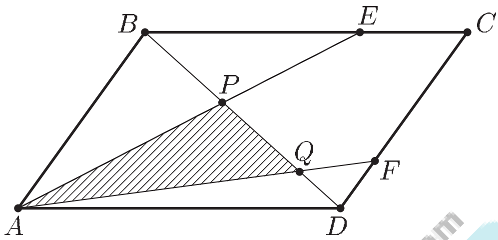

Рис. 29.11

Решение. Так как $\triangle BPE$ подобен $\triangle APD$, то

$$\frac{BP}{PD} = \frac{BE}{AD} = \frac{2}{3}. \qquad (1)$$

Аналогично, из подобия треугольников ABQ и DFQ следует, что

$$\frac{DQ}{QB} = \frac{DF}{AB} = \frac{1}{4}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем $BP = \frac{2}{5}BD$, $DQ = \frac{1}{5}BD$ и поэтому $PQ = \frac{2}{5}BD$.

Пусть s — площадь параллелограмма $ABCD$, s_1 и s_2 — площади треугольников APQ и ABD. Тогда $s_2 = \frac{s}{2}$, $\frac{s_1}{s_2} = \frac{PQ}{BD} = \frac{2}{5}$, откуда $\frac{s_1}{s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{5}$.

Ответ. $\frac{1}{5}$.

Пример 8. Точка E — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$, $BE \perp AC$, $AB = 10$, $BC = 2\sqrt{73}$. Найти площадь параллелограмма.

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых AC и BE (рис. 29.12), $OE = x$, $OA = y$. Из подобия треугольников AOE и BOC следует, что $OB = 2x$, $OC = 2y$.

Применяя теорему Пифагора к треугольникам AOB и BOC, получаем

$$4x^2 + y^2 = 100, \qquad 4x^2 + 4y^2 = 292,$$

откуда $x = 3$, $y = 8$. Искомая площадь $S = AC \cdot BO = 3y \cdot 2x = 144$.

Ответ. 144.

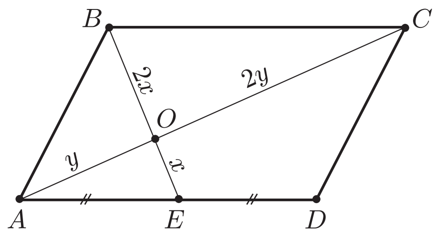

Рис. 29.12

Пример 9. Диагональ AC ромба $ABCD$ пересекает высоту DE треугольника BDC в точке F. Найти сторону ромба, если $AE = 5$, $DF : FE = 5$ (рис. 29.13).

Решение. Пусть $EC = x$. Тогда по свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{CD}{EC} = \frac{DF}{FE} = 5$, откуда $CD = 5x$.

По теореме Пифагора из треугольников CDE и ADE находим

$$AE^2 = 25 = AD^2 + DE^2 = 25x^2 + DC^2 - EC^2 = 49x^2,$$

откуда $x = \frac{5}{7}$, $AD = 5x = \frac{25}{7}$.

Ответ. $\frac{25}{7}$.

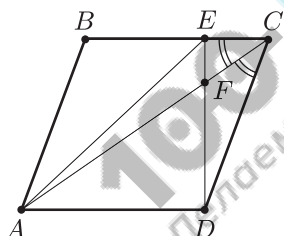

Рис. 29.13

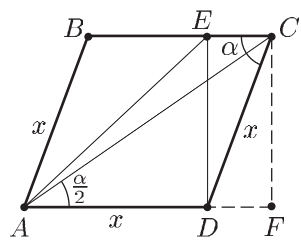

Рис. 29.14

Пример 10. Из вершины D ромба $ABCD$ опущен перпендикуляр DE на сторону BC (рис. 29.14). Найти длину стороны ромба, если $AC = 2\sqrt{6}$, $AE = \sqrt{14}$.

Решение. Пусть $\angle BCD = \alpha$, x — длина стороны ромба, F — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD. Тогда

$$DE = CF = x\sin\alpha = AC \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{6}\sin\frac{\alpha}{2},$$ откуда

$$x\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{6}. \qquad (1)$$

Из $\triangle AED$ находим $AE^2 = ED^2 + AD^2$, т. е.

$$14 = x^2(\sin^2\alpha + 1). \qquad (2)$$

Исключая x из системы (1), (2), получаем

$$14 = \frac{12(1+\sin^2\alpha)}{1+\cos\alpha}$$

или $6\cos^2\alpha + 7\cos\alpha - 5 = 0$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и из (2) следует, что $x = 2\sqrt{2}$.

Ответ. $2\sqrt{2}$.

Пример 11. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Найти площадь параллелограмма, если $\angle A = 2\arcsin\frac{2}{3}$, $OB = \sqrt{21}$, $OC = 2\sqrt{6}$ (рис. 29.15).

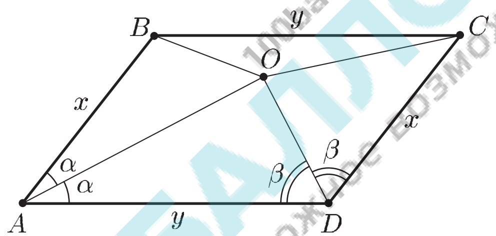

Рис. 29.15

Решение. Пусть $AB = x$, $BC = y$, $\angle BAC = \angle A = 2\alpha$, $\angle ADC = \beta$, S — площадь параллелограмма. Тогда имеем $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, $AO \perp DO$, $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $S = xy\sin 2\alpha$, где $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$, $AO = y\cos\alpha = \frac{y\sqrt{5}}{3}$, $OD = y\sin\alpha = \frac{2}{3}y$. По теореме косинусов

$$\begin{cases} OB^2 = 21 = x^2 + \frac{5}{9}y^2 - \frac{10}{9}xy, \\ OC^2 = 24 = x^2 + \frac{4}{9}y^2 - \frac{8}{9}xy. \end{cases}$$

Полагая $t = \frac{y^2 - 2xy}{9}$, получаем

$$\begin{cases} 21 = x^2 + 5t, \\ 24 = x^2 + 4t, \end{cases}$$

откуда $x = 6$, $t = -3$, т. е. $y^2 - 2xy + 27 = 0$, $y^2 - 12y + 27 = 0$, $y_1 = 9$, $y_2 = 3$.

Следовательно, задача имеет два решения:

$$S_1 = \frac{4\sqrt{5}}{9}\,xy_1 = 24\sqrt{5}, \qquad S_2 = 8\sqrt{5}.$$

Ответ. $24\sqrt{5}$ и $8\sqrt{5}$.

Пример 12. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы острых углов A и C пересекают соответственно стороны BC и AD в точках M и N (рис. 29.16). E — точка пересечения AM и BN, а F — точка пересечения CN и DM. Найти угол A, если $AB = 3$, $AD = 5$, а площадь четырехугольника $EMFN$ равна 1,2.

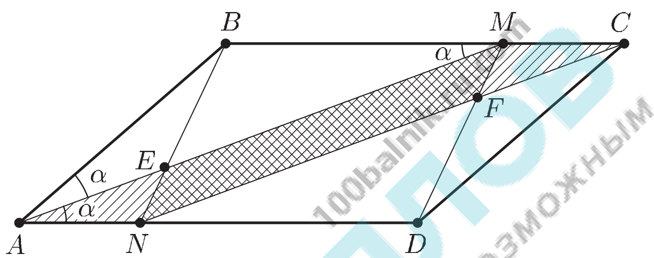

Рис. 29.16

Решение. Четырехугольник $EMFN$ — параллелограмм, так как $AM \| CN$, а $BN \| DM$ (в силу равенства треугольников ABN и CDM). Пусть $\angle BAM = \angle DAM = \alpha$, s и s_0 — площади параллелограммов $ABCD$ и $AMCN$, s_1 и s_2 — площади треугольников ABM и CDN, s_3 и s_4 — площади треугольников AEN и CFM, s_5 и s_6 — площади треугольников ABE и CDF. Тогда $\angle BMA = \alpha$, $BM = AB = 3$, $CD = DN = 3$, $AN = CM = 2$. Поэтому $s = AB \cdot CD \cdot \sin 2\alpha = 15 \sin 2\alpha$, $s_1 + s_2 = 3 \cdot 3 \sin 2\alpha = 9 \sin 2\alpha$, $s_0 = s - (s_1 + s_2) = 6 \sin 2\alpha$, $s_3 + s_5 = s_4 + s_6 = \frac{1}{2} AB \cdot AN \cdot \sin 2\alpha = 3 \sin 2\alpha$, $\frac{s_3}{s_5} = \frac{EN}{BE} = \frac{AN}{AB} = \frac{2}{3}$,

$s_3 = s_4 = \frac{2}{5}(s_3 + s_5) = \frac{6}{5} \sin 2\alpha$.

По условию $s_0 - (s_3 + s_4) = 6 \sin 2\alpha - \frac{12}{5} \sin 2\alpha = \frac{18}{5} \sin 2\alpha = 1{,}2$, откуда $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\arcsin \frac{1}{3}$.

Пример 13. В параллелограмме $ABCD$ угол A тупой, сторона $AD = 7$, $AD > AB$. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BD, а точка A_2 симметрична точке A_1 относительно прямой AC и лежит на диагонали BD. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если $BA_2 = \frac{4}{5} BD$ (рис. 29.17).

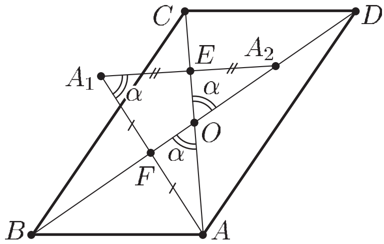

Рис. 29.17

Решение. Пусть $OA = OC = x$ (O — точка пересечения диагоналей параллелограмма), $OB = OD = y$, $\angle AOB = \angle COD = \alpha$. Тогда $\angle DOA = \pi - \alpha$ и по теореме косинусов из треугольника AOD получаем

$$49 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha. \tag{1}$$

Уравнения, связывающие x, y и α, получим, используя равенства $A_1E = A_2E$ и $A_1F = AF$, где E — середина отрезка A_1A_2, перпендикулярного AC, а F — середина отрезка AA_1, перпендикулярного BD.

Так как $OA_2 = BA_2 - OB = \frac{8}{5}y - y = \frac{3}{5}y$, $A_2E = OA_2\sin\alpha = \frac{3}{5}y\sin\alpha$, $OE = \frac{3}{5}y\cos\alpha$, $AE = AO + OE = x + \frac{3}{5}y\cos\alpha$, $A_1E = AE\cdot\operatorname{ctg}\alpha$, то равенство $A_1E = A_2E$ означает, что

$$\frac{3}{5}y\sin\alpha = \left(x + \frac{3}{5}y\cos\alpha\right)\operatorname{ctg}\alpha. \tag{2}$$

Кроме того, т. к. $A_1F = A_1A_2\cos\alpha = 2A_2E\cdot\cos\alpha = \frac{6}{5}y\sin\alpha\cos\alpha$, то $AF = x\cos\alpha$ и равенство $AF = A_1F$ означает, что

$$\frac{6}{5}y\sin\alpha\cos\alpha = x\sin\alpha. \tag{3}$$

Так как $\sin\alpha \neq 0$, то из (3) следует равенство

$$x = \frac{6}{5}y\cos\alpha, \tag{4}$$

а из (2) и (4) получаем уравнение $\sin^2\alpha = 3\cos^2\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно,

$$y = \frac{5}{3}x$$

и уравнение (1) принимает вид $x^2 = 9$, откуда $x = 3$, $y = 5$. Искомая площадь $S = 2xy\sin\alpha = 15\sqrt{3}$.

Ответ. $15\sqrt{3}$.

Пример 14. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Найти площади треугольников ABC, ACD, BCD и BDA, если площадь треугольника ABC вдвое больше площади треугольника ACD, площадь треугольника BCD втрое больше площади треугольника BDA, а площадь четырехугольника $ABCD$ равна 24 (рис. 29.18).

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, S и σ — площади треугольников AOB и AOD соответственно, S_1, S_2, S_3, S_4 — площади треугольников ABC, ACD, BCD и BDA соответственно. Тогда площади треугольников BOC и DOC равны kS и $k\sigma$, где $k = \dfrac{OC}{AO}$.

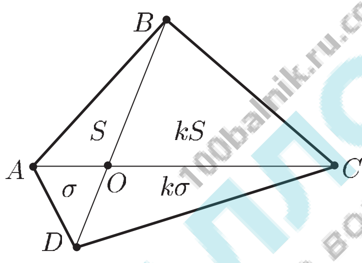

Рис. 29.18

По условию $\dfrac{S + kS}{\sigma + k\sigma} = 2$, откуда $S = 2\sigma$. Кроме того, $\dfrac{kS + k\sigma}{S + \sigma} = 3$, откуда $k = 3$. Так как $S(1 + k) + \sigma(1 + k) = 24$, то $\sigma = 2$, $S = 4$. Следовательно, $S_1 = S(1+k) = 16$, $S_2 = \sigma(1+k) = 8$, $S_3 = k(S+\sigma) = 18$, $S_4 = S + \sigma = 6$.

Ответ. 16, 8, 18, 6.

Пример 15. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность (рис. 29.19), $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что:

1) произведение диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ равно сумме произведений его противоположных сторон (теорема

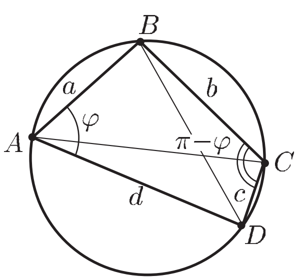

Рис. 29.19

Птолемея), т. е.

$$AC \cdot BD = ac + bd; \tag{1}$$

2) диагонали этого четырехугольника относятся между собой как суммы произведений сторон, сходящихся в концах диагоналей, т. е.

$$\frac{BD}{AC} = \frac{ab+cd}{bc+ad}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\angle BAD = \varphi$, тогда $\angle BCD = \pi - \varphi$. Применяя теорему косинусов к треугольникам ABD и BCD, получаем

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi, \tag{3}$$
$$BD^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\varphi. \tag{4}$$

Исключая φ из системы (3)–(4), имеем

$$(bc+ad)BD^2 = (a^2+d^2)bc + (b^2+c^2)ad = (ab+cd)(ac+bd),$$

откуда

$$BD^2 = \frac{ab+cd}{bc+ad}(ac+bd). \tag{5}$$

Аналогично найдем, что

$$AC^2 = \frac{ad+bc}{ab+cd}(ac+bd). \tag{6}$$

Перемножив равенства (5) и (6), а затем разделив их почленно, получим равенства (1) и (2).

Задачи

Уровень I

1. Найти площадь равнобедренной трапеции, если:
а) высота трапеции равна 8, а ее диагональ равна 10;
б) высота трапеции равна h, а диагональ образует с основанием угол $\frac{\pi}{3}$;
в) диагональ трапеции образует с основанием угол α, а длина диагонали равна l;
г) основания трапеции равны a и b, а боковая сторона равна m;
д) диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а ее высота равна h;
е) высота трапеции равна h, а боковая сторона видна из центра окружности, описанной около трапеции, под углом α.

2. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса R. Найти длину боковой стороны трапеции, если ее площадь равна S.

3. Окружность радиуса 2 вписана в равнобедренную трапецию, площадь которой равна 20. Найти длины оснований трапеции.

4. Найти высоту равнобедренной трапеции, вписанной в окружность радиуса 5, если основания трапеции равны 6 и 8.

5. Средняя линия равнобедренной трапеции равна l. Найти ортогональную проекцию диагонали трапеции на ее основание.

6. Найти площадь трапеции, если ее диагонали равны l и m, а высота равна h.
7. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее большее основание, боковая сторона и диагональ равны соответственно 44, 17 и 39.
8. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найти отношение площади трапеции к площади треугольника AMD, если отношение ее меньшего основания BC к большему основанию AD равно k.
9. Найти диагональ равнобедренной трапеции, если a и b — ее основания, l — боковая сторона.
10. Основания трапеции равны 10 и 6. Найти длины отрезков, на которые делит среднюю линию трапеции одна из ее диагоналей.
11. Основания трапеции равны a и b, где $a > b$, а сумма углов при ее основании равна $\frac{\pi}{2}$. Найти длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.
12. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина BC, а точка F расположена на CD так, что $CF = 2FD$. Найти отношение площади треугольника AEF к площади параллелограмма.
13. Найти диагонали ромба, если отношение их длин равно $\frac{2}{3}$, а площадь ромба равна 12.
14. Найти площадь параллелограмма, если его высоты равны h_1 и h_2, а угол между высотами равен $\frac{\pi}{6}$.
15. Точка O расположена вне квадрата $ABCD$ так, что $AO = OB = 2\sqrt{10}$, $OD = 2\sqrt{2}$. Найти сторону квадрата.
16. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность радиуса r. Найти площадь этого четырехугольника, если $AB = a$, $CD = c$.

Уровень II

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD. Найти высоту трапеции, если $AD = 25$, $BC + CD = 22$.
2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$) расстояние от вершины A до прямой CD равно длине боковой стороны. Найти угол BAD, если $AD : BC = 5$.
3. В трапеции $ABCD$ длина большего основания AD равна 1, $BC \perp CD$, $AB = BC$, диагональ BD перпендикулярна AB. Найти AB.
4. Вычислить площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, длины оснований которой равны a и b.
5. Трапеция описана около окружности. Найти отношение длины средней линии трапеции к ее периметру.
6. Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Найти площадь трапеции, если площади треугольников, примыкающих к основаниям, равны S_1 и S_2.
7. Найти площадь трапеции, если ее основания равны 44 и 16, а боковые стороны — 25 и 17.
8. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее основания равны a и b ($a > b$), а диагонали являются биссектрисами углов при большем основании.
9. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины соответственно сторон BC и CD. Найти AD, если $AE = 6$, $AF = 3$ и $\angle EAF = \frac{\pi}{3}$.

10. В ромбе $ABCD$ точки E и F — середины соответственно сторон BC и CD, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$. Найти величину угла EAF.

11. Точки E, F, M, N — середины соответственно сторон AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$. Найти отношение площади фигуры, ограниченной прямыми AF, BM, CN, DE к площади параллелограмма $ABCD$.

12. В равнобедренную трапецию, средняя линия которой равна 25, вписана окружность радиуса 10. Найти основания трапеции.

13. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найти площадь трапеции, если длины ее верхнего основания BC и нижнего основания AD равны соответственно 3 и 6, а площадь треугольника AOD равна 16.

14. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию AD, точка E — середина CD. Найти отношение $\frac{AD}{BC}$, если $AE = 2AB$ и $AE \perp CD$.

15. В равнобедренную трапецию вписана окружность так, что точка касания делит боковую сторону трапеции на отрезки m и n. Найти площадь трапеции.

16. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O. Найти периметр трапеции, если $BO = \frac{7}{8}$, $OD = \frac{25}{8}$, $\angle ABD = 90^\circ$.

17. Найти площадь трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны, одна из них равна 6, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 4,5.

18. В трапеции $ABCD$ большее основание CD равно a, меньшее равно b. Окружность, проходящая через вершины A, B и C, касается стороны AD. Найти диагональ AC.

19. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 8, а площадь равна 2, можно вписать окружность. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее меньшего основания.

20. Высота BK ромба $ABCD$, опущенная на сторону AD, пересекает диагональ AC в точке E. Найти AE, если $BK = 8$, $AK : KD = 3 : 2$.

Уровень III

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ угол между боковой стороной AB и основанием AD равен $\frac{\pi}{4}$, диагональ AC является биссектрисой угла BAD, а биссектриса угла BCD пересекает основание AD в точке M. Найти площадь треугольника ABN, где N — точка пересечения BM и AC, если площадь трапеции равна $3 + 2\sqrt{2}$.

2. В трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$) угол ACB в 2 раза больше угла ADB, $BC = AC = 5$, $AD = 6$. Найти площадь трапеции.

3. Равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC ($AD > BC$) описана около окружности, которая касается стороны CD в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Определить отношение $\frac{AD}{BC}$, если $\frac{AN}{NM} = k$.

4. Окружность радиуса 3 с центром в точке пересечения диагоналей равнобедренной трапеции $ABCD$ касается меньшего основания BC и боковой стороны AB. Найти площадь трапеции, если ее высота равна 16.

5. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 10, основание BC равно 2, а биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найти площадь трапеции.

6. На боковой стороне AB равнобедренной трапеции $ABCD$ расположена точка E так, что $AE = \frac{1}{6}AB$, $DE = CE = 5$. Найти угол BAD и площадь трапеции, если $AB = 2\sqrt{5}$.

7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ угол между боковой стороной AB и основанием AD равен $\frac{\pi}{6}$, диагональ AC является биссектрисой угла BAD, а биссектриса угла BCD пересекает AD в точке M. Найти площадь треугольника AMN, где N — точка пересечения BM и AC, если площадь трапеции равна $2 + \sqrt{3}$.

8. Около окружности радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ описана равнобедренная трапеция $ABCD$. Угол между большим основанием AD и диагональю AC трапеции равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$. Найти длину отрезка EK, где E и K — точки касания окружности со сторонами AD и CD трапеции.

9. Расстояние от центра окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, до точки пересечения ее диагоналей относится к радиусу этой окружности как 3 к 5. Найти отношение периметра трапеции к длине окружности.

10. В круг радиуса 3 вписана равнобедренная трапеция с углом при основании $\frac{\pi}{4}$ и высотой $\sqrt{2}$. Найти площадь трапеции.

11. В окружность вписана трапеция $ABCD$ (AD — большее основание). Из вершины C проведен перпендикуляр к AD, пересекающий окружность в точке E. Отношение длины дуги BC (не содержащей точки D) к длине дуги CDE равно $\frac{1}{2}$, а радиус окружности равен высоте трапеции. Найти отношение $\frac{AD}{BC}$.

12. Внутри параллелограмма $ABCD$ расположена точка O так, что треугольник COD является равносторонним. Найти периметр параллелограмма, если расстояния от точки O до прямых AD, AB и BC равны соответственно 3, 6 и 5.

13. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ равна 2, $\angle BAD = \frac{\pi}{4}$. На диагонали BD расположены точки E и F так, что $AE \perp BD$, $CF \perp BD$ и $BF = \frac{3}{2}BE$. Найти площадь параллелограмма.

14. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E, а биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке F. Найти площадь параллелограмма, если $BC = 3AB$, а площадь четырехугольника, образованного пересечением прямых AE, CF, BF и DE, равна 4.

15. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Найти площадь параллелограмма, если $\angle A = 2\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$, $OA = 2\sqrt{10}$, $OD = 5$.

16. В ромб $ABCD$ вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AD в точке E и пересекающая отрезок EC в точке F такой, что $EF = 2FC$. Найти угол BAD и площадь ромба.

17. На продолжении стороны AB ромба $ABCD$ за точку B расположена точка E так, что $ED = MC$, $\angle EDC = \operatorname{arctg}\frac{8}{5}$. Найти отношение $\frac{AE}{BE}$.

18. В прямоугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 2. На продолжении стороны AD за точку A расположена точка E так, что $EA = 1$, $\angle BEC = \frac{\pi}{6}$. Найти длину отрезка BE.

19. В параллелограмме $ABCD$ угол A острый, $AB > AD$, $AB = 14$. Точка C' симметрична точке C относительно прямой BD, а точка C'' симметрична точке C' относительно прямой AC и лежит на продолжении диагонали BD за точку D. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если $BC'' = \frac{4}{3}BD$.

20. Стороны четырехугольника $ABCD$ удовлетворяют условию $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. Найти угол между сторонами BC и AD.

21. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M и образуют острый угол α, точки O_1, O_2, O_3 и O_4 центры окружностей, описанных соответственно вокруг треугольников ABM, BCM, CDM и DAM. Найти отношение площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади четырехугольника $ABCD$.

Ответы

Уровень I

1. а) 48; б) $\frac{h^2}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{l^2 \sin 2\alpha}{2}$; г) $\frac{a+b}{2}\sqrt{m^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$; д) h^2; е) $h^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.
2. $\frac{S}{2R}$. **3.** 8 и 2. **4.** 7. **5.** l. **6.** $\frac{h}{2}\left(\sqrt{l^2 - h^2} + \sqrt{m^2 - h^2}\right)$. **7.** 540. **8.** $(1+k)^2$.
9. $\sqrt{l^2 + ab}$. **10.** 5 и 3. **11.** $\frac{a-b}{2}$. **12.** $\frac{5}{12}$. **13.** 4 и 6. **14.** $2h_1h_2$.
15. 4. **16.** $(a + c)r$.

Уровень II

1. 12. **2.** $\operatorname{arctg} 2$. **3.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **4.** $\frac{\pi ab}{4}$. **5.** $\frac{1}{4}$. **6.** $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$. **7.** 450.
8. $\frac{a+b}{4}\sqrt{3b^2 - a^2 + 2ab}$. **9.** 4. **10.** $2 \arcsin \frac{1}{2\sqrt{7}}$. **11.** $\frac{1}{5}$. **12.** 10 и 40. **13.** 36.
14. $\frac{8}{7}$. **15.** $2(m+n)\sqrt{mn}$. **16.** $\frac{62}{5}$. **17.** $9\sqrt{5}$. **18.** $\sqrt{ab}$. **19.** $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$. **20.** $3\sqrt{5}$.

Уровень III

1. 1. **2.** 22. **3.** $8k - 1$. **4.** $\frac{512}{3}$. **5.** 40. **6.** $\operatorname{arctg} 3{,}16$. **7.** $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$.
8. 2. **9.** $\frac{5}{\pi}$. **10.** $4\sqrt{2}$. **11.** $\sqrt{4\sqrt{3} - 3}$. **12.** $\frac{49\sqrt{3}}{2}$. **13.** 3. **14.** 18. **15.** 24 или 72.
16. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}R^2$. **17.** 11. **18.** 2. **19.** $60\sqrt{3}$. **20.** $\frac{\pi}{2}$. **21.** $2 \sin^2 \alpha$.

§ 30. Окружность и круг

Справочные сведения

1. ***Свойства хорд окружности***:

а) диаметр AB, перпендикулярный хорде CD (рис.30.1), делит эту хорду пополам ($CM = DM$); обратно, если диаметр AB проходит через середину M хорды CD, а хорда CD не является диаметром, то $AB \perp CD$;

б) хорды окружности, находящиеся на одинаковом расстоянии от ее центра, равны между собой (верно и обратное);

в) дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

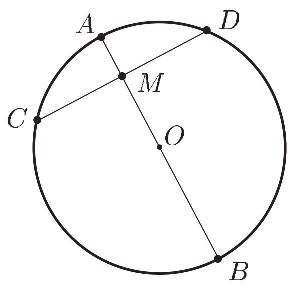

Рис. 30.1

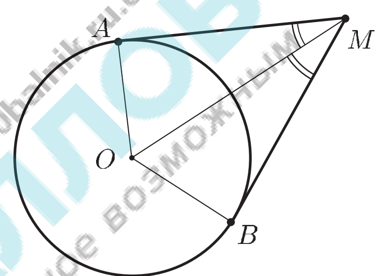

Рис. 30.2

2. ***Свойства касательных к окружности***:

а) радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной;

б) две касательные, проведенные к окружности из одной точки (рис. 30.2), равны, а центр окружности лежит на биссектрисе угла между этими касательными.

3. ***Измерение углов, связанных с окружностью***:

а) *центральный угол* измеряется дугой окружности, заключенной между его сторонами;

б) *вписанный угол* (угол с вершиной на окружности, стороны которого пересекают окружность) измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 30.3):

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \smile BmC;$$

в) *угол между касательной и хордой*, имеющими общую точку на окружности (рис. 30.4), измеряется половиной дуги, заключенной между сторонами этого угла:

$$\angle MBA = \frac{1}{2} \smile AmB;$$

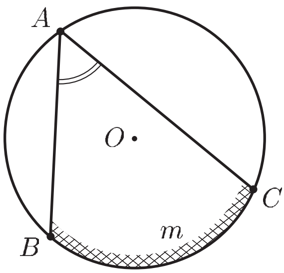

Рис. 30.3

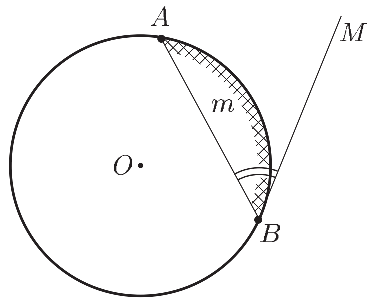

Рис. 30.4

г) *угол с вершиной внутри круга* измеряется полусуммой дуг, заключенных между сторонами угла и их продолжениями (рис. 30.5):

$$\angle AMD = \frac{1}{2}(\smile AmD + \smile CnB).$$

4. *Метрические соотношения в круге:*

а) *произведения отрезков пересекающихся хорд* окружности равны между собой (рис. 30.6):

$AM \cdot MB = CM \cdot MD$;

б) если из точки M проведены к окружности секущие MAB и MCD (рис. 30.7), то

$MA \cdot MB = MC \cdot MD$;

в) если из точки M проведена к окружности секущая MAB и касательная MC (рис. 30.8), то произведение секущей MB на ее внешнюю часть MA равно квадрату касательной:

$MB \cdot MA = MC^2$.

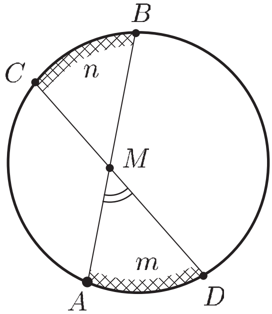

Рис. 30.5

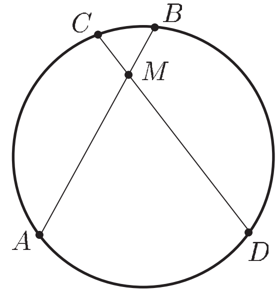

Рис. 30.6

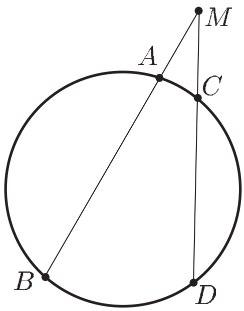

Рис. 30.7

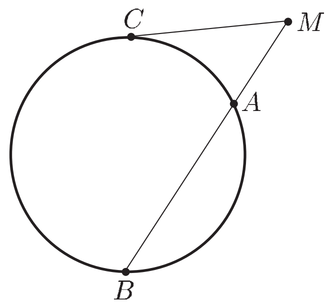

Рис. 30.8

5. ***Длина окружности и площадь круга***:
   а) *длина L окружности* радиуса R вычисляется по формуле

   $L = 2\pi R$;

   б) *площадь S круга* радиуса R вычисляется по формуле

   $S = \pi R^2$.

Примеры с решениями

Пример 1. Окружности C_1 и C_2, радиусы которых равны соответственно 4 и 2, внешне касаются в точке A (рис. 30.9). Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность C_1 в точке D, а окружность C_2 — в точке E. Найти AD, если $DE = 7{,}2$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей C_1 и C_2, $AD = x$. Тогда $O_1A = O_1D = 4$, $O_2A = O_2E = 2$.

Из подобия треугольников O_1AD и O_2AE следует, что $AE = \dfrac{x}{2}$ и поэтому $DE = AD + AE = \dfrac{3}{2}x = 7{,}2$, откуда $x = 4{,}8$.

Ответ. 4,8.

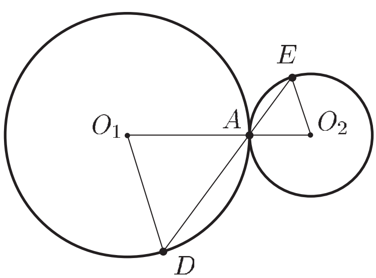

Рис. 30.9

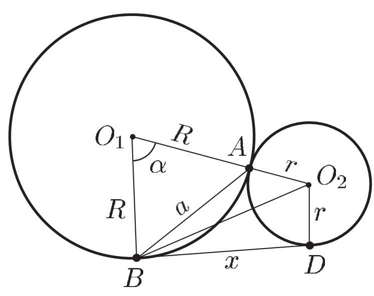

Рис. 30.10

Пример 2. Окружность C_1 радиуса R и окружность C_2 радиуса r, где $r < R$, имеют внешнее касание в точке A. Через точку B, лежащую на окружности C_1 проведена прямая, касающаяся окружности C_2 в точке D (рис. 30.10). Найти длину отрезка BD, если $AB = a$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей C_1 и C_2, $\angle AO_1B = \alpha$, $BD = x$.

Применяя теорему косинусов к треугольникам O_1O_2B и O_1AB, получаем

$$BO_2^2 = (R+r)^2 + R^2 - 2R(R+r)\cos\alpha,$$

где

$$\cos\alpha = \frac{2R^2 - a^2}{2R^2} = \left(1 - \frac{a^2}{2R^2}\right),$$

так как $a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha$. Следовательно,

$$BO_2^2 = r^2 + \frac{a^2(R+r)}{R}.$$

С другой стороны, из треугольника BO_2D по теореме Пифагора находим

$$BO_2^2 = x^2 + r^2,$$

следовательно, $x^2 = \dfrac{a^2(R+r)}{R}$.

Ответ. $a\sqrt{1 + \frac{r}{R}}$.

Пример 3. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Окружность радиуса R с центром в точке O касается стороны AC, проходит через вершину B и пересекает сторону AB в точке K такой, что $BK : AK = 5 : 1$ (рис. 30.11). Найти длину стороны BC.

Решение. Пусть AE и BM — высоты треугольника ABC. Так как BM — диаметр окружности, а окружность касается прямой AC, то

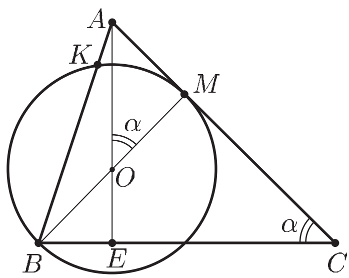

Рис. 30.11

точкой касания является точка M. Если $\angle AOM = \alpha$, $AK = x$, то $\angle ACB = \alpha$, $\sin\alpha = \dfrac{AM}{AO}$, где $AM^2 = AK \cdot AB = 6x^2$ по теореме о касательной и секущей, т. е. $AM^2 = 6x^2$. С другой стороны, по теореме Пифагора из треугольника ABM получаем $AM^2 = 36x^2 - 4R^2$. Итак, $6x^2 = 36x^2 - 4R^2$, откуда $x = R\sqrt{\dfrac{2}{15}}$, $AM^2 = \dfrac{4R^2}{5}$, $AM = \dfrac{2R}{\sqrt{5}}$. Тогда $AO^2 = AM^2 + OM^2 = \dfrac{4R^2}{5} + R^2$, откуда $AO = \dfrac{3R}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Наконец, из треугольника BMC находим

$$BC = \frac{BM}{\sin\alpha} = 3R.$$

Ответ. $3R$.

Пример 4. В треугольнике ABC на средней линии DE, параллельной стороне AB, как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC (рис. 30.12) в точках M и N. Найти MN, если $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

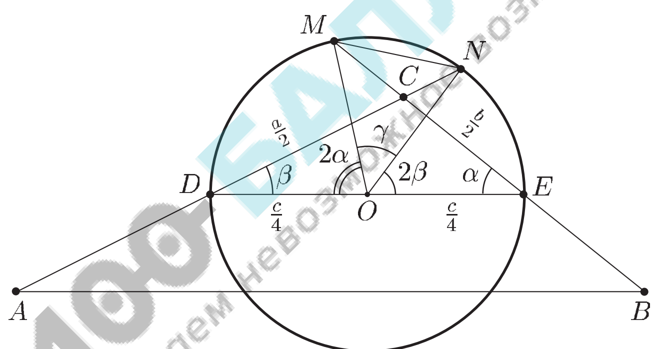

Рис. 30.12

Решение. Пусть O — центр окружности, $\angle MED = \alpha$, $\angle NDE = \beta$, $\angle MON = \gamma$. Тогда $\angle MOD = 2\alpha$, $\angle NOE = 2\beta$, $2\alpha + 2\beta + \gamma = \pi$, $MN = \dfrac{c}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{c}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \dfrac{c}{2}\cos(\alpha+\beta)$.

Применяя теорему косинусов к треугольнику ABC (или к подобному ему треугольнику DCE) получаем

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - (\alpha+\beta)) = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha+\beta),$$

откуда

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}.$$

Ответ. $\dfrac{c}{4ab}(c^2 - a^2 - b^2)$.

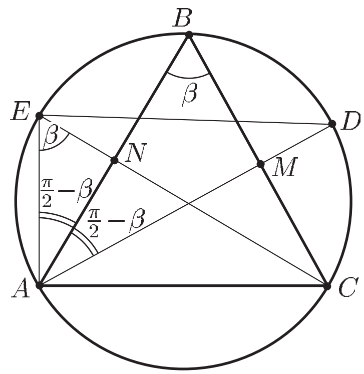

Рис. 30.13

Пример 5. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках D и E (рис. 30.13). Найти радиус этой окружности, если $AC = a$, $DE = \frac{6}{5}a$.

Решение. Пусть $\angle ABC = \beta$, R — искомый радиус. Тогда $\angle BAD = \frac{\pi}{2} - \beta$ ($AD \perp BC$), $\angle AEC = \angle ABC = \beta$ (опираются на одну и ту же дугу), $\angle EAB = \frac{\pi}{2} - \beta$ ($EC \perp AB$) и поэтому $\angle EAD = \pi - 2\beta$.

Так как треугольники ABC и AED вписаны в круг радиуса R, то

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\beta} = 2R, \qquad \frac{DE}{\sin(\pi - 2\beta)} = \frac{6a}{5\sin 2\beta} = 2R,$$

откуда $6\sin\beta = 5\sin 2\beta$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$, $R = \frac{5}{8}a$.

Ответ. $\frac{5}{8}a$.

Пример 6. Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей вне треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до продолжения сторон AC и BC равны соответственно 39 и 156 (рис. 30.14). Найти расстояние от точки K до прямой AB.

Решение. Пусть E, F и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки K на прямые BC, AC и AB соответственно. Так как $\angle KBE = \angle KAB$, то $\triangle KAM \sim \triangle KBE$, откуда следует, что

$$\frac{KM}{KA} = \frac{KE}{KB}, \qquad (1)$$

где $KE = 156$.

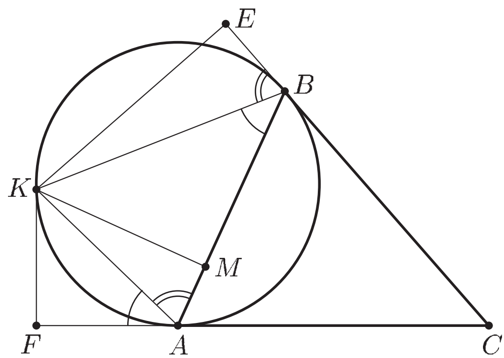

Рис. 30.14

Аналогично, из подобия треугольников KAF и KBM следует, что

$$\frac{KM}{KB} = \frac{KF}{KA}, \tag{2}$$

где $KF = 39$.

Перемножая равенства (1) и (2), получаем

$$KM^2 = KE \cdot KF = 39 \cdot 156,$$

откуда $KM = 78$.

Ответ. 78.

Пример 7. Треугольник ABC, в котором $AB = BC$, вписан в окружность, а прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная BC, пересекает окружность в точке M. Касательная к окружности в точке M пересекает прямую BC в точке N (рис. 30.15). Найти длины отрезков MC и MN, если $AC = 8$, $\angle ABC = 2\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Решение. Пусть $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle BAM = \beta$, $BE \perp AC$, тогда $\angle CBE = \angle DAC = \alpha$, $\angle DCA = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle BCM = \beta$, $\angle CMN = \alpha$, $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$.

Из треугольников ADC и DMC находим

$$DC = AC \cdot \sin\alpha = \frac{8}{\sqrt{5}},$$

$$MC = \frac{DC}{\cos\beta} = \frac{8\sin\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{8\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\cos\alpha} = 2\sqrt{5}.$$

$$DM = DC \cdot \operatorname{tg}\beta = DC \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{6}{\sqrt{5}},$$

так как $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{3}{4}$.

Пусть $\angle MND = \varphi$. Так как $\angle AMC = 2\alpha$, $\angle CMN = \alpha$, то $\varphi = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$ и из треугольника DMN получаем

$$MN = \frac{DM}{\sin\varphi} = \frac{6}{\sqrt{5}\cos 3\alpha},$$

где $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}$, и поэтому $MN = 15$.

Ответ. $2\sqrt{5}$, 15.

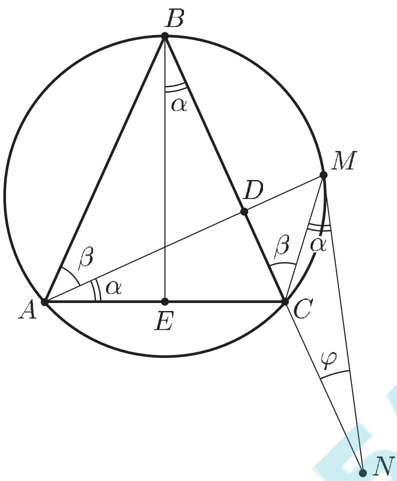

Рис. 30.15

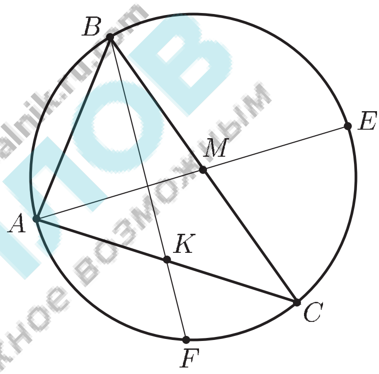

Рис. 30.16

Пример 8. Продолжения медиан AM и BK треугольника ABC пересекают описанную около него окружность соответственно в точках E и F так, что $AE : AM = 2 : 1$, $BF : BK = 3 : 2$ (рис. 30.16). Найти углы треугольника ABC.

Решение. 1) Пусть $AM = x$, $BM = y$. Тогда $ME = x$, $MC = y$. По свойству пересекающихся хорд окружности $x^2 = y^2$, откуда $x = y$.

Таким образом, точка M равноудалена от точек A, B и C и поэтому является центром окружности, описанной около треугольника ABC, а точка E принадлежит этой окружности.

Так как BC — диаметр окружности, то $\angle A = \frac{\pi}{2}$.

2) Пусть $AB = C$, $AC = b$, $BK = 2z$, тогда $KF = z$ и по свойству пересекающихся хорд

$$2z^2 = \frac{b^2}{4}. \tag{1}$$

Из треугольника ABK по теореме Пифагора получаем

$$4z^2 = \frac{b^2}{4} + c^2. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $b^2 = 4c^2$, т. е. $b = 2c$, и поэтому

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = 2, \qquad \operatorname{tg} C = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 2$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Пример 9. Из точки A, лежащей на окружности, проведены хорды AB и AC так, что $\angle CAB = \frac{2\pi}{3}$, $AB = 2$, $AC = 1$ (рис. 30.17). Найти длину хорды AD, если она делит пополам угол CAB.

Решение. Так как $\angle CAB = \angle DAB = \frac{\pi}{3}$, то $\smile C_mD = \smile B_nD$, откуда следует, что

$$CD = BD \tag{1}$$

Применяя теорему косинусов к треугольникам ACD и ABD, получаем

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos\frac{\pi}{3},$$

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos\frac{\pi}{3}.$$

Отсюда, используя равенство (1) и учитывая, что $AC = 1$, $AB = 2$, находим $AD^2 + 1 - AD = AD^2 + 4 - 2AD$, $AD = 3$.

Ответ. 3.

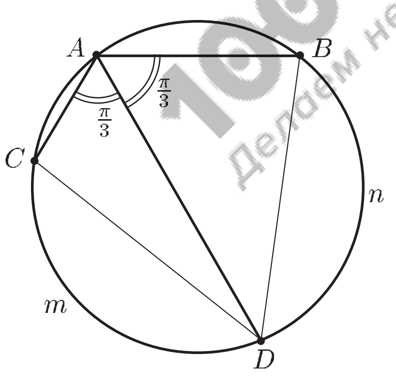

Рис. 30.17

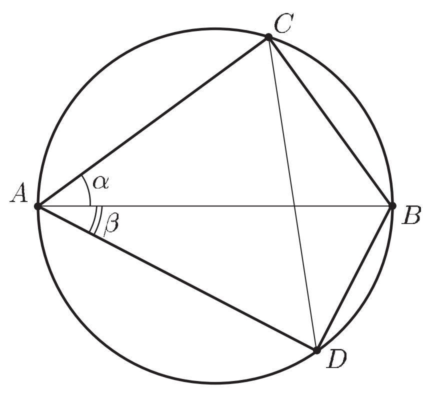

Рис. 30.18

Пример 10. На окружности по разные стороны от ее диаметра AB расположены точки C и D так, что $AC = 4$, $BD = \sqrt{5}$, а площадь треугольника ABC в 2 раза больше площади треугольника CBD (рис. 30.18). Найти радиус окружности.

Решение. Пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, R — искомый радиус, S и S_1 — площади треугольников ABC и CBD соответственно. Тогда

$$\angle CBD = \pi - (\alpha + \beta),$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2R \sin\alpha = 4R \sin\alpha,$$

$$S_1 = \frac{1}{2} BC \cdot BD \sin(\pi - (\alpha + \beta)),$$

где

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 2\sqrt{R^2 - 4}.$$

Следовательно, $S_1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{R^2 - 4} \sin(\alpha + \beta)$. Так как $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{R}$, $\sin\beta = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}}{2R}$, то $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{R^2 - 4}}{R}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{4R^2 - 5}}{2R}$ и поэтому $S = 4\sqrt{R^2 - 4}$, $S_1 = \dfrac{\sqrt{5(R^2 - 4)}}{2R^2}\left(\sqrt{(R^2 - 4)(4R^2 - 5)} + 2\sqrt{5}\right)$.

Учитывая, что $S = 2S_1$ и полагая $R^2 = t$, получаем уравнение $4t - 10 = \sqrt{5}\sqrt{(t - 4)(4t + 5)}$. Возводя в квадрат обе части этого уравнения, приходим к уравнению $4t^2 - 25t = 0$, откуда $t = R^2 = \dfrac{25}{4}$, $R = \dfrac{5}{2}$.

Ответ. $\dfrac{5}{2}$.

Пример 11. Окружности C и C_1, радиусы которых соответственно равны 5 и 4, касаются внешне. Прямая, касающаяся окружности C_1 в точке A, пересекает окружность C в точках E и F так, что $AE = EF$ (рис. 30.19). Найти AF.

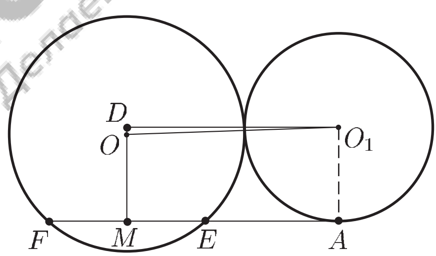

Рис. 30.19

Решение. Пусть O и O_1 — центры окружностей C и C_1, M — середина хорды EF, $AE = EF = 2x$ (рис. 30.19). Тогда $OM \perp EF$, $ME = x$, $OE = 5$, $O_1A = 4$, $OO_1 = 9$.

Пусть D — основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую OM. Тогда $O_1D = AM = 3x$, $MD = O_1A = 4$, $OM = \sqrt{OE^2 - ME^2} = \sqrt{25 - x^2}$, $OD = |MD - OM| = |\sqrt{25 - x^2} - 4|$.

Из прямоугольного треугольника O_1DO находим $OO_1^2 = O_1D^2 + OD^2$, т. е. $81 = (\sqrt{25-x^2}-4)^2 + 9x^2$, или $x^2 - 5 = \sqrt{25-x^2}$, откуда $x = 3$, $AF = 4x = 12$.

Ответ. 12.

Пример 12. Длина внешней касательной двух окружностей в два раза больше длины их внутренней касательной. Найти расстояние между центрами этих окружностей, если их радиусы равны r и R.

Решение. Пусть $r \leqslant R$, O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 30.20), A_1A_2 и B_1B_2 — их внешняя и внутренняя касательные, C и D — основания перпендикуляров, опущенных из точки O_1 на прямые O_2B_2 и O_2A_2, $B_1B_2 = b$. Тогда $O_2D = R - r$, $O_2C = R + r$, $A_1A_2 = 2b$.

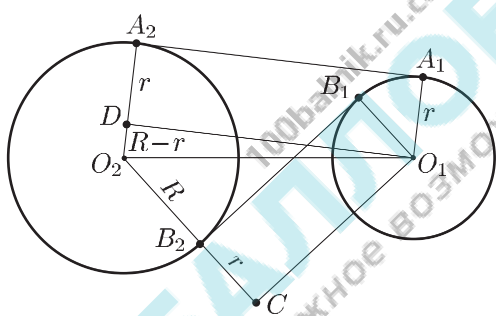

Рис. 30.20

Применяя теорему Пифагора к треугольникам O_1DO_2 и O_1CO_2, получаем

$$O_1O_2^2 = (R-r)^2 + 4b^2,$$
$$O_1O_2^2 = (R+r)^2 + b^2,$$

откуда $b^2 = \dfrac{4}{3}Rr$, $O_1O_2^2 = R^2 + r^2 + \dfrac{10}{3}Rr$.

Ответ. $\sqrt{R^2 + r^2 + \dfrac{10}{3}Rr}$.

Пример 13. Окружности C и C_1, радиусы которых равны соответственно 3 и 2, имеют внутреннее касание в точке A (рис. 30.21). Найти радиус окружности C_2, касающейся окружностей C, C_1 и их общего диаметра AB.

Решение. Пусть O, O_1 и O_2 — центры окружностей C, C_1 и C_2 соответственно, M — точка, в которой окружность C_2 касается AB, x — радиус окружности C_2. Тогда $O_1O_2 = 2 + x$, $O_2M = x$, $OO_2 = 3 - x$, $OO_1 = 1$, $O_1M = OO_1 + OM$, где $OM = \sqrt{OO_2^2 - O_2M^2} = \sqrt{(3-x)^2 - x^2} = \sqrt{9-6x}$.

Из треугольника O_1O_2M по теореме Пифагора находим

$$(2+x)^2 = x^2 + (1+\sqrt{9-6x})^2.$$

Преобразуем это уравнение:

$$4+4x = 1+9-6x+2\sqrt{9-6x},$$

$5x-3 = \sqrt{9-6x}$, $25x^2-30x+9 = 9-6x$, откуда $x = \dfrac{24}{25}$.

Ответ. $\dfrac{24}{25}$.

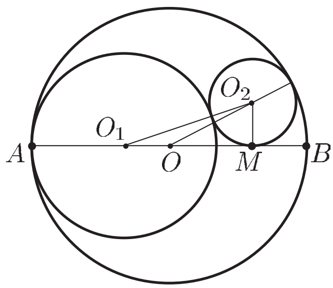

Рис. 30.21

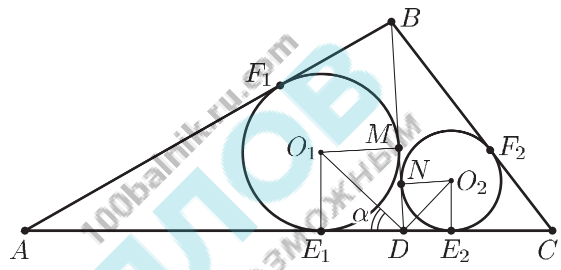

Рис. 30.22

Пример 14. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружности l_1 и l_2, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются отрезка BD соответственно в точках M и N (рис. 30.22). Найти длины сторон треугольника ABC, если $BM = 3$, $MN = ND = 1$, а отношение радиуса окружности l_1 к радиусу окружности l_2 равно $\dfrac{7}{4}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей l_1 и l_2, r_1 и r_2 — их радиусы, E_1 и E_2 — точки касания окружностей l_1 и l_2 со стороной AC, F_1 — точка касания окружности l_1 с AB, F_2 — точка касания окружности l_2 с BC, $\angle O_1DE_1 = \alpha$, $\angle O_2DE_2 = \beta$.

Тогда $\angle MDO_1 = \alpha$, $\angle NDO_2 = \beta$, $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2}$, $BF_1 = BM = 3$, $BF_2 = BN = 4$.

Из треугольников O_1MD и O_2ND находим $r_1 = MD\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$, $r_2 = ND\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Так как $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{7}{4}$, то $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{7}{8}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{7}{8}}$, $r_1 = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$, $r_2 = 2\sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

Пусть $AE_1 = x$, $CE_2 = y$, тогда $AF_1 = x$, $CF_2 = y$. Чтобы найти x, выразим двумя способами площадь S_1 треугольника ABD: по формуле Герона и по формуле $S_1 = r_1p_1$, где p_1 — полупериметр треугольника ABD. Так как $AB = x+3$, $BD = 5$, $AD = x+2$, то

$p_1 = x + 5,$

$$S_1 = \sqrt{(x+5)x\cdot 2\cdot 3} = (x+5)\sqrt{\frac{7}{2}},$$

откуда $x = 7$.

Аналогично, если S_2 — площадь треугольника BCD, то

$$S_2 = \sqrt{(y+5)4y} = (y+5)2\sqrt{\frac{2}{7}},$$

откуда $y = 2$. Следовательно, $AB = x + 3 = 10$, $BC = 4 + y = 6$, $AC = x + y + 3 = 12$.

Ответ. $AB = 10$, $BC = 6$, $AC = 12$.

Задачи

Уровень I

1. Две окружности касаются внешне в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружности в точках B и C таких, что $AB = 4$, $AC = 8$. Найти радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно 9.
2. Из точки O, лежащей вне круга, проведены две секущие. Одна из них пересекает окружность в точках A и B таких, что $OA = 3$, $AB = 9$, а другая — в точках C и D. Найти длину хорды CD, если $OC = 4$.
3. Расстояние между центрами двух окружностей радиусов 11 и 3 равно 17. Найти длины их общей внешней и внутренней касательных.
4. Прямая, проходящая через центры O_1 и O_2 окружностей радиусов 17 и 10, пересекается с их общей внешней касательной в точке A. Найти AO_1 и AO_2, если $O_1O_2 = 21$.
5. На катете BC прямоугольного треугольника ABC, как на диаметре, построена полуокружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D. Найти радиус полуокружности, если $AC = 15$, $CD = 12$.
6. Две окружности радиусов R и r с центрами O_1 и O_2 касаются внешне в точке A. Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно O_1O_2, пересекает общую касательную данных окружностей в точке B. Найти AB.
7. Найти радиусы двух внешне касающихся окружностей, если расстояние между их центрами равно b, а угол между общими внешними касательными этих окружностей равен $\frac{\pi}{3}$.
8. Из точки M, находящейся на расстоянии 10 от центра O окружности радиуса 8 проведена секущая MBC, такая, что ее внешняя часть MB равна 3. Найти расстояние от точки O до секущей.
9. Найти площадь сегмента, если дуга сегмента содержит 120°, а его периметр равен 4.
10. Из точки M к окружности радиуса 6 проведены касательные MA и секущая MBC, проходящая через центр O окружности. Найти площадь той

части треугольника MAO, которая лежит вне круга, если внешняя часть секущей равна 4.

11. Из точки A, принадлежащей окружности, проведены хорды AB и AC. Найти радиус окружности, если длина дуги AB вдвое больше длины дуги AC, $AB = a$, $AC = b$.

12. В сектор круга радиуса R вписан круг. Найти его радиус, если хорда сектора равна $2a$.

13. Три окружности радиусов 6, 7 и 8 касаются попарно друг друга. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются центры этих окружностей.

14. В круге радиуса R проведены пересекающиеся перпендикулярные хорды AB и CD. Найти $AC^2 + BD^2$.

15. Две окружности, радиусы которых 6 и 8, пересекаются под прямым углом. Найти длину их общей касательной.

16. В окружности радиуса r проведена хорда AB. Через точку A проведена касательная l к окружности, а через точку B — хорда BC, параллельная l. Найти расстояние между прямыми BC и l, если $AB = \frac{r}{2}$.

17. Из точки M проведены к окружности две касательные MA и MB длиной 10. Найти радиус окружности, если $AB = 12$.

Уровень II

1. Окружности C_1 и C_2, радиусы которых равны r_1 и r_2, касаются окружности C радиуса R в точках, расстояние между которыми равно a. Найти длину общей внешней касательной к окружностям C_1 и C_2.

2. Окружности C_1 и C_2, радиусы которых равны соответственно R и r, где $R > r$, имеют внутреннее касание в точке A. Из точки B, лежащей на окружности C_1, проведена касательная BD к окружности C_2. Найти AB, если $BD = a$.

3. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти площадь трапеции, образованной внешними касательными к этим окружностям и хордами, соединяющими точки касания.

4. Продолжение медианы BD треугольника ABC пересекается с описанной около него окружностью в точке E так, что $BD : DE = p$. Найти AC, если $AB = c$, $BC = a$.

5. Окружности C_1 и C_2 радиусов 4 и 9 касаются прямой l в точках A и B. Найти радиус окружности, касающейся окружностей C_1 и C_2, а также прямой l между точками A и B, если $AB = 10$.

6. В круге радиуса 12 длины хорд AB и BC равны соответственно 6 и 4. Найти длину хорды AC.

7. Две окружности радиусов R и r расположены одна вне другой. Общие внутренние касательные AC и BD имеют длину a. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

8. Через точку пересечения C двух равных окружностей проведены две прямые, пересекающие данные окружности в точках A, B и M, N соответственно. Прямая AB параллельна линии центров, а прямая MN образует угол α с линией центров. Найти MN, если $AB = a$.

9. Из центра O окружности радиуса 12 проведен луч l. На луче l выбраны точки A и B такие, что $OA = 15$, $OB = 20$, и из этих точек проведены касательные к окружности (точки касания лежат по одну сторону от l), пересекающиеся в точке C. Найти расстояние от точки C до луча l.

10. Из точки A, находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены секущие ABC и ADE (AB и AD — внешние части секущих), угол между которыми равен $\frac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника ABD, если площадь треугольника ACE равна 10.

11. Окружность радиуса 3, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Окружность радиуса 5 касается стороны BC в точке N, а также продолжений сторон AB и AC. Найти MN, если $\angle BCA = \frac{2\pi}{3}$.

12. Окружность радиуса R проходит через вершину A равнобедренного треугольника ABC, касается основания BC в точке B и пересекает боковую сторону AC в точке D. Найти AB, если $\frac{AD}{DC} = m$.

13. Окружности C_1 и C_2, радиусы которых равны соответственно 5 и 3, внутренне касаются. Хорда окружности C_1 касается окружности C_2 и делится точкой касания в отношении 3:1. Найти длину этой хорды.

14. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке M, а окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в треугольник BCD, касается стороны BC в точке N. Найти длины сторон треугольника ABC, если $BM = 6$, $BN = 5$.

15. Через одну из точек C дуги AB окружности проведены две произвольные прямые, пересекающие хорду AB в точках D и E, а окружность — в точках F и G. При каком положении точки C на AB около четырехугольника $DEFG$ можно описать окружность?

16. Две окружности внутренне касаются в точке A. Отрезок AB является диаметром большей окружности, а хорда BK большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Доказать, что AC — биссектриса треугольника ABK.

17. К окружности проведены две касательные, которые пересекают в точках A и B прямую, проходящую через центр окружности, и образуют с этой прямой равные углы. Доказать, что любая (подвижная) касательная отсекает на данных (неподвижных) касательных отрезки AC и BD, произведение которых постоянно и равно r^2, где r — радиус окружности.

18. Доказать, что если диаметр полукруга разделить на две произвольные части и на каждой из них как на диаметре построить полукруг внутри данного полукруга, то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, будет равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра, восстановленного внутри данного полукруга из точки деления его диаметра.

19. Две окружности внутренне касаются. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую в точках A и D, а меньшую — в точках B и C. Найти отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.

Уровень III

1. Три окружности радиусов r, r_1 и R касаются попарно внешним образом. Найти длину хорды, отсекаемой третьей окружностью от общей внутренней касательной первых двух окружностей.

2. На отрезке длины $2a+2b$ и его частях длины $2a$ и $2b$ как на диаметрах построены полуокружности, лежащие по одну сторону от отрезка. Найти радиус окружности, касающейся трех построенных полуокружностей.

3. Секущая проведена к двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r так, что эти окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найти длины этих отрезков.

4. Две окружности радиусов R и r внешне касаются. Найти радиус окружности, касающейся данных окружностей и их внешней касательной.

5. Окружности C_1 и C_2 с центрами O_1 и O_2 радиусов r_1 и r_2 касаются внешне. На отрезке O_1O_2 как на диаметре построена окружность C_3. Найти радиус окружности, касающейся внутренне окружности C_3 и внешне — окружностей C_1 и C_2.

6. Окружности C_1 и C_2 радиусов R и r, где $R > r$, внутренне касаются. Найти радиус окружности, касающейся окружностей C_1 и C_2 и прямой, проходящей через центры окружностей C_1 и C_2.

7. Найти радиус окружности, внутри которой расположены две окружности радиуса r и одна окружность радиуса R так, что каждая окружность касается трех других. При каких условиях задача имеет решение?

8. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через вершину A, касается стороны BC и пересекает сторону AC в точке M такой, что $AM : MC = 4 : 1$. Найти длину стороны AB.

9. В треугольнике ABC на средней линии DE, параллельной AB, как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Найти MN, если $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

10. Окружность, построенная на основании BC трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины диагоналей AC и BD трапеции и касается основания AD. Найти углы трапеции.

11. Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей внутри треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до сторон AC и BC равны 6 и 24 соответственно. Найти расстояние от точки K до стороны AB.

12. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность. Прямая CD, перпендикулярная AB, пересекает окружность в точке E. Касательная к окружности, проходящая через точку E, пересекает прямую AB в точке F. Найти длины отрезков EA и EF, если $AC = 5$, $\angle ABC = 2\arccos\sqrt{\dfrac{5}{6}}$.

13. Продолжения медиан AE и CF треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках D и N соответственно, причем $AD : AE = 2 : 1$, $CN : CF = 4 : 3$. Найти углы треугольника ABC.

14. В окружности проведены хорды AB и BC так, что $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$. Найти длину той хорды, которая делит пополам угол ABC.

15. На окружности по разные стороны от диаметра AC расположены точки B и D так, что $AB = \sqrt{6}$, $CD = 1$, а площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника BCD. Найти радиус окружности.

16. Три равных окружности пересекаются в одной точке. Вторая точка пересечения каких-либо двух из этих окружностей и центр третьей определяют проходящую через них прямую. Доказать, что получаемые при этом три прямые пересекаются в одной точке.

17. Из двух точек прямой l проведены по две касательные к окружности. В образовавшиеся каждой парой касательных, проведенных из одной точки, углы вписаны окружности равного радиуса. Доказать, что прямая, проходящая через центры построенных окружностей, параллельна прямой l.

18. Доказать, что если две точки лежат вне окружности, а соединяющая их прямая не пересекает окружности, то расстояние между этими точками больше разности длин касательных к окружности, проведенных из данных точек, и меньше суммы их. Показать, что одно или другое из этих неравенств не выполняются, если прямая пересекает окружность.

19. К окружности проведены две касательные. Доказать, что длина перпендикуляра, опущенного из произвольной точки окуржности на хорду, соединяющую точки касания, есть среднее пропорциональное между длинами перпендикуляров, опущенных из той же точки на касательные.

20. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на стороны вписанного в нее треугольника, лежат на одной прямой.

21. Три равных окружности пересекаются в одной точке. Вторая точка пересечения каких-либо двух из этих окружностей и центр третьей определяют проходящую через них прямую. Доказать, что получаемые три прямые пересекаются в одной точке.

22. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Отрезок AB является диаметром большей окружности. Хорда BK большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Доказать, что AC является биссектрисой треугольника ABK.

23. К окружности проведены две касательные, которые пересекают в точках A и B прямую, проходящую через центр окружности, и образуют с этой прямой равные углы. Доказать, что любая (подвижная) касательная отсекает на данных (неподвижных) касательных отрезки AC и BD, произведение которых постоянно.

24. Доказать, что сумма квадратов длин двух взаимно перпендикулярных пересекающихся хорд окружности больше квадрата ее диаметра, а сумма квадратов отрезков, на которые точка пересечения делит хорды, равна квадрату диаметра.

25. Доказать, что если разделить хорду окружности на три равные части и соединить с центром окружности концы хорды и точки деления, то соответствующий центральный угол разделится на три части, одна из которых больше двух других.

26. Доказать, что если из концов диаметра круга провести пересекающиеся хорды, то сумма произведений каждой хорды на ее отрезок от конца диаметра до точки пересечения есть величина постоянная.

27. Из двух точек прямой проведены по две касательные к окружности. В образованные углы с вершинами в этих точках вписаны окружности равного радиуса. Доказать, что их линия центров параллельна данной прямой.

28. Доказать, что если диаметр полукруга разделить на две произвольные части и на каждой из них описать полукруг внутри данного полукруга, то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, будет равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра, восстановленного внутри исходного полукруга из точки деления его диаметра.

29. Доказать, что если две точки лежат вне окружности и прямая, их соединяющая, не пересекает окружности, то расстояние между этими двумя точками больше разности длин касательных к окружности, проведенных из данных точек, и меньше суммы их. Показать, что одно или другое из этих неравенств не будет выполнено, если прямая пересекает окружность.

30. Окружность разделена произвольным образом на четыре части, и середины получающихся дуг соединены отрезками прямых. Показать, что среди этих отрезков два будут перпендикулярны между собой.

31. В прямой угол с вершиной A вписана окружность; B и C — точки касания. Доказать, что если к данной окружности провести касательную, пересекающую стороны AB и AC в точках M и N, то отсечет на этих сторонах отрезки MB и NC, сумма длин которых больше, чем $\frac{1}{3}(AB+AC)$, и меньше, чем $\frac{1}{2}(AB+AC)$.

32. Окружность радиуса, равного высоте некоторого равнобедренного треугольника, катится по основанию этого треугольника. Доказать, что величина дуги, отсекаемой на окружности боковыми сторонами треугольника, остается при этом постоянной. Будет ли это предложение верно для неравнобедренного треугольника?

33. Доказать, что диагонали вписанного в круг четырехугольника относятся между собой как суммы произведений сторон, сходящихся в концах диагоналей.

34. Доказать, что сумма квадратов расстояний какой-нибудь точки окружности до вершин правильного вписанного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

35. Доказать, что если окружность касается изнутри трех сторон четырехугольника и пересекает четвертую сторону, то сумма этой последненкй и противоположной стороны больше суммы двух других сторон четырехугольника.

36. Доказать, что если окружность касается изнутри трех сторон четырехугольника, четвертая сторона которого не пересекает окружности, то сумма четвертой и противоположной сторон меньше суммы двух других сторон четырехугольника.

Ответы

Уровень I

1. 3 и 6. **2.** 5. **3.** 15, $\sqrt{93}$. **4.** 30 и 51. **5.** 10. **6.** $\sqrt{Rr}$ **7.** $\frac{3b}{4}$, $\frac{b}{4}$. **8.** $\frac{\sqrt{175}}{2}$.
9. $\frac{12(4\pi - 3\sqrt{3})}{(2\pi + 3\sqrt{3})^2}$. **10.** $6(4 - 3\arcsin\frac{4}{5})$. **11.** $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$. **12.** $\frac{aR}{R + a}$. **13.** 84.
14. $4R^2$. **15.** $4\sqrt{6}$. **16.** $\frac{r}{8}$. **17.** $\frac{15}{2}$.

Уровень II

1. $a\sqrt{\left(1 + \frac{r_1}{R}\right)\left(1 + \frac{r_2}{R}\right)}$. **2.** $\frac{a}{\sqrt{1 - \frac{r}{R}}}$. **3.** $\frac{8(Rr)^{3/2}}{R + r}$. **4.** $\sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)}{1 + p}}$. **5.** 1.
6. $\sqrt{15} + \sqrt{35}$.
7. $\frac{a^3(R + r)}{(R + r)^2 + a^2}$. **8.** $a\cos\alpha$. **9.** $\frac{60}{7}$. **10.** $\frac{16}{5}$. **11.** $4\sqrt{3}$. **12.** $R\sqrt{\frac{4m + 3}{m + 1}}$. **13.** 8.
14. $AB = BC = AC = 8$. **15.** $\smile AC = \smile BC$. **19.** 3.

Уровень III

1. $\frac{4R\sqrt{rr_1}}{r + r_1}$. **2.** $\frac{ab(a + b)}{a^2 + ab + b^2}$. **3.** $\frac{\sqrt{14Rr - r^2 - R^2}}{2\sqrt{3}}$. **4.** $\frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$.
5. $\frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2)}$. **6.** $\frac{4rR(R - r)}{(R + r)^2}$.
7. $\frac{R}{4R - r}\left(r + 2R + 2\sqrt{R^2 + 2rR}\right)$, решение существует лишь при $r < 4R$.
8. $2R\sqrt{2}$. **9.** $\frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{4ab}$. **10.** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. **11.** 12. **12.** $\sqrt{\frac{15}{2}}$, 6.
13. $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **14.** 4. **15.** $\frac{3}{2}$.

§ 31. Комбинации геометрических фигур

Примеры с решениями

Пример 1. Окружность с центром на стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) касается сторон AB и BC (рис. 31.1). Найти радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 25, а отношение высоты BD к стороне AC равно $\frac{3}{8}$.

Решение. Первый способ. Пусть D — середина AC, E — точка, в которой окружность радиуса r (ее центр — точка D) касается стороны AB, S — площадь треугольника ABC. Тогда $ED \perp AB$ и $ED = r$. Если $BD = 3x$, то $AD = 4x$ и $AB = 5x$. Так как

$S = BD \cdot AD = 12x^2 = 25$, то $x = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$. С другой стороны, $S = r \cdot AB = 5xr$, откуда

$$r = \frac{25}{5x} = \frac{5}{x} = 2\sqrt{3}.$$

Второй способ. Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{3}{4}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $r = AD \cdot \sin\alpha = \dfrac{3}{5}AD$. Но $S = BD \cdot AD = AD^2 \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}AD^2 = 25$, откуда $AD = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$, $r = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{10}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Ответ. $2\sqrt{3}$.

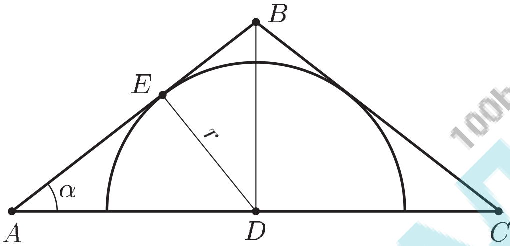

Рис. 31.1

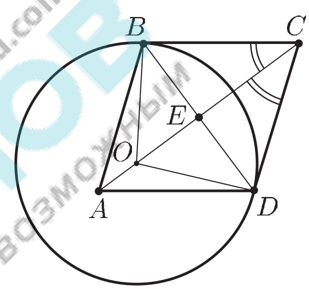

Рис. 31.2

Пример 2. Окружность с центром O проходит через вершину B ромба $ABCD$ и касается лучей CB и CD. Найти площадь ромба, если $DO = \dfrac{3}{4}$, $OC = \dfrac{5}{4}$ (рис. 31.2).

Решение. Из условий задачи следует, что окружность касается лучей CB и CD в точках B и D, а точка E, в которой пересекаются диагонали ромба, лежит на отрезке OC. Кроме того, $OB = OD$ и $OB \perp BC$, $OD \perp CD$. Из треугольника ODC находим $CD = \sqrt{OC^2 - DO^2} = 1$, $OD \cdot CD = OC \cdot DE$, откуда $DE = \dfrac{3}{5}$, $CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = \dfrac{4}{5}$. Искомая площадь $S = 2CE \cdot DE = \dfrac{24}{25}$.

Ответ. $\dfrac{24}{25}$.

Пример 3. Основание AC равнобедренного треугольника ABC является хордой окружности, центр которой лежит вне треугольника. Прямые, проходящие через точку B, касаются окружности в точках D и E (рис. 31.3). Найти площадь треугольника DBE, если $BD = \sqrt{5}$, $\angle ABC = 2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, а радиус окружности равен 1.

Решение. Пусть O — центр окружности, K и M — середина хорд AC и DE, $\angle ABK = \alpha$, S — искомая площадь. Тогда $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $S = DM \cdot BM$.

Для вычисления S достаточно найти гипотенузу OB прямоугольного треугольника BDO, в котором $OD = 1$. Так как $AK = AB \cdot \sin\alpha$, $BK = AB\cos\alpha$, то $AK = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $BK = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $OK = \sqrt{AO^2 - AK^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $OB = BK + OK = 2\sqrt{2}$, $BD = \sqrt{OB^2 - OD^2} = \sqrt{7}$.

Используя равенство $OB \cdot DM = OD \cdot BD$, находим $DM = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. Наконец, из $\triangle BDM$ имеем $BM = \sqrt{BD^2 - DM^2} = \sqrt{7 - \frac{7}{8}} = \frac{7}{2\sqrt{2}}$ и поэтому $S = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{7}}{8}$.

Ответ. $\frac{7\sqrt{7}}{8}$.

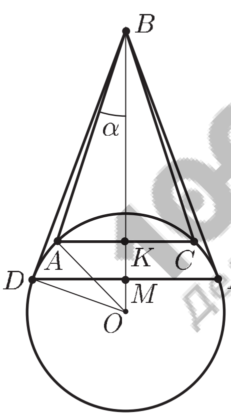

Рис. 31.3

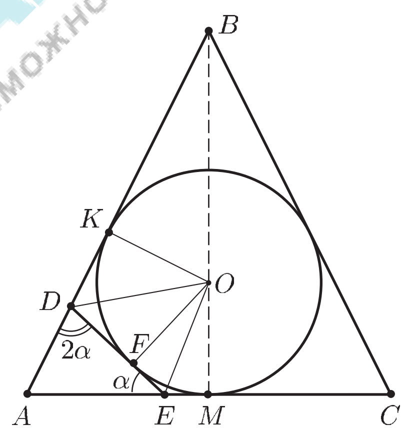

Рис. 31.4

Пример 4. Окружность с центром O вписана в треугольник ABC, в котором $AB = BC$. Касательная к окружности пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно (рис. 31.4). Найти радиус окружности, если $\angle ADE = 2\angle AED$, $OD = 3\sqrt{5}$, $OE = 4\sqrt{2}$.

Решение. Пусть K, F и M — точки касания окружности с отрезками AB, DE и AC соответственно, $\angle AED = \alpha$, r — радиус окружности. Тогда $OK = OF = OM = r$, $\angle ODE = \angle ODK = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle OEF = \angle OEM = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Из треугольников OEF и ODF находим

$$r = 4\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 4\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$r = 3\sqrt{5}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 3\sqrt{5}\cos\alpha = 3\sqrt{5}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right),$$

откуда получаем уравнение

$$6\sqrt{5}t^2 - 4\sqrt{2}t - 3\sqrt{5} = 0,$$

где $t = \cos\frac{\alpha}{2}$. Решая это уравнение, находим $t = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ и поэтому $r = 4\sqrt{2}t = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

Ответ. $\frac{12}{\sqrt{5}}$.

Пример 5. Биссектриса AD и высота BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 31.5). Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через вершину A, середину стороны AC и пересекает сторону AB в точке K такой, что $AK : KB = 1 : 3$. Найти длину стороны BC.

Решение. Пусть $AE = a$, $\angle BAC = 2\alpha$, тогда $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$. Если M и F — точки пересечения AD и AC с окружностью, то $AM = 2R$, и из равенства прямоугольных треугольников AKM и AMF следует, что $AK = AF = 2a$ ($MF \perp AF$, $OE \perp AF$, O — середина AM). Так как $AC = 2AF = 4AE = 4a$, $AB = 4AK = 8a$, то $\cos 2\alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{8}$, т. е. $2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{8}$, откуда $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Кроме того, $AF = AM \cdot \cos\alpha = 2R \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}R$, т. е. $2a = \frac{3}{2}R$, откуда $a = \frac{3}{4}R$, $AC = 4a = 3R$, $AB = 8a = 6R$.

По теореме косинусов находим

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha,$$

т. е. $BC^2 = 36R^2 + 9R^2 - 2 \cdot 6R \cdot 3R \cdot \frac{1}{8}$, откуда $BC^2 = \frac{81}{2}R^2$, $BC = \frac{9}{\sqrt{2}}R$.

Ответ. $\frac{9}{\sqrt{2}}R$.

Пример 6. Около окружности описан ромб со стороной 3 и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 7. Найти радиус окружности.

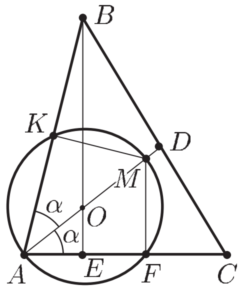

Рис. 31.5

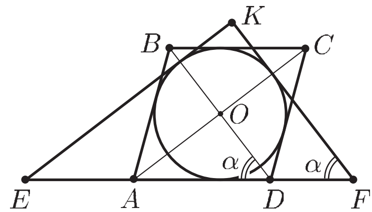

Рис. 31.6

Решение. Центр O окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей ромба. Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то стороны KE и KF треугольника, описанного около окружности, также перпендикулярны (рис. 31.6).

Пусть $\angle BDA = \angle KFE = \alpha$, r — радиус окружности, S и S_1 — площади ромба и треугольника KEF соответственно.

Тогда $S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3r = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2a\sin\alpha \cdot 2a\cos\alpha$, где $a = 3$, т. е. $6r = 18\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ или

$$r = \frac{3}{2}\sin 2\alpha. \tag{1}$$

Аналогично, $S_1 = \frac{1}{2} KF \cdot KE = \frac{1}{2} \cdot 7\sin\alpha \cdot 7\cos\alpha = \frac{49}{4}\sin 2\alpha$. С другой стороны, $S_1 = \frac{1}{2} r(7 + 7\sin\alpha + 7\cos\alpha)$, откуда

$$r(1 + \sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{7}{2}\sin 2\alpha. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $3(1 + \sin\alpha + \cos\alpha) = 7$ и $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{3}$, откуда $1 + \sin 2\alpha = \frac{16}{9}$, $\sin 2\alpha = \frac{7}{9}$, $r = \frac{3}{2}\sin 2\alpha = \frac{7}{6}$.

Ответ. $\frac{7}{6}$.

Пример 7. Диагонали BD и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O, $AO = 2$, $OC = 3$. Точка K расположена на стороне BC так, что $BK : KC = 1 : 2$, а треугольник AKD является равносторонним (рис. 31.7). Найти его площадь.

Решение. Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на AC, $AK = a$, $\angle KAC = \alpha$. Тогда $\angle CAD = \frac{\pi}{3} - \alpha$, $AE = AK \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha$. Из равенств $OE + EC = OC = 3$

и $OE : EC = BK : KC = 1 : 2$ следует, что $OE = 1$, $AE = AO + OE = 3 = a\cos\alpha$. Но $\angle DAO = \frac{\pi}{3} - \alpha$ и поэтому $AO = a\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 2$.

Из уравнений $a\cos\alpha = 3$ и $a\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 2$ находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, откуда $\cos\alpha = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $a = \frac{3}{\cos\alpha} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$. Искомая площадь

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\frac{7}{\sqrt{3}}$.

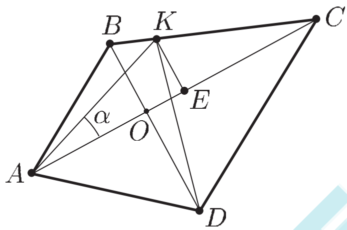

Рис. 31.7

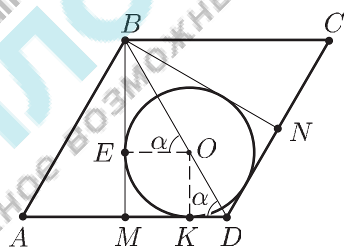

Рис. 31.8

Пример 8. Из вершины B тупого угла ромба $ABCD$ проведены высоты BM и BN. В четырехугольник $BMDN$ вписана окружность радиуса 1. Найти сторону ромба, если $\angle ABC = 2\operatorname{arctg} 2$.

Решение. Пусть E и K — точки касания вписанной в четырехугольник $BMDN$ окружности, O — ее центр (см. рис. 31.8), $\alpha = \operatorname{arctg} 2$, $AB = AD = x$. Заметив, что точка O принадлежит отрезку BD, выразим двумя способами длину этого отрезка.

Так как $\angle BAD = \beta = \pi - 2\alpha$, то $BD = 2x\sin\frac{\beta}{2} = 2x\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2x\cos\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. С другой стороны, $BD = OD + OB$, где $OD = \frac{OK}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $OB = \frac{OE}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{5}$, откуда $BD = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. Таким образом, $\frac{2x}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, откуда $x = \frac{15}{4}$.

Ответ. $\frac{15}{4}$.

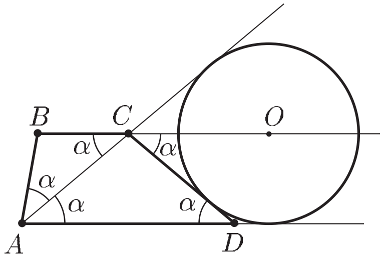

Рис. 31.9

Пример 9. Длина основания BC трапеции $ABCD$ равна 13, а угол BAD острый и вдвое больше угла ADC. Окружность радиуса 5 с центром на прямой BC касается прямых AC, AD и отрезка CD (рис. 31.9). Найти площадь трапеции.

Решение. Пусть $\angle ADC = \alpha$, тогда $\angle BAD = 2\alpha$. Так как прямые AC и CD являются касательными к окружности, а центр окружности лежит на прямой BC, то прямая BC делит угол между этими касательными пополам. Отсюда следует $\angle CDA = \angle BCA = \angle CAD = \angle BAC = \alpha$. Кроме того, высота h трапеции равна радиусу окружности, так как центр окружности лежит на прямой BC, а окружность касается прямой AD.

Пусть S — площадь трапеции, тогда $S = \dfrac{BC + AD}{2}h$, где $h = 5 = CD\sin\alpha = AC\sin\alpha$, так как ACD — равнобедренный треугольник. Но $AC = 2BC\cdot\cos\alpha = 26\cos\alpha$. Следовательно, $\sin 2\alpha = \dfrac{5}{13}$, откуда находим $\cos 2\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{25}{26}$.

Из $\triangle ACD$ находим $AD = 2AC\cdot\cos\alpha = 4BC\cdot\cos^2\alpha = 50$. Следовательно, $S = \dfrac{13+50}{2}\cdot 5$.

Ответ. 157,5.

Пример 10. Точки E и F расположены соответственно на стороне BC и высоте BP остроугольного треугольника ABC так, что $AP = 3$, $PC = \dfrac{11}{2}$, $RE : EC = 10 : 1$, а треугольник AEF является равносторонним. Найти площадь треугольника AEF.

Решение. Пусть a — длина стороны треугольника AEF, S — его площадь, M — ортогональная проекция точки E на AC, $\angle EAC = \alpha$. Тогда $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $\dfrac{MC}{PC} = \dfrac{EC}{BC}$, т. е. $MC : \dfrac{11}{2} = \dfrac{1}{11}$, откуда $MC = \dfrac{1}{2}$, $PM = PC - MC = 5$, $AM = AP + PM = 8$. Из треугольников AEM

и AFP находим

$$AE = a = \frac{AM}{\cos\alpha} = \frac{8}{\cos\alpha},$$

$$AF = a = \frac{AP}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)} = \frac{3}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}.$$

Следовательно, $8\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=3\cos\alpha$ или $8\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)=3\cos\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4\sqrt{3}}$, $\cos^2\alpha=\frac{48}{49}$, $a^2=\frac{64}{\cos^2\alpha}=\frac{4\cdot 49}{3}$, $S=\frac{49}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $\frac{49}{\sqrt{3}}$.

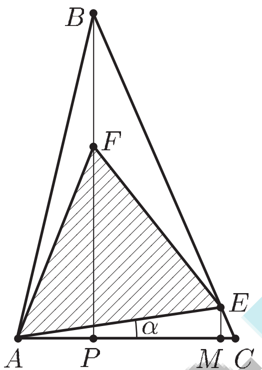

Рис. 31.10

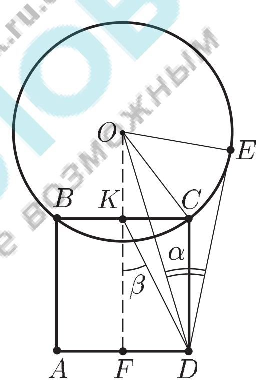

Рис. 31.11

Пример 11. Окружность, центр которой лежит вне квадрата $ABCD$, проходит через точки B и C (рис. 31.11). Найти угол между касательными к окружности, проведенными из точки D, если отношение длины стороны квадрата к диаметру окружности равно $\frac{3}{5}$.

Решение. Пусть O — центр окружности, K и F — середина отрезков BC и AD, E — точка, в которой прямая, проходящая через точку D и лежащая вне квадрата, касается окружности; $2x$ — длина стороны квадрата, $\angle ODE=\alpha$, $\angle FKD=\beta$, r — радиус окружности.

Тогда $OC = OE = r$, $r = \frac{5}{3}x$, а искомый угол равен 2α, так как касательные к окружности, проведенные из точки D образуют равные углы с прямой DO.

Из $\triangle ODE$ найдем, что $\sin\alpha = \frac{r}{OD} = \frac{5x}{3OD}$. Выразим OD через x, применяя теорему косинусов к треугольнику OKD. Получим

$$OD^2 = OK^2 + KD^2 + 2OK\cdot KD\cos\beta,$$

где $OK = \sqrt{OC^2 - KC^2} = \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{4}{3}x$, $KD = \sqrt{KC^2 + CD^2} = \sqrt{x^2 + 4x^2} = x\sqrt{5}$, $\cos\beta = \frac{KF}{KD} = \frac{2x}{x\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Следовательно, $OD^2 = \frac{16x^2}{9} + 5x^2 + 2\cdot\frac{4x}{3}\cdot x\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{109}{9}x^2$, откуда $OD = \frac{\sqrt{109}}{3}x$, $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{109}}$, а искомый угол равен 2α.

Ответ. $2\arcsin\frac{5}{\sqrt{109}}$.

Пример 12. Продолжение высот треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точках D, E и F. Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника DEF, если $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = \frac{\pi}{4}$ (рис. 31.12).

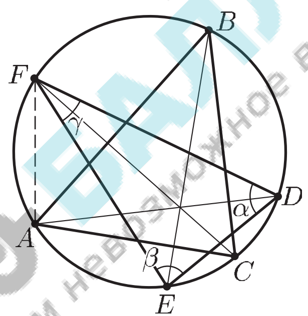

Рис. 31.12

Решение. Пусть α, β, γ — углы треугольника DEF, R — радиус окружности, описанной около треугольников ABC и DEF; S и S_1 — площади треугольников ABC и DEF. Тогда

$$S = 2R\sin A\sin B\sin C,$$
$$S_1 = 2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Так как $\angle AFC = \angle B$, то $\angle FAB = \angle FEB = \frac{\pi}{2} - B$ ($AB \perp FC$). Аналогично, $\angle BED = \angle BAD = \frac{\pi}{2} - B$ ($BC \perp AD$). Следовательно,

$$\angle FED = \angle FEB + \angle BED = \pi - 2B = \beta.$$

Аналогично, $\alpha = \pi - 2A$, $\gamma = \pi - 2C$, где $\angle C = \dfrac{5\pi}{12}$. Поэтому

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{5\pi}{12}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{5\pi}{6}} = \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12},$$

где $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})$.

Ответ. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Пример 13. Средняя линия KL равностороннего треугольника ABC является также средней линией треугольника DEF, у которого вершина D лежит на отрезке AC, а вершина F — на продолжении стороны AC за точку C (рис. 31.13). Найти угол EDF, если площадь четырехугольника $DKLC$ составляет $\dfrac{3}{8}$ площади треугольника DEF.

Решение. Пусть $DC = x$, $AC = a$, S — площадь треугольника DEF, S_1 — площадь трапеции $DKLC$. Тогда площадь S_1 трапеции $DKLC$ равна

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + x\right)\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Так как площади треугольников ABC и DEF равны, то $S_1 = \dfrac{3}{8}S$, где $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, т. е. $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}\left(\dfrac{a}{2} + x\right) = \dfrac{3}{8}\,\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, откуда находим $x = \dfrac{a}{4}$.

По теореме косинусов из треугольников AKD и AKC получаем

$$KD^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9}{16}a^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3}{4}a\cdot\frac{1}{2} = \frac{7a^2}{16},$$

$$KC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4}.$$

Аналогично, из $\triangle KDC$ находим $\dfrac{3a^2}{4} = KC^2 = \dfrac{7a^2}{16} + \dfrac{a^2}{16} - 2\,\dfrac{a\sqrt{7}}{4}\cdot\dfrac{a}{4}\cos\alpha$, где $\alpha = \angle KDA$. Отсюда следует, что $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$, а искомый угол равен $\pi - \arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Ответ. $\pi - \arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Пример 14. Найти периметр четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса 5, если $AB : BC = 3 : 4$, $\angle ADC = \dfrac{\pi}{2}$, а площадь этого четырехугольника равна 44 (рис. 31.14).

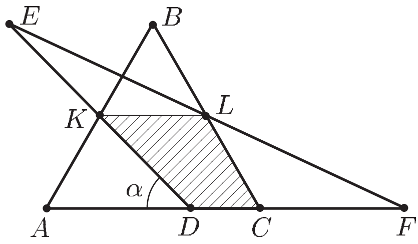

Рис. 31.13

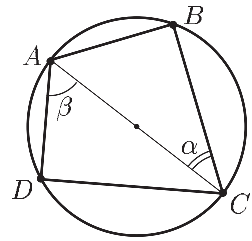

Рис. 31.14

Решение. Так как угол D прямой, то AC — диаметр окружности, а угол B — прямой. Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{4}$, откуда следует, что $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $AB = AC\sin\alpha = 6$, $BC = 8$.

Обозначим $\angle DAC = \beta$, тогда $AD = 10\cos\beta$, $DC = 10\sin\beta$, а периметр четырехугольника равен $P = 14 + 10(\sin\beta + \cos\beta)$.

По условию задачи площадь s четырехугольника равна 44, т. е. $\dfrac{1}{2}(AB\cdot BC + AD\cdot DC) = 24 + 50\sin\beta\cos\beta = 44$, откуда $2\sin\beta\cos\beta = \dfrac{4}{5}$, $(\sin\beta+\cos\beta)^2 = 1 + 2\sin\beta\cos\beta = \dfrac{9}{5}$, $\sin\beta + \cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$. Следовательно, $P = 14 + 10\dfrac{3}{\sqrt{5}} = 14 + 6\sqrt{5}$.

Ответ. $14 + 6\sqrt{5}$.

Пример 15. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что окружность радиуса R касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно и пересекает медиану BD в точке E так, что $BE = \dfrac{5}{9}BD$ (рис. 31.15).

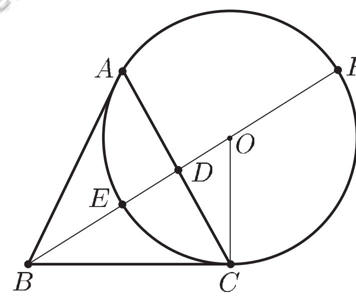

Рис. 31.15

Решение. По свойству касательных $AB = CB$ и поэтому $BD \perp AC$, а прямая BD проходит через центр O окружности. Если F — точка пересечения луча DO с окружностью, то $EF = 2R$, $OE = R$.

Пусть $BE = x$, тогда $BD = \frac{9}{5}x$, а искомая площадь $S = BD \cdot DC = \frac{9}{5}x \cdot DC$. Из прямоугольного треугольника OCB, в котором CD — высота, находим $OC^2 = OB \cdot OD$, где $OC = R$, $OB = BE + EO = x + R$, $OD = OB - BD = x + R - \frac{9}{5}x = R - \frac{4}{5}x$.

Следовательно, $R^2 = (R + x)(R - \frac{4}{5}x)$, откуда $x = \frac{R}{4}$, $BD = \frac{9}{20}R$.

Наконец, из треугольника OCD получаем

$$CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{4}{5}R\right)^2} = \frac{3}{5}R.$$

Поэтому $S = \frac{9}{20}R \cdot \frac{3}{5}R = \frac{27}{100}R^2$.

Ответ. $\frac{27}{100}R^2$.

Пример 16. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AC и BC соответственно в точках M и N и пересекает биссектрису BD в точках P и Q. Найти отношение площади треугольника PQM к площади треугольника PQN, если $\angle A = \frac{\pi}{4}$, $\angle B = \frac{\pi}{3}$ (рис. 31.16).

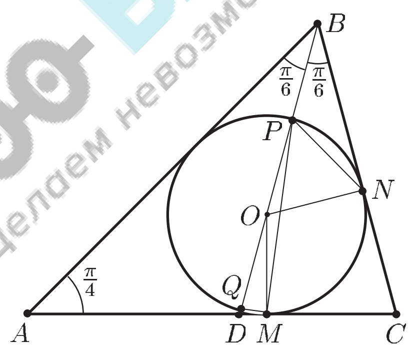

Рис. 31.16

Решение. Пусть O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, r — ее радиус, s_1, s_2, s_3 и s_4 — площади треугольников PQM, POM, OQM и PON соответственно, $\angle POM = \varphi$.

Так как $\angle ODM = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$, то $\varphi = \angle ODM + \angle OMD = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{11}{12}\pi$. Далее находим

$$s_1 = 2s_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin\varphi = r^2 \sin\frac{\pi}{12}, \quad s_3 = 2s_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin\frac{\pi}{3} = r^2 \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда следует $\dfrac{s_1}{s_3} = \dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{12}}{\sqrt{3}}$, где $\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ответ. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} - 1)$.

Пример 17. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Прямая BO пересекает эту окружность в точках D и E, а отрезки AO и CO пересекают окружность в точках M и N соответственно (рис. 31.17). Найти отношение площади треугольника DME к площади треугольника DNE, если $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$.

Решение. Пусть r — радиус окружности, s_1 и s_2 — площади треугольников DME и DNE, $\angle EOM = \varphi$, $\angle EON = \psi$. Тогда $s_1 = r^2\sin\varphi$ ($OM = ON = r$, O — середина DE), $s_2 = r^2\sin\psi$, откуда $\dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi}$.

Так как O — точка пересечения биссектрис, то $\angle OBA = \dfrac{\pi - (\alpha + \gamma)}{2}$.

Поэтому по свойству внешнего угла треугольника AOB находим $\varphi = \dfrac{\pi - (\alpha + \gamma)}{2} + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi - \gamma}{2}$. Аналогично, $\psi = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$. Искомое отношение

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\sin\dfrac{\pi - \gamma}{2}}{\sin\dfrac{\pi - \alpha}{2}} = \frac{\cos\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Ответ. $\dfrac{\cos\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

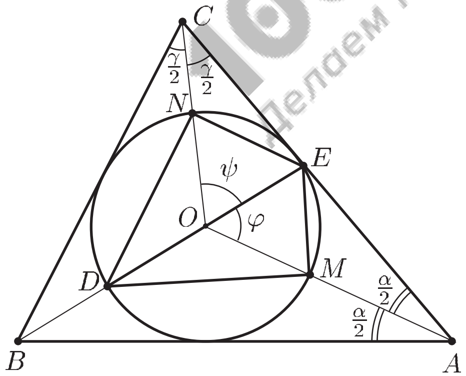

Рис. 31.17

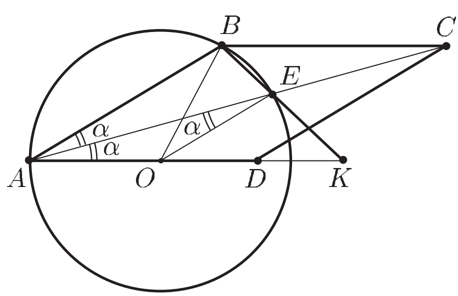

Рис. 31.18

Пример 18. Точка K лежит на продолжении стороны AD ромба $ABCD$ за точку D, E — точка пересечения AC и BK (рис. 31.18), $AK = 14$, точки A, B и E лежат на окружности радиуса 6, центр которой принадлежит отрезку AK. Найти длину отрезка BK.

Решение. Пусть O — центр окружности, $\angle BAE = \alpha$, тогда $OA = OB = OE = 6$, $\angle EAD = \angle AEO = \alpha$, $\frac{AB}{2} = AO \cdot \cos 2\alpha$, откуда $AB = 12\cos 2\alpha$. Так как $\angle BAE = \angle AEO$, то $AB \| OE$ и $\triangle ABK \sim \triangle KOE$, откуда следует, что $\frac{AB}{OE} = \frac{AK}{AK - AO}$, т. е. $2\cos 2\alpha = \frac{14}{8}$, или $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$.

Из $\triangle ABK$ по теореме косинусов находим

$$BK^2 = AK^2 + AB^2 - 2AK \cdot AB \cdot \cos 2\alpha,$$

т. е.

$$BK^2 = \left(\frac{21}{2}\right)^2 + 14^2 - 2 \cdot \frac{21}{2} \cdot 14 \cdot \frac{7}{8},$$

откуда $BK = 7$.

Ответ. 7.

Пример 19. В прямоугольном треугольнике ABC, гипотенуза AB которого равна 2, проведены медианы AM и BN (рис. 31.19). Известно, что около четырехугольника $ABMN$ можно описать окружность. Найти ее радиус.

Решение. Пусть $BM = MC = x$, $AN = NC = y$, F — середина AB. По свойству секущих, проведенных из одной точки окружности, имеем $CB \cdot CM = CA \cdot CN$, т. е. $2x^2 = 2y^2$, откуда $x = y$. Следовательно, ABC — равнобедренный треугольник ($BC = AC$), $CF = \frac{AB}{2} = 1$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Проведем через точку C и точку F прямую, пересекающую окружность в точках E и K. Тогда EK — диаметр окружности, а $\angle EAK = \frac{\pi}{2}$.

По свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла, $AF^2 = EF \cdot FK$, где $AF = 1$. Пусть R — радиус окружности, $EF = z$, тогда

$$1 = z(2R - z). \tag{1}$$

Имеем $CK \cdot CE = CB \cdot CM$ по свойству секущих, проведенных из точки C, где $CE = CF - EF = 1 - z$, $CK = EK + CE = 2R + 1 - z$. Следовательно, $(2R + 1 - z)(1 - z) = 2x^2 = 1$ или

$$2R + 1 - 2z - z(2R - z) = 1. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $z = R - \frac{1}{2}$, $1 = (R - \frac{1}{2})(R + \frac{1}{2}) = R^2 - \frac{1}{4}$, откуда $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

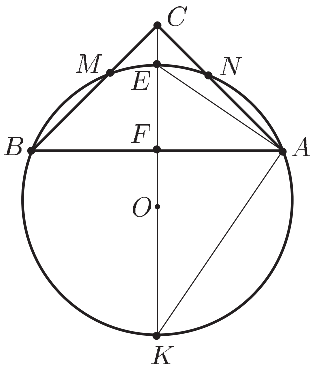

Рис. 31.19

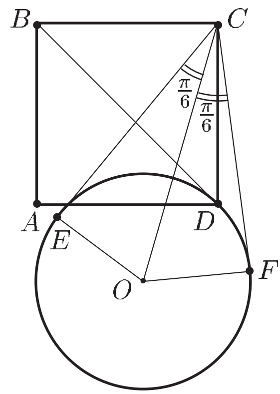

Рис. 31.20

Пример 20. Окружность касается диагонали BD квадрата $ABCD$ в точке D, а центр O окружности лежит по ту же сторону от прямой BD, что и точка A (рис. 31.20). Угол между касательными к окружности, проведенными из точки C, равен $\frac{\pi}{3}$. Найти отношение стороны квадрата к радиусу окружности.

Решение. Пусть x — сторона квадрата, R — радиус окружности, E и F — точки касания с окружностью прямых, проведенных из точки C. Тогда $OD = OE = OF = R$, $\angle OCF = \angle OCE = \frac{\pi}{6}$ и поэтому $OC = 2R$. Так как $OD \perp BD$, а $\angle BDC = \frac{\pi}{4}$, то $\angle ODC = \frac{3\pi}{4}$.

Применяя теорему косинусов к треугольнику OCD, получаем $OC^2 = CD^2 + OD^2 - 2CD \cdot OD \cdot \cos\frac{3\pi}{4}$ или

$$4R^2 = x^2 + R^2 + 2x \cdot R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Полагая $\frac{x}{R} = t$, запишем уравнение (1) в виде

$$t^2 + \sqrt{2}t - 3 = 0, \qquad \text{откуда} \quad t = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}}$.

Пример 21. Вершина C прямоугольника $ABCD$ лежит на боковой стороне KM равнобедренной трапеции $ABKM$ (рис. 31.21), P — точка пересечения отрезков AM и CD. Найти $\angle BAM$ и отношение площади трапеции к площади прямоугольника, если $AB = 2BC$, $AP = 3BK$.

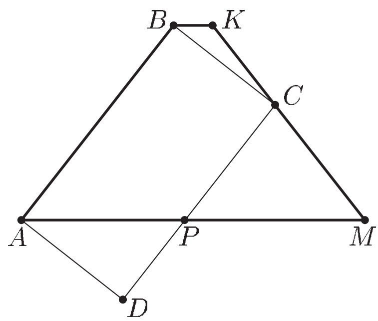

Рис. 31.21

Решение. Пусть $\angle BAM = \alpha$, тогда $\angle BKC = \pi - \alpha$, $\angle KBC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle KCB = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$. Обозначим $BK = x$, $BC = y$, тогда $AB = 2y$, $AP = 3x$. Из $\triangle BKC$ по теореме синусов находим

$$\frac{x}{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{y}{\sin(\pi - a)}$$

или

$$\frac{y}{x} = -\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha}. \qquad (1)$$

Из $\triangle ADP$ имеем

$$\sin\alpha = \frac{y}{3x}, \qquad (2)$$

а из равенств (1) и (2) следует, что

$$3\sin\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha}. \qquad (3)$$

Так как $\sin\alpha \neq 0$, то из (3) получаем $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$, откуда $\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, т. е. $\angle BAM = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Пусть S_1 — площадь трапеции, S_2 — площадь прямоугольника, h — высота трапеции. Тогда $h = 2y\sin\alpha$, $AM = BK + 2AB \cdot \cos\alpha = x + 4y\cos\alpha$, $S_2 = 2y^2$, $S_1 = \frac{1}{2}(BK + AM)h = 2(x + 2y\cos\alpha)y\sin\alpha$, откуда

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sin\alpha(x + 2y\cos\alpha)}{y} = \sin\alpha\left(\frac{x}{y} + 2\cos\alpha\right).$$

Так как $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, то из (2) следует, что $\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Следовательно, $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, т. е.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ. $\frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{2})$.

Пример 22. Трапеция $AEFG$ с основаниями EF и AG расположена в квадрате $ABCD$ со стороной 14 так, что точки E, F и G лежат на сторонах AB, BC и CD соответственно (рис. 31.22). Диагонали AF и EG перпендикулярны, а $EG = 10\sqrt{2}$. Найти периметр трапеции.

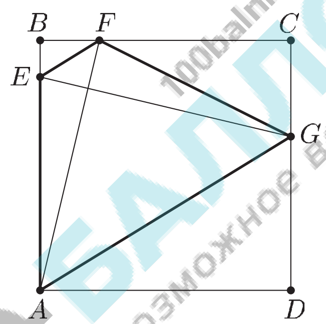

Рис. 31.22

Решение. Первый способ. Пусть прямоугольная система координат Oxy выбрана так, что оси Ox и Oy совпадают соответственно с прямыми AD и AB и пусть $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ — единичные векторы координатных осей.

Если x_2 — абсцисса точки F, а y_1 и y_0 — ординаты точек E и G соответственно, то $E(0; y_1)$, $F(x_2; 14)$, $G(14; y_0)$.

Так как $\overline{EF} \| \overline{AG}$, а $\overline{EF} = x_2\overline{e}_1 + (14 - y_1)\overline{e}_2$, $\overline{AG} = 14\overline{e}_1 + y_0\overline{e}_2$, то

$$\frac{x_2}{14} = \frac{14 - y_1}{y_0}. \tag{1}$$

Из условия $\overline{AF} \perp \overline{EG}$, где $\overline{AF} = x_2\overline{e}_1 + 14\overline{e}_2$, $\overline{EG} = 14\overline{e}_1 + (y_0 - y_1)\overline{e}_2$, следует, что $14x_2 + 14(y_0 - y_1) = 0$, откуда

$$x_2 = y_1 - y_0. \tag{2}$$

По условию $EG = 10\sqrt{2}$, поэтому

$$14^2 + (y_0 - y_1)^2 = 200. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что $x_2 = 2$. Подставляя $x_2 = 2$ в (1), получаем

$$y_0 = 7(14 - y_1). \tag{4}$$

Решая систему (3)–(4), находим $y_1 = 12{,}5$, $y_0 = 10{,}5$. Отсюда следует, что

$$AE = y_1 = 12{,}5,$$

$$EF = \sqrt{x_2^2 + (14 - y_1)^2} = 2{,}5,$$

$$FG = \sqrt{(14 - x_2)^2 + (y_0 - 14)^2} = 12{,}5,$$

$$AG = \sqrt{14^2 + y_0^2} = 17{,}5.$$

Следовательно, периметр трапеции равен

$$AE + EF + FG + GA = 45.$$

Второй способ. Проведем через точку G прямую, параллельную AD и пересекающую AB в точке K. Получим прямоугольный треугольник KEG, равный треугольнику ABF ($KG = AB$, $\angle KGE = \angle BAF$ — это углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Из треугольника KEG находим $KE = \sqrt{EG^2 - KG^2} = \sqrt{200 - 196} = 2$, а из подобия треугольников BFE и DAG следует, что

$$\frac{DG}{AD} = \frac{BE}{BF}. \tag{5}$$

Пусть $DG = AK = x$, тогда $BE = 14 - (x + 2) = 12 - x$, и равенство (5) примет вид $\dfrac{x}{14} = \dfrac{12 - x}{2}$, откуда

$$x = DG = 10{,}5, \qquad BE = 12 - x = 1{,}5,$$
$$AE = x + 2 = 12{,}5, \qquad CG = 14 - x = 3{,}5.$$

Из треугольников BFE, FCG и ADG по теореме Пифагора найдем

$$EF = 2{,}5, \qquad FG = 12{,}5, \qquad AG = 17{,}5.$$

Искомый периметр трапеции равен

$$AE + EF + FG + AG = 45.$$

Ответ. 45.

Задачи

1. Окружность с центром на стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) касается сторон AB и BC, а сторону AC делит на три равные части. Найти радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна $9\sqrt{2}$.

2. Центр окружности, касающейся катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC, лежит на гипотенузе AB. Найти диаметр окружности, если он в четыре раза меньше суммы катетов, а площадь треугольника ABC равна 16.

3. Две смежные вершины квадрата расположены на одной из двух концентрических окружностей, а две другие вершины — на другой окружности. Найти длину стороны квадрата, если радиусы окружностей равны 1 и $\sqrt{5}$.

4. Окружность с центром O проходит через вершину C ромба $ABCD$ и касается лучей DC и DA. Найти площадь ромба, если $OA = 4$, $OD = 5$.

5. Основание AC равнобедренного треугольника ABC является хордой окружности, центр которой лежит внутри треугольника ABC. Прямые, проходящие через точку B, касаются окружности в точках D и E. Найти площадь треугольника DBE, если $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$, а радиус окружности равен 1.

6. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O. Касательная к окружности пересекает стороны BC и CA треугольника в точках M и N соответственно. Найти радиус окружности, если $\angle MNC = 2\angle NMC$, $OM = \sqrt{10}$, $ON = \frac{15}{4}$.

7. Биссектриса BK и высота CL остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через вершину B, середину стороны BC и пересекает сторону AB в точке M такой, что $AM : MB = 2 : 1$. Найти длину стороны AC.

8. Около окружности описаны ромб со стороной 4 и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 9. Найти радиус окружности.

9. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O, $AO = \frac{4}{3}$, $OC = 3$. Точка E лежит на стороне AB так, что $AE : EB = 1 : 3$, а треугольник DEC является равносторонним. Найти его площадь.

10. Из вершины A острого угла ромба $ABCD$ опущены перпендикуляры AM и AN на продолжения сторон BC и CD. В четырехугольник $AMCN$ вписана окружность радиуса 1. Найти сторону ромба, если $\angle BAC = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

11. Длина основания BC трапеции $ABCD$ равна 17, а угол BAD острый и вдвое больше угла ADC. Окружность радиуса 15 с центром на прямой BC касается прямых AC, AD и отрезка CD. Найти периметр трапеции.

12. Точки D и K расположены соответственно на стороне AB и высоте BE остроугольного треугольника ABC так, что $AE = \frac{27}{8}$, $EC = 2$, $AD : DB = 1 : 8$, а треугольник CKD является равносторонним. Найти площадь треугольника CKD.

13. Окружность, центр которой лежит внутри квадрата $ABCD$, проходит через точки B и C. Найти угол между касательными к окружности, проведенными из точки D, если отношение длины стороны квадрата к радиусу окружности равно $\frac{24}{13}$.

14. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q. Найти радиус описанной окружности, если $AC = a$, $PQ = \frac{6}{5}a$.

15. Равнобедренный прямоугольный треугольник $(\angle C = \frac{\pi}{2})$ и треугольник DEF расположены так, что точка D лежит на стороне AB, а точка E — на продолжении стороны AB за точку A. Отрезок KL является средней линией в обоих треугольниках, а площадь четырехугольника $DKLB$ составляет $\dfrac{5}{8}$ площади треугольника ABC. Найти угол DEF.

16. Параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAD = \arcsin\dfrac{1}{3}$, и ромб $BCFE$ с острым углом CBE расположены так, что точки F и E лежат на продолжении стороны AD за точку D. Найти угол CBE, если площадь четырехугольника $DBCE$ составляет $\dfrac{3}{4}$ площади параллелограмма.

17. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса $\dfrac{1}{2}$, если $AB = BC$, $\angle D = \frac{\pi}{2}$, а периметр четырехугольника $ABCD$ равен $\dfrac{9\sqrt{2}}{5}$.

18. Найти площадь ромба $ABCD$, если известно, что окружность радиуса R касается прямых AB и AD в точках B и D соответственно и пересекает сторону BC в точке E так, что $4BE = BC$.

19. Окружность радиуса R, проведенная через вершины A, B и C прямоугольной трапеции $ABCD$ $(\angle A = \angle B = \frac{\pi}{2})$, пересекает отрезки AD и CD соответственно в точках E и F так, что $AE : AD = CF : CD = 1 : 3$. Найти площадь трапеции.

20. Правильный треугольник со стороной a и два ромба $ACMN$ и $ABFE$ расположены так, что точки M и B лежат по разные стороны от прямой AC, а точки F и C — по разные стороны от прямой AB. Найти расстояние между центрами ромбов, если $\angle EAB = \angle ACM = \alpha$ $(\alpha < 90^\circ)$.

21. Прямоугольный треугольник ABC $(\angle A = 90^\circ)$ и два квадрата $BEFC$ и $AMNC$ расположены так, что точки E и A лежат по разные стороны от прямой BC, а точки M и B — по одну сторону от прямой AC. Найти расстояние между центрами квадратов, если $AB = a$.

22. Точка E лежит на продолжении стороны AD ромба $ABCD$ за точку D, прямые AC и BE пересекаются в точке O, а точки A, B и O принадлежат окружности радиуса 15 с центром на отрезке AE. Найти длину отрезка AC.

23. В треугольнике ABC угол B равен 120°. На стороне AB взята точка M, а на стороне BC — точка N так, что $AM = 2MB$, $CN = 2BN$. Около четырехугольника $AMNC$ описана окружность радиуса 1. Найти площадь треугольника ABC.

24. Площадь треугольника ABC равна 1, $\angle A = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$, точка O — середина стороны AC. Окружность с центром в точке O касается стороны BC и пересекает сторону AB в точках M и N таких, что $AM = NB$. Найти площадь части треугольника ABC, заключенной внутри окружности.

25. Квадрат $ABCD$ и окружность расположены так, что окружность касается прямой AC в точке C, а центр окружности лежит по ту же сторону от прямой AC, что и точка D. Касательные к окружности, проведенные из точки D, образуют угол $\dfrac{2\pi}{3}$. Найти отношение площади квадрата к площади круга, ограниченного данной окружностью.

26. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Прямая, параллельная стороне AB и касающаяся окружности, пересекает сторону AC в точке M такой, что $MC = \frac{2}{5} AC$. Найти радиус окружности, если периметр треугольника ABC равен 20.

27. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Через точку M, лежащую на стороне BC, проведена касательная к окружности, пересекающая прямую AC в точке K. Найти AK, если $AC = a$, $AB = \frac{6}{5}a$, $MB = \frac{1}{10}a$.

28. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $AP : PC = 3 : 5$. Окружность с центром в точке P касается прямой BC и пересекает отрезок AD в точках K и L. Точка K лежит между точками A и L, $AK = 9$, $KL = 3$, $LD = 12$. Найти периметр параллелограмма $ABCD$.

29. Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ перпендикулярна ее основаниям, а боковая сторона CD образует с большим основанием угол $\frac{\pi}{6}$. Найти площадь трапеции, если окружность, центр которой лежит на отрезке AD, а радиус равен R, касается прямых AB, BC и CD.

30. В треугольнике ABC через точку M, лежащую на стороне BC, проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC. Площадь образованного при этом параллелограмма составляет $\frac{5}{18}$ площади треугольника ABC. Найти отношение $\frac{BM}{MC}$.

31. На стороне AC правильного треугольника ABC взята точка M, и около треугольников ABM и MBC описаны окружности. Точка C делит дугу MCB в отношении $\frac{MC}{CB} = n$. Определить, в каком отношении точка A делит дугу MAB.

32. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC : AB = 4 : 5$. Окружность с центром на катете AC касается гипотенузы AB и пересекает катет BC в точке P так, что $BP : PC = 2 : 3$. Найти отношение радиуса окружности к катету BC.

33. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на высоте BD как на диаметре построена окружность. Через точки A и C к окружности проведены касательные AM и CN, продолжения которых пересекаются в точке O. Определить отношение $\frac{AB}{AC}$, если $\frac{OM}{AC} = k$ и высота BD больше основания AC.

34. Равнобедренные треугольники ABC ($AB = BC$) и $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = B_1C_1$) подобны и $BC : B_1C_1 = 4 : 3$. Вершина B_1 расположена на стороне AC, вершины A_1 и C_1 — соответственно на продолжениях стороны BA за точку A и стороны CB за точку B, причем $A_1C_1 \perp BC$. Определить угол ABC.

35. Через вершины A и C треугольника ABC проведена окружность K, центр которой лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность K пересекает продолжение стороны BA (за точку A) в точке M. Найти угол BCA, если $MA : AB = 2 : 5$, а $\angle ABC = \arcsin \frac{3}{5}$.

36. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и являются диаметрами двух равных касающихся окружностей радиуса r. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если $\frac{BC}{AD} = k$.

37. В треугольнике ABC угол ABC равен α, угол BCA равен 2α. Окружность, проходящая через точки A, C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AB в точке M. Определить отношение AM к AB.

38. Каждая вершина параллелограмма соединена с серединами двух противоположных сторон. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь фигуры, ограниченной проведенными линиями?

39. Внутрь острого угла вписываются круги, касающиеся друг друга. Показать, что радиусы этих кругов образуют геометрическую прогрессию. Найти зависимость между знаменателем прогрессии и величиной угла.

40. На сторонах треугольника ABC построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1, не перекрывающиеся с треугольником ABC. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

41. Доказать, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, также образуют квадрат.

42. Вершина D квадрата $ABCD$ лежит на стороне EF равнобедренной трапеции $BCEF$, где $CE \| BF$. Найти угол CBF и отношение площади трапеции к площади квадрата, если $BF = 4CE$.

43. Трапеция $AEFG$ ($EF \| AG$) расположена в квадрате $ABCD$ со стороной 3 так, что точки E, F и G лежат на сторонах AB, BC и CD соответственно. Диагонали AF и EG трапеции перпендикулярны, $BF = 1$. Найти периметр трапеции.

Ответы

1. $2\sqrt{3}$. **2.** 4. **3.** 2 или $\sqrt{2}$. **4.** $\frac{216}{25}$. **5.** $\frac{8}{9\sqrt{5}}$. **6.** 3. **7.** $5R$. **8.** $\frac{9}{8}$. **9.** $\frac{13}{\sqrt{3}}$. **10.** $\frac{15}{8}$. **11.** $84 + 5\sqrt{34}$. **12.** $\frac{19}{\sqrt{3}}$. **13.** $2\arcsin\frac{13}{\sqrt{505}}$. **14.** $\frac{5}{8}a$. **15.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. **16.** $\frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{1}{3}$. **17.** $\frac{8}{25}$. **18.** $\frac{15\sqrt{15}}{8}R^2$. **19.** $\frac{4\sqrt{5}}{3}R^2$. **20.** $a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$. **21.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **22.** $72\sqrt{\frac{2}{5}}$. **23.** $\frac{9\sqrt{3}}{52}$. **24.** $\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\arccos\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{8}$. **25.** $\frac{4+\sqrt{15}}{3\pi}$. **26.** $\frac{4}{\sqrt{5}}$. **27.** $\frac{5}{67}a$. **28.** 58. **29.** $R^2\frac{6-\sqrt{3}}{2}$. **30.** 5:1, 1:5. **31.** $\frac{1-n}{3n+1}$. **32.** $\frac{13}{20}$. **33.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5k-1}{k-1}}$. **34.** $2\arccos\frac{2}{3}$. **35.** $\frac{\pi}{4}$. **36.** $3r^2\frac{1-k^2}{1+k^2}$ при $k < 1$, $3r^2\frac{k^2-1}{1+k^2}$ при $k > 1$. **37.** $\frac{1}{4\cos^2\alpha}$. **38.** $\frac{1}{6}$. **39.** $\dfrac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$. **42.** $\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{10}}{3}$, $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **43.** $5 + 2\sqrt{5}$.

Глава 10

Прямые и плоскости в пространстве

§ 32. Справочный материал по стереометрии

Опыт вступительных экзаменов свидетельствует о том, что задачи по стереометрии вызывают большие затруднения у абитуриентов. Это связано с тем, что для успешного решения пространственных задач требуется не только знание основных определений и теорем, но и развитое геометрическое воображение, умение выполнять необходимые построения, эффективно использовать алгебру и тригонометрию.

Умение решать задачи — один из основных показателей уровня математического развития учащихся, глубины освоения ими учебного материала.

«Решение задач — практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь». Эти слова принадлежат замечательному ученому и педагогу Д. Пойа и содержатся в его книге «Математическое открытие».

Многие выдающиеся ученые придавали большое значение решению задач. Приведем высказывания И. Ньютона и Р. Декарта.

«Я занимался до сих пор решением ряда задач, ибо при изучении наук примеры полезнее правил». (И. Ньютон)

«Каждая решенная мною задача становилась образцом, который служил впоследствии для решения других задач». (Р. Декарт)

1. *Прямые и плоскости.*

1°. *Параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.*

Параллельные прямые в пространстве — прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся.

Скрещивающиеся прямые — прямые, не лежащие в одной плоскости.

Прямые m и l являются скрещивающимися, если одна из них, например прямая m, лежит в плоскости α, а прямая l пересекает плоскость α в точке A, не лежащей на прямой m (рис. 32.1).

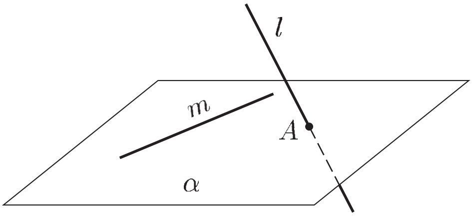

Рис. 32.1

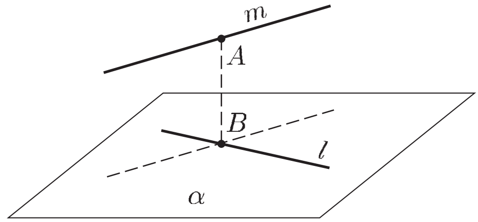

Рис. 32.2

Угол между пересекающимися прямыми — наименьший из углов, образуемых этими прямыми.

Угол между скрещивающимися прямыми m и l — угол между пересекающимися прямыми m_1 и l_1, где $m_1 \| m$, $l_1 \| l$.

Перпендикулярные прямые в пространстве — прямые, угол между которыми равен 90°.

Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых — отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Расстояние между скрещивающимися прямыми m и l — длина их общего перпендикуляра. Оно равно расстоянию AB между одной из этих прямых (на рис. 32.2 — это прямая m) и плоскостью α, проходящей через другую прямую l параллельно первой.

Прямая, параллельная плоскости α — прямая, не имеющая общих точек с плоскостью α.

Параллельные плоскости — плоскости, не имеющие общих точек (непересекающиеся плоскости).

2°. *Теоремы о параллельности прямых и плоскостей.*

а) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

б) Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

в) Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в ней.

г) Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то получившиеся две линии пересечения параллельны.

д) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

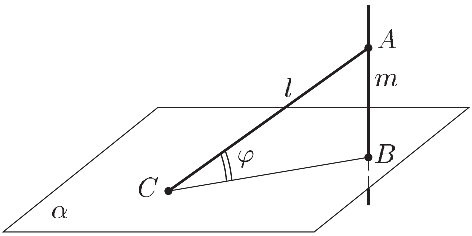

Рис. 32.3

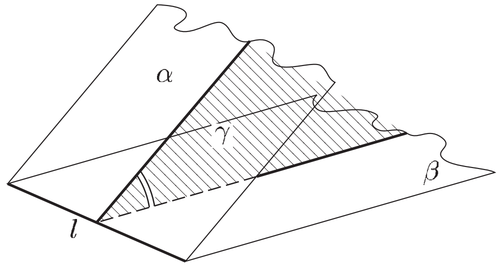

Рис. 32.4

3°. *Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонные. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.*

Прямая, перпендикулярная плоскости — прямая, перпендикулярная любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α (рис. 32.3) — отрезок AB, где B — точка пересечения плоскости α и прямой m, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости α.

Расстояние от точки A до плоскости α — длина отрезка AB (рис. 32.3).

Наклонная, проведенная из точки A к плоскости α — отрезок AC прямой l (рис. 32.3), проведенной через точки A и C, где $C \in \alpha$, $C \neq B$; отрезок BC — *проекция наклонной AC на плоскость α*.

Проекция точки A на плоскость α — основание перпендикуляра, проведенного из точки A (рис. 32.3) к плоскости α (точка B).

Угол между прямой l и плоскостью α — угол φ между этой прямой и ее проекцией BC на плоскость (рис. 32.3). Этот угол считается равным нулю, если прямая параллельна плоскости, и равным 90°, если прямая перпендикулярна плоскости.

Двугранный угол — фигура, образованная двумя полуплоскостями α и β с общей границей l (рис. 32.4); *грани двугранного угла* — полуплоскости α и β, *ребро двугранного угла* — прямая l.

Линейный угол двугранного угла — угол между полупрямыми, по которым плоскость γ, перпендикулярная ребру l двугранного угла, пересекает его грани.

Градусная мера двугранного угла — градусная мера его линейного угла (этот угол может быть острым, прямым или тупым).

Перпендикулярные плоскости (взаимно перпендикулярные) — пересекающиеся плоскости, угол между которыми равен

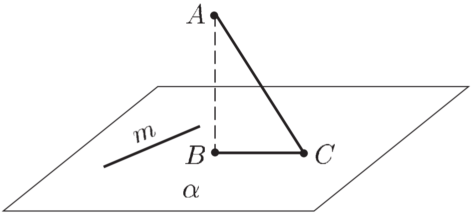

Рис. 32.5

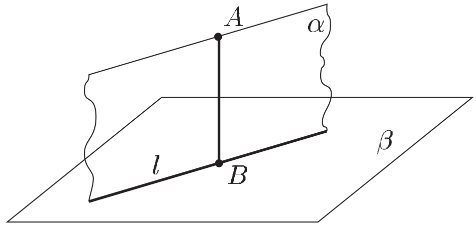

Рис. 32.6

90° (все двугранные углы, образуемые этими плоскостями, равны 90°).

Две пересекающиеся плоскости перпендикулярны, если третья плоскость, перпендикулярная линии их пересечения, пересекает их по перпендикулярным прямым.

4°. *Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей.*

а) Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

б) Для того, чтобы прямая m, лежащая в плоскости α (рис. 32.5), была перпендикулярна наклонной AC, необходимо и достаточно, чтобы прямая m была перпендикулярна проекции BC наклонной на плоскость α (*теорема о трех перпендикулярах*).

в) Если плоскость α проходит через перпендикуляр AB к плоскости β (рис. 32.6), то плоскость α перпендикулярна плоскости β.

г) Если плоскости α и β взаимно перпендикулярны, то прямая AB (рис. 32.6), проведенная в плоскости α перпендикулярно линии пересечения l плоскостей α и β, перпендикулярна плоскости β.

д) Если две пересекающиеся плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ, то и линия пересечения l плоскостей α и β (рис. 32.7) перпендикулярна плоскости γ.

2. *Векторы в пространстве.*

1°. *Понятие вектора.*

а) *Вектор* — направленный отрезок (на плоскости или в пространстве). Запись $\overline{AB}$ означает, что точка A — начало вектора, точка B — конец вектора. Если точки A и B совпадают, то вектор $\overline{AB}$ называют *нулевым*.

б) *Длина* ненулевого *вектора* $\overline{AB}$ — длина отрезка AB (обозначается $|\overline{AB}|$); длина нулевого вектора считается равной нулю.

в) Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

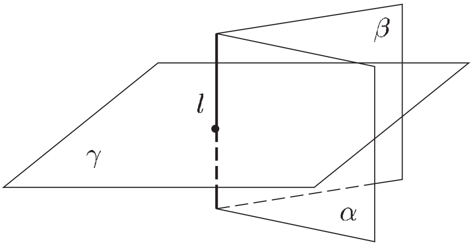

Рис. 32.7

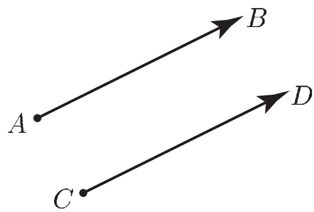

Рис. 32.8

г) Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *равными* (рис. 32.8), если их длины равны и они *сонаправлены* (лучи AB и CD сонаправлены, т. е. одинаково направлены).

д) Если A — начало вектора $\overline{a}$, то говорят, что $\overline{a}$ *отложен от точки* A.

2°. *Сложение и вычитание векторов.*

а) Если от какой-нибудь точки A отложен вектор $\overline{AB}$, равный $\overline{a}$, а затем от точки B отложен вектор $\overline{BC}$, равный $\overline{b}$ (рис. 32.9), то вектор $\overline{AC}$ называется *суммой векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и обозначается $\overline{a}+\overline{b}$, т. е. $\overline{AC}=\overline{a}+\overline{b}$. Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*. Правило треугольника можно сформулировать так: для любых точек A, B, C справедливо равенство

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, то их сумму можно получить, пользуясь *правилом параллелограмма* (рис. 32.10).

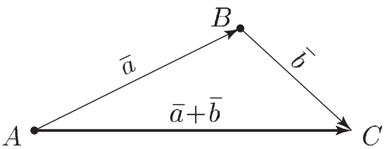

Рис. 32.9

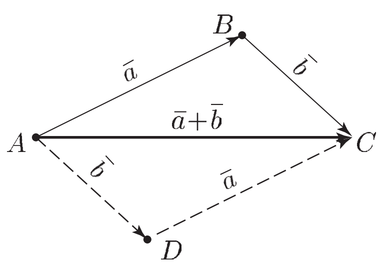

Рис. 32.10

б) *Разность векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — сумма векторов $\overline{a}$ и $(-\overline{b})$, где $(-\overline{b})$ — вектор, *противоположный* вектору $\overline{b}$, т. е. вектор, длина которого равна длине вектора $\overline{b}$, а направление — противоположное направлению вектора $\overline{b}$ (рис. 32.11).

в) Сумму нескольких векторов можно построить, пользуясь *правилом многоугольника*: $\overline{OD}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}$ (рис. 32.12).

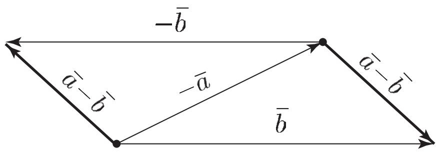

Рис. 32.11

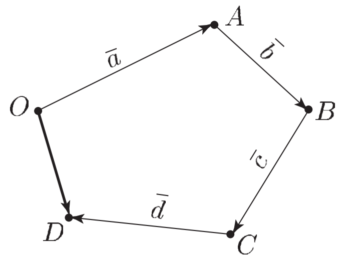

Рис. 32.12

Это правило можно сформулировать в таком виде: если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные точки, то

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n}$$

или

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1} = \overline{0}. \qquad (1)$$

Рисунок 32.13, где $n = 6$, иллюстрирует равенство (1).

3°. *Умножение вектора на число.*

а) *Произведение ненулевого вектора* $\overline{a}$ *на число* k — вектор $\overline{b}$ такой, что $|\overline{b}| = |k| \cdot |\overline{a}|$, причем при $k \geqslant 0$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены, а при $k < 0$ — противоположно направлены. Если $\overline{a} = \overline{0}$, то $\overline{b} = \overline{0}$ при любом k.

б) Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — коллинеарные векторы и $\overline{a} \neq \overline{0}$, то существует число k такое, что $\overline{b} = k\overline{a}$.

4°. *Компланарные и некомпланарные векторы. Базис в пространстве.*

а) Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называются *компланарными*, если существует такая плоскость, что все три вектора параллельны этой плоскости.

б) Если вектор $\overline{c}$ можно *разложить по векторам* $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т. е. представить в виде

$$\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}, \qquad (2)$$

где x, y — некоторые числа, то векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны. Обратно: если $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — компланарные векторы, причем векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, то вектор $\overline{c}$ можно представить в виде (2).

в) Если $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — некомпланарные векторы, $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, $\overline{OC} = \overline{c}$, то диагональ OD параллелепипеда (рис. 32.14), ребрами которого являются отрезки OA, OB и OC, изображает сумму векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, т. е. $\overline{OD} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$.

г) Любой ненулевой вектор $\overline{p}$ можно разложить по трем данным некомпланарным векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, т. е. представить в виде

$$\overline{p} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}.$$

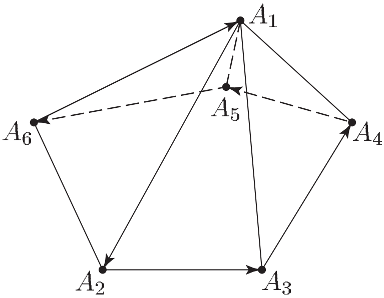

Рис. 32.13

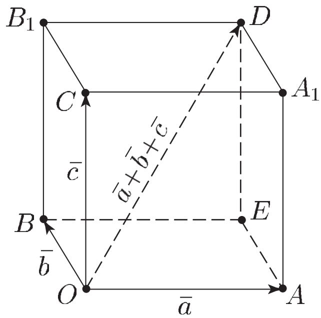

Рис. 32.14

Коэффициенты x, y, z определяются единственным образом.

д) *Базис в пространстве* — упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Базис из векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ обозначают $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.

5°. *Угол между векторами.*

а) Пусть даны ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Отложим от произвольной точки пространства векторы $\overline{OA} = \overline{a}$ и $\overline{OB} = \overline{b}$. *Углом между векторами* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется наименьший из углов, образованных лучами OA и OB.

б) Ненулевые векторы называются *ортогональными*, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$. Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.

в) Базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ называется *ортонормированным*, если векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ попарно ортогональны и $|\overline{e}_1| = |\overline{e}_2| = |\overline{e}_3| = 1$.

3. *Прямоугольная декартова система координат в пространстве.*

1°. *Координаты вектора.*

а) Если в пространстве выбрана прямоугольная система координат, а на положительных полуосях Ox, Oy, Oz от начала координат O отложены единичные векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ ($|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$), то любой вектор $\overline{a}$ можно разложить по координатным векторам (по ортонормированному базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$), т. е. представить в виде

$$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}, \qquad (1)$$

причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом (рис. 32.15).

Числа x, y, z называют *координатами вектора* $\overline{a}$ в данной системе координат и пишут $\overline{a} = (x; y; z)$. Используются

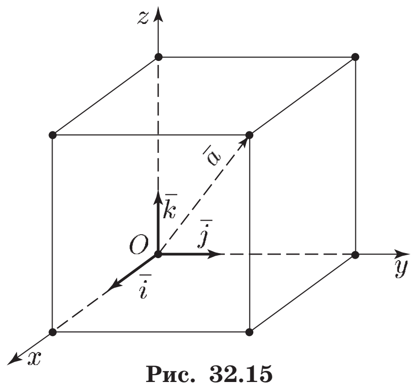

Рис. 32.15

также следующие записи:

$\overline{a}\{x; y; z\}, \qquad \overline{a}(x; y; z), \qquad \overline{a} = \{x; y; z\}.$

б) Координаты равных векторов соответственно равны, т. е. если
$\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$ и $\overline{a} = \overline{b}$, то $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

в) Векторы $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число k такое, что

$\overline{a} = k\overline{b}$

или

$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}.$

г) Правила сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число: если $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то

$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3),$
$k\overline{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$

д) Координаты любой точки M пространства равны соответствующим координатам ее радиус-вектора $\overline{OM}$ (O — начало координат).

е) Если в пространстве заданы точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то

$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$

т. е. каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

2°. *Вычисление длины вектора, расстояния между точками и координат точки отрезка.*

а) Если задан вектор $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$, то его длина

$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$

б) Расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ равно длине вектора $\overline{M_1M_2}$, т. е.

$$d = \left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

в) Координаты точки $M(x; y; z)$, делящей отрезок M_1M_2 между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ в отношении $M_1M : MM_2 = \lambda$, определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

В частности, если точка M — середина отрезка M_1M_2, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3°. *Скалярное произведение.*

а) *Скалярное произведение* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — число

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Если $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$, где $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ — ортонормированный базис, то

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

б) Свойства скалярного произведения:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a},$$
$$(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c},$$
$$k(\overline{a} \cdot \overline{b}) = (k\overline{a}) \cdot \overline{b}.$$

в) Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — векторы, параллельные соответственно прямым m и l, φ — угол между этими прямыми, тогда

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{a} \cdot \overline{b}|}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}.$$

Если векторы $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то

$$\cos\varphi = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Эти векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

4°. *Уравнения прямой, плоскости и сферы.*

а) Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$, имеет вид

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \lambda\overline{a},$$

где $\overline{r} = (x; y; z)$, $\overline{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

б) Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (3)$$

в) Если $\overline{n} = (A; B; C) \neq \overline{0}$, т. е. $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, то в прямоугольной системе координат уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

задает плоскость, перпендикулярную вектору $\overline{n}$.

г) Плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярная ненулевому вектору $\overline{n} = (A; B; C)$, в прямоугольной системе координат (рис. 32.16) задается уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

д) Если две плоскости в прямоугольной системе координат заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

а φ — угол между этими плоскостями, то

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|},$$

где $\overline{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\overline{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, т. е.

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (4)$$

Эти плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

и параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

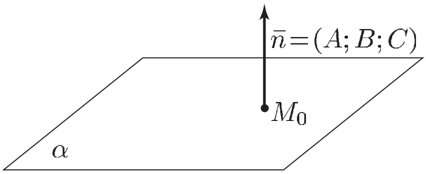

Рис. 32.16

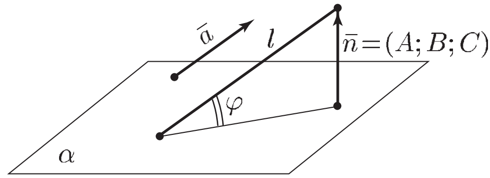

Рис. 32.17

е) Если прямая l параллельна вектору $\overline{a}=(a_1;a_2;a_3)$, плоскость α в прямоугольной системе координат задана уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

φ — угол между прямой l и плоскостью α (рис. 32.17), то

$$\sin\varphi=\frac{|\overline{a}\cdot\overline{n}|}{|\overline{a}|\cdot|\overline{n}|}=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \quad (5)$$

ж) Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ записывается в виде

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

4. *Многогранники и круглые тела.*

1°. *Призма.*

а) Площадь боковой поверхности призмы равна произведению бокового ребра призмы на площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру.

б) Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

в) Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту.

2°. *Пирамида.*

а) Объем v пирамиды равен одной трети произведения площади s ее основания на высоту h, т. е.

$$v=\frac{1}{3}sh.$$

б) Объем усеченной пирамиды равен

$$v=\frac{1}{3}(s_1+s_2+\sqrt{s_1s_2})\,h,$$

где s_1 и s_2 — площади оснований пирамиды, h — ее высота.

в) Объем любого многогранника (и, в частности, пирамиды), описанного около шара радиуса r, равен

$$v = \frac{1}{3}\,s_n r,$$

где s_n — площадь полной поверхности многогранника.

3°. *Цилиндр.*

а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна

$$s_б = 2\pi rh,$$

где r — радиус основания, h — высота цилиндра.

б) Объем цилиндра равен

$$v = \pi r^2 h.$$

4°. *Конус.*

а) Площадь боковой поверхности конуса равна

$$s_б = \pi rl,$$

где r — радиус основания, l — образующая конуса, или

$$s_б = \pi r\sqrt{r^2 + h^2},$$

где h — высота конуса.

б) Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна

$$s_б = \pi(r_1 + r_2)l,$$

где r_1 и r_2 — радиусы оснований, l — образующая конуса.

в) Объем конуса равен

$$v = \frac{1}{3}\,sh,$$

где s — площадь основания, h — высота конуса.

г) Объем усеченного конуса равен

$$v = \frac{1}{3}\left(s_1 + s_2 + \sqrt{s_1 s_2}\right)h,$$

где s_1 и s_2 — площади оснований, h — высота конуса.

5°. *Сфера и шар.*

а) Площадь поверхности сферы равна

$$s = 4\pi R^2,$$

где R — радиус сферы.

б) Площадь поверхности шарового сегмента равна $2\pi Rh$, где h — высота сегмента.

в) Объем шара

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

г) Объем шарового сегмента равен

$$v = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right).$$

д) Объем шарового сектора равен

$$v = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где h — высота соответствующего сегмента.

5. *Дополнительные сведения по стереометрии.*

Сформулируем и докажем некоторые утверждения, которые могут оказаться полезными при решении стереометрических задач.

1°. *Плоскости и прямые в пространстве.*

Теорема 1. *Пусть α — угол между наклонной l и плоскостью P* (рис. 32.18), *β — угол между проекцией l_1 наклонной на плоскость P и прямой l_2, проведенной в плоскости P, γ — угол между l и l_2. Тогда*

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть B — точка пересечения наклонной l с плоскостью P, O — основание перпендикуляра, опущенного из точки A, принадлежащей прямой l, на плоскость P. Проведем через точку B прямую l_2', параллельную l_2, а из точки O опустим перпендикуляр OC на l_2'. Тогда $AC \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах. Так как $\cos\alpha = \dfrac{OB}{AB}$, $\cos\beta = \dfrac{BC}{OB}$,

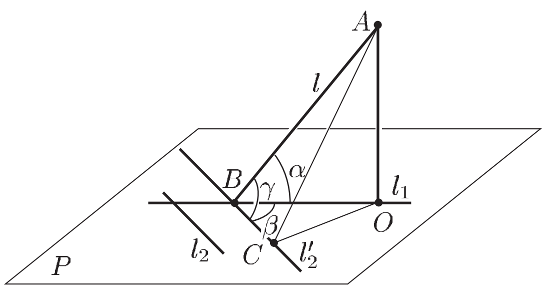

Рис. 32.18

$\cos\gamma = \dfrac{BC}{AB}$, то $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{OB}{AB}\cdot\dfrac{BC}{OB} = \dfrac{BC}{AB} = \, = \cos\gamma$. Равенство (1) доказано.

Теорема 2. *Пусть α, β, γ — плоские углы трехгранного угла, A, B, C — противолежащие им двугранные углы. Тогда справедливы следующие равенства:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}; \tag{2}$$

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A; \tag{3}$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha. \tag{4}$$

Соотношение (2) *называют теоремой синусов, а равенства* (3) *и* (4) *— соответственно первой и второй теоремой косинусов для трехгранного угла.*

Доказательство. Пусть S — вершина трехгранного угла (рис. 32.19), M — точка на одном из его ребер, $SM = a$, M_1 и M_2 — проекции точки M на два других ребра, $\angle MSM_1 = \alpha$, $\angle MSM_2 = \beta$. Если P — проекция точки M на плоскость M_1SM_2, то $\angle MM_1P$ и $\angle MM_2P$ — двугранные углы при ребрах SM_1 и SM_2 соответственно, обозначим эти углы B и A.

Из $\triangle MSM_1$ находим $MM_1 = SM\cdot\sin\alpha = a\sin\alpha$, а из $\triangle MM_1P$ получаем

$$MP = MM_1\sin B = a\sin\alpha\sin B.$$

Аналогично, из $\triangle SMM_2$ и $\triangle MM_2P$ находим

$$MM_2 = a\sin\beta, \qquad MP = MM_2\sin A = a\sin\beta\sin A.$$

Таким образом,

$$MP = MM_1\sin B = a\sin\alpha\sin B = MM_2\sin A = a\sin\beta\sin A,$$

откуда следует первое из равенств (2). Аналогично доказывают справедливость второго из равенств (2), связывающего углы β, γ, B и C.

Пусть Q — точка пересечения прямой M_2P с ребром SM_1. Применяя теорему косинусов к треугольникам SMQ и MM_2Q, получаем

$$MQ^2 = SM^2 + SQ^2 - 2SM\cdot SQ\cdot\cos\alpha,$$
$$MQ^2 = MM_2^2 + M_2Q^2 - 2MM_2\cdot M_2Q\cdot\cos A,$$

где $SM = a$, $SQ = \dfrac{SM_2}{\cos\gamma} = \dfrac{a\cos\beta}{\cos\gamma}$, $MM_2 = a\sin\beta$, $M_2Q = SM_2$, $\operatorname{tg}\gamma = a\cos\beta\operatorname{tg}\gamma$.

Отсюда получаем

$$1+\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}-2\,\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}=\sin^2\beta+\cos^2\beta\,\frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}-2\,\frac{\sin\beta\cos\beta\sin\gamma}{\cos\gamma}\cos A,$$

или

$$2\cos\beta=2\,\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}-2\,\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\gamma}\cos A,$$

откуда следует равенство (3). Опустив из точки внутри трехгранного угла перпендикуляры на грани этого угла, получим новый трехгранный угол, дополнительный к данному. Это означает, что двугранные углы исходного трехгранного угла дополняются до π плоскими углами построенного указанным способом трехгранного угла и наоборот.

Применяя к дополнительному трехгранному углу теорему косинусов (равенство (3)), получим равенство (4).

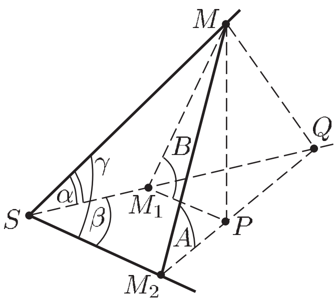

Рис. 32.19

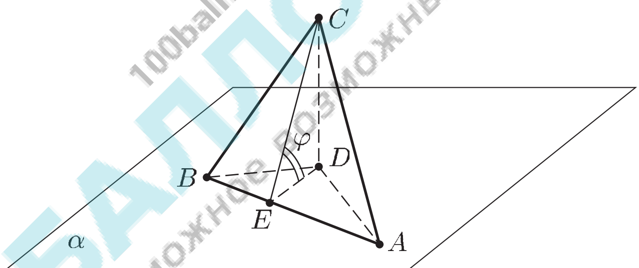

Рис. 32.20

Теорема 3. *Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение для треугольника. Предположим, что плоскость α, на которую проектируется треугольник ABC (рис. 32.20), проходит через одну из его сторон, например, AB. Тогда проекцией треугольника ABC является треугольник ABD, где D — проекция точки C на плоскость α.

Пусть CE — высота в треугольнике ABC, тогда $DE\perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах.

Если φ — угол между плоскостью треугольника ABC и плоскостью α, то $\angle CED=\varphi$.

Так как $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE$, $S_{ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DE$, $DE=CE\cdot\cos\varphi$, то

$$S_{ABD}=S_{ABC}\cdot\cos\varphi. \tag{5}$$

Равенство (5) остается в силе и в случае, когда хотя бы одна из сторон треугольника параллельна плоскости α, так как при параллельном переносе фигура переходит в равную ей фигуру.

Если ни одна из сторон треугольника не параллельна плоскости α, то расстояния r_1, r_2, r_3 от точек A, B и C до плоскости α не равны друг другу. Пусть, например, $r_1 < r_2 < r_3$. Тогда рассмотрим плоскость α', параллельную плоскости α, проходящую через точку B и находящуюся на расстоянии r_2 от плоскости α. Плоскость α' пересечет треугольник ABC по отрезку BF. Остается только применить формулу (5) к треугольникам ABF и BCF и сложить соответствующие равенства.

Утверждение (3) справедливо и для многоугольника, так как каждый многоугольник можно разбить на конечное число треугольников.

Теорема 4. *Если AB и CD — скрещивающиеся ребра треугольной пирамиды $ABCD$, r — расстояние между ними, $AB = a$, $CD = b$, φ — угол между AB и CD, v_1 — объем пирамиды $ABCD$, то*

$$r = \frac{6v_1}{ab\sin\varphi}\,. \tag{6}$$

Доказательство. Проведем через AB плоскость α, параллельную CD, а через CD — плоскость β, параллельную α.

В плоскости β через точки C и D проведем прямые, параллельные AB и отложим отрезки CC_1 и DD_1, равные a, так, чтобы получился параллелограмм (рис. 32.21).

Через точки C_1, D_1, D проведем прямые, параллельные ребру AC пирамиды $ABCD$ до пересечения с плоскостью α в точках B, B_1, A_1. Получим параллелепипед, площадь s его основания CDD_1C_1 равна $ab\sin\varphi$, высота равна расстоянию между плоскостями α и β, т. е. равна r, а объем $v = abr\sin\varphi$. Но $v_1 = v_2 - v_3$, где v_2 — объем клина $ABCDD_1C_1$, v_3 — объем пирамиды $BCDD_1C_1$. Так как $v_2 = \dfrac{v}{2}$, $v_3 = \dfrac{v}{3}$, то $v_1 = \dfrac{1}{6}v = \dfrac{1}{6}abr\sin\varphi$, откуда следует равенство (6).

Теорема 5. *Расстояние ρ от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{7}$$

выражается формулой

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на плоскость α (рис. 32.22), тогда
$\rho = |\overline{M_0M_1}|$.

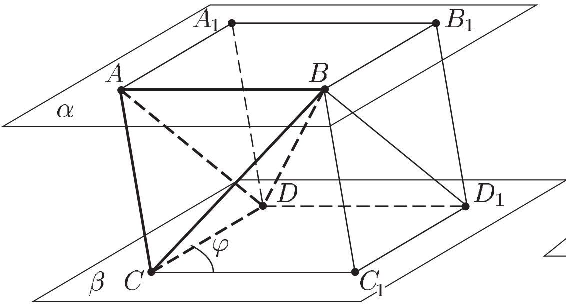

Рис. 32.21

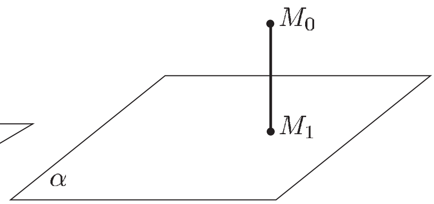

Рис. 32.22

Так как вектор $\overline{n} = (A; B; C)$ перпендикулярен плоскости α, то векторы $\overline{M_0M_1}$ и $\overline{n}$ коллинеарны и поэтому найдем число λ такое, что

$$\overline{M_0M_1} = \lambda\overline{n}, \qquad \text{где} \quad \overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0).$$

Отсюда следует, что $x_1 = x_0 + \lambda A$, $y_1 = y_0 + \lambda B$, $z_1 = z_0 + \lambda C$.

Но точка M_1 лежит в плоскости α и поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению (7), т. е.

$$A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D = 0,$$

откуда

$$\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Подставив найденное значение λ в равенство $|\overline{M_0M_1}| = \rho = |\lambda| \cdot |\overline{n}| = |\lambda|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, получим формулу (8).

2°. *Многогранники и фигуры вращения.*

Теорема 6. *Пусть s_1 и s_2 — площади двух граней тетраэдра, l — длина их общего ребра, α — двугранный угол между этими гранями. Тогда для объема v пирамиды справедлива формула*

$$v = \frac{2s_1s_2 \sin\alpha}{3l}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть DO — высота пирамиды $DABC$ (рис. 32.23), DE — высота грани ABD, $DO = h$, $AB = l$. Тогда $\angle DEO = \alpha$ — двугранный угол между гранями с общим ребром AB.

Если s_1 и s_2 — площади граней ABC и ABD соответственно, v — объем пирамиды, то

$$v = \frac{1}{3}s_1h, \qquad s_2 = AB \cdot DE = \frac{1}{2}l \cdot DE,$$

где

$$DE = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Следовательно, $h = DE \cdot \sin\alpha = \dfrac{2s_2}{l}\sin\alpha$ и $v = \dfrac{2}{3}\,s_1 s_2\,\dfrac{\sin\alpha}{l}$. Формула (9) доказана.

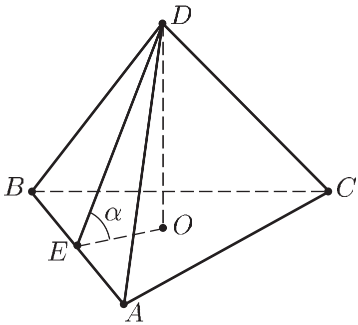

Рис. 32.23

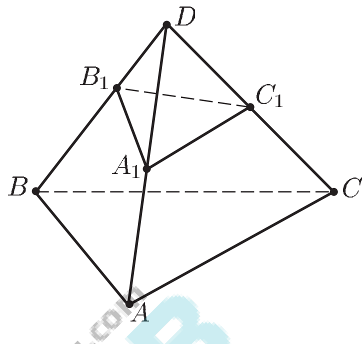

Рис. 32.24

Теорема 7. *Если на боковых ребрах DA, DB, DC треугольной пирамиды $DABC$ расположены точки A_1, B_1, C_1* (рис. 32.24) *так, что*

$$\frac{DA_1}{DA} = p, \qquad \frac{DB_1}{DB} = q, \qquad \frac{DC_1}{DC} = r,$$

и если v и v_1 — объемы пирамид $DABC$ и $DA_1B_1C_1$ соответственно, то $\dfrac{v_1}{v} = pqr$.

Доказательство. Выберем в качестве оснований рассматриваемых пирамид грани, лежащие в плоскости ABD. Если s и s_1 — площади треугольников ABD и A_1B_1D, h и h_1 — высоты пирамид $DABC$ и $DA_1B_1C_1$, опущенные из вершин C и C_1, $\angle ADB = \alpha$, то $s = \dfrac{1}{2}\,DA \cdot DB\sin\alpha$, $s_1 = \dfrac{1}{2}\,DA_1 \cdot DB_1\sin\alpha$, $\dfrac{h_1}{h} = \dfrac{DC_1}{DC} = r$, $v = \dfrac{1}{3}\,sh$, $v_1 = \dfrac{1}{3}\,s_1h_1$, откуда следует, что $\dfrac{v_1}{v} = \dfrac{DA_1 \cdot DB_1 \cdot h_1}{DA \cdot DB \cdot h} = pqr$.

Теорема 8. *В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, радиус которой*

$$r = \frac{3v}{s_n}, \tag{10}$$

где v — объем пирамиды, s_n — полная поверхность пирамиды.

Доказательство. Сфера называется вписанной в многогранник, если она касается всех его граней. Это означает, что расстояние от центра сферы до каждой грани многогранника равно радиусу сферы.

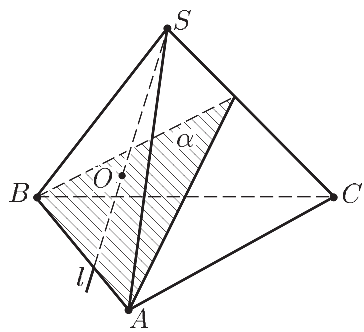

Рис. 32.25

Пусть S — вершина треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 32.25).

Докажем, что найдется луч l, все точки которого равноудалены от граней трехгранного угла с вершиной S.

Назовем *биссектором* двугранного угла полуплоскость, разделяющую его на два двугранных угла равной величины. Биссектор есть множество точек двугранного угла, равноудаленных от плоскостей его граней.

Построим биссекторы двугранных углов с ребрами SA и SB. Они пересекутся по лучу l с вершиной S, каждая точка которого равноудалена от всех трех граней трехгранного угла с вершиной S.

Проведем далее биссектор α двугранного угла при каком-нибудь ребре основания (например, при ребре AB). Этот биссектор пересечет луч l в точке O, равноудаленной от всех граней пирамиды. Эта точка и есть центр вписанной в пирамиду сферы.

Таким образом, в любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, центр которой является общей точкой всех биссекторов внутренних двугранных углов пирамиды.

Заметим, что в n-угольную пирамиду можно вписать сферу тогда и только тогда, когда можно вписать сферу в многогранный угол при вершине пирамиды, т. е. в том и только в том случае, когда биссекторы двугранных углов при всех ребрах, сходящихся в вершине пирамиды, пересекаются по одному лучу.

Если пирамида является правильной, то в нее можно вписать сферу, центр которой лежит на высоте пирамиды.

Докажем формулу (10). Пусть O — центр сферы, вписанной в треугольную пирамиду $SABC$. Соединив точку O со всеми вершинами пирамиды, разобьем ее на четыре пирамиды. Высота каждой из этих пирамид, проведенная из их общей вершины O, равна r, где r — радиус вписанного шара. Если s_1, s_2, s_3, s_4 — площади граней пирамиды, v — объем пирамиды $SABC$, то

$$v = \frac{1}{3}s_1r + \frac{1}{3}s_2r + \frac{1}{3}s_3r + \frac{1}{3}s_4r = \frac{1}{3}s_nr,$$

где s_n — полная поверхность пирамиды, откуда следует формула (10).

Эта формула справедлива для любого многогранника, в который можно вписать сферу.

Теорема 9. *Около любой треугольной пирамиды можно описать сферу.*

Доказательство. Сфера называется описанной около многогранника (а многогранник — вписанным в сферу), если все его вершины лежат на сфере.

Центр описанной сферы — точка, равноудаленная от всех вершин многогранника.

Пусть S — вершина треугольной пирамиды $SABC$, M — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 32.26), l — прямая, перпендикулярная плоскости основания ABC и проходящая через точку M. Тогда каждая точка прямой l равноудалена от точек A, B и C.

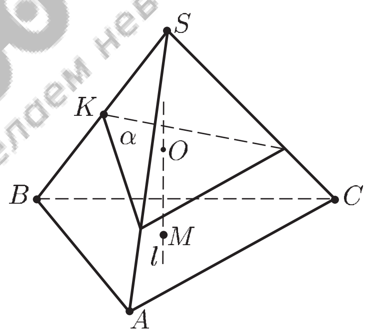

Рис. 32.26

Если K — середина какого-нибудь бокового ребра пирамиды (например, ребра SB), то плоскость α, проходящая через точку K и перпендикулярная BS, пересечет прямую l в точке O, равноудаленной от всех вершин пирамиды. Эта точка и есть центр описанной сферы.

Таким образом, около любой треугольной пирамиды можно описать сферу.

Заметим, что около n-угольной пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.

Если пирамида является правильной, то около нее можно описать сферу, центр которой находится на прямой, содержащей высоту пирамиды, проведенную из ее вершины.

§ 33. Сечения многогранников

Справочные сведения

При изучении курса стереометрии большое значение имеет изображение пространственных фигур. При построении рисунка, изображающего пространственную фигуру, следует позаботиться о том, чтобы:

а) чертеж был достаточно крупным, и на нем были бы видны основные линии и углы;

б) положение изображаемого тела было оптимальным (выбор ориентации, ракурса);

в) по-разному были отмечены видимые и невидимые линии;

г) были правильно построены сечения и проекции на плоскость.

Пространственная задача сводится к одной или нескольким планиметрическим задачам при помощи различных приемов, из которых следует выделить проектирование и проведение сечений.

Наиболее распространенным и простым методом построения изображений пространственных фигур на плоскости является метод параллельного (в частности, ортогонального) проектирования.

Отметим основные свойства параллельного проектирования на некоторую плоскость α параллельно прямой l:

а) проекция прямой — прямая, проекция отрезка — отрезок;

б) проекции параллельных отрезков — параллельные отрезки или отрезки, лежащие на одной прямой;

в) при параллельном проектировании сохраняются отношения отрезков, расположенных на одной прямой или параллельных прямых, в частности, проекция середины отрезка — середина его проекции;

г) величины углов между прямыми и плоскостями при параллельном проектировании, вообще говоря, не сохраняются.

Обратимся к методу сечений. Этот метод часто помогает найти наиболее эффективный способ решения стереометрической задачи. При построении сечения многогранника плоскостью α следует иметь в виду, что:

а) построение сечения сводится к построению линий пересечения плоскости α с гранями многогранника;

б) сечение однозначно определяется тремя точками многогранника;

в) если две точки выпуклого многогранника принадлежат сечению, то сечению принадлежит отрезок, соединяющий эти точки;

г) параллельные грани многогранника, имеющие общие точки с плоскостью α, пересекаются этой плоскостью по параллельным прямым;

д) если плоскость α проходит через прямую l, параллельную грани P многогранника и пересекает грань P, то линия пересечения плоскости α и грани P параллельна прямой l;

е) при нахождении линии пересечения грани P многогранника с плоскостью α часто бывает удобно построить всю прямую, по которой многогранник пересекается с плоскостью α, а не только отрезок этой прямой, лежащий в грани P.

Осуществляя контроль за правильностью построения сечения многогранника, следует иметь в виду, что:

а) сечение — многоугольник, его граница — замкнутая ломаная;

б) каждое звено ломаной должно принадлежать одной из граней многогранника.

Примеры с решениями

Пример 1. Построить сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, проходящей через точки E, F, K, расположенные на ребрах AB, AA_1 и CC_1 соответственно (рис. 33.1).

Решение. Плоскость α пересекает две грани призмы по отрезкам EF и FK. Построим линию l пересечения плоскости α с плоскостью основания ABC. Одна точка прямой l известна — это точка E. Построим точку L, в которой прямая l пересекает отрезок BC.

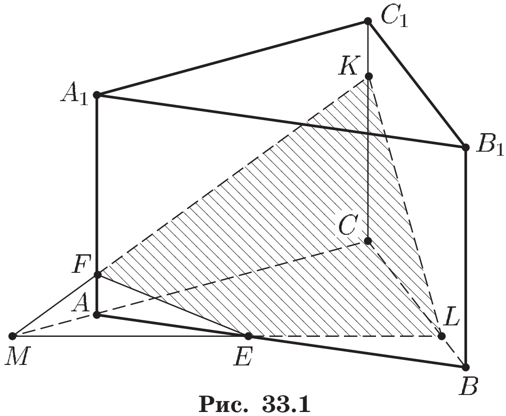

Рис. 33.1

Чтобы построить прямую l, найдем точку M прямой l, в которой эта прямая пересекает прямую AC.

Заметим, что прямые FK и AC лежат в одной плоскости (это плоскость AA_1C_1C). Если $FK \| AC$, то прямая l параллельна AC. В этом случае L — точка пересечения прямой, проходящей через точку E параллельно AC.

Если $FK \nparallel AC$, то продолжив KF и AC, найдем точку их пересечения M, которая принадлежит плоскостям ABC и α.

Поэтому прямая ME есть линия пересечения плоскостей α и ABC. Если L — точка пересечения ME и BC, то отрезок EL — общий для плоскости α и грани ABC, а четырехугольник $KFEL$ — искомое сечение.

Пример 2. Построить сечение треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью α, проходящей через середины ребер AB, AS и CS.

Решение. Пусть M, E и F — середины ребер AB, AS и CS соответственно (рис. 33.2).

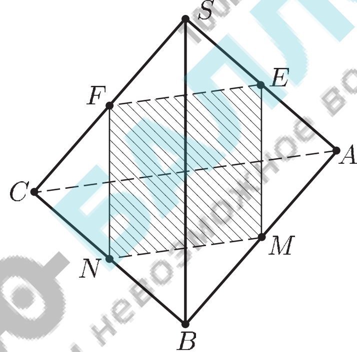

Рис. 33.2

Плоскость α параллельна AC, так как прямая EF (средняя линия треугольника ASC), лежащая в плоскости α, параллельна AC.

Отсюда следует, что и линия пересечения плоскостей α и ABC (прямая MN, где $N \in BC$) параллельна AC.

Но M — середина AB и $MN \| AC$. Поэтому N — середина BC и $MN = EF = \frac{1}{2}AC$. Следовательно, искомое сечение — параллелограмм $EFNM$.

Пример 3. Построить сечение треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, параллельной ребру AB и проходящей через точки E и F, которые принадлежат боковым граням DAC и DBC соответственно (рис. 33.3).

Решение. Найдем сначала точку M, в которой прямая EF пересекает плоскость ABC. С этой целью найдем точки E_1 и F_1, в которых DE и DF пересекают AC и CB соответственно.

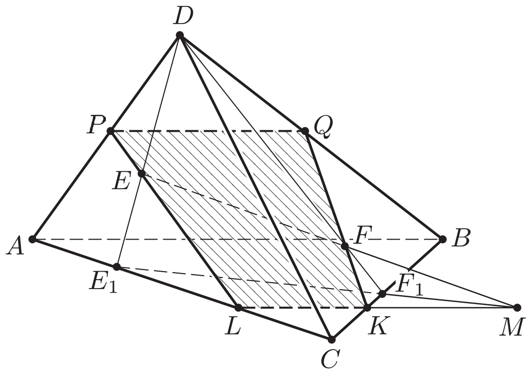

Рис. 33.3

Прямые E_1F_1 и EF пересекутся в точке M (предполагается, что прямая EF не параллельна плоскости ABC).

Через точку M проведем прямую, параллельную AB и пересекающую BC и AC в точках K и L соответственно. Прямые KF и LE пересекут ребра BD и AD в точках Q и P таких, что $PQ \| LK$. Трапеция $PQKL$ — искомое сечение.

Пример 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ диагональ основания $ABCD$ и боковое ребро имеют равную длину. Построить сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку A и перпендикулярной ребру SC (рис. 33.4). Найти площадь сечения, если $AC = SC = a$.

Решение. Так как плоскость α перпендикулярна ребру SC, то эта плоскость пересечет SC в точке E такой, что $AE \perp SC$. Но $AS = AC$ и поэтому E — середина ребра SC, а искомое сечение — дельтоид (составлен из равнобедренных треугольников AMK и EMK), причем $MK \| BD$ ($M \in BS$, $K \in DS$).

Чтобы построить сечение, нужно найти точку F, в которой AE пересекает SO (O — центр основания $ABCD$), а затем провести через точку F прямую, параллельную BD.

Площадь сечения $s = \dfrac{1}{2} AE \cdot KM$, где $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MK = \dfrac{2a}{3}$, так как F — точка пересечения медиан равностороннего треугольника BSD. Следовательно, $s = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Пример 5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна a, боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной через вершину A перпендикулярно ребру SC (рис. 33.5).

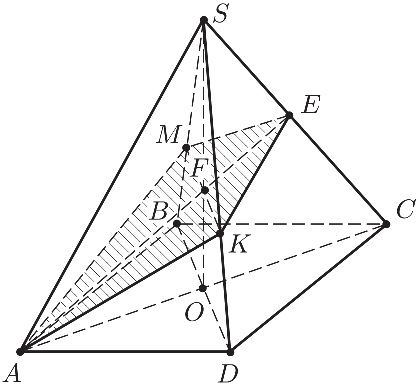

Рис. 33.4

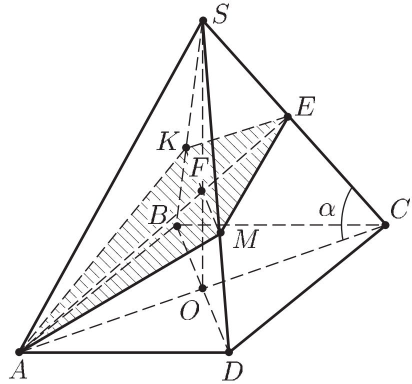

Рис. 33.5

Решение. Построим сечение. С этой целью проведем из точки A прямую AE перпендикулярно SC, а через точку F пересечения высоты SO и AE проведем прямую параллельно диагонали BD, пересекающую ребра BS и DS в точках K и M. Четырехугольник $AKEM$ — искомое сечение.

Пусть s — площадь сечения пирамиды. Тогда $s = \frac{1}{2} AE \cdot KM$, так как $KM \perp AE$. Так как $\angle SCA = \alpha$, $AC = a\sqrt{2}$, то $AE = a\sqrt{2}\sin\alpha$, $OF = AO \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg}\alpha$. Из подобия треугольников SOD и SFM следует, что $\frac{SO}{SO - OF} = \frac{OD}{FM}$, где $SO = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}\alpha$. Отсюда получаем

$$FM = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}\alpha - \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg}\alpha\right) \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}} (1 - \operatorname{ctg}^2\alpha),$$

$$KM = 2FM = a\sqrt{2}(1 - \operatorname{ctg}^2\alpha),$$

$$s = \frac{1}{2} a\sqrt{2}\sin\alpha \cdot a\sqrt{2}(1 - \operatorname{ctg}^2\alpha) = a^2 \sin\alpha(1 - \operatorname{ctg}^2\alpha).$$

Ответ. $a^2 \sin\alpha(1 - \operatorname{ctg}^2\alpha)$.

Пример 6. Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$, $AB = 2$, $AA_1 = 4$. Через середины E и F ребер AD и DC (рис. 33.6) проведено сечение, параллельное диагонали DB_1. Построить сечение и найти его площадь.

Решение. Построение сечения. Пусть O — середина EF, M — середина AC. В треугольнике BB_1D через точку O проводим прямую, параллельную B_1D и пересекающую BB_1 в точке L. Из точки M проводим прямую, параллельную BB_1 и пересекающую OL в точке N. Через точку N проводим прямую, параллельную AC и пересекающую AA_1 и CC_1 в точках Q и P.

Искомое сечение — пятиугольник $EQLPF$.

Вычисление площади сечения.

Пусть s — площадь сечения, тогда

$$s = \frac{1}{2}(PQ + EF)ON + \frac{1}{2}PQ \cdot LN, \qquad (1)$$

где $PQ = AC = 2\sqrt{2}$, $EF = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$.

Найдем ON и LN, пользуясь тем, что $\triangle LBO \sim \triangle B_1BD$, $\triangle NMO \sim \triangle LBO$. Так как $B_1D = 2\sqrt{6}$, $BO = \frac{3}{4}BD = \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, то $LO = \frac{3}{4}B_1D = \frac{3}{2}\sqrt{6}$. Аналогично, учитывая, что $OM = \frac{1}{3}BO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $ON = \frac{1}{3}LO = \frac{\sqrt{6}}{2}$, находим $LN = 2ON = \sqrt{6}$. Подставляя найденные значения в формулу (1), получаем $s = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Ответ. $s = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

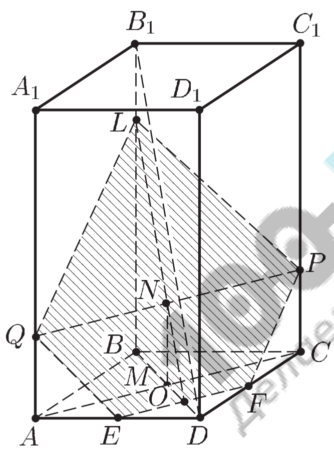

Рис. 33.6

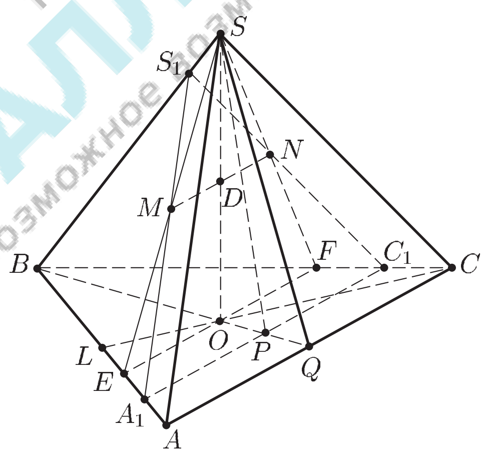

Рис. 33.7

Пример 7. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через середину D высоты SO проведено сечение параллельно боковой грани SAC (рис. 33.7). Построить это сечение. Найти отношение площади сечения к площади грани SAC.

Решение. а) *Построение сечения.* 1) Пусть L и Q — середины сторон AB и AC соответственно, O — точка пересечения CL и BQ (она является проекцией вершины S на плоскость ABC).

2) Проведем через точку O прямую, параллельную AC и пересекающую AB и BC в точках E и F.

3) Соединим отрезками точки E и F с точкой S.

4) Через точку D, середину отрезка SO, проведем в треугольнике SEF прямую, параллельную EF, пересекающую SE и SF в точках M и N.

5) Через точки M и N проведем прямые, параллельные SA и SC. Они пересекутся в точке S_1, лежащей на BS. Указанные прямые пересекут AB и BC в точках A_1 и C_1. Треугольник $S_1A_1C_1$ — искомое сечение.

б) *Вычисление отношения площадей.*

Из подобия треугольников SOQ и DOP, где P — точка пересечения BQ и A_1C_1, следует, что $OP = PQ = \frac{1}{6}BQ$. Поэтому $A_1C_1 = \frac{5}{6}AC$.

Так как $\triangle A_1S_1C_1 \sim \triangle ASC$ и $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{5}{6}$, то $S_{A_1S_1C_1} : S_{ASC} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$.

Ответ. $\frac{25}{36}$.

Пример 8. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 33.8) плоскостью α, проходящей через точки E, F, G — середины ребер AA_1, B_1C_1 и CD соответственно. Найти площадь сечения, если ребро куба равно a.

Решение. Найдем сначала линию пересечения l плоскости α с плоскостью грани $ABCD$, пользуясь тем, что прямая AF_1, где F_1 — середина BC, является ортогональной проекцией прямой EF на плоскость $ABCD$.

Пусть K — точка пересечения EF и AF_1. Тогда прямая KG — линия пересечения l плоскостей α и $ABCD$, так как каждая из точек K и G принадлежит как плоскости α, так и плоскости $ABCD$.

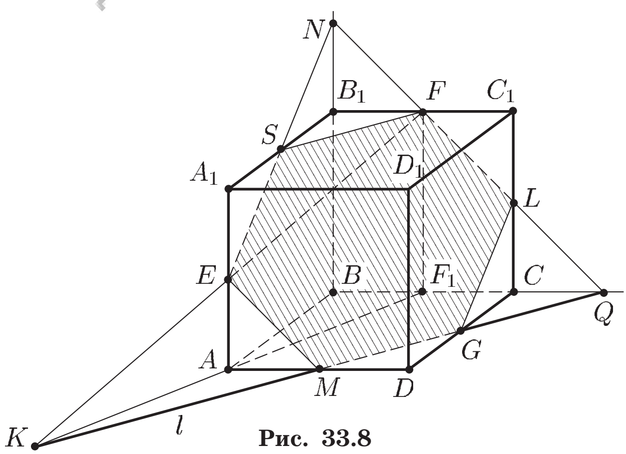

Рис. 33.8

Если M — точка пересечения l и AD, то отрезок MG — пересечение плоскости α и грани $ABCD$, а отрезок ME — пересечение плоскости α и грани AA_1D_1D.

Далее найдем точку Q, в которой прямая l пересекается с прямой BC, а затем проведем прямую QF, пересекающую CC_1 и BB_1 в точках L и N соответственно.

Тогда отрезок GL — пересечение плоскости α и грани DD_1C_1C, а отрезок LF — пересечение плоскости α и грани BB_1C_1C.

Пусть S — точка пересечения NE и A_1B_1. Тогда отрезки FS и SE — пересечения плоскости α с гранями $A_1B_1C_1D_1$ и AA_1B_1B, а шестиугольник $MGLFSE$ — искомое сечение.

Нетрудно показать, что этот шестиугольник является правильным, а длина его стороны равна $\dfrac{a}{\sqrt{2}} = b$. Поэтому площадь сечения $s = 6\,\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ответ. $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Пример 9. Высота правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна h, сторона основания $ABCD$ равна a. Через середину E высоты SO проведена плоскость α, перпендикулярная боковому ребру SC.

Построить сечение пирамиды плоскостью α.

Найти площадь сечения, если $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Решение. Так как секущая плоскость α перпендикулярна SC, то она пересекает ребро SC (рис. 33.9) в точке F такой, что $EF \perp SC$, а ребра SB и SD — в точках P и Q соответственно таких, что $QF \perp SC$ и $PF \perp SC$.

Из равенства прямоугольных треугольников QFS и PFS следует, что $SP = SQ$ и поэтому $PQ \| BD$. Таким образом, плоскость α пересекает плоскость BSD по прямой PQ, параллельной линии пересечения BD плоскостей $ABCD$ и BSD. Отсюда следует, что

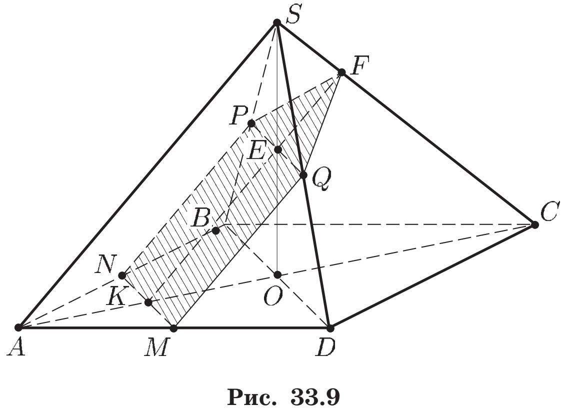

Рис. 33.9

плоскость α должна пересечь плоскость $ABCD$ по прямой l, параллельной BD.

Чтобы построить сечение, нужно определить длину отрезка OK, где K — точка пересечения плоскости α с прямой AC ($K \in l$). Так как $\triangle KOE \sim \triangle SEF \sim \triangle SOC$, то $\dfrac{OK}{OE} = \dfrac{SF}{EF} = \dfrac{SO}{OC}$, где $OE = \dfrac{h}{2}$, $SO = h$, $OC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, откуда находим

$$OK = \frac{h^2}{a\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Возможны три случая: $OK < AO$, $OK = AO$, $OK > AO$.

1) Так как $AO = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, то из (1) следует, что неравенство $OK < OA$ справедливо, если $h < a$. Построим сечение. Зная h и a, по формуле (1) найдем OK и отметим точку K на отрезке AO. Далее, через точки K и E проведем прямые MN ($M \in AD$, $N \in AB$) и PQ, параллельные BD, а через точки K и E — прямую, пересекающую SC в точке F. Пятиугольник $MNPFQ$ — искомое сечение.

Вычислим площадь σ сечения при $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. В этом случае имеем $AO = SO$ и из (1) находим $OK = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} = OE$, поэтому $EK \parallel SA$, $EK = \dfrac{SA}{2}$ и $SA \perp SC$. Так как $OC = h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, то $AS = SC = a$, $EK = \dfrac{a}{2}$, $EF = \dfrac{KE}{2} = \dfrac{a}{4}$.

Пятиугольник $MNPFQ$ составлен из равнобедренной трапеции $MNPQ$ и равнобедренного треугольника PFQ, а его площадь

$$\sigma = \frac{1}{2}(MN + PQ)EK + \frac{1}{2}PQ \cdot EF = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{a}{4},$$

т. е. $\sigma = \dfrac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

2) Если $h = a$, то $OK = AO$ и сечением является четырехугольник $APFQ$.

3) Если $h > a$, то точка K лежит на продолжении отрезка AO за точку A (рис. 33.10). Вычислив длину отрезка OK по формуле (1), отметим точку K на прямой AC, а затем найдем точки T и F, в которых KE пересекает AS и CS. Четырехугольник $TPFQ$ — искомое сечение (считаем, что точки P и Q построены).

Ответ. $\dfrac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

Пример 10. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересечен плоскостью α, проходящей через вершину A и точки E, F, являющиеся серединами ребер B_1C_1 и C_1D_1 (рис. 33.11).

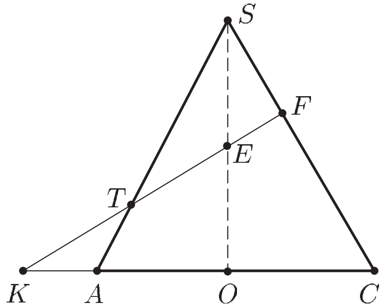

Рис. 33.10

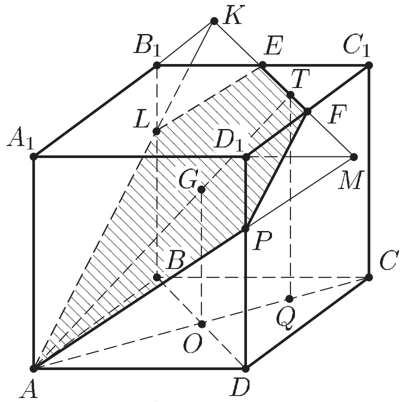

Рис. 33.11

1) Построить сечение.

2) Найти угол между плоскостью α и плоскостью основания $ABCD$.

3) Найти площадь сечения, если ребро куба равно a.

Решение. 1) Найдем точки пересечения ребер BB_1 и DD_1 с плоскостью α. С этой целью найдем точки K и M, в которых пересекаются прямые A_1B_1 и A_1D_1 с прямой EF (все эти прямые лежат в плоскости $A_1B_1C_1D_1$).

Пусть L и P — точки, в которых прямые, проведенные из точки A в точки K и M, пересекают ребра BB_1 и DD_1 соответственно. Тогда пятиугольник $ALEFP$ — искомое сечение.

Покажем, что $B_1L = D_1P = \frac{a}{3}$. Из равенства прямоугольных треугольников C_1EF, B_1EK и D_1FM следует, что $D_1M = B_1K = \frac{a}{2}$, а из того, что $\triangle AA_1K \sim \triangle LB_1K$, $\triangle AA_1M \sim \triangle PD_1M$ находим $LB_1 = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{a}{3}$, $PD_1 = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{a}{3}$. Итак, $LB_1 = PD_1 = \frac{a}{3}$, откуда следует, что $AL = AP$, $LP \| BD$ и $LP = BD = a\sqrt{2}$, $LE = PF$. Таким образом, пятиугольник $ALEFP$ составлен из равнобедренного треугольника ALP и равнобедренной трапеции $LEFP$.

2) Пусть φ — угол между плоскостью α и плоскостью $ABCD$. Докажем, что φ — угол между прямой AC и прямой, соединяющей точки T и G, середины отрезков EF и LP (эта прямая проходит через точку A).

Так как плоскость α пересекает грань $A_1B_1C_1D_1$ по прямой EF, а плоскость $ABCD$ параллельна плоскости $A_1B_1C_1D_1$, то линия пересечения l плоскости α с плоскостью $ABCD$ параллельна EF и поэтому $l \perp AC$. Кроме того, $l \perp AT$ по теореме о трех перпендикулярах. Следовательно, $\angle TAC = \varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{GO}{AO}$, где O — середина AC,

$GO = BL = \frac{2}{3}a$, $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Поэтому $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, откуда $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{17}}$, $\sin\varphi = 2\sqrt{\frac{2}{17}}$.

3) Пусть S — площадь сечения, тогда

$$S = \frac{1}{2}LP \cdot AG + \frac{1}{2}(LP + EF)GT = \frac{1}{2}LP \cdot AT + \frac{1}{2}EF \cdot GT,$$

где $LP = a\sqrt{2}$, $EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Из $\triangle ATQ$, где Q — проекция точки T на плоскость $ABCD$, имеем $AT = \frac{TQ}{\sin\varphi}$, где $TQ = a$, $AT = \frac{a\sqrt{34}}{4}$. Аналогично, из $\triangle AGO$ находим $AG = \frac{GO}{sin\varphi} = \frac{a\sqrt{34}}{6}$, $GT = AT - AG = \frac{a\sqrt{34}}{12}$. Откуда $S = \frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$.

Ответ. $\arccos\frac{3}{\sqrt{17}}$, $\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$.

Пример 11. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AB, A_1C_1, BB_1. Построить сечение призмы, найти площадь сечения и вычислить угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 4, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

Решение. 1) *Построение сечения.* Пусть E, F и K — середины ребер AB, A_1C_1 и BB_1 соответственно. Проведем:

а) прямые KE и AA_1, пересекающиеся в точке M;

б) прямую FM, пересекающую отрезок AC в точке P;

в) прямую A_1B_1, пересекающую прямую KE в точке L;

г) прямую FL, пересекающую ребро B_1C_1 в точке N (рис. 33.12).

Тогда $EPFNK$ — пятиугольник, получаемый в сечении призмы плоскостью, проходящей через точки E, F и K.

2) *Вычисление угла между плоскостью основания и плоскостью сечения* α.

Пусть F_1 — середина AC, G — основание перпендикуляра, опущенного из точки F_1 на PE.

Так как FF_1 — перпендикуляр к плоскости ABC, а прямая PE перпендикулярна проекции F_1G наклонной FG, то $FG \perp PE$ (теорема о трех перпендикулярах).

Итак, прямые GF и GF_1, лежащие в плоскостях α и ABC соответственно, перпендикулярны. PE — линия пересечения этих плоскостей. Поэтому $\angle FGF_1 = \varphi$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и ABC, а $\operatorname{tg}\varphi = \frac{FF_1}{F_1G}$. Найдем F_1G.

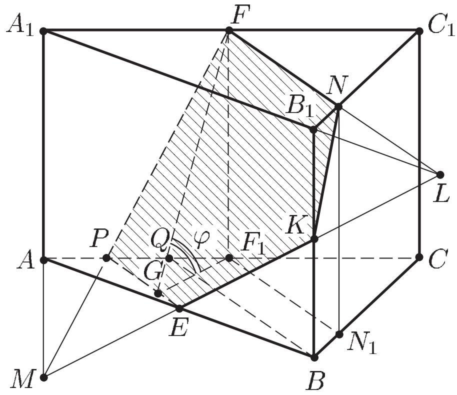

Рис. 33.12

Пусть $AB = a$, $BB_1 = h$. Тогда из равенства треугольников AME и KBE следует, что $AM = \dfrac{h}{2}$, а из подобия треугольников MAP и MA_1F находим: $\dfrac{AP}{A_1F} = \dfrac{MA}{MA_1} = \dfrac{1}{3}$, откуда $AP = \dfrac{1}{3}A_1F = \dfrac{a}{6}$.

Из треугольника APE, в котором $AP = \dfrac{a}{6}$, $AE = \dfrac{a}{2}$, $\angle PAE = \dfrac{\pi}{3}$, по теореме косинусов получаем

$$PE^2 = \frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{4} - 2\cdot\frac{a}{6}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

откуда $PE = \dfrac{a\sqrt{7}}{6} = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. Пусть S, S_1 и S_2 — площади треугольников ABC, AEF_1 и PEF_1 соответственно. Так как EF_1 — средняя линия в треугольнике ABC, то $S_1 = \dfrac{1}{4}S$, а $S_2 = \dfrac{2}{3}S_1 = \dfrac{1}{6}S$ $\left(AP = \dfrac{1}{3}AF_1\right)$. С другой стороны, $S_2 = \dfrac{1}{2}PE\cdot F_1G$, откуда

$$F_1G = \frac{2S_2}{PE} = \frac{\frac{1}{3}S}{PE} = \frac{\frac{1}{3}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a\sqrt{7}}{6}} = 2\sqrt{\frac{3}{7}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{F_1G} = \frac{\frac{\sqrt{42}}{7}}{2\sqrt{\frac{3}{7}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \varphi = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3) *Вычисление площади сечения.*

Пусть σ и σ_1 — площади соответственно сечения и его проекции на плоскость ABC. Тогда (§ 32, 5, теорема 3)

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\cos\varphi}.$$

Заметим, что проекцией сечения на плоскость ABC является пятиугольник PF_1N_1BE (N_1 — проекция точки N на плоскость ABC), в котором $F_1N_1 \| PE$, так как $F_1N_1 \| FN$, а $FN \| PE$.

Если Q — середина PF_1, то $PQ = QF_1 = AP = \frac{a}{6}$, PE — средняя линия в треугольнике ABQ и поэтому $PE \| BQ$, откуда следует, что $F_1N_1 \| BQ$, так как $F_1N_1 \| PE$.

Из подобия треугольников CF_1N_1 и CQB следует, что $\frac{CN_1}{CB} = \frac{CF_1}{CQ}$, где $CB = a$, $CF_1 = \frac{a}{2}$, $CQ = \frac{2}{3}$, откуда находим $CN_1 = \frac{3}{4}a$.

Пусть S_3 и S_4 — площади треугольников APE и CF_1N_1 соответственно. Тогда $S_3 = \frac{1}{3}S_1 = \frac{1}{12}S$, $S_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{S}{2} = \frac{3}{8}S$,

$$\sigma_1 = S - (S_3 + S_4) = \frac{13}{24}S = \frac{13}{24} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{13\sqrt{3}}{6},$$

откуда

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{13\sqrt{2}}{4}$.

§ 34. Вычисление углов в пространстве

1. Угол между прямыми

Справочные сведения

Для вычисления угла между прямыми часто применяется теорема косинусов. В некоторых случаях бывает удобно использовать скалярное произведение векторов, параллельных данным прямым (§ 32, 3, 3°).

1. Если стороны AB и AC треугольника ABC соответственно параллельны прямым m и l, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, то по теореме косинусов угол φ между сторонами AB и AC определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

а угол α между прямыми m и l (он заключен в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$) определяется из равенства

$$\cos\alpha = |\cos\varphi| = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2bc}.$$

2. Если векторы $\overline{p}$ и $\overline{q}$ параллельны соответственно прямым m и l, то угол α между этими прямыми $\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ определяется из равенства
$$\cos\alpha = \frac{|\overline{p}\cdot\overline{q}|}{|\overline{p}|\cdot|\overline{q}|}.$$

Примеры с решениями

Пример 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол:

а) между диагоналями AB_1 и A_1D его граней (рис. 34.1);

б) между прямыми AE и DF, где E и F — точки, расположенные на ребрах CD и C_1D_1 так, что $DE = \frac{1}{3}DC$, $C_1F = \frac{1}{3}C_1D_1$.

Решение. а) Так как $B_1C \| A_1D$, то искомый угол φ равен углу при вершине B_1 равностороннего треугольника AB_1C, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

б) *Первый способ.* Пусть $K \in A_1B_1$ и $B_1K = \frac{1}{3}B_1A_1$, тогда $AK \| DF$ и искомый угол α равен углу при вершине A в треугольнике KAE. Если ребро куба равно 1, то $AE = \sqrt{1+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $AK = \sqrt{1+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Пусть $M \in AB$ и $BM = \frac{1}{3}BA$, тогда $KE = \sqrt{KM^2+ME^2}$, где $KM = 1$, $ME = AE = \frac{\sqrt{10}}{3}$. Следовательно, $KE = \frac{\sqrt{19}}{3}$.

Используя теорему косинусов, находим
$$\cos\alpha = \frac{AK^2+AE^2-KE^2}{2AK\cdot AE} = \frac{2}{\sqrt{130}}.$$

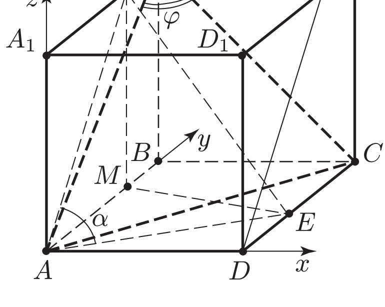

Рис. 34.1

Второй способ. Считая, что ребро куба равно 1, введем систему координат так, как это указано на рис. 34.1. Тогда $A(0;0;0)$, $D(1;0;0)$, $E\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $F\left(1;\frac{2}{3};1\right)$, $\overline{AE}=\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $\overline{DF}=\left(0;\frac{2}{3};1\right)$,

$$\cos\alpha=\frac{|\overline{AE}\cdot\overline{DF}|}{|\overline{AE}|\cdot|\overline{DF}|}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{130}}.$$

Ответ. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\arccos\frac{2}{\sqrt{130}}$.

Пример 2. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямыми A_1D и D_1E (рис. 34.2).

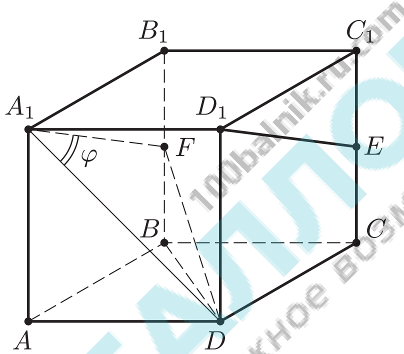

Рис. 34.2

Решение. Первый способ. Пусть F — середина ребра BB_1, a — ребро куба, φ — искомый угол.

Тогда φ — угол при вершине A_1 в $\triangle A_1FD$, так как $A_1F \| D_1E$.

Из $\triangle A_1FD$ по теореме косинусов находим $FD^2=A_1D^2+A_1F^2-2A_1D\cdot A_1F\cos\varphi$, из $\triangle BFD$ имеем $FD^2=2a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{9a^2}{4}$, а из $\triangle A_1B_1F$ получаем $A_1F^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$, откуда $A_1F=\frac{a\sqrt5}{2}$.

Поэтому, $\frac{9a^2}{4}=2a^2+\frac{5a^2}{4}-2a\sqrt2\,\frac{a\sqrt5}{2}\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Второй способ. Введем систему координат, считая, что $A(0;0;0)$, $D(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $A(0;0;1)$.

Тогда $E\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$, $\overline{A_1D}=(1;0;-1)$, $D_1(1;0;1)$, $\overline{D_1E}=\left(0;1;-\frac{1}{2}\right)$,

$\cos\varphi=\frac{|\overline{A_1D}\cdot\overline{D_1E}|}{|\overline{A_1D}|\cdot|\overline{D_1E}|}$, где $\overline{A_1D}\cdot\overline{D_1E}=\frac{1}{2}$, $|\overline{A_1D}|=\sqrt2$, $|\overline{D_1E}|=\frac{\sqrt5}{2}$.

Следовательно, $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ. $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Пример 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол:

1) между диагональю основания BD и диагональю куба AC_1;

2) между диагональю боковых граней AD_1 и DC_1;

3) между AD_1 и DM, где M — середина ребра D_1C_1;

4) между прямыми EF и PQ, где E, F, P, Q — середины ребер DD_1, BC, AA_1 и B_1C_1 соответственно.

Решение. 1) Диагональ AC основания, являющаяся проекцией AC_1 на плоскость $ABCD$, перпендикулярна BD (рис. 34.3). По теореме о трех перпендикулярах $AC_1 \perp BD$, поэтому угол между AC_1 и BD — прямой.

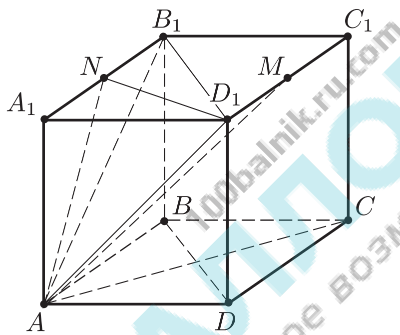

Рис. 34.3

2) Искомый угол α равен углу между AD_1 и AB_1, так как $AB_1 \| DC_1$. Так как треугольник AD_1B_1 — равносторонний, то $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

3) Пусть N — середина ребра A_1B_1, тогда искомый угол β равен углу между AD_1 и AN. Так как $AN = D_1N = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, где a — ребро куба, $AD_1 = a\sqrt{2}$, то $\cos\beta = \frac{AD_1}{2AN} = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $\beta = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$.

4) *Первый способ.* Пусть F_1 точка, симметричная точке F относительно плоскости AA_1B_1B ($F_1 \in BC$, $F_1B = BF$, рис. 34.4). Тогда $PF_1 \| EF$ и искомый угол φ равен углу F_1PQ. Выразим длины сторон треугольника F_1PQ через ребро куба a из прямоугольных треугольников PBF_1, PFQ и F_1FQ. Получим

$$PF_1^2 = PB^2 + BF_1^2 = PA^2 + AB^2 + BF_1^2 = \frac{3a^2}{2},$$

$$PQ^2 = PA_1^2 + A_1Q^2 = PA_1^2 + A_1B_1^2 + B_1Q^2 = \frac{3a^2}{2},$$

$$QF_1^2 = FF_1^2 + FQ^2 = 2a^2.$$

Применив теорему косинусов, находим

$$QF_1^2 = PF_1^2 + PQ^2 - 2PF_1 \cdot PQ\cos\varphi,$$

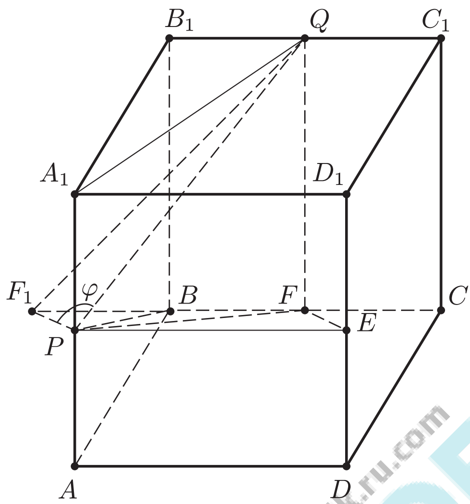

Рис. 34.4

откуда получаем

$$\cos\varphi = \frac{1}{3}, \qquad \varphi = \arccos\frac{1}{3}.$$

Второй способ. Пусть $\overline{AD} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AA_1} = \overline{c}$, где $|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1$, $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{c} = \overline{c}\cdot\overline{a} = 0$. Тогда $\overline{EF} = \overline{ED} - \overline{DF} = \overline{ED} + \overline{DC} + \overline{CF} = -\frac{\overline{c}}{2} + \overline{b} - \frac{\overline{a}}{2}$, $\overline{PQ} = \overline{PA_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1Q} = \frac{\overline{c}}{2} + \overline{b} + \frac{\overline{a}}{2}$, откуда находим $\overline{PQ}\cdot\overline{EF} = \frac{1}{2}$, $|\overline{PQ}| = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot|\overline{EF}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\cos\varphi = \frac{|\overline{PQ}\cdot\overline{EF}|}{|\overline{PQ}|\cdot|\overline{EF}|} = \frac{1}{3}$.

Ответ. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$; 4) $\arccos\frac{1}{3}$.

Пример 4. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и E — середины ребер AC и AB соответственно, точка N — центр грани BDC (рис. 34.5). Найти угол между MN и DE.

Решение. По условию N — центр грани BDC (точка пересечения медиан DK и CF).

Пусть P — центр грани ABD, тогда $P \in AF$ и $P \in DE$, где E — середина AB, а отрезок MN лежит в плоскости AFC. Проведем в этой плоскости $PQ \| MN$ ($Q \in AC$).

Так как $AF = FC$, $PF = FN = \frac{1}{3}FC$, то $PN \| AC$. Отсюда следует, что $MNPQ$ — параллелограмм, в котором $QM = PN = \frac{a}{3}$, где a — ребро тетраэдра, $AQ = AM - QM = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$.

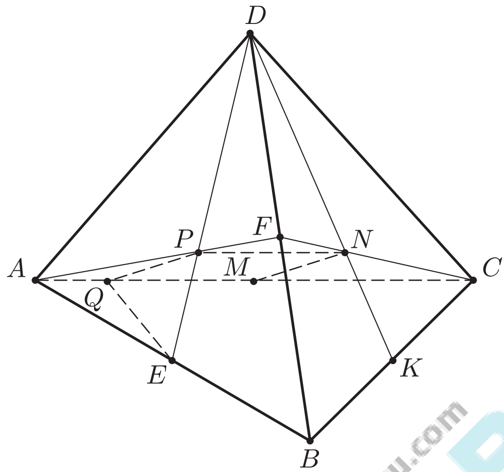

Рис. 34.5

Пусть $\angle NCM = \alpha$, тогда по теореме косинусов $MN^2 = MC^2 + NC^2 - 2MC \cdot NC \cdot \cos\alpha$, где $MC = \frac{a}{2}$,

$\cos\alpha = \frac{MC}{FC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $NC = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Следовательно,

$$MN = PQ = \frac{a}{2}.$$

Пусть φ — искомый угол, тогда $\angle QPE = \varphi$ и по теореме косинусов

$$QE^2 = PQ^2 + PE^2 - 2PQ \cdot PE \cdot \cos\varphi, \qquad (1)$$

где $PQ = \frac{a}{2}$, $PE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, а QE найдем из $\triangle AEQ$ по теореме косинусов.

Имеем

$$QE^2 = AE^2 + AQ^2 - 2AE \cdot AQ \cdot \cos\frac{\pi}{3},$$

где $AE = \frac{a}{2}$, $AQ = \frac{a}{6}$, и поэтому $QE^2 = \frac{7a^2}{36}$.

Тогда из (1) следует, что $\cos\varphi = \frac{5}{6\sqrt{3}}$.

Ответ. $\arccos\frac{5}{6\sqrt{3}}$.

2. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью

а) Перпендикулярность прямой и плоскости

Справочные сведения

При доказательстве перпендикулярности прямой и плоскости часто используется *признак перпендикулярности прямой и плоскости*: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Для доказательства перпендикулярности прямых в пространстве нередко применяется одна из основных теорем стереометрии — *теорема о трех перпендикулярах* (гл. 1, § 2, п. 4).

Примеры с решениями

Пример 1. Доказать, что боковое ребро SA правильного тетраэдра $SABC$ перпендикулярно плоскости α, проходящей через ребро BC основания ABC и середину D ребра SA (рис. 34.6).

Доказательство. Так как BD и CD — высоты в правильных треугольниках BAS и CAS, то $SA \perp BD$ и $SA \perp CD$.

По признаку перпендикулярности прямой и плоскости отсюда заключаем, что $SD \perp \alpha$.

Пример 2. Доказать, что в правильной треугольной пирамиде $SABC$, где S — вершина, противоположные ребра AB и SC перпендикулярны (рис. 34.7).

Доказательство. В самом деле, основание O перпендикуляра, опущенного из вершины S на плоскость ABC, лежит на высоте CE треугольника ABC и поэтому OC — проекция SC на плоскость ABC.

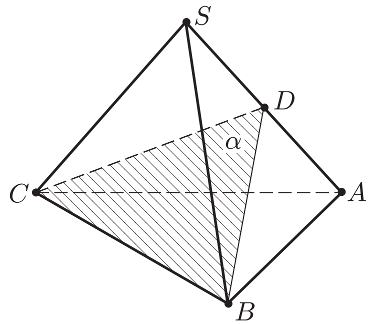

Рис. 34.6

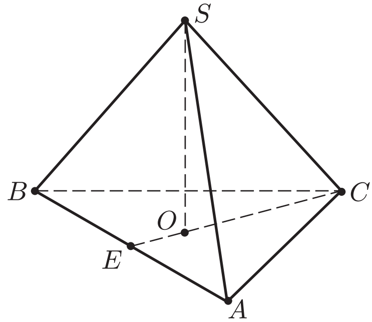

Рис. 34.7

Так как $OC \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp SC$.

Замечание. Справедливо и более общее утверждение: если в тетраэдре $SABC$ выполняются равенства $AB = BC$ и $AS = SC$, то $AC \perp SB$. Это утверждение можно доказать с помощью векторов.

Пример 3. Доказать, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ BD_1 перпендикулярна плоскости AB_1C, проходящей через концы ребер BA, BB_1 и BC, которые выходят из той же вершины B, что и диагональ BD_1 (рис. 34.8).

Доказательство. Докажем сначала, что $AB_1 \perp BD_1$ и $AC \perp BD_1$, т. е. диагональ куба перпендикулярна непересекающей ее диагонали грани куба.

Так как BD — проекция BD_1 на плоскость $ABCD$, а $AC \perp BD$, то по теореме о трех перпендикулярах $BD_1 \perp AC$. Аналогично, проектируя BD_1 на плоскость AA_1B_1B, докажем, что $BD_1 \perp AB_1$.

Таким образом, прямая BD_1 перпендикулярна прямым AC и AB_1, лежащим в плоскости AB_1C. Поэтому прямая BD_1 перпендикулярна плоскости AB_1C. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.)

Пример 4. Доказать, что ортогональная проекция вершины A основания ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$ на боковую грань BSC лежит на высоте SE этой грани (рис. 34.9).

Доказательство. Пусть E — середина BC, $AD \perp SE$ и $D \in SE$. Докажем, что AD — перпендикуляр к плоскости BSC.

Так как $AS \perp BC$ (пример 2) и $AE \perp BC$, то BC — перпендикуляр к плоскости ASE (признак перпендикулярности прямой и плоскости) и поэтому $BC \perp AD$ (AD лежит в плоскости ASE).

Итак, $AD \perp SE$ (по построению) и $AD \perp BC$, т. е. прямая AD перпендикулярна двум пересекающимся прямым BC и SE, лежащим в плоскости BSC. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая AD перпендикулярна плоскости BSC, а точка

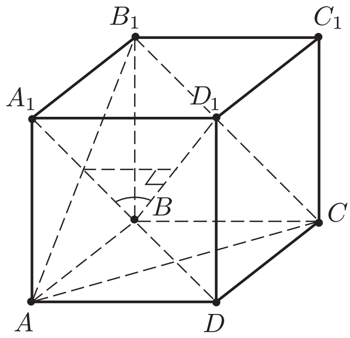

Рис. 34.8

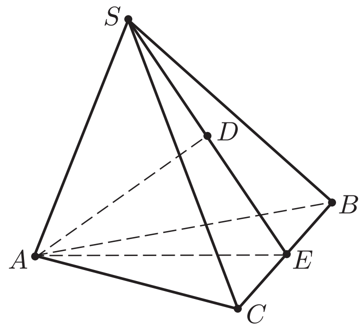

Рис. 34.9

D, являющаяся ортогональной проекцией точки A на плоскость грани BSC, лежит на высоте SE этой грани.

б) Угол между прямой и плоскостью

Справочные сведения

Если прямая l пересекает плоскость α и не перпендикулярна к ней (рис. 34.10), то *углом между прямой l и плоскостью α* называется угол φ между этой прямой и ее ортогональной проекцией m на плоскость α.

Из этого определения и определения угла между прямыми следует, что

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Пусть A — точка пересечения прямой l с плоскостью α, $M \in l$ и B — проекция точки M на плоскость α ($B \in m$). Тогда

$$\sin\varphi = \frac{MB}{AM}.$$

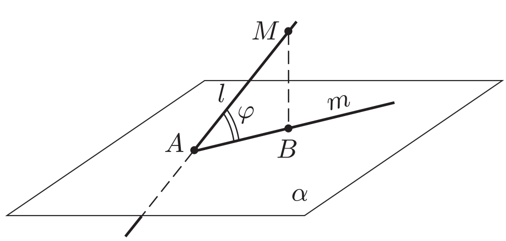

Рис. 34.10

Примеры с решениями

Пример 5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра имеют равную длину. Найти угол между прямой AB_1 и плоскостями α и β, где:

а) α — плоскость AA_1C_1C;

б) β — плоскость A_1B_1C (рис. 34.11).

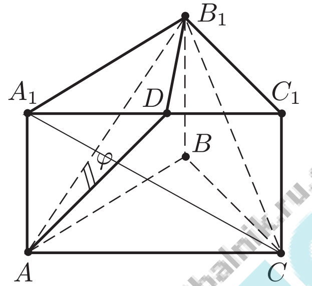

Рис. 34.11

Решение. а) Пусть D — середина A_1C_1, тогда B_1D — перпендикуляр к плоскости α, а D — проекция точки B_1 на плоскость α.

Если φ — искомый угол, a — ребро призмы, то

$$\sin\varphi = \frac{B_1D}{AB_1},$$

где $B_1D = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AB_1 = a\sqrt{2}$, и поэтому $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

б) Если φ_1 — искомый угол, h — длина перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость β, то

$$\sin\varphi_1 = \frac{h}{AB_1} = \frac{h}{a\sqrt{2}}.$$

Для нахождения h вычислим двумя способами объем v_1 пирамиды AA_1B_1C. С одной стороны, $v_1 = \frac{1}{3}v$, где $v = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. С другой стороны, $v_1 = \frac{1}{3}h \cdot s$, где s — площадь равнобедренного треугольника A_1CB_1, в котором $A_1C = B_1C = a\sqrt{2}$, $A_1B_1 = a$, и поэтому

$$s = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot \sqrt{A_1C^2 - \left(\frac{A_1B_1}{2}\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}, \qquad v_1 = \frac{a^2\sqrt{7}}{12}h.$$

Итак, $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{12}h$, откуда $h = a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$, $\sin\varphi_1 = \sqrt{\dfrac{3}{14}}$, $\varphi_1 = \arcsin\sqrt{\dfrac{3}{14}}$.

Ответ. а) $\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{4}$; б) $\varphi_1 = \arcsin\sqrt{\dfrac{3}{14}}$.

При вычислении угла между прямой и плоскостью иногда бывает удобно ввести систему координат и воспользоваться формулой (5) (§ 32, 3, п. 4°).

Пример 6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 34.12) точка E — середина ребра D_1C_1, а точка F лежит на ребре DD_1, так, что $D_1F = 2DF$. Найти угол между прямой AD_1 и плоскостью α, проходящей через точки A_1, E и F.

Решение. Введем систему координат указанным на рис. 34.12 способом, считая, что ребро куба равно 1.

Тогда $A(0;0;0)$, $A_1(0;0;1)$, $D_1(1;0;1)$, $E\left(1;\dfrac{1}{2};1\right)$, $F\left(1;0;\dfrac{1}{3}\right)$, $\overline{AD_1} = (1;0;1)$, $\overline{A_1E} = \left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$, $\overline{A_1E} = \left(1;0;-\dfrac{2}{3}\right)$.

Пусть $\overline{n} = (x, y, z)$ — вектор, перпендикулярный плоскости α, φ — искомый угол. Тогда

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{AD_1}\cdot\overline{n}|}{|\overline{AD_1}|\cdot|\overline{n}|}.$$

Вектор $\overline{n}$ найдем из условий ортогональности этого вектора векторам $\overline{A_1E}$ и $\overline{A_1F}$, т. е. из условий

$$\overline{n}\cdot\overline{A_1E} = x + \frac{y}{2} = 0, \qquad \overline{n}\cdot\overline{A_1F} = x - \frac{2}{3}z = 0.$$

Взяв $x = 2$, отсюда находим $y = -4$, $z = 3$ и поэтому

$$\overline{n} = (2;-4;3), \qquad |\overline{n}| = \sqrt{29}.$$

Так как $\overline{AD_1}\cdot\overline{n} = 1\cdot 2 + 0\cdot(-4) + 1\cdot 3 = 5$, $\overline{AD_1} = \sqrt{2}$, то

$$\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{58}}.$$

Ответ. $\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{58}}$.

Пример 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ отношение высоты SO к стороне основания равно $\sqrt{3}$. Найти угол между прямой DE (рис. 34.13), где E — середина апофемы SF грани ASB, и плоскостью ASC.

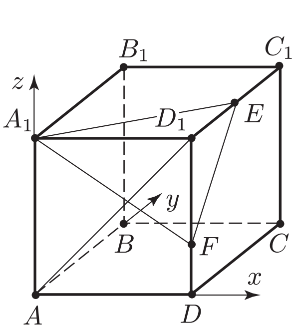

Рис. 34.12

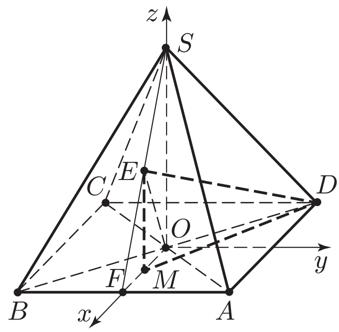

Рис. 34.13

Решение. Первый способ. Так как прямая OD перпендикулярна плоскости SAC, то искомый угол α между DE и плоскостью SAC равен $\frac{\pi}{2} - \varphi$, где $\varphi = \angle EDO$. Для вычисления угла φ воспользуемся теоремой косинусов:

$$\cos\varphi = \frac{ED^2 + OD^2 - OE^2}{2ED \cdot OD}. \qquad (1)$$

Пусть M — проекция точки E на плоскость основания, тогда M середина отрезка OF, так как E — середина SF. Если $AB = a$, то $OS = a\sqrt{3}$, $EM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и из прямоугольных треугольников EMO и EMD получим

$$OE^2 = EM^2 + OM^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{16} = \frac{13a^2}{16}, \qquad (2)$$

$$ED^2 = EM^2 + MD^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16} = \frac{25a^2}{16}. \qquad (3)$$

Из (1) и (3) следует, что $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и поэтому $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Второй способ. В системе координат, указанной на рис. 34.13, $D\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$, $E\left(\frac{a}{4}; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overline{DE}\left(\frac{3}{4}a; -\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overline{OD}\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ и поэтому

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{DE} \cdot \overline{OD}|}{|\overline{DE}| \cdot |\overline{OD}|} = \frac{\frac{5}{8}a^2}{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{4}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

3. Двугранные углы

Справочные сведения

Двугранный угол, образованный плоскостями α и β (рис. 34.14) измеряется величиной его линейного угла φ, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру l.

Для нахождения величины двугранного угла достаточно, взяв точку O на ребре l двугранного угла, построить в плоскостях α и β перпендикуляры a и b (рис. 34.14) к прямой l в точке O и найти угол между лучами a и b.

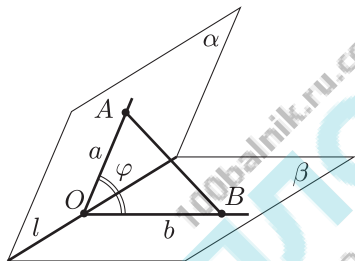

Рис. 34.14

Если на лучах a и b расположены точки A и B такие, что известны длины сторон треугольника OAB (рис. 34.14), то $\cos\varphi$ можно найти с помощью теоремы косинусов.

При вычислении двугранного угла φ, образованного плоскостью α и некоторой гранью P многогранника M, иногда полезно применить доказанную в § 32, 5 теорему 3, согласно которой

$$s_1 = s\cos\varphi,$$

где s — площадь сечения многогранника M плоскостью α, s_1 — площадь ортогональной проекции этого сечения на плоскость P.

Для вычисления двугранного угла применяется также и векторный метод.

Примеры с решениями

Пример 1. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника ABC расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла и образуют с ребром l этого двугранного угла острые углы α и β соответственно (рис. 34.15). Найти величину двугранного угла.

Решение. Так как $A \in P$ и $A \in Q$, то $A \in l$. Пусть D — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на плоскость Q, а E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на l.

Тогда $BE \perp l$ (теорема о трех перпендикулярах) и $\angle BED = \varphi$ — искомый угол.

По условию $AB \perp AC$, откуда следует (теорема о трех перпендикулярах), что $AD \perp AC$. Так как AC образует острый угол β с прямой l (рис. 34.15), то $\angle EAD = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \frac{\pi}{2} - \beta$ и поэтому $\angle EDA = \beta \left(\angle AED = \frac{\pi}{2}\right)$. Из треугольников BDE, ABE и AED находим $DE = BE \cdot \cos\varphi$, $BE = AE \cdot \operatorname{tg}\alpha$, $AE = DE \cdot \operatorname{tg}\beta$. Отсюда получаем $DE = \cos\varphi \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \cdot DE$ и $\cos\varphi = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$.

Ответ. $\arccos(\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta)$.

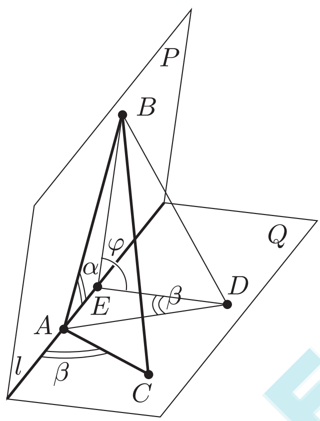

Рис. 34.15

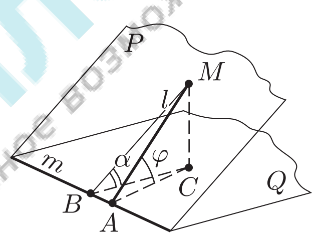

Рис. 34.16

Пример 2. В одной из граней двугранного угла, величина которого равна α (рис. 34.16), проведена прямая l так, что угол между этой прямой и ребром m двугранного угла равен β $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Найти угол между прямой l и другой гранью двугранного угла.

Решение. Пусть P и Q — грани двугранного угла, MA — прямая l, $AM \subset P$, $A \in m$, C — проекция точки M на плоскость Q, $B \in m$, $MB \perp m$, $MA = a$.

Тогда $\angle MBC = \alpha$, $\angle MAC = \varphi$ — искомый.

Из прямоугольных треугольников MBA, MCB и MCA находим

$$MB = MA \cdot \sin\beta = a\sin\beta,$$
$$MC = MB \cdot \sin\alpha = a\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{MC}{MA} = \sin\alpha\sin\beta.$$

Ответ. $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$.

Пример 3. Найти угол между основанием и боковой гранью правильной треугольной пирамиды $SABC$, если сторона основания AC образует с боковой гранью SBC угол α.

Решение. Пусть D — середина BC, $E \in SD$ и $AE \perp SD$, a — сторона основания пирамиды, φ — искомый угол (рис. 34.17).

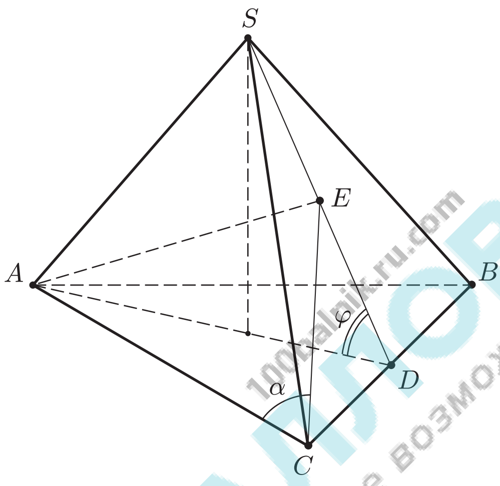

Рис. 34.17

Тогда $\angle ADS = \varphi$, а $\angle ACE = \alpha$, так как AE — перпендикуляр к плоскости SBC ($AE \perp SD$ и $AE \perp BC$), а EC — проекция AC на плоскость SBC.

Из прямоугольных треугольников AEC и AED находим

$$AE = AC \cdot \sin\alpha = a\sin\alpha,$$

$$AE = AD \cdot \sin\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi,$$

откуда следует, что $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha$.

Ответ. $\arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha\right)$.

Замечание. При решении этой задачи можно воспользоваться результатом примера 2.

Пример 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) боковое ребро в 2 раза больше стороны основания (рис. 34.18). Найти двугранный угол:

а) между основанием и боковой гранью;
б) между соседними боковыми гранями;
в) между противоположными боковыми гранями.

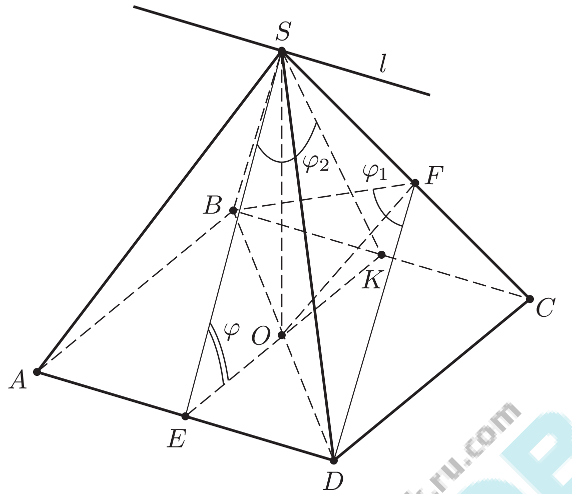

Рис. 34.18

Решение. а) Пусть E и K — середины ребер AD и BC, O — центр основания $ABCD$ (рис. 34.18). Тогда $SE \perp AD$, $EK \perp AD$ и поэтому $\angle SEK = \varphi$ — двугранный угол между основанием и боковой гранью.

Если $AD = a$, то $OE = \frac{a}{2}$, $SD = 2a$,

$$SE = \sqrt{SD^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{OE}{SE} = \frac{1}{\sqrt{15}}, \qquad \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

б) Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на SC. Тогда из равенства треугольников BFC и DFC следует, что $BF \perp SC$. Поэтому $\angle BFD = \varphi_1$ — линейный угол двугранного угла между соседними боковыми гранями пирамиды, а $\sin\frac{\varphi_1}{2} = \frac{OD}{DF}$, где $OD = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Чтобы выразить DF через a, вычислим двумя способами площадь треугольника DSC.

Получим равенство $DF \cdot 2a = a \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2}$, откуда найдем, что $DF = \frac{a\sqrt{15}}{4}$, а затем получим

$$\sin\frac{\varphi_1}{2} = 2\sqrt{\frac{2}{15}}, \qquad \cos\varphi_1 = -\frac{1}{15}, \qquad \varphi_1 = \pi - \arccos\frac{1}{15}.$$

в) Пусть φ_2 — величина двугранного угла между гранями ASD и BSC.

Так как плоскость ASD содержит прямую AD, параллельную плоскости BSC ($BC \| AD$), то линия пересечения l плоскостей ASD и BSC (она проходит через общую точку S этих плоскостей) параллельна AD и BC (рис. 34.18).

Но $SE \perp AD$ и поэтому прямая SE перпендикулярна прямой l, параллельной AD. Аналогично, $l \perp SK$. Отсюда следует, что $\angle ESK = \varphi_2$.

Из $\triangle ESO$ находим

$$\sin\frac{\varphi_2}{2} = \frac{OE}{SE} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{15}}, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{13}{15}, \qquad \varphi_2 = \arccos\frac{13}{15}.$$

Ответ. а) $\arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$; б) $\pi - \arccos\frac{1}{15}$; в) $\arccos\frac{13}{15}$.

Пример 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра C_1D_1, а точка N выбрана на ребре AB так, что $AN = 2BN$ (рис. 34.19). Определить величину двугранного угла между плоскостью α, проведенной через точки M, N, D, и гранью $ABCD$ куба.

Решение. Первый способ. Пусть a — ребро куба, M_1 — проекция точки M на плоскость $ABCD$, K — основание перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на ND, φ — искомый угол.

Так как $MK \perp ND$ (теорема о трех перпендикулярах), то $\angle MKM_1 = \varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{MM_1}{M_1K} = \frac{a}{M_1K}$, где $M_1K = \frac{2s}{ND}$, s — площадь треугольника M_1ND. Но $s = a^2 - \frac{a^2}{3} - \frac{BN + M_1C}{2}\,a = \frac{2}{3}\,a^2 - \frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{3}}{2}\,a = \frac{a^2}{4}$,

$ND = \sqrt{a^2 + \frac{4}{9}\,a^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$ и поэтому $M_1K = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{13}}{3}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$,

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{13}}{3}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

Второй способ. Выберем систему координат так, как указано на рис. 34.19. Тогда $D(a; 0; 0)$, $M\left(a; \frac{a}{2}; a\right)$, $N\left(0; \frac{2}{3}\,a; 0\right)$, $\overline{DM} = \left(0; \frac{a}{2}; a\right)$, $\overline{DN} = \left(-a; \frac{2}{3}\,a; 0\right)$.

Пусть $\overline{n}_1 = (x, y, z)$ — вектор, перпендикулярный плоскости α.

Тогда вектор $\overline{n}_1$ перпендикулярен векторам $\overline{DM}$ и $\overline{DN}$. Поэтому $\overline{n}_1 \cdot \overline{DM} = 0$, $\overline{n}_1 \cdot \overline{DN} = 0$. Следовательно, $\frac{y}{2} + z = 0$, $-x + \frac{2}{3}\,y = 0$, откуда, взяв $x = 4$, $y = 6$, $z = -3$, получаем $\overline{n}_1 = (4; 6; -3)$.

Вектор $\overline{n}_2 = (0; 0; 1)$ перпендикулярен плоскости $ABCD$, а искомый угол φ можно найти из равенства

$$|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2| = |\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2| \cdot |\cos\varphi|,$$

где $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = -3$, $|\overline{n}_1| = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{61}$, $|\overline{n}_2| = 1$,

$$|\cos\varphi| = \frac{3}{\sqrt{61}}, \qquad |\sin\varphi| = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{61}}, \qquad |\operatorname{tg}\varphi| = \frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ. $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.

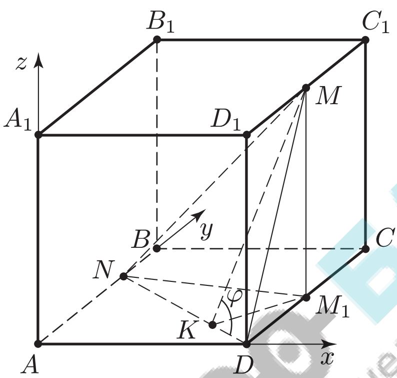

Рис. 34.19

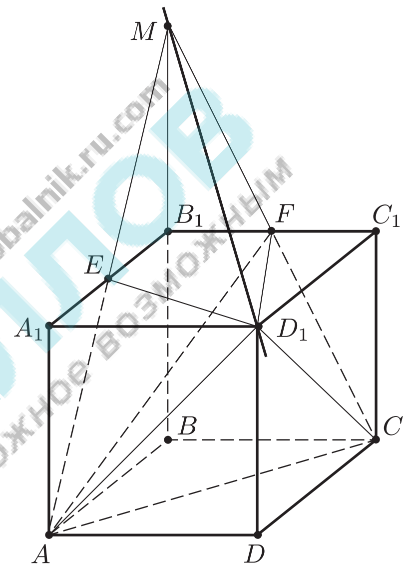

Рис. 34.20

Пример 6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 (рис. 34.20). Найти угол между плоскостями AD_1E и D_1FC.

Решение. Первый способ. Выберем прямоугольную систему координат так, что $A(0;\,0;\,0)$, $D(1;\,0;\,0)$, $B(0;\,1;\,0)$, $A_1(0;\,0;\,1)$. Тогда $E\left(0;\,\dfrac{1}{2};\,1\right)$, $D_1(1;\,0;\,1)$, $C(1;\,1;\,0)$, $F\left(\dfrac{1}{2};\,1;\,1\right)$, $\overline{AE} = \left(0;\,\dfrac{1}{2};\,1\right)$, $\overline{AD_1} = (1;\,0;\,1)$, $\overline{CD_1} = (0;\,-1;\,1)$, $\overline{CF} = \left(-\dfrac{1}{2};\,0;\,1\right)$.

Найдем вектор $\overline{a} = (x; y; z)$, ортогональный плоскости AD_1E. Этот вектор должен быть ортогональным векторам $\overline{AE}$ и $\overline{AD_1}$ и поэтому $\overline{a} \cdot \overline{AE} = 0$, $\overline{a} \cdot \overline{AD_1} = 0$, откуда

$$\frac{y}{2} + z = 0, \qquad x + z = 0.$$

Полагая, например, $z = -1$, отсюда найдем $x = 1$, $y = 2$, $\overline{a} = (1; 2; -1)$.

Найдем далее вектор $\overline{b} = (u; v; w)$, ортогональный векторам $\overline{CD_1}$ и $\overline{CF}$. Получим систему $-v + w = 0$, $-\frac{u}{2} + w = 0$, откуда, полагая $w = 1$, найдем $v = 1$, $u = 2$, $\overline{b} = (2; 1; 1)$.

Для нахождения искомого угла φ воспользуемся формулой $\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$. Так как $\overline{a} \cdot \overline{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 3$, $|\overline{a}| = \sqrt{6}$, $|\overline{b}| = \sqrt{6}$, то $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Второй способ. Построим линию пересечения плоскостей AD_1E и D_1FC. С этой целью продолжим AE до пересечения с прямой BB_1 в точке M (рис. 34.20).

Если a — ребро куба, то $B_1M = a$, так как $B_1E = \frac{1}{2}AB$.

Заметим, что точка F лежит на прямой MC, так как B_1F — средняя линия в треугольнике MBC. Точка M принадлежит плоскости AD_1E, так как этой плоскости принадлежат точки A и E. Плоскость D_1FC содержит точку M, так как точки F и C лежат в этой плоскости.

Следовательно, точки D_1 и M принадлежат как плоскости AD_1E, так и плоскости D_1FC. Поэтому прямая D_1M является линией пересечения этих плоскостей.

Докажем, что $AD_1 \perp D_1M$. Так как $D_1M = \sqrt{B_1M^2 + B_1D_1^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$, $AD_1 = a\sqrt{2}$, $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$, то $AM^2 = D_1M^2 + AD_1^2$, откуда следует, что $\angle AD_1M = \frac{\pi}{2}$. Аналогично доказывается, что $\angle CD_1M = \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что угол AD_1C является линейным углом искомого двугранного угла. Но $\angle AD_1C = \frac{\pi}{3}$, так как треугольник AD_1C является равносторонним.

Ответ. $\frac{\pi}{3}$.

Пример 7. Найти двугранный угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием, равен α.

Решение. Первый способ. Так как пирамида $SABC$ является правильной, то ее вершина S проектируется в центр O правильного треугольника ABC (рис. 34.21).

Пусть K — середина BC, тогда $AK \perp BC$ и $SK \perp BC$, так как SK — высота в $\triangle BSC$. Поэтому $\angle SKA = \alpha$.

Если M — основание перпендикуляра, опущенного в треугольнике SAK на сторону SA, то плоскость BMC перпендикулярна SA, так как $SA \perp KM$ и $SA \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах

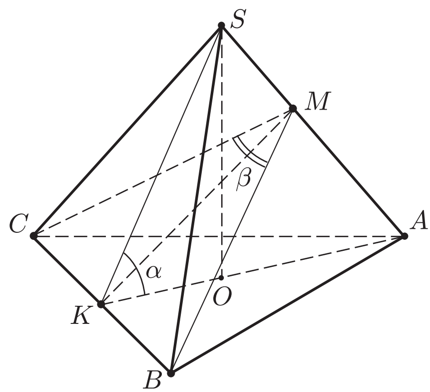

Рис. 34.21

(проекция AO наклонной SA перпендикулярна BC). Следовательно, $\angle CMB = \beta$ — линейный угол двугранного угла между боковыми гранями пирамиды.

Чтобы найти угол β, зная угол α, рассмотрим треугольники SOK и BMK. Пусть a — сторона основания ABC, тогда $OK = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$ и

$$SK = \frac{OK}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\sqrt{3}\cos\alpha}, \tag{1}$$

откуда следует, что

$$SB = SA = \sqrt{SK^2 + BK^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{3\cos^2\alpha} + 1} = \frac{a}{2\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}. \tag{2}$$

Из $\triangle BMK$ находим

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{BK}{BM} = \frac{a}{2BM}. \tag{3}$$

Пользуясь тем, что треугольники BSC и BSA имеют равные площади, получаем

$$BC \cdot SK = SA \cdot BM,$$

откуда

$$\frac{a}{BM} = \frac{SA}{SK}. \tag{4}$$

Из (1)–(4) следует, что

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{SA}{2SK} = \frac{\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}}{2}, \tag{5}$$

откуда находим

$$\beta = 2\arcsin\frac{\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}}{2}.$$

Возводя в квадрат обе части равенства (5), получаем

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{2} = \frac{1+3\cos^2\alpha}{4},$$

откуда следует, что

$$3\cos^2\alpha + 2\cos\beta - 1 = 0. \qquad (6)$$

Второй способ. Пусть s_1 и s_2 — площади треугольников ABC и BSC соответственно. Тогда

$$\frac{1}{3}s_1 = s_2\cos\alpha, \qquad (7)$$

так как проекцией грани BSC на плоскость ABC является треугольник BOC, площадь которого равна $\frac{1}{3}s_1$ (§ 32, 5, теорема 3).

Проектируя грани ASB, ASC и ABC на плоскость BSC, получаем

$$s_2 = s_1\cos\alpha + 2s_2\cos\beta. \qquad (8)$$

Из равенств (7) и (8) следует равенство (6).

Ответ. $2\arcsin\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}$.

Пример 8. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены сечения DA_1B_1C и BB_1D_1D (рис. 34.22). Найти отношение площадей этих сечений, если угол между секущими плоскостями равен α.

Решение. Пусть O и O_1 — центры нижнего и верхнего оснований пирамиды. Рассмотрим ортогональную проекцию трапеции DA_1B_1C на плоскость трапеции BB_1D_1D. Так как рассматриваемые сечения пересекаются по отрезку DB_1, точка A_1 проектируется в точку O_1, а точка C — в точку O, то проекцией трапеции DA_1B_1C на плоскость BB_1D_1D является трапеция OB_1O_1D, площадь которой равна $\frac{s}{2}$, где s — площадь трапеции BB_1D_1D. Если s_1 — площадь

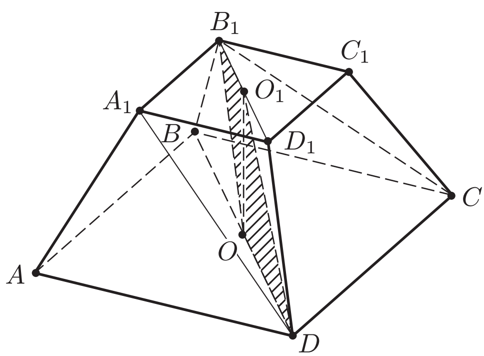

Рис. 34.22

трапеции DA_1B_1C, то $\frac{s}{2} = s_1 \cos\alpha$, откуда следует, что

$\frac{s}{s_1} = 2\cos\alpha$.

Ответ. $2\cos\alpha$.

§ 35. Вычисление расстояний в пространстве

1. Расстояние между двумя точками

Справочные сведения

Расстояние между точками A и B, т. е. длину отрезка AB, можно вычислить, если отрезок AB удается включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон и если известны две другие стороны этого треугольника и угол между ними.

В том случае, когда особенности рассматриваемой геометрической фигуры позволяют ввести прямоугольную систему координат, расстояние r между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ можно вычислить по формуле

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Примеры с решениями

Пример 1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. На диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E = \frac{1}{3}AD_1$, $D_1F = \frac{2}{3}D_1B_1$ (рис. 35.1). Найти длину отрезка EF.

Решение. Длину отрезка EF найдем по теореме косинусов из $\triangle D_1EF$, в котором $D_1F = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$, $D_1E = \frac{1}{3}a\sqrt{2}$, $\angle FD_1E = \frac{\pi}{3}$ ($\triangle AB_1D_1$ является равносторонним). Имеем

$$EF^2 = D_1E^2 + D_1F^2 - 2D_1E \cdot D_1F \cdot \cos\frac{\pi}{3} =$$
$$= \frac{2}{9}a^2 + \frac{8}{9}a^2 - 2\,\frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}a^2, \text{ откуда } EF = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Пример 2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1, точки E, F и K — середины ребер AA_1, BC и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$ (рис. 35.2).

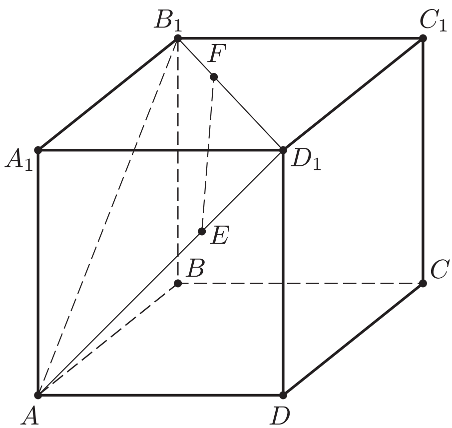

Рис. 35.1

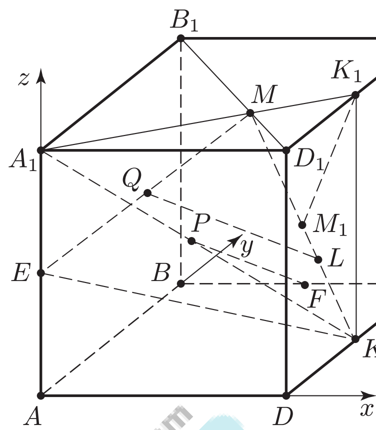

Рис. 35.2

Найти расстояние между точками:

а) E и K;

б) E и M;

в) M_1 и K_1, где M_1 — середина отрезка KM, K_1 — середина ребра C_1D_1;

г) F и P, где P — середина отрезка A_1K;

д) Q и L, где Q — середина отрезка EM, а L — точка отрезка MK такая, что $ML = 2LK$.

Решение. а) EK — гипотенуза прямоугольного треугольника EAK, в котором $AE=\frac{1}{2}$, $AK^2=AD^2+DK^2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, $EK^2=AE^2+AK^2=\frac{3}{2}$, $EK=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

б) $EM^2 = EA_1^2 + A_1M^2$. Для вычисления A_1M воспользуемся теоремой косинусов для треугольника A_1B_1M, в котором $A_1B_1 = 1$, $B_1M = \frac{2}{3}\,B_1D_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\angle A_1B_1M = \frac{\pi}{4}$. Получим

$$A_1M^2 = 1 + \frac{8}{9} - 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{9},$$

$$EM^2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{9} = \frac{29}{36}, \qquad EM = \frac{\sqrt{29}}{6}.$$

в) Так как KM — гипотенуза прямоугольного треугольника KMK_1, а M_1 — ее середина, то $K_1M_1 = \frac{1}{2}MK$, где $MK^2 = KK_1^2 + MK_1^2$, $KK_1 = 1$. Для вычисления MK_1 воспользуемся теоремой косинусов для треугольника D_1MK_1, в котором

$D_1K_1 = \frac{1}{2}$, $MD_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\angle MD_1K_1 = \frac{\pi}{4}$. Получим

$$MK_1^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} - 2\,\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{36},$$

$$MK^2 = 1 + \frac{5}{36} = \frac{41}{36}, \qquad MK = \frac{\sqrt{41}}{6}, \qquad K_1M_1 = \frac{\sqrt{41}}{12}.$$

г) Так как P — середина отрезка A_1K, то PF — медиана в треугольнике A_1FK. Для вычисления FP можно использовать формулу для медианы (§ 28), которая доказывается с помощью известного соотношения: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Имеем

$$4PF^2 + A_1K^2 = 2A_1F^2 + 2KF^2,$$

где

$$A_1F^2 = A_1K^2 = AA_1^2 + AK^2 = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}, \qquad KF = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда находим $PF = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

д) Чтобы вычислить QL, найдем сначала $\angle EMK = \alpha$, пользуясь теоремой косинусов.

Так как $EM = \frac{\sqrt{29}}{6}$, $MK = \frac{\sqrt{41}}{6}$, $EK = \frac{\sqrt{6}}{2}$, то

$$\cos\alpha = \frac{MK^2 + EM^2 - EK^2}{2ME \cdot MK} = \frac{8}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{41}}.$$

Применив теорему косинусов к треугольнику QML, в котором $QM = \frac{1}{2}\,EM = \frac{\sqrt{29}}{12}$, $ML = \frac{2}{3}\,MK = \frac{\sqrt{41}}{9}$, получим

$$QL^2 = QM^2 + ML^2 - 2QM \cdot ML\cos\alpha = \frac{29}{144} + \frac{41}{81} - \frac{4}{27} = \frac{725}{36^2},$$

откуда $QL = \frac{5\sqrt{29}}{36}$.

Замечание. В рассматриваемом примере удобно ввести прямоугольную систему координат, например, указанным на рис. 35.2 способом.

Тогда $E\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$, $K\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $F\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$, $M\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1\right)$. Координаты точки Q равны полусуммам соответствующих координат точек E и M, поэтому $Q\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{3}{4}\right)$. Наконец, используя для нахождения координат точки L формулы (2), указанные в § 32, п. 3, 2°, получим $L\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{1}{3}\right)$.

Применив формулу для расстояния между точками с заданными координатами, найдем, например, что

$$EM = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{6},$$

$$QL = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{725}{36^2}} = \frac{5\sqrt{29}}{36}.$$

Ответ. а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{29}}{6}$; в) $\frac{\sqrt{41}}{12}$; г) $\frac{\sqrt{13}}{4}$; д) $\frac{5\sqrt{29}}{36}$.

2. Расстояние от точки до прямой

Справочные сведения

Для нахождения расстояния h от точки M до прямой l можно выбрать на этой прямой две точки M_1 и M_2 (рис. 35.3) и в плоскости M_1MM_2 опустить из точки M на прямую M_1M_2 перпендикуляр MQ, длина которого равна h.

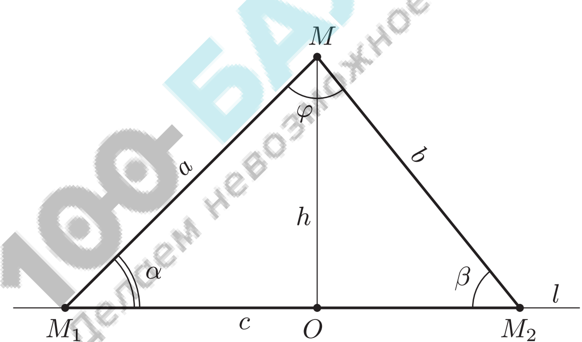

Рис. 35.3

Обозначим $MM_1 = a$, $MM_2 = b$, $M_1M_2 = c$, $\angle MM_1M_2 = \alpha$, $\angle MM_2M_1 = \beta$, $\angle M_1MM_2 = \varphi$ и пусть s — площадь треугольника M_1MM_2.

Расстояние h можно найти, если:

а) известны a и α или b и β, тогда $h = a\sin\alpha$ или $h = b\sin\beta$;

б) известны a, b и φ, тогда

$$s = \frac{1}{2}ab\sin\varphi, \qquad h = \frac{2s}{c} = \frac{ab\sin\varphi}{c},$$

где c можно выразить через a, b, и φ по теореме косинусов;

в) известны a, b и c, тогда $h = \frac{2s}{c}$, где s можно выразить через a, b и c по формуле Герона. Другой способ: обозначим $M_1O = x$, тогда $OM_2 = c - x$ и из прямоугольных треугольников M_1MO и M_2MO получим $h^2 = a^2 - x^2 = b^2 - (c-x)^2$, откуда сначала найдем x, а затем h.

Примеры с решениями

Пример 3. При условиях примера 2 найти расстояние:

а) от точки M_1 до прямой KK_1;

б) от точки E до прямой FK;

в) от точки M до прямой QL.

Решение. а) Точка M_1 — середина гипотенузы MK прямоугольного треугольника MK_1K, в котором $MK_1 = \frac{\sqrt{5}}{6}$. Поэтому искомое расстояние равно $\frac{MK_1}{2}$, т. е. равно $\frac{\sqrt{5}}{12}$.

б) Так как $EF = EK = \frac{\sqrt{6}}{2}$, а $FK = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то искомое расстояние

$$h = \sqrt{EK^2 - \left(\frac{FK}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{22}}{4}.$$

в) Пусть s — площадь треугольника QML, h — искомое расстояние, тогда $h = \frac{2s}{QL}$, где $QL = \frac{5\sqrt{29}}{36}$, $s = \frac{1}{2} QM \cdot ML \cdot \sin\alpha$.

Так как $QM = \frac{\sqrt{29}}{12}$, $ML = \frac{\sqrt{41}}{9}$, $\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{41}}$, то $\sin\alpha = \frac{15\sqrt{5}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{41}}$, $s = \frac{5\sqrt{5}}{72}$, $h = \sqrt{\frac{5}{29}}$.

Ответ. а) $\frac{\sqrt{5}}{12}$; б) $\frac{\sqrt{22}}{4}$; в) $\sqrt{\frac{5}{29}}$.

3. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями

Расстояние от точки M до плоскости α — длина перпендикуляра MA, опущенного из точки M на плоскость α (рис. 35.4).

Для того чтобы доказать, что прямая MA перпендикулярна к плоскости α, достаточно убедиться в том, что эта прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым l_1 и l_2, лежащим в плоскости α (рис. 35.4).

При нахождении расстояния h от точки M до плоскости α используются следующие утверждения.

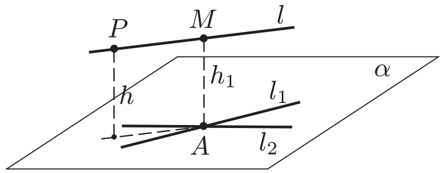

Рис. 35.4

1) Расстояние h равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P, лежащей на прямой l, которая проходит через точку M и параллельна плоскости P.

2) Если плоскость β проходит через точку M и параллельна плоскости α, то расстояние от любой точки плоскости β до плоскости α равно h.

3) Пусть прямая m, проходящая через точку M (рис. 35.5 и 35.6) пересекает плоскость α в точке O, а точка M_1 лежит на прямой m. Тогда если A и A_1 — ортогональные проекции точек M и M_1 на плоскость α, $OA = r$, $OA_1 = r_1$, $M_1A_1 = h_1$, то из подобия треугольников OMA и OM_1A_1 следует, что

$$h = h_1 \frac{r}{r_1}. \qquad (1)$$

Зная h_1, r и r_1, можно найти h по формуле (1).

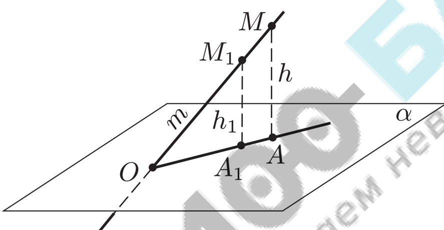

Рис. 35.5

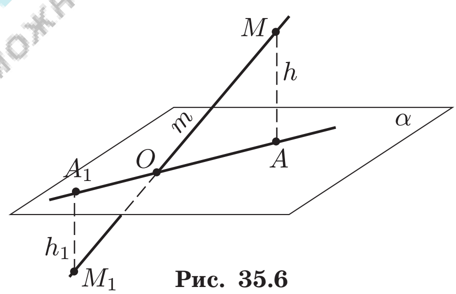

Рис. 35.6

4) Если точка M равноудалена от точек A_1 и A_2, принадлежащих плоскости α (рис. 35.7), то проекция A точки M на плоскость α лежит на перпендикуляре p к отрезку A_1A_2, проведенном в плоскости α через середину O отрезка A_1A_2.

5) Если на плоскости выбран треугольник $A_1A_2A_3$ (рис. 35.8) площади s такой, что объем пирамиды $MA_1A_2A_3$ равен v, то расстояние от точки M до плоскости α выражается формулой

$$h = \frac{3v}{s}.$$

6) Если в пространстве выбрана прямоугольная система координат и плоскость α задана в этой системе координат уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

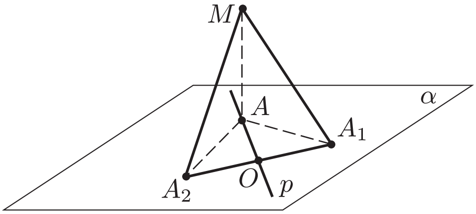

Рис. 35.7

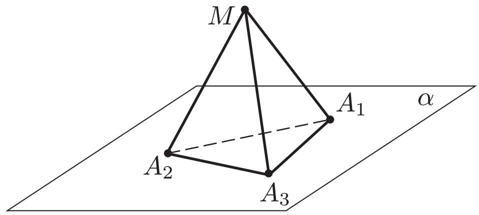

Рис. 35.8

то расстояние h от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α выражается формулой

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

доказанной в § 32 (5, теорема 5).

Примеры с решениями

Пример 4. Прямые l и m лежат в плоскости α, причем $l \perp m$. Точка M, не лежащая в плоскости α, удалена от каждой из этих прямых на расстояние a, а от точки пересечения прямых — на расстояние b. Найти расстояние от точки M до плоскости α.

Решение. Пусть B — точка пересечения прямых l и m, O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость α; A и C — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на прямые l и m (рис. 35.9).

Тогда $MA = MC = a$, $MB = b$, $AB = BC$ и $ABCO$ — квадрат, $AB = \sqrt{b^2 - a^2}$, $OB = \sqrt{2}AB$, $OM = \sqrt{MB^2 - OB^2} = \sqrt{b^2 - 2(b^2 - a^2)} = \sqrt{2a^2 - b^2}$.

Ответ. $\sqrt{2a^2 - b^2}$.

Пример 5. Высота SO правильной четырехугольной пирамиды равна h, а сторона основания $ABCD$ равна a. Найти расстояние от точки A до грани BSC (рис. 35.10).

Решение. Искомое расстояние x равно высоте, опущенной в пирамиде $ABSC$ из вершины A на основание BSC.

Объем v_1 этой пирамиды равен $\frac{v}{2}$, где v — объем пирамиды $SABCD$. Так как $v = \frac{1}{3}a^2h$, а площадь s_1 грани BSC равна

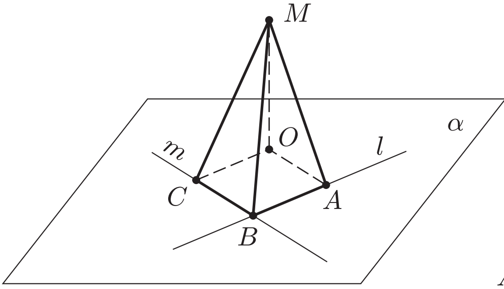

Рис. 35.9

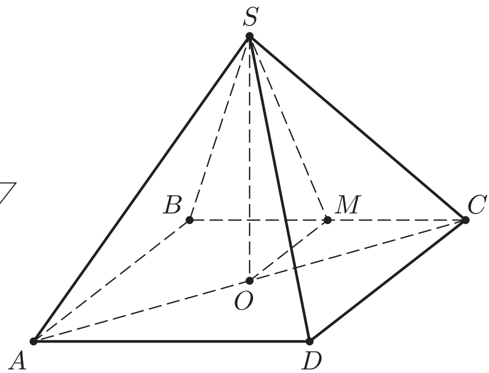

Рис. 35.10

$\frac{1}{2}\,a\cdot SM$, где M — середина BC, $SM=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$, то

$$v_1=\frac{1}{3}\,s_1x=\frac{ax}{6}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\,v=\frac{1}{6}\,a^2h,$$

откуда $x=\dfrac{ah}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}=\dfrac{2ah}{\sqrt{a^2+4h^2}}.$

Ответ. $\dfrac{2ah}{\sqrt{a^2+4h^2}}.$

Пример 6. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $ABCD$ равна a, боковое ребро AA_1 равно b. Найти расстояние до плоскости BDC_1 (рис. 35.11):

1) от точки C;
2) от точки B_1;
3) от точки A_1.

Решение. 1) Так как точки B и D, лежащие в плоскости BDC_1, равноудалены от точки C_1, то проекция E точки C на эту плоскость принадлежит отрезку OC_1 (O — центр основания $ABCD$). Искомое расстояние CE найдем, вычислив двумя способами площадь треугольника OCC_1. Из равенства $OC_1\cdot CE=C_1C\cdot CO$, где $C_1C=b$, $CO=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $OC_1=\sqrt{\dfrac{a^2}{2}+b^2}$, следует, что $CE=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$.

2) Так как прямая B_1D_1 параллельна плоскости BDC_1 ($B_1D_1\parallel BD$), то расстояние x от точки B_1 до плоскости BDC_1 равно расстоянию от центра O_1 основания $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости BDC_1.

Заметим, что плоскости AA_1C_1C и BDC_1 перпендикулярны (прямая BD, лежащая в плоскости BDC_1, перпендикулярна плоскости AA_1C_1C) и поэтому перпендикуляр O_1F, опущенный из точки O_1 на прямую OC_1, является перпендикуляром к плоскости BDC_1, а $O_1F = x$. Их равенства треугольников OO_1C_1 и OCC_1 следует, что $O_1F = CE = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$.

3) Так как $A_1C_1 = 2O_1C_1$, то расстояние y от точки A_1 до плоскости BDC_1 равно $2x$, т. е. $y = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$.

Ответ. 1) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$; 2) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$; 3) $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$.

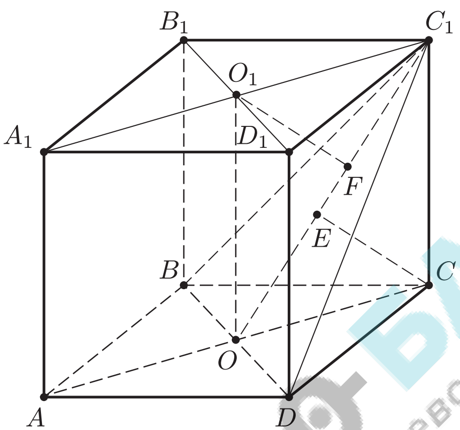

Рис. 35.11

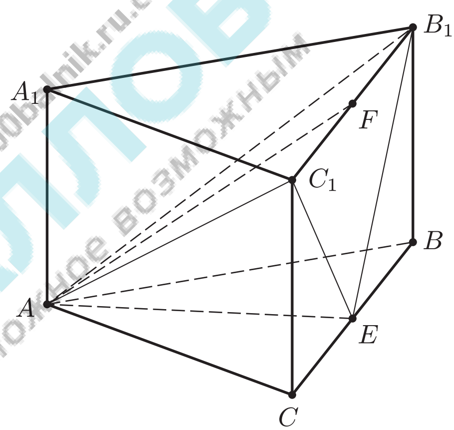

Рис. 35.12

Пример 7. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a, длина бокового ребра равна b. Найти расстояние от середины ребра BC до плоскости AB_1C_1 (рис. 35.12).

Решение. Пусть E — середина ребра BC, тогда искомое расстояние x равно высоте пирамиды AC_1B_1E, опущенной из вершины E на основание AC_1B_1. Пусть v_1 — объем пирамиды AC_1B_1E, тогда $v_1 = \dfrac{v}{2}$, где v — объем пирамиды ABB_1C_1C.

Но $v = \dfrac{1}{3}ab \cdot AE$, где AE — высота пирамиды ABB_1C_1C. Так как $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, то $v = \dfrac{1}{6}a^2b\sqrt{3}$, откуда

$$v_1 = \frac{1}{12}a^2b\sqrt{3}. \qquad (1)$$

С другой стороны, $v_1 = \frac{1}{3} s_{AB_1C_1} x$, где $s_{AB_1C_1} = \frac{1}{2} B_1C_1 \cdot AF$, F — середина C_1B_1 ($AB_1 = AC_1$).

Так как $AF = \sqrt{AC_1^2 - \frac{a^2}{4}} - \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}{2}$, то

$$v_1 = \frac{1}{12} ax\sqrt{3a^2 + 4b^2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что искомое расстояние $x = \frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}$.

Ответ. $\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}$.

Пример 8. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна a, боковое ребро равно b. Найти расстояние:

а) от точки C_1 до плоскости AB_1C;
б) от точки B до плоскости AB_1C;
в) от точки D_1 до плоскости AB_1C (рис. 35.13).

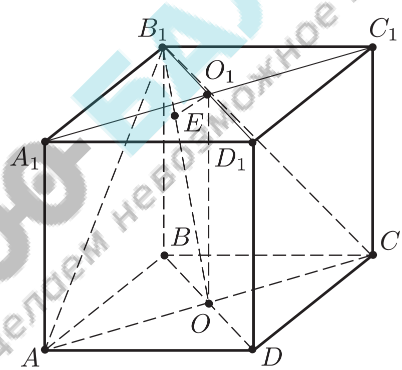

Рис. 35.13

Решение. а) Так как прямая A_1C_1 параллельна AC, то прямая A_1C_1 параллельна плоскости AB_1C. Поэтому искомое расстояние h равно расстоянию от произвольной точки прямой A_1C_1 до плоскости AB_1C. В частности, расстояние от центра O_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости AB_1C равно h.

Пусть E_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на B_1O, где O — центр квадрата $ABCD$. Прямая O_1E лежит в плоскости BB_1D_1D, а прямая AC перпендикулярна этой плоскости. Поэтому $O_1E \perp AC$ и OE — перпендикуляр к плоскости AB_1C, а $O_1E = h$.

Так как $B_1O_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $OO_1 = b$, то $OB_1 = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$. Выражая двумя способами площадь треугольника OB_1O_1, получим $h\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\,b$, откуда $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$.

б) *Первый способ.* Отрезок BO_1, пересекаясь с плоскостью AB_1C, делится в точке пересечения пополам (в этой точке пересекаются диагонали прямоугольника BB_1O_1O). Поэтому расстояние h_1 от точки B до плоскости AB_1C равно расстоянию h от точки O_1 до той же плоскости, т. е.

$$h_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}.$$

Второй способ. Так как объем v пирамиды $ABCB_1$ равен $\frac{a^2b}{6}$, а площадь s треугольника AB_1C равна $AO \cdot B_1O = \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + 2b^2}$, то искомое расстояние h_1 равно $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$.

в) Прямая D_1O_1 пересекает плоскость AB_1C в точке B_1, причем $B_1D_1 = 2B_1O_1$. Поэтому расстояние h_2 от точки D_1 до плоскости AB_1C в 2 раза больше, чем h, т. е.

$$h_2 = 2h = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}.$$

Ответ. а) $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$; б) $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$; в) $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$.

Пример 9. При условиях примера 2 найти расстояние:
а) от точки A_1 до плоскости KC_1K_1;
б) от точки A_1 до плоскости EFK;
в) между плоскостями A_1BD и B_1D_1C;
г) от точки D_1 до плоскости QLM.

Решение. а) Точка D_1 является основанием перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на плоскость грани DD_1C_1C (рис. 35.2), в которой лежит треугольник KC_1K_1. Поэтому искомое расстояние равно 1.

б) *Первый способ.* Так как точка A_1 равноудалена от точек F и K, то ортогональная проекция точки A_1 на плоскость EFK лежит на прямой OE, где O и E — середины отрезков FK и AA_1 соответственно (рис. 35.14). Поэтому искомое расстояние $h = \frac{2s}{OE}$, где $s = \frac{1}{2}A_1E \cdot A_1O \sin\alpha$, где $\alpha = \angle EA_1O$.

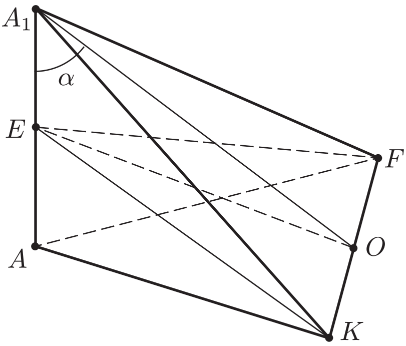

Рис. 35.14

Так как $AO = \frac{3}{4}AC = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $AA_1 = 1$ и $AA_1 \perp AO$, то $A_1O = \sqrt{AA_1^2 + AO^2} = \frac{\sqrt{34}}{4}$, $\sin\alpha = \frac{AO}{A_1O} = \frac{3}{\sqrt{17}}$, $OE = \sqrt{AE^2 + AO^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{8}} = \frac{\sqrt{22}}{4}$, и $h = \frac{3}{2\sqrt{11}}$.

Второй способ. Пусть v, v_1 и v_2 — объемы пирамид A_1AFK, $EAFK$ и A_1EFK соответственно, тогда $v_2 = v - v_1$, где $v_1 = \frac{v}{2}$, $v = \frac{1}{3}AA_1 \cdot s_1$, где s_1 — площадь треугольника AFK, равная $\frac{3}{8}$ площади квадрата $ABCD$, т. е. $s_1 = \frac{3}{8}$.

Итак, $v_2 = \frac{v}{2} = \frac{s_1}{6} = \frac{1}{16}$. С другой стороны, $v_2 = \frac{1}{3}s_2h$, где $s_2 = OE \cdot OK = \frac{\sqrt{22}}{4}\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{11}}{8}$.

Из равенства $\frac{1}{16} = \frac{\sqrt{11}}{24}h$ следует, что $h = \frac{3}{2\sqrt{11}}$.

в) Воспользуемся тем, что диагональ AC_1 перпендикулярна плоскостям A_1BD и B_1D_1C (§ 34, пример 3).

Пусть h_1 — расстояние от точки A до плоскости A_1BD, тогда $h_1 = \frac{3v_1}{s_1}$, где v_1 — объем пирамиды AA_1BD, s_1 — площадь треугольника A_1BD. Так как $v_1 = \frac{1}{6}$, $s_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $h_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Но расстояние от точки C_1 до плоскости B_1D_1C также равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$, а диагональ AC_1 равна $\sqrt{3}$. Следовательно, расстояние между плоскостями A_1BD и B_1D_1C равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

г) Если ввести систему координат способом, указанным в примере 2, то

$$\overline{QM} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}(4; 2; 3),$$

$$\overline{QL} = \left(\frac{5}{9}; \frac{5}{18}; -\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{36}(4; 2; -3).$$

Пусть $\overline{n} = (A; B; C)$ — вектор, перпендикулярный к плоскости QLM. Тогда этот вектор перпендикулярен векторам $\overline{QM}$ и $\overline{QL}$. Поэтому $\overline{n} \cdot \overline{a_1} = 0$, $\overline{n} \cdot \overline{a_2} = 0$, где $\overline{a_1} = (4; 2; 3)$, $\overline{a_2} = (4; 2; -3)$.

Отсюда получаем

$$\begin{cases} 4A + 2B + 3C = 0, \\ 4A + 2B - 3C = 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что $C = 0$. Взяв $A = 1$, получим $B = -2$ и поэтому $\overline{n} = (1; -2; 0)$.

Уравнение плоскости QLM можно записать в виде $\overline{n} \cdot \overline{MP} = 0$, где $M\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1\right)$, $P(x, y, z)$, т. е. в виде $x - \frac{2}{3} + (-2)\left(y - \frac{1}{3}\right) = 0$ или $x - 2y = 0$.

Этот же результат можно получить, подставляя координаты точек M, Q и L в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ (§ 32, 5, теорема 5, формула (8)).

По формуле (8), в которой $A = 1$, $B = -2$, $C = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$, находим $h = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ответ. а) 1; б) $\frac{3}{2\sqrt{11}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

4. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Справочные сведения

Расстояние ρ между скрещивающимися прямыми m и l — длина отрезка PQ с концами на этих прямых (рис. 35.15), перпендикулярного каждой из них.

Для вычисления ρ нет необходимости строить общий перпендикуляр PQ к скрещивающимся прямым m и l.

Укажем некоторые способы вычисления расстояния ρ между скрещивающимися прямыми m и l, не требующие построения их общего перпендикуляра PQ.

1) Проведя через прямую m плоскость α, параллельную прямой l, а через прямую l — плоскость β, параллельную прямой m, получим параллельные плоскости, расстояние между которыми равно ρ.

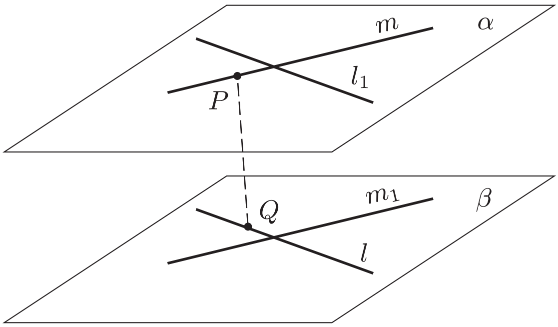

Рис. 35.15

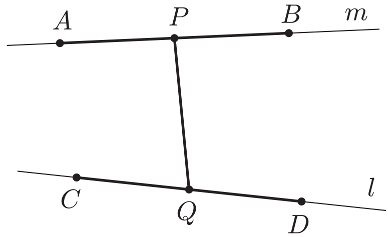

Рис. 35.16

2) Если на прямой m можно выбрать точки A и B, на прямой l — точки C и D такие, что объем пирамиды $ABCD$ равен v, $AB = a$, $CD = b$, φ — угол между прямыми m и l, то согласно теореме 4, § 32, п. 5,

$$\rho = \frac{6v}{ab\sin\varphi}\,.$$

3) Если выбрана прямоугольная система координат, на прямой m взяты точки A и B, а на прямой l — точки C и D, то для нахождения общего перпендикуляра PQ (рис. 35.16) к скрещивающимся прямым m и l можно воспользоваться формулами (2) из § 32, 3 и условиями

$$\overline{PQ}\cdot\overline{AB} = 0,$$
$$\overline{PQ}\cdot\overline{CD} = 0.$$

Примеры с решениями

Пример 10. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна a, высота SO равна h. Найти расстояние между BD и SA (рис. 35.17).

Решение. Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на ребро SA. Так как прямая BD перпендикулярна плоскости AOS, то $BD \perp OE$.

Таким образом, OE — общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AS и BD.

Найдем его длину, вычислив двумя способами площадь треугольника AOS.

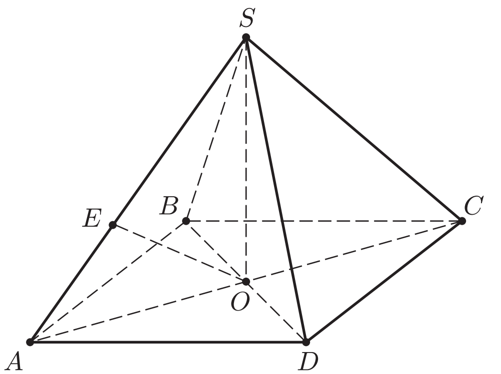

Рис. 35.17

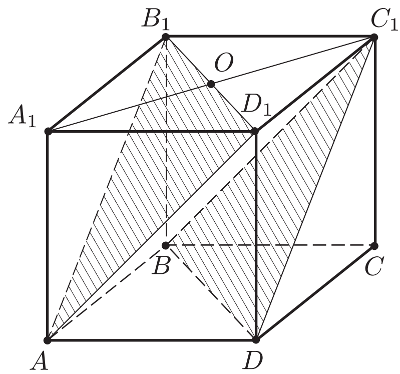

Рис. 35.18

Из равенства $AO \cdot SO = AS \cdot OE$, где $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $SO = h$, $AS = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$, следует, что $OE = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 2h^2}}$.

Ответ. $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + 2h^2}}$.

Пример 11. Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат со стороной a, боковое ребро равно b. Найти расстояние между прямыми AB_1 и BD (рис. 35.18).

Решение. Искомое расстояние x равно расстоянию между параллельными плоскостями AB_1D_1 и BDC_1 ($AB_1 \| DC_1$, $B_1D_1 \| BD$), и, следовательно, равно расстоянию от точки C_1 до плоскости AB_1D_1, так как точка O, принадлежащая этой плоскости, равноудалена от точек A_1 и C_1.

Поэтому искомое расстояние x равно высоте треугольной пирамиды $A_1AB_1D_1$, опущенной из вершины A_1 этой пирамиды на основание AB_1D_1.

Пусть v — объем пирамиды $A_1AB_1D_1$, s — площадь основания AB_1D_1, тогда $v = \frac{1}{6}a^2b$, с другой стороны, $v = \frac{1}{3}x \cdot s$, где $s = \frac{1}{2}AO \cdot B_1D_1$. Так как $AO = \sqrt{AA_1^2 + A_1O^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$, $B_1D_1 = a\sqrt{2}$, то $s = \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + 2b^2}$, $x = \frac{3v}{s} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$.

Ответ. $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$.

Пример 12. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза AB которого равна $2\sqrt{2}$, является основанием треугольной пирамиды $ABCD$ (рис. 35.19).

Боковое ребро DC перпендикулярно основанию, а его длина равна 1.

Точки E и F — середины ребер AC и AB соответственно. Найти угол и расстояние между прямыми DE и CF.

Решение. Проведем через точку E прямую, параллельную CF и пересекающую AB в точке K. Искомый угол α либо равен углу DEK, либо дополняет этот угол до π (принято считать, что угол между прямыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$).

По теореме косинусов

$$DK^2 = DE^2 + EK^2 - 2DE \cdot EK \cdot \cos\varphi,$$

где $\varphi = \angle DEK$, $DE^2 = DC^2 + CE^2 = 1 + 1 = 2$, $EK = \frac{CF}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $DK^2 = CK^2 + DC^2 = CF^2 + FK^2 + DC^2 = 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{2}$. Отсюда находим $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, а искомый угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Если x — расстояние между прямыми DE и CF, v — объем пирамиды $CEFD$, то $v = \frac{1}{6} DE \cdot CF \cdot x \cdot \sin\alpha$, где $v = \frac{1}{6}$, так как площадь треугольника CEF равна $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC, а $CD = 1$. Так как $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $DE = CF = \sqrt{2}$, то $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

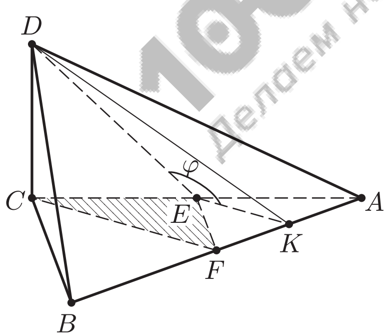

Рис. 35.19

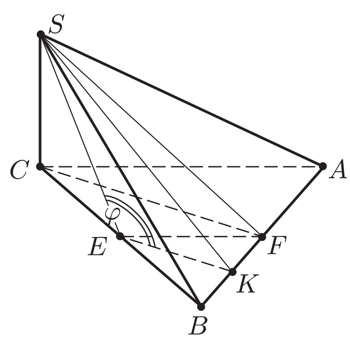

Рис. 35.20

Пример 13. Основание пирамиды $SABC$ — равносторонний треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$, а боковое ребро SC, длина которого равна 2, перпендикулярно основанию (рис. 35.20). Прямая l_1 проведена через точку S и середину E ребра BC, а прямая l_2 — через точку C и середину F ребра AB. Найти угол между прямыми l_1 и l_2 и расстояние между SE и CF.

Решение. 1) Пусть K — точка пересечения с ребром AB прямой, проведенной через точку E параллельно CF, и пусть φ — угол между сторонами SE и EK, тогда $\angle SEK=\varphi$. Для нахождения угла φ воспользуемся теоремой косинусов для треугольника SEK:

$$SK^2=SE^2+EK^2-2SE\cdot EK\cdot\cos\varphi,$$

где $SF=\sqrt{SC^2+CF^2}=\sqrt{4+(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{7}$, $SK=\sqrt{SF^2+KF^2}=$ $=\sqrt{28+\left(\frac{AB}{4}\right)^2}=\sqrt{30}$, $EK=\frac{CF}{2}=\sqrt{6}$, $SE=\sqrt{SC^2+CE^2}=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$.

Отсюда находим $\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ и поэтому искомый угол между CE и CF равен $\frac{\pi}{4}$.

2) Пусть x — расстояние между SE и CF, v — объем пирамиды $SABC$, v_1 — объем пирамиды $SCEF$. Тогда $v_1=\frac{1}{4}v=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\frac{(4\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, так как площадь треугольника CEF равна $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC. С другой стороны, $v_1=\frac{1}{6}SE\cdot CF\sin\varphi\cdot x$, где $SE=2\sqrt{3}$, $CF=2\sqrt{6}$, $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, $\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}x$, откуда $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Пример 14. Найти расстояние между диагональю BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и диагональю AB_1 грани, если ребро куба равно a (рис. 35.21).

Решение. Первый способ. Пусть r — искомое расстояние. Воспользуемся доказанной в § 32, 5 (теорема 4) формулой

$$r=\frac{6v}{AB_1\cdot BD_1\sin\varphi},$$

где v — объем пирамиды ABD_1B_1, $AB_1=a\sqrt{2}$, $BD_1=a\sqrt{3}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (пример 5). Так как площадь основания ABB_1 пирамиды ABD_1B_1 равна $\frac{a^2}{2}$, а высота равна a, то $v=\frac{a^3}{6}$. Следовательно, $r=\frac{a^3}{a^2\sqrt{6}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Второй способ. Каждая из точек B и D_1 равноудалена от точек A и B_1. Поэтому точки B и D_1 лежат в плоскости α, перпендикулярной отрезку AB_1 и проходящей через его середину E.

Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного в треугольнике BED_1 из вершины E на сторону BD_1. Так как $B\in\alpha$, $D_1\in\alpha$, то

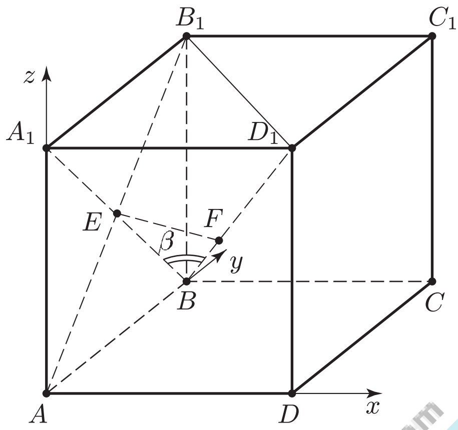

Рис. 35.21

$F \in \alpha$. Кроме того, $E \in \alpha$. Поэтому $EF \in \alpha$ и $EF \perp AB_1$ (AB_1 — перпендикуляр к плоскости α).

Итак, $EF \perp BD_1$ и $EF \perp AB_1$, т. е. EF — общий перпендикуляр к прямым AB_1 и BD_1. Найдем длину отрезка EF. Пусть $\beta = \angle D_1BA_1$, тогда $EF = BE\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\beta$, где $\sin\beta = \frac{A_1D_1}{BD_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $EF = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Третий способ. Введем систему координат указанным на рис. 35.21 способом. Тогда $A(0; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $B_1(0; a; a)$, $D_1(a; 0; a)$.

Найдем точки E и F такие, что $E \in AB_1$, $F \in BD_1$, $EF \perp AB_1$ и $EF \perp BD_1$. Обозначим $\lambda = \frac{AE}{B_1E}$, $\mu = \frac{BF}{D_1F}$ и воспользуемся формулами для координат точки, которая делит данный отрезок в заданном отношении (§ 32, 3, формулы (2)). Получим $E\left(0; \frac{\lambda a}{1+\lambda}; \frac{\lambda a}{1+\lambda}\right)$, $F\left(\frac{\mu a}{1+\mu}; \frac{a}{1+\mu}; \frac{\mu a}{1+\mu}\right)$. Пусть $\frac{\lambda}{1+\lambda} = p$, $\frac{\mu}{1+\mu} = q$, тогда $E(0; pa; pa)$, $F(qa; (1-q)a; qa)$. Так как вектор $\overline{EF} = (qa; (1-q-p)a; (q-p)a)$ должен быть ортогонален векторам $\overline{AB_1} = (0; a; a)$ и $\overline{BD_1} = (a; -a; a)$, то $\overline{AB_1} \cdot \overline{EF} = (1-p-q+q-p) \cdot a^2 = 0$, $\overline{BD_1} \cdot \overline{EF} = (q-1+q+p+q-p) \cdot a^2 = 0$, откуда $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{3}$, $\overline{EF} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{6}; -\frac{a}{6}\right)$,

$$EF = |\overline{EF}| = a\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Ответ. $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Глава 11
Многогранники

§ 36. Треугольная пирамида

1. Объем пирамиды

Справочные сведения

Объем v пирамиды выражается формулой

$$v = \frac{1}{3} Sh,$$

где S — площадь основания пирамиды, h — ее высота.

При решении задач на вычисление объемов пирамид иногда оказывается полезным следующее утверждение: две пирамиды имеют равные объемы, если у них равновеликие основания и равные высоты.

В отдельных случаях для вычисления объема бывает целесообразно дополнить пирамиду до параллелепипеда.

Примеры с решениями

Пример 1. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC, в котором гипотенуза $AB = c$, $\angle ABC = \alpha$. Боковые ребра образуют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти объем пирамиды.

Решение. Так как боковые ребра SA, SB и SC (рис. 36.1) образуют с плоскостью основания равные углы, то равны проекции этих ребер на плоскость ABC.

Поэтому вершина S проектируется на плоскость ABC в точку O, равноудаленную от вершин прямоугольного треугольника ABC, т. е. O — середина гипотенузы AB, SO — высота пирамиды. Из $\triangle COS$ находим $SO = \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \beta$, а из $\triangle ABC$ получаем $AC = c \sin \alpha$, $BC = c \cos \alpha$. Следовательно, объем пирамиды $v = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot SO = \frac{c^3}{12} \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \beta$.

Ответ. $\frac{c^3}{24} \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta$.

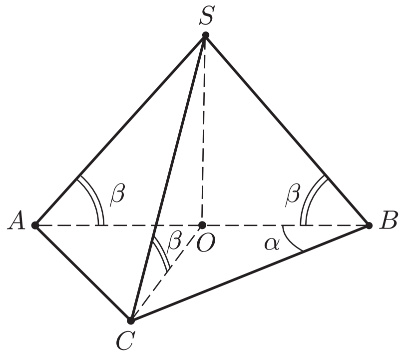

Рис. 36.1

Пример 2. Найти объем треугольной пирамиды $SABC$, если длины двух непересекающихся ее ребер AB и SC равны a, а все остальные ребра имеют длину b.

Решение. Пусть E и F — середины ребер AB и SC (рис. 36.2).

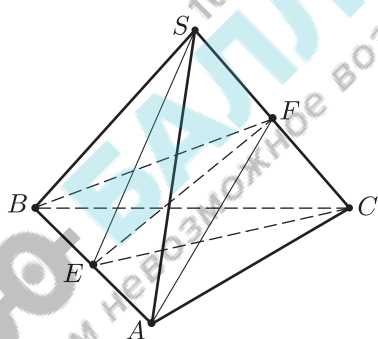

Рис. 36.2

Так как $BS = BC = b$, то BF — высота в $\triangle SBC$. Аналогично установим, что AF — высота в $\triangle CAS$. Итак, $SC \perp BF$ и $SC \perp AF$, откуда следует, что прямая SC перпендикулярна плоскости ABF.

Таким образом, SF и CF являются высотами в треугольных пирамидах, имеющих общее основание ABF, а объем v пирамиды $SABC$ равен

$$\frac{1}{3}\sigma \cdot (SF + FC) = \frac{1}{3}\sigma \cdot a,$$

где σ — площадь треугольника ABF. Так как $AF = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$,

$$EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}, \text{ то } \sigma = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}},\ v = \frac{a^2}{6}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

Ответ. $\frac{a^2}{6}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.

Пример 3. Длины всех ребер треугольной пирамиды $ABCD$ равны. Точка M расположена внутри пирамиды так, что $MA = MB = MC = \frac{3}{5}$, $MD = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$ (рис. 36.3). Найти объем пирамиды.

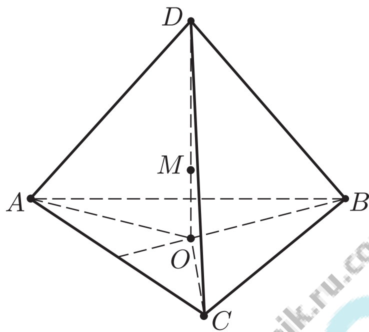

Рис. 36.3

Решение. Так как длины всех ребер пирамиды равны, то эта пирамида является правильной. По условию точка M равноудалена от точек A, B и C и поэтому она лежит на перпендикуляре к плоскости ABC, проведенном через центр O треугольника ABC, т. е. на высоте OD пирамиды (M лежит внутри пирамиды).

Пусть a — сторона пирамиды, H — высота, v — объем, тогда $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $H = OD = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $v = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. По теореме Пифагора $AM^2 = MO^2 + AO^2$, где $AM = \frac{3}{5}$, $MO = H - MD = a\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Следовательно, $\frac{9}{25} = \left(a - \frac{4}{5}\right)^2 \frac{2}{3} + \frac{a^2}{3}$ или $15a^2 - 16a + 1 = 0$, откуда $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{15}$. Значение $a = \frac{1}{15}$ следует отбросить, так как в этом случае $H < MD$. Если $a = 1$, то $MD < H$ и $v = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Пример 4. В основании тетраэдра $ABCD$ лежит треугольник ABC, в котором $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Найти объем тетраэдра, если $AB = CD$, $BC = AD$, $AC = BD$.

Решение. Достроим тетраэдр $ABCD$ до параллелепипеда. С этой целью через каждое ребро тетраэдра проведем плоскость, параллельную противоположному ребру. Полученные три пары параллельных плоскостей образуют параллелепипед $AB_1CD_1A_1BC_1D$ (рис. 36.4), в котором ребра исходного тетраэдра являются диагоналями граней. Заметим, что при построении чертежа целесообразно сначала изобразить параллелепипед, в котором диагонали каждой пары противоположных граней равны. Поэтому все его грани являются прямоугольниками, а $AB_1CD_1A_1BC_1D$ — прямоугольный параллелепипед.

Объем v_1 тетраэдра $ABCD$ равен $\frac{1}{3}v$, где v — объем параллелепипеда, так как тетраэдр можно получить, если отрезать от параллелепипеда четыре треугольных пирамиды, каждая из которых имеет объем $\frac{1}{6}v$.

Пусть x, y, z — ребра пирамиды. Тогда

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad y^2 + z^2 = b^2, \qquad x^2 + z^2 = c^2.$$

Решив эту систему, найдем x, y, z, а затем искомый объем $v_1 = \frac{1}{3}v$, где $v = xyz$.

Ответ. $\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}$.

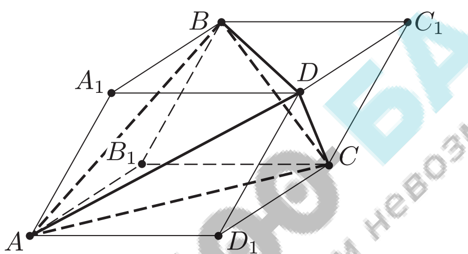

Рис. 36.4

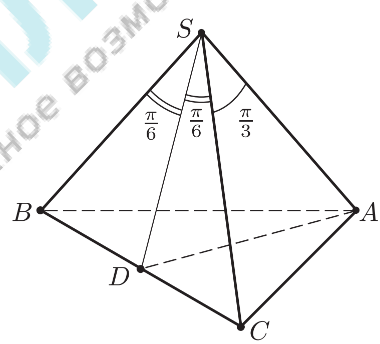

Рис. 36.5

Пример 5. Каждый из плоских углов при вершине S треугольной пирамиды $SABC$ равен $\frac{\pi}{3}$, $SB = SC = 1$, грань SBC перпендикулярна плоскости основания ABC (рис. 36.5). Найти объем пирамиды.

Решение. Пусть D — середина BC, тогда $SD \perp BC$, так как $SB = SC$. По условию плоскости SBC и ABC перпендикулярны и поэтому SD — перпендикуляр к плоскости ABC (высота пирамиды $SABC$), откуда следует, что $SD \perp AD$.

По теореме Пифагора

$$SD^2 + AD^2 = SA^2, \qquad AD^2 + DC^2 = AC^2, \tag{1}$$

а по тереме косинусов

$$AC^2 = SC^2 + SA^2 - 2SA \cdot SC \cdot \cos\frac{\pi}{3}. \tag{2}$$

Так как $SC = 1$, $DC = SC \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $SD = SC \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то из равенств (1) следует, что

$$AC^2 = AD^2 + \frac{1}{4} = SA^2 - SD^2 + \frac{1}{4} = SA^2 - \frac{1}{2}, \tag{3}$$

а равенство (2) можно записать в виде

$$AC^2 = 1 + SA^2 - SA. \tag{4}$$

Из (3) и (4) находим $SA = \frac{3}{2}$, $AD = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Искомый объем $v = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AD \cdot 2DC\right) \cdot SD = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Пример 6. Из середины M высоты SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ опущены перпендикуляр MF на боковую грань SAB, равный b, и перпендикуляр ME на боковое ребро SA, равный $b\sqrt{3}$ (рис. 36.6). Найти объем пирамиды.

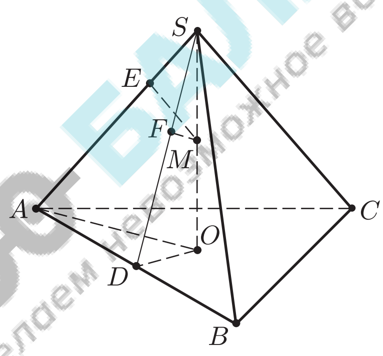

Рис. 36.6

Решение. Пусть D — середина AB, $AB = a$, $SM = OM = x$. Тогда $F \in SD$, $MF \perp SD$ и из подобия треугольников SFM и SDO следует, что $\frac{MF}{OD} = \frac{SF}{SO}$, где $MF = b$, $OD = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $SF = \sqrt{x^2 - b^2}$, $SO = 2x$.

Отсюда получаем

$$\frac{2b\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{x^2 - b^2}}{2x}. \tag{1}$$

Аналогично, из подобия треугольников SEM и SAO находим

$$\frac{b\sqrt{3}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{x^2 - 3b^2}}{2x}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\sqrt{\frac{x^2-b^2}{x^2-3b^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

откуда $x=3b$, $a=6b\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ответ. $27\sqrt{3}b^3$.

Пример 7. В треугольной пирамиде $ABCD$ точки A_1, B_1, C_1 (рис. 36.7) выбраны на ребрах BC, CA и AB так, что

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}=2. \qquad (1)$$

На отрезках DA_1, DB_1, DC_1 взяты точки A_2, B_2, C_2 так, что

$$\frac{DA_2}{A_2A_1}=\frac{DB_2}{B_2B_1}=\frac{DC_2}{C_2C_1}=2. \qquad (2)$$

Точка M принадлежит основанию ABC пирамиды. Найти отношение объема пирамиды $MA_2B_2C_2$ к объему пирамиды $ABCD$.

Решение. Пусть s, s_1, s_2, s_3, s_0 — площади треугольников ABC, AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 и $A_1B_1C_1$ соответственно. Тогда

$$s_1=s_2=s_3=\frac{2}{9}s$$

в силу условия (1) и поэтому

$$s_0=s-3\cdot\frac{2}{9}s=\frac{1}{3}s. \qquad (3)$$

Если v, v_1, v_2, v_0 — объемы пирамид $DABC$, $A_1B_1C_1D$, $A_2B_2C_2D$, $MA_2B_2C_2$, а h, h_1, h_2, h_0 — высоты этих пирамид, опущенные на основания ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, то из условия

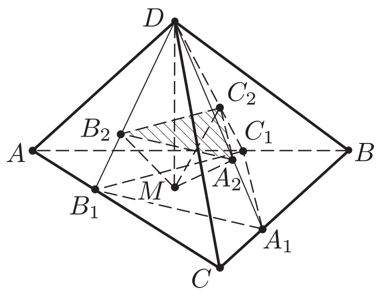

Рис. 36.7

(2) и равенства (3) следует, что $h_1 = h$, $v_1 = \frac{1}{3}v$, $h_2 = \frac{2}{3}h$, $v_2 = \frac{8}{27}v_1 = \frac{8}{81}v$, $h_0 = \frac{1}{2}h_2$, $v_0 = \frac{1}{2}v_2 = \frac{4}{81}v$.

Ответ. $\frac{4}{81}$.

Пример 8. На ребре AD треугольной пирамиды $ABCD$ (рис. 36.8) взята точка E так, что $\frac{AE}{ED} = \frac{3}{7}$. Плоскость α проведена через точки E и C параллельно медиане AK треугольника ABC. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

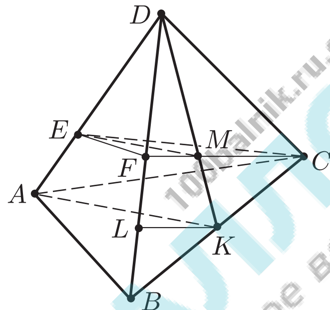

Рис. 36.8

Решение. Пусть F — точка пересечения плоскости α с ребром BD, M — точка пересечения отрезков DK и CF. Тогда $EM \| AK$ и $\frac{KM}{MD} = \frac{AE}{ED} = \frac{3}{7}$. Если v — объем пирамиды $ABCD$, v_1 — объем пирамиды $DEFC$, то $\frac{v_1}{v} = \frac{DE}{AD} \cdot \frac{DF}{DB} = \frac{7}{10} \cdot \frac{DF}{DB}$.

Чтобы найти $\frac{DF}{DB}$, проведем в треугольнике BCF через точку K прямую, параллельную CF и пересекающую BF в точке L. Тогда $\frac{DF}{FL} = \frac{DM}{MK} = \frac{DE}{EA} = \frac{7}{3}$. Но $FL = \frac{1}{2}FB$ и поэтому $\frac{DF}{FB} = \frac{7}{6}$, откуда следует, что $\frac{DF}{DB} = \frac{7}{13}$ и поэтому $\frac{v_1}{v} = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{13} = \frac{49}{130}$, а искомое отношение равно $\frac{49}{81}$.

Ответ. $\frac{49}{81}$.

Пример 9. В правильном тетраэдре $ABCD$ через прямую BM, где M — середина ребра DC (рис. 36.9) проведена плоскость α, перпендикулярная грани DAB. В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

Решение. По условию $M \in \alpha$, а плоскость α перпендикулярна плоскости ABD. Поэтому перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABD, принадлежит α, а основание этого перпендикуляра (точка K) принадлежит высоте DE грани ABD, так как ортогональная проекция на плоскость ABD каждой точки ребра CD принадлежит DE. В частности, точка C проектируется в центр O грани ABD. Поэтому $MK \| CO$, а прямая BK, пересекающая ребро AD в точке F, является линией пересечения плоскостей ABD и α.

Пусть a — длина ребра тетраэдра, тогда $DK = \frac{OD}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Чтобы найти DF, проведем через точку D прямую, параллельную AB и пересекающую прямую BF в точке P (рис. 36.9). Так как $\triangle BEK \sim \triangle DKP$, то $\frac{PD}{BE} = \frac{DK}{KE} = \frac{1}{2}$, откуда $PD = \frac{a}{4}$.

Из подобия треугольников PDF и ABF следует, что $\frac{DF}{AF} = \frac{PD}{AB} = \frac{1}{4}$, откуда $DF = \frac{1}{5}AD = \frac{a}{5}$.

Пусть s и s_1 — площади треугольников ABD и BFD, а v и v_1 — объемы пирамид $DABC$ и $BFDM$. Тогда $v_1 = \frac{1}{3}s_1 \cdot KM$, $v = \frac{1}{3}s \cdot OC$, где $\frac{s_1}{s} = \frac{DF}{AD} = \frac{1}{5}$, $\frac{KM}{OC} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{v_1}{v} = \frac{1}{10}$, а искомое отношение объемов равно $1:9$.

Ответ. $1:9$.

Замечание. Отношение $\frac{v_1}{v}$ можно найти, используя теорему 7 (§ 32, 5).

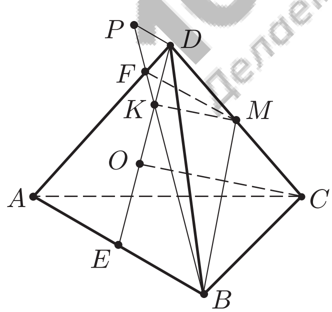

Рис. 36.9

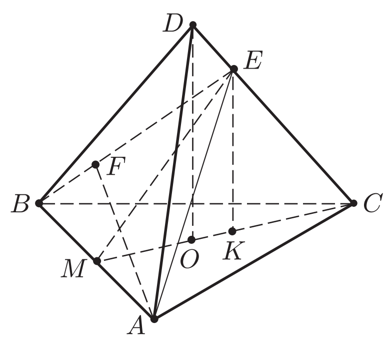

Рис. 36.10

Пример 10. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ (D — вершина) боковое ребро равно 4. На ребре взята точка E такая, что $DE = 1$ (рис. 36.10), расстояние от точки A до прямой BE равно 2. Найти объем пирамиды.

Решение. Пусть O — центр треугольника ABC, F — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BE, K — проекция точки E на плоскость ABC ($K \in OC$), M — середина AB, $DO = H$, $AB = a$, $ME = x$, v — объем пирамиды.

Тогда $v = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}H$, $CK = \frac{3}{4}OC = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $MK = MC - CK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $AF = 2$, $EK = \frac{3}{4}H$,

$$H^2 + \frac{a^2}{3} = 16. \tag{1}$$

Пусть s — площадь треугольника BAE, тогда имеет место $s = \frac{1}{2}BE \cdot AF = \frac{1}{2}AB \cdot ME$, где $BE = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$. Отсюда получаем

$$2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = ax. \tag{2}$$

Кроме того, имеем $ME = \sqrt{MK^2 + EK^2}$, т. е.

$$x = \frac{3}{4}\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}. \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что $x = 3$ и тогда из (2) найдем, что $a = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Наконец, из равенства (1) получим $H = \sqrt{\frac{29}{2}}$.

Следовательно, $v = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3} \cdot H = \frac{3}{16}\sqrt{174}$.

Ответ. $\frac{3\sqrt{174}}{16}$.

2. Пирамида и сфера

Справочные сведения

В § 32, 5 доказано (теоремы 8 и 9), что:

а) в любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, радиус r которой определяется формулой

$$r = \frac{3v}{s_{\text{п}}},$$

где v — объем пирамиды, $s_{\text{п}}$ — ее полная поверхность;

б) около любой треугольной пирамиды можно описать сферу.

Примеры с решениями

Пример 11. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является треугольник ABC, в котором $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $AC = BC = a$. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и $SC = 2a$ (рис. 36.11).

Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

Решение. Пусть r — искомый радиус, тогда $r = \frac{3v}{s_п}$, где v — объем пирамиды, $s_п$ — ее полная поверхность. Если E — середина AB, то $SE \perp AB$, поскольку SC — перпендикуляр к плоскости ABC и $AC = BC$.

Так как $SC = 2a$, $AC = BC = a$, то $CE = AE = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $SE = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$, $s_п = \frac{1}{2}a^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a + \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3a}{\sqrt{2}} = 4a^2$, $v = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot 2a = \frac{1}{3}a^3$, $r = \frac{a}{4}$.

Ответ. $\frac{a}{4}$.

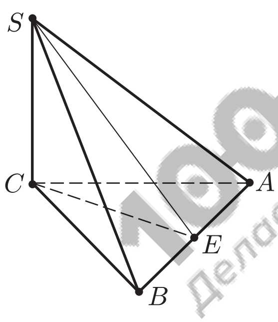

Рис. 36.11

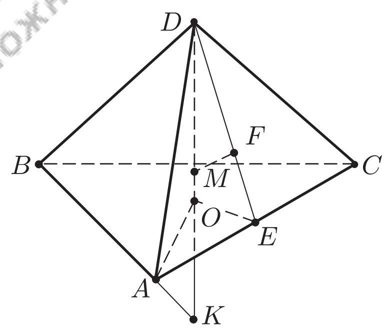

Рис. 36.12

Пример 12. Найти радиус описанной сферы и радиус вписанной сферы для правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

Решение. Пусть O — центр основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ (рис. 36.12), E — середина AC, M — центр вписанной сферы ($M \in OD$), F — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на DE, K — точка пересечения описанной сферы (ее центр лежит на прямой DO) с прямой DO, r и R — радиуса вписанной и описанной сферы. Тогда $OM = MF = r$, $DK = 2R$.

Так как $\angle DAK = \frac{\pi}{2}$ (плоскость DAO пересекает сферу по большому кругу), то по свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу

$$AO^2 = OD \cdot OK, \quad \text{где} \quad AO = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad OD = h, \quad OK = 2R - h.$$

Отсюда находим $R = \dfrac{3h^2 + a^2}{6h}$.

Радиус вписанной сферы найдем, пользуясь тем, что $\triangle DMF$ подобен $\triangle DOE$.

Имеем $\dfrac{r}{h-r} = \dfrac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}}$, откуда $r = \dfrac{ah}{a + \sqrt{12h^2 + a^2}}$.

Ответ. $\dfrac{3h^2 + a^2}{6h}$ и $\dfrac{ah}{a + \sqrt{12h^2 + a^2}}$.

Пример 13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ двугранный угол между основанием ABC и боковой гранью равен $\frac{\pi}{3}$. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к радиусу описанного около нее шара.

Решение. Пусть O — центр основания пирамиды, F — центр вписанного в нее шара, E — точка пересечения прямой SO с описанной около пирамиды сферой, D — середина отрезка BC (рис. 36.13), r и R — радиусы вписанной и описанной сферы, $BC = a$.

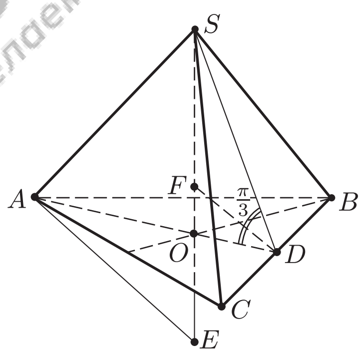

Рис. 36.13

Тогда $\angle SDA = \frac{\pi}{3}$, $SE = 2R$, $\angle SAE = \frac{\pi}{2}$, $\angle ODF = \angle SDF = \frac{\pi}{6}$, $OF = r$, $OD = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $OF = OD \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, т. е. $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{6}$.

Используя свойство перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, получаем

$$AO^2 = OE \cdot OS,$$

где $OS = OD \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$, $OE = 2R - OS$.

Отсюда получаем $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(2R - \frac{a}{2}\right)\frac{a}{2}$ и поэтому $R = \frac{7}{12}a$, $\frac{r}{R} = \frac{2}{7}$.

Ответ. $\frac{2}{7}$.

Пример 14. Ребро правильного тетраэдра равно a. Найти:

1) высоту и объем тетраэдра;
2) радиус вписанной в тетраэдр сферы;
3) радиус сферы, описанной около тетраэдра;
4) расстояние между скрещивающимися ребрами тетраэдра.

Решение. Пусть O — центр вписанной в тетраэдр сферы, M — центр основания ABC, E — середина AB, N — середина DC, K — точка пересечения прямой DM с описанной около тетраэдра сферой (рис. 36.14), h — высота тетраэдра, s — площадь основания, v — объем тетраэдра, r и R — радиусы вписанной и описанной сфер соответственно.

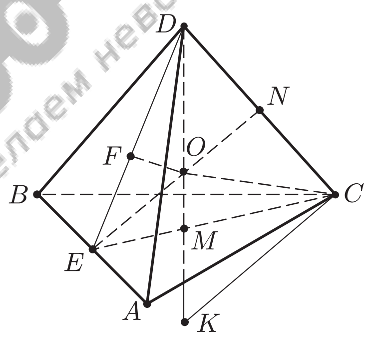

Рис. 36.14

1) Тогда $s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $CM = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $DM = h = \sqrt{DC^2 - CM^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $v = \frac{1}{3}sh = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

2) Из подобия треугольников DFO и DEM следует, что $\frac{FO}{EM} = \frac{DO}{DE}$, где $FO = r$, $EM = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $DO = h - r = a\sqrt{\frac{2}{3}} - r$, $DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Отсюда находим $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12} = \dfrac{h}{4}$.

3) Так как DK — диаметр описанной сферы, то $\angle DEK = \dfrac{\pi}{2}$ и по свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла треугольника на гипотенузу, имеем

$$EM^2 = DM \cdot MK, \quad \text{где} \quad DM = h, \quad MK = 2R - h, \quad EM = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $\dfrac{a^2}{3} = 2Rh - h^2 = 2Rh - \dfrac{2a^2}{3}$, откуда $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

4) Пусть x — расстояние между скрещивающимися ребрами AB и CD. Тогда $EN = x$, так как EN — высота в равнобедренных треугольниках ANB и CED. Из треугольника CED находим $x^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$, откуда $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Ответ. 1) $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ и $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$; 2) $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$; 3) $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$; 4) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Пример 15. Найти ребро правильного тетраэдра, если три его вершины лежат на сфере радиуса $3\sqrt{3}r$, боковые грани касаются сферы радиуса r, а центры этих сфер совпадают.

Решение. Проведем плоскость, параллельную основанию ABC тетраэдра $SABC$ и касающуюся сферы радиуса r. Пусть $A_1B_1C_1$ — точки пересечения этой плоскости с ребрами A, B, C (рис. 36.15), N — середина A_1C_1, $E \in SN$ и $OE \perp SN$, K и M — центры оснований ABC и $A_1B_1C_1$, a и x — стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно.

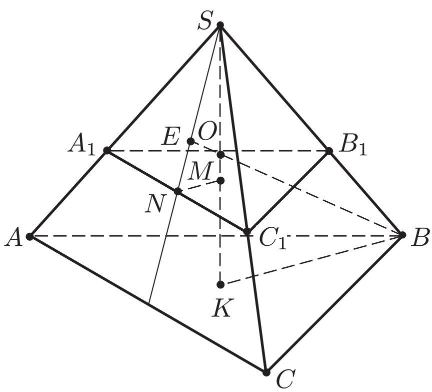

Рис. 36.15

Тогда $OE = OM = r$, $OB = 3\sqrt{3}r$, $KB = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $SM = x\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $SK = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $x = 2r\sqrt{6}$ (пример 14), $SM = 4r$, $KM = SK - SM = a\sqrt{\dfrac{2}{3}} - 4r$, $OK = KM + r = a\sqrt{\dfrac{2}{3}} - 3r$.

Из треугольника OKB по теореме Пифагора имеем

$$OB^2 = KB^2 + OK^2, \quad \text{т.е.} \quad 27r^2 = \left(a\sqrt{\frac{2}{3}} - 3r\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2$$

или $a^2 - 2\sqrt{6}ra - 18r^2 = 0$, откуда $a = 3r\sqrt{6}$.

Ответ. $3r\sqrt{6}$.

Пример 16. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины A и B и центры граней ABD и ACD.

Решение. Так как сфера проходит через точки A и B, то ее центр O лежит в плоскости DCM, где M — середина AB (рис. 36.16).

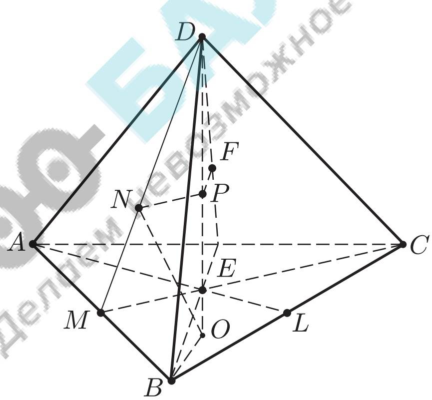

Рис. 36.16

Аналогично, из того, что центры N и F граней ABD и ACD — точки сферы, следует, что точка O лежит в плоскости DAL, где L — середина BC.

Следовательно, центр сферы лежит на высоте пирамиды DE. Проведем $NP \| ME$, тогда $NP \perp DE$ и $NP = \dfrac{2}{3}ME = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a}{3\sqrt{3}}$, $PE = \dfrac{1}{3}DE = \dfrac{1}{3}a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Пусть $OE = x$, R — радиус сферы, тогда $ON = OB = R$ и из прямоугольных треугольников BOE и NPO находим $OB^2 = OE^2 + BE^2$,

$NO^2 = NP^2 + (OE + PE)^2$, т. е.

$$R^2 = x^2 + \frac{a^2}{3}, \qquad (1)$$

$$R^2 = \left(\frac{a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \left(x + \frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)^2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем $x = \frac{a}{\sqrt{6}}$, $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Пример 17. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найти радиус сферы, вписанной в трехгранный угол с вершиной в точке A и касающейся плоскости α, проведенной через середины ребер AB, AD и BC.

Решение. Пусть P, Q, N — середины ребер AB, AD и BC соответственно (рис. 36.17), F — точка пересечения ребра CD с плоскостью α, O — центр треугольника CBD, E, L и R — середины отрезков BD, PQ и NF соответственно. Тогда $PQNF$ — квадрат $\left(PQ = QF = FN = NP = \frac{a}{2},\quad NQ = \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, RL — средняя линия в треугольнике ACE, AO лежит в плоскости ACE.

Так как сфера вписана в трехгранный угол при вершине A, то ее центр M равноудален от граней этого трехгранного угла и поэтому лежит на отрезке AO, а радиус r сферы равен MK — расстоянию от точки M до прямой AE (рис. 36.18).

Точка касания T сферы с плоскостью α лежит в плоскости ACE на отрезке RL и $MT = r$. Чтобы найти r, воспользуемся тем, что $AO = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ и $AO = AM + MS + SO$, где S — точка пересечения AO и RL. Выразим AM, MS и SO через r и a.

Пусть $\angle CAO = \varphi$, $\angle OAE = \beta$, тогда $\angle RSO = \angle MSL = \varphi$ ($RL \| CA$).

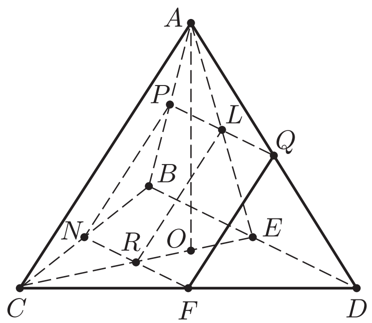

Рис. 36.17

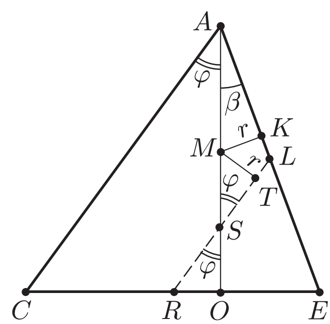

Рис. 36.18

Так как $CA = a$, $CE = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CR = RE = \frac{CE}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, то $RO = RE - OE = \frac{a\sqrt{3}}{12}$, $OS = OR \cdot \operatorname{ctg}\varphi$, $SM = \frac{r}{\sin\varphi}$, $MA = \frac{r}{\sin\beta}$, где $\sin\varphi = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{2}$, $\sin\beta = \frac{OE}{AO} = \frac{1}{3}$.

Следовательно, $AM = 3r$, $MS = r\sqrt{3}$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{12}$, $AM + MS + SO = AO = a\cos\varphi$, т. е. $\frac{a\sqrt{6}}{3} = \sqrt{3}(1+\sqrt{3})r + \frac{a\sqrt{6}}{12}$, откуда

$$r = \frac{a}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{8}a.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{8}a$.

3. Разные задачи

Примеры с решениями

Пример 18. В треугольной пирамиде $ABCD$ плоские углы при вершине D являются острыми, причем $\angle CDB = \alpha$, $\angle ADC = \beta$, $\angle ADB = \gamma$ (рис. 36.19). Найти площадь проекции грани ADB на плоскость грани ACD, где $DA = a$, $DB = b$.

Решение. Будем рассматривать грань ACD как основание пирамиды. Пусть O — проекция точки B на плоскость ACD, $E \in AD$ и $OE \perp AD$.

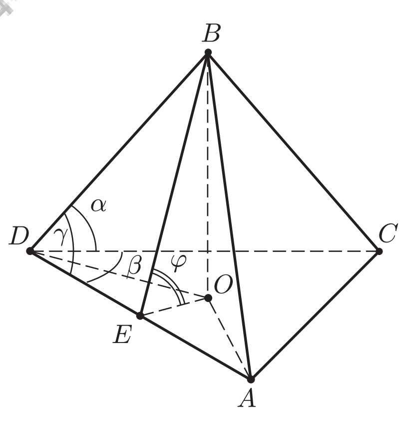

Рис. 36.19

Тогда $\angle BEO = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при ребре DA, а $\triangle ADO$ — проекция грани ABD на плоскость ACD.

Если s_1 и s_2 — площади треугольников ABD и ADO соответственно, то $s_2 = s_1 \cos\varphi$.

Так как $s_1 = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, а $\cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$ в силу равенства (3) (§ 32, п. 5, теорема 2), то $s_2 = \dfrac{ab}{2\sin\beta}(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)$.

Ответ. $\dfrac{ab}{2\sin\beta}(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)$.

Пример 19. Плоскость делит пополам двугранный угол при ребре AB треугольной пирамиды $MABC$ и пересекает ребро MC в точке D (рис. 36.20). Доказать, что если s_1 и s_2 — площади граней MAB

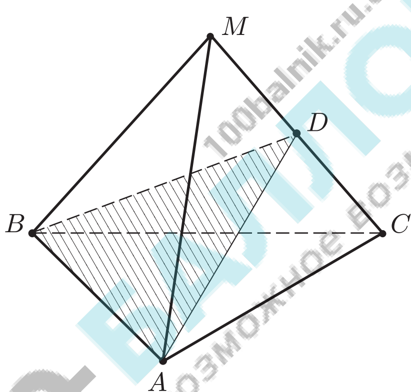

Рис. 36.20

и ABC, то

$$\frac{MD}{DC} = \frac{s_1}{s_2}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть s — площадь треугольника ABD, 2α — величина двугранного угла при ребре AB, $AB = a$, v_1 и v_2 — объемы пирамид $MABD$ и $CABD$ соответственно. Тогда, используя доказанную в § 32, п. 5 теорему 6, получаем

$$v_1 = \frac{2s_1 s \cdot \sin\alpha}{3a}, \qquad v_2 = \frac{2s_2 s \cdot \sin\alpha}{3a},$$

откуда

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2}. \tag{2}$$

Если v — объем пирамиды $MABC$, то применяя теорему 7 (§ 32, 5), находим

$$\frac{v_1}{v} = \frac{MD}{MC},$$

откуда

$$\frac{v_2}{v} = \frac{v - v_1}{v} = 1 - \frac{MD}{MC} = \frac{DC}{MC},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{MD}{DC}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует равенство (1).

Пример 20. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найти:

1) расстояние между ребрами AB и CD (рис. 36.21);

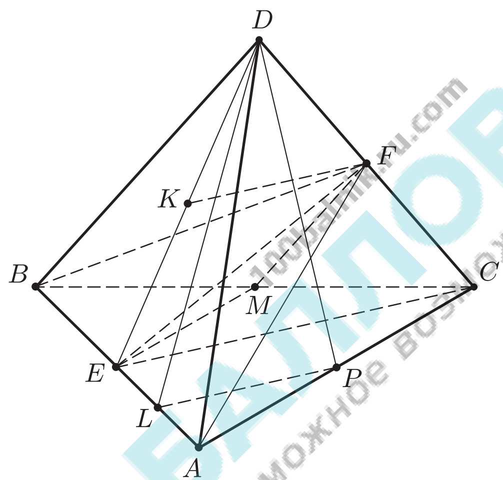

Рис. 36.21

2) угол φ между прямыми AC и EF, где E и F — середины ребер AB и CD;

3) угол и расстояние между высотами AF и CE граней тетраэдра;

4) угол и расстояние между высотами CE и DP граней тетраэдра;

Решение. 1) Если E и F — середины ребер AB и CD, то EF является высотой в равнобедренных треугольниках DEC и ABF ($EF \perp CD$, $EF \perp AB$). Следовательно, EF — расстояние между AB и CD. Так как $EC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CF = \frac{a}{2}$, то $EF = \sqrt{EC^2 - CF^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2) Пусть M — середина BC. Тогда $ME = MF = \frac{a}{2}$, $EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $ME^2 + MF^2 = EF^2$, откуда следует, что искомый угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (угол между AC и EF равен углу между ME и EF, так как $ME \| AC$).

3) Пусть FK — средняя линия в $\triangle DEC$, тогда $FK \| CE$ и угол α между AF и CE равен углу между AF и FK. Так как $AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$KF=\dfrac{a\sqrt3}{4}$, $AK=\sqrt{AE^2+EK^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\left(\dfrac{a\sqrt3}{4}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt7}{4}$, то из $\triangle AKF$ по теореме косинусов находим

$$AK^2=KF^2+AF^2-2\cdot KF\cdot AF\cos\alpha,\quad \text{или}$$
$$\frac{7a^2}{16}=\frac{3a^2}{16}+\frac{3a^2}{4}-2\,\frac{a\sqrt3}{4}\cdot\frac{a\sqrt3}{2}\cdot\cos\alpha,$$

откуда $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\alpha=\arccos\dfrac{2}{3}$.

Пусть r — расстояние между AF и CE. Тогда, если v — объем пирамиды $FEAC$, то, используя теорему 4 (§ 32, 5), получаем

$$v=\frac16\,AF\cdot EC\cdot r\cdot\sin\alpha=\frac16\left(\frac{a\sqrt3}{2}\right)^2 r\,\frac{\sqrt5}{3}=\frac{ra^2\sqrt5}{24}.$$

Но $v=\dfrac13\,sh$, где $s=\dfrac{a^2\sqrt3}{8}$ — площадь $\triangle AEC$, $h=\dfrac12\,a\sqrt{\dfrac23}$ — высота пирамиды $FEAC$, опущенная из точки F (она равна половине высоты пирамиды $DABC$). Поэтому

$$v=\frac{1}{24}\,a^2\sqrt3\cdot\frac12\,a\sqrt{\frac23}=\frac{a^3\sqrt2}{48}.$$

Из равенства
$$\frac{a^3\sqrt2}{48}=\frac{a^2r\sqrt5}{24}$$

следует, что $r=\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

4) Пусть β — угол между CE и DP, тогда этот угол равен углу между DP и средней линией PL треугольника AEC. Из $\triangle DPL$ по теореме косинусов находим $DL^2=DP^2+PL^2-2DP\cdot PL\cdot\cos\beta$, где

$$DL=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt3}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{13}}{4},\qquad DP=\frac{a\sqrt3}{2},\qquad PL=\frac{a\sqrt3}{4}.$$

Отсюда найдем $\cos\beta=\dfrac16$, $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$.

Если ρ — расстояние между CE и DP, v_1 — объем пирамиды $DCPE$, то $v_1=\dfrac16\,CE\cdot DP\cdot\rho\sin\beta=\dfrac16\cdot\left(\dfrac{a\sqrt3}{2}\right)^2\cdot\rho\cdot\dfrac{\sqrt{35}}{6}=\dfrac{a^2\rho\sqrt{35}}{48}$. Но $v_1=\dfrac13\,s_1\cdot a\sqrt{\dfrac23}$, где s_1 — площадь треугольника CPE. Так как $s_1=\dfrac14\,s_2$, где $s_2=\dfrac{a^2\sqrt3}{4}$ — площадь треугольника ABC, то $v_1=\dfrac{a^3\sqrt2}{48}=\dfrac{a^2\rho\sqrt{35}}{48}$, откуда $\rho=\dfrac{\sqrt{70}}{35}$.

Ответ. 1) $\dfrac{a\sqrt2}{2}$; 2) $\dfrac{\pi}{4}$; 3) $\arccos\dfrac23$, $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$; 4) $\arccos\dfrac16$, $\dfrac{\sqrt{70}}{35}$.

Пример 21. На боковых ребрах SA и SB правильного тетраэдра $SABC$ взяты точки E и F так, что $\frac{AE}{ES} = \frac{BF}{FS} = 2$. Найти:

1) величину двугранного угла между плоскостью CEF и плоскостью основания ABC (рис. 36.22);

2) площадь треугольника CEF;

3) площадь проекции треугольника CEF на плоскость основания ABC;

4) радиус сферы, вписанной в пирамиду $SCEF$.

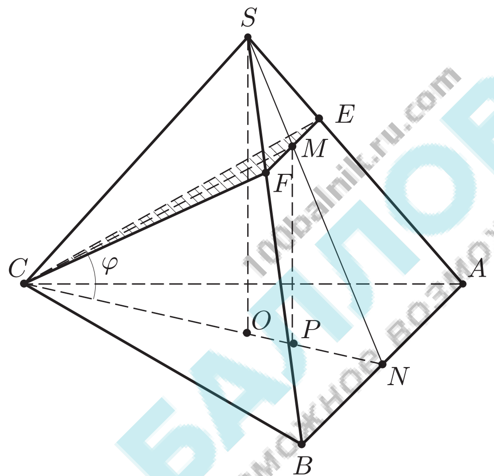

Рис. 36.22

Решение. 1) Пусть M и N — середины отрезков EF и AB; α, β и γ — плоскости ABC, CEF и SAB; l — линия пересечения плоскостей α и β, φ — искомый угол. Докажем, что $\angle MCN = \varphi$.

Заметим, что $C \in l$, так как $C \in \alpha$ и $C \in \beta$. Кроме того, $l \| EF$ и $l \| AB$, так как $EF \| AB$. Здесь использовано следующее утверждение: если l — линия пересечения плоскостей α и β, а плоскость γ пересекает плоскости α и β по параллельным прямым, то $l \| \gamma$.

Но $CM \perp EF$, а $CN \perp AB$, так как CM и CN — высоты в равнобедренных треугольниках FCE и ACB. Следовательно, $CM \perp l$ и $CN \perp l$ и поэтому $\angle MCN = \varphi$.

Для вычисления угла φ проведем прямые SO и MP, перпендикулярные CN. Если $SO = H$, $CN = h$, то $ON = \frac{h}{3}$, $SN = h$, $SM = \frac{h}{3}$ и из подобия $\triangle SON$ и $\triangle MPN$ следует, что $MP = \frac{2}{3}H$, $OP = \frac{1}{3}ON = \frac{2}{9}h$, откуда получаем $CP = \frac{2}{3}h + \frac{h}{9} = \frac{7}{9}h$,

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{MP}{CP} = \dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{H}{h}$, где $H = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, a — ребро тетраэдра. Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4\sqrt{2}}{7}$, откуда $\cos\varphi = \dfrac{7}{9}$.

2) Пусть s_1 — площадь треугольника CEF, тогда

$$s_1 = \frac{1}{2}EF\cdot CM,$$

где $EF = \dfrac{AB}{3} = \dfrac{a}{3}$, $CM = \dfrac{CP}{\cos\varphi}$, $CP = \dfrac{7}{9}h$, $\cos\varphi = \dfrac{7}{9}$.

Отсюда находим $CM = h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $s_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

3) Если σ — площадь проекции треугольника CEF на плоскость ABC, то

$$\sigma = s_1\cos\varphi = \frac{7a^2\sqrt{3}}{108}.$$

4) Пусть s_2 и s_3 — площади треугольников CSF и SEF соответственно, r — радиус сферы, вписанной в пирамиду $SCEF$, v — объем этой пирамиды. Тогда (§ 32, п. 5, теорема 8)

$$r = \frac{3v_1}{s_1 + 2s_2 + s_3},$$

где $s_2 = \dfrac{1}{3}s$, $s_3 = \dfrac{1}{9}s$, $s = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, s — площадь грани правильного тетраэдра $SABC$. Так как $v_1 = \dfrac{1}{9}v$, где $v = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ — объем тетраэдра $SABC$, то $r = \dfrac{3v}{10s} = \dfrac{a}{5\sqrt{6}}$.

Ответ. 1) $\arccos\dfrac{7}{9}$; 2) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$; 3) $\dfrac{7a^2\sqrt{3}}{108}$; 4) $\dfrac{a}{5\sqrt{6}}$.

Пример 22. Ребра, сходящиеся в вершине D треугольной пирамиды $ABCD$, взаимно перпендикулярны, $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$ (рис. 36.23). Доказать, что:

1) $CD \perp AB$;

2) если E — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на AB, то линейный угол двугранного угла при ребре AB равен углу DEC, а высота DO пирамиды лежит в плоскости DEC;

3) расстояние ρ между прямыми AB и CD выражается формулой

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}; \tag{1}$$

4) радиус R сферы, описанной около этой пирамиды, выражается формулой

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}; \tag{2}$$

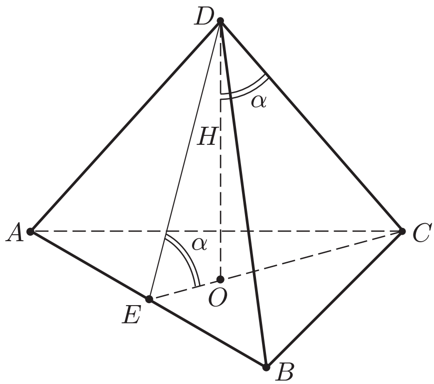

Рис. 36.23

5) если H — высота пирамиды, опущенная из вершины D, то

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\,; \tag{3}$$

6) если α, β, γ — двугранные углы, образуемые боковыми гранями ABD, ACD и BCD с основанием ABC, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1; \tag{4}$$

7) если s_1, s_2, s_3 — площади боковых граней, а s — площадь основания, то

$$s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2; \tag{5}$$

8) радиус r сферы, вписанной в пирамиду, выражается формулой

$$r = \frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}\,. \tag{6}$$

Доказательство. 1) Так как $CD \perp DA$ и $CD \perp DB$, то CD — перпендикуляр к плоскости ABD. Отсюда следует, что $CD \perp AB$.

2) Прямая AB перпендикулярна плоскости CDE, так как она перпендикулярна прямым CD и EC, лежащим в этой плоскости.

Поэтому $\angle DEC$ является линейным углом двугранного угла при ребре AB.

Так как $AB \perp DE$ (AB — перпендикуляр к плоскости CDE) и AB лежит в плоскости ABC, то плоскости CDE и ABC перпендикулярны (признак перпендикулярности двух плоскостей). Поэтому высота DO пирамиды лежит в плоскости CDE.

3) Расстояние ρ между прямыми CD и AB равно DE, так как $DE \perp CD$ и $DE \perp AB$.

Но $DE \cdot AB = AD \cdot BD$, т. е. $\rho\sqrt{a^2 + b^2} = ab$, откуда следует формула (1).

4) Если сфера описана около данной пирамиды, то она описана и около прямоугольного параллелепипеда с ребрами DA, DB и DC. Но диаметр сферы, описанной около такого параллелепипеда, равен его диагонали, откуда следует формула (2).

5) Пусть $QT = h$ — высота, опущенная из вершины Q прямоугольного треугольника PQM (рис. 36.24), $MQ = m$, $QP = n$. Докажем, что

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{h^2}. \tag{7}$$

Так как $\dfrac{h}{m} = \sin\varphi$, $\dfrac{h}{n} = \cos\varphi$, то $\dfrac{h^2}{m^2} + \dfrac{h^2}{n^2} = 1$, откуда следует равенство (7).

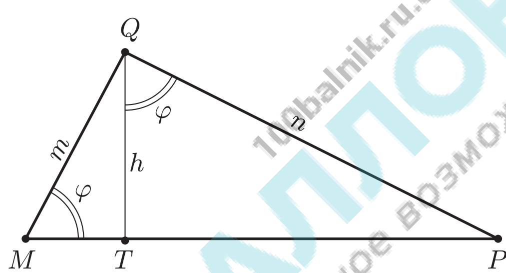

Рис. 36.24

Применяя формулу (7) к треугольнику DEC ($\angle CDE$ — прямой), получаем

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{DE^2} + \frac{1}{c^2}. \tag{8}$$

Аналогично, используя формулу (7) для треугольника ADB, находим

$$\frac{1}{DE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) следует формула (3).

6) Так как $\angle CDO = \angle DEC = \alpha$ (рис. 36.23), то $\cos\alpha = \dfrac{H}{c}$. Аналогично, $\cos\beta = \dfrac{H}{b}$, $\cos\gamma = \dfrac{H}{a}$. Отсюда и из формулы (3) следует равенство (4).

7) Если s_1 — площадь грани ABD, а s — площадь грани ABC, то $s_1 = s\cos\alpha$, так как $\triangle ABD$ — ортогональная проекция треугольника ABC. Аналогично, $s_2 = s\cos\beta$, $s_3 = s\cos\gamma$. Отсюда и из равенства (4) следует формула (5).

8) Пусть $s_0 = s + s_1 + s_2 + s_3$ — полная поверхность пирамиды, v — ее объем. Тогда

$$r = \frac{3v}{s_0}. \tag{10}$$

Так как $v = \frac{1}{3}abc$, $s_1 = \frac{1}{2}ab$, $s_2 = \frac{1}{2}bc$, $s_3 = \frac{1}{2}ac$, то, используя формулу (5), получаем

$$s_0 = \frac{1}{2}\left(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\right).$$

Отсюда и из формулы (10) следует равенство (6).

Пример 23. В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB выбраны точки D и E так, что $SD = DE = 1$, $BE = 2$ (рис. 36.25). Площади сечений пирамиды плоскостями α и β, перпендикулярными ребру SB и проходящими через точки D и E, равны 5 и 16 соответственно. Первое из этих сечений — треугольник, одна из вершин M которого расположена на ребре SA так, что $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Найти объем пирамиды.

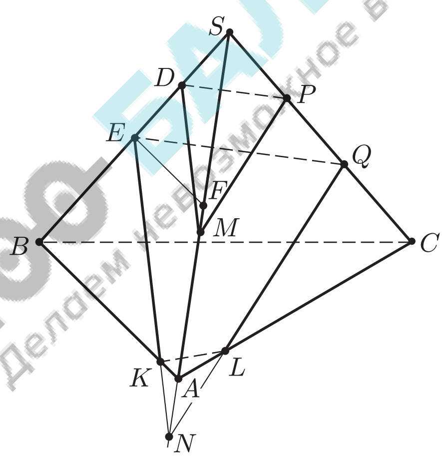

Рис. 36.25

Решение. Пусть M, N и P, Q — точки пересечения плоскостей α и β с ребрами SA и SC (рис. 36.25) соответственно (или с их продолжениями).

Так как плоскости α и β параллельны, то они пересекают каждую из граней SAB, SBC и SAC по параллельным прямым.

Из того, что $\triangle SDM \sim \triangle SEN$ следует, что $SN = 2SM = \frac{4}{3}SA$, так как $SN = 2 \cdot SM$ ($DS = DE$ и $DM \| EN$), а $SM = \frac{2}{3}SA$.

Пусть F — середина SA, тогда EF — средняя линия в треугольнике ASB, $FE \| AK$ и из подобия треугольников NAK и NEF получаем

$$\frac{NK}{NE} = \frac{NA}{NF}, \quad \text{где} \quad NA = SN - SA = \frac{1}{3} SA,$$

$$NF = NA + \frac{SA}{2} = \frac{5}{6} SA, \quad \text{откуда} \quad \frac{NK}{NE} = \frac{2}{5}.$$

Если s_1 и s_2 — площади треугольников DPM и EQN, то по свойству параллельных сечений пирамиды $\frac{s_2}{s_1} = \left(\frac{SE}{SD}\right)^2 = 4$, откуда $s_2 = 20$, так как $s_1 = 5$.

Отсюда следует, что точка Q принадлежит ребру SC, а не его продолжению. В самом деле, если бы точка Q лежала на продолжении ребра SC, то в сечении пирамиды плоскостью β (плоскостью EQN) получился бы треугольник, площадь которого σ была бы меньше площади треугольника EQK, которая равна $\frac{3}{5} s_2$ $\left(EK = \frac{3}{5} EN\right)$, т. е. равна 12, что противоречит условию ($\sigma = 16$).

Итак, точка Q лежит на ребре SC, а в сечении пирамиды плоскостью β получается четырехугольник $EQLK$, его площадь $\sigma = 16$. Тогда, если σ_1 — площадь треугольника KLN, то

$$\sigma_1 = s_2 - \sigma = 4 = \frac{1}{5} s_2. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$\frac{\sigma_1}{s_2} = \frac{NK}{NE} \cdot \frac{NL}{NQ} = \frac{2}{5} \cdot \frac{NL}{NQ}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $\frac{NL}{NQ} = \frac{1}{2}$, т. е. $NL = LQ$.

Кроме того, $NA = AM$, так как $NA = \frac{1}{3} SA$, $SM = \frac{2}{3} SA$. Следовательно, AL — средняя линия в треугольнике NMQ и поэтому $MQ \| AC$. Тогда из подобия треугольников SMQ и SAC находим

$$\frac{SQ}{SC} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3},$$

откуда следует, что $\frac{SP}{SC} = \frac{1}{3}$, так как $SP = PQ$ ($DP \| EQ$ и $SD = ED$).

Таким образом, точки D, M, P расположены на ребрах пирамиды так, что

$$\frac{SD}{SB} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{SP}{SC} = \frac{1}{3}. \tag{3}$$

Пусть v и v_1 — объемы пирамид $SABC$ и $SDMP$ соответственно. Так как SD — высота в пирамиде $SDMP$ ($SB \perp \alpha$) и $SD = 1$, а площадь основания DMP равна 5, то $v_1 = \frac{5}{3}$.

Используя теорему 7 (§ 32, 5) и равенства (3), находим

$$\frac{v_1}{v} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18},$$

откуда $v = 18$, $v_1 = 30$.

Ответ. 30.

Пример 24. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AC и BD взаимно перпендикулярны, $AB = BD = AD = a$, середина ребра AC равноудалена от плоскостей ABD и BCD, угол между ребром AC и гранью CBD равен $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найти длину ребра CD, угол CAD и угол между ребром BD и гранью ACD.

Решение. 1) Пусть E и F — середины ребер AC и BD соответственно (рис. 36.26). Тогда $AF \perp BD$, так как $AB = AD$. Кроме того $BD \perp AC$ по условию. Следовательно, BD перпендикулярно к плоскости AFC и поэтому $CF \perp BD$.

Так как точка E равноудалена от плоскостей ABD и BCD, то плоскость BED делит пополам двугранный угол при ребре BD, а EF — биссектриса угла AFC (AFC — линейный угол этого двугранного угла, поскольку $AF \perp BD$ и $CF \perp BD$). Итак, EF — биссектриса и медиана треугольника AFC и поэтому $AF = FC$. Из равенства прямоугольных треугольников AFD и CFD следует, что $CD = AD = a$.

2) Перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость CBD, лежит в плоскости AFC, а его основание M — на прямой CF (рис. 36.27). Поэтому $\angle FCA = \angle FAC = \beta$, где $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Так как $FA = FC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, то $AC = 2EC = 2FC\cos\beta = a\sqrt{2}$. Но $AC^2 = CD^2 + AD^2 = 2a^2$ (рис. 36.26). Поэтому $\triangle ADC$ — равнобедренный и прямоугольный, а $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$.

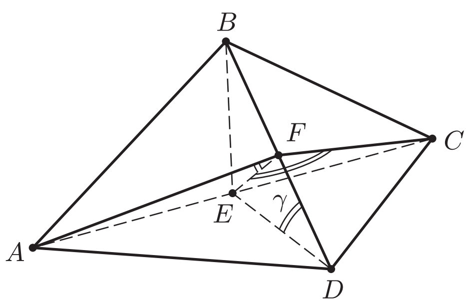

Рис. 36.26

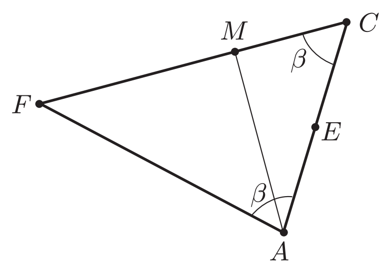

Рис. 36.27

3) Основание перпендикуляра, опущенного из точки F на плоскость ACD, лежит на прямой DE. Поэтому угол между ребром BD и гранью ACD равен углу FDE (на рис. 36.26 этот угол обозначен γ). В треугольнике EFD имеем $ED = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $FD = \frac{a}{2}$, $EF = CF\sin\beta = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$.

Применяя теорему косинусов для треугольника EFD, получаем $\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - 2\,\frac{a}{2}\,\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\gamma$, откуда $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Ответ. 1) a; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{4}$.

Пример 25. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На отрезках AB и CD взяты точки E и F так, что описанная около тетраэдра сфера пересекает прямую, проходящую через E и F, в точках M и N (рис. 36.28). Найти длину отрезка EF, если $ME : EF : FN = 3 : 12 : 4$.

Решение. Пусть P и Q — середины ребер AB и CD, тогда PQ — общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AB и CD, его длина равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$, а угол между AB и CD — прямой (пример 2, § 34, п. 2).

Проведем через точку P в плоскости PDC (содержит точки P, D и C) прямую l, параллельную CD, а в плоскости ABQ через точку Q — прямую m, параллельную AB (рис. 36.29). Тогда $PQ \perp l$ и $PQ \perp m$, так как PQ — общий перпендикуляр к AB и CD. Следовательно, $PQ \perp \alpha$ и $PQ \perp \beta$, где α — плоскость, проведенная через AB и l, а β — плоскость, проведенная через CD и m.

Кроме того, $AB \perp l$ и $CD \perp m$, так как угол между AB и CD прямой.

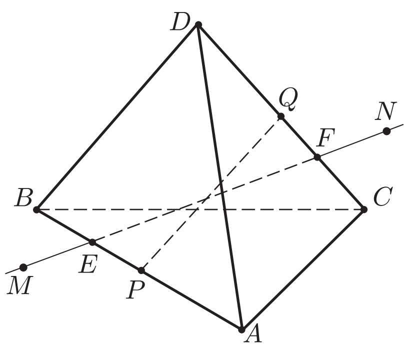

Рис. 36.28

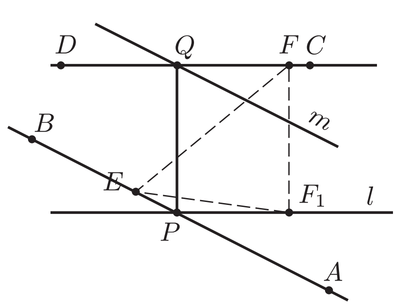

Рис. 36.29

Пусть $PE = x$, $QF = y$, F_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую l. Тогда из прямоугольных треугольников PEF_1 и FEF_1 ($FF_1 \perp EF_1$) находим

$$EF_1^2 = PE^2 + PF_1^2, \qquad EF^2 = EF_1^2 + FF_1^2,$$

где $PE = x$, $PF_1 = QF = y$, $FF_1 = PQ = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Отсюда получаем

$$EF^2 = x^2 + y^2 + \frac{a^2}{2}. \tag{1}$$

Проведем плоскость γ через прямую AB и точку N. В этой плоскости лежит и вся прямая MN, так как точки E и F принадлежат γ. По условию точки M, N, A, B лежат на сфере, описанной около тетраэдра, и поэтому они принадлежат одной окружности (рис. 36.30), полученной в сечении сферы плоскостью γ.

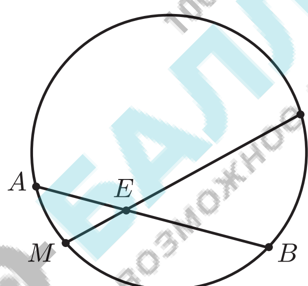

Рис. 36.30

По теореме об отрезках пересекающихся хорд окружности $ME \cdot EN = AE \cdot BE$ (рис. 36.30), где по условию $ME = \dfrac{1}{4}EF$, $EN = \dfrac{4}{3}EF$, $AE = AP + PE = \dfrac{a}{2} + x$, $BE = BP - PE = \dfrac{a}{2} - x$.

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{3}EF^2 = \frac{a^2}{4} - x^2. \tag{2}$$

Аналогично, применяя теорему о пересекающихся хордах окружности, проходящей через точки C, D, M, N, получаем $DF \cdot FC = MF \cdot FN$, где $DF = y + \dfrac{a}{2}$, $FC = \dfrac{a}{2} - y$, $MF = \dfrac{5}{4}EF$, $FN = \dfrac{1}{3}EF$, откуда

$$\frac{a^2}{4} - y^2 = \frac{5}{12}EF^2. \tag{3}$$

Из системы (1)–(3) сначала найдем x^2 или y^2, а затем получим, что $EF = \dfrac{2a}{\sqrt{7}}$.

Ответ. $\dfrac{2a}{\sqrt{7}}$.

Пример 26. Правильная треугольная усеченная пирамида обладает следующими свойствами:

1) в пирамиду можно вписать сферу;

2) существует сфера, касающаяся всех ребер пирамиды.

Найти двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды.

Решение. Пусть P и Q — центры верхнего и нижнего оснований пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 36.31). M и N — середины AB и A_1B_1, тогда PQ — высота пирамиды, а искомый угол α равен углу NMQ.

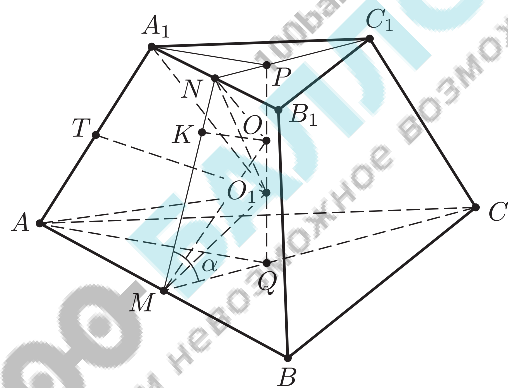

Рис. 36.31

Так как пирамида является правильной, то центр O вписанной в нее сферы и центр O_1 сферы, касающейся всех ребер пирамиды, лежат на высоте PQ.

Пусть $AB = a$, $A_1B_1 = b$, $AA_1 = m$, $MN = l$, $PQ = H$, r и R — радиусы сфер с центрами O и O_1 соответственно, K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на MN.

Тогда $NP = \dfrac{b\sqrt{3}}{6}$, $MQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $MN = MK + KN = NP + MQ$, т. е.

$$l = \frac{(a+b)\sqrt{3}}{6}, \tag{1}$$

$$\sin\alpha = \frac{H}{l}. \tag{2}$$

Задача сводится к тому, чтобы выразить H через a и b и найти соотношение между a и b.

Так как $r = \dfrac{H}{2} = OP = OQ = OK$, где $K \in NM$ и $OK \perp NM$, то высота трапеции

$$H = \sqrt{(MN)^2 - (MQ - NP)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{(a-b)^2}{12}}.$$

Отсюда и из (1) следует, что

$$H = \sqrt{\frac{ab}{3}}. \tag{3}$$

Кроме того, $R = O_1N = O_1M = O_1T$, где $T \in AA_1$ и $O_1T \perp AA_1$. Из треугольников O_1PN и O_1MQ находим

$$O_1P^2 = R^2 - \frac{b^2}{12}, \qquad O_1Q^2 = R^2 - \frac{a^2}{12},$$

из треугольников O_1PA_1 и O_1AQ получаем

$$A_1O_1^2 = O_1P^2 + A_1P^2 = R^2 - \frac{b^2}{12} + \frac{b^2}{3} = R^2 + \frac{b^2}{4},$$

$$AO_1^2 = R^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Тогда из треугольников A_1O_1T и AO_1T имеем $A_1T^2 = A_1O_1^2 - R^2 = \dfrac{b^2}{4}$, $AT^2 = AO_1^2 - R^2 = \dfrac{a^2}{4}$ и поэтому $A_1T = \dfrac{b}{2}$, $AT = \dfrac{a}{2}$, откуда $A_1T + AT = \dfrac{a+b}{2}$, т. е.

$$m = \frac{a+b}{2}. \tag{4}$$

Найдем теперь зависимость между a и b, применяя формулы (1) и (4) и пользуясь тем, что

$$AA_1^2 = MN^2 + \left(\frac{AB - A_1B_1}{2}\right)^2,$$

т. е.

$$m^2 = l^2 + \frac{(a-b)^2}{4}. \tag{5}$$

Из равенств (5), (4) и (1) следует, что

$$a^2 + b^2 = 10ab, \tag{6}$$

$$l^2 = \frac{1}{12}(a^2 + b^2 + 2ab) = ab. \tag{7}$$

Наконец, из (2), (3) и (7) получаем

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

§ 37. Четырехугольная и шестиугольная пирамиды

Примеры с решениями

Пример 1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна a, высота SF пирамиды равна $a\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в пирамиду, касается боковой грани ASD в точке K (рис. 37.1). Найти площадь сечения, проходящего через ребро AB и точку K.

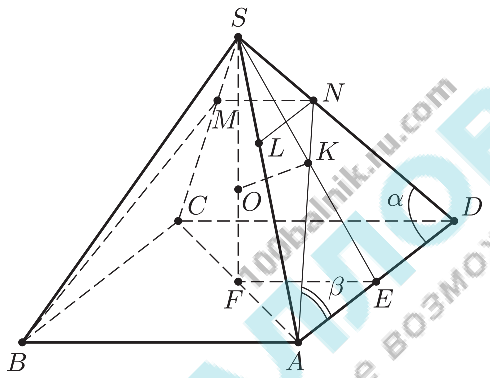

Рис. 37.1

Решение. Так как пирамида является правильной, то центр O сферы лежит на отрезке SF, а точка K — на отрезке SE, где E — середина AD.

Кроме того, $OK \perp SE$, $OF = OK = R$ (радиус сферы), $EK = EF$ (равные отрезки касательных к сфере).

В сечении пирамиды плоскостью, проходящей через AB и точку K, получится равнобедренная трапеция $ABMN$, а для вычисления ее площади s_1 достаточно найти MN и AN.

Так как $EF = \dfrac{a}{2}$, $SF = a\sqrt{2}$, $FD = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, то $SE = \sqrt{SF^2 + EF^2} = \dfrac{3}{2}a$, $SD = \sqrt{FD^2 + SF^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a$. Пусть $\angle SDA = \alpha$, $\angle NAD = \beta$, тогда $\cos\alpha = \dfrac{ED}{SD} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\beta = \dfrac{\pi}{4}$, так как $KE = EF = AE$. Поэтому $\angle AND = \pi - (\alpha + \beta) = \dfrac{3}{4}\pi - \alpha$. Применяя к треугольнику AND теорему синусов, получаем

$$\frac{AN}{\sin\alpha} = \frac{ND}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{AD}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right)},$$

где $AD = a$, $\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi - \alpha\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{10}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Отсюда находим $ND = \frac{\sqrt{10}}{4}a$, $AN = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$.

Проведем в $\triangle ASD$ через точку N прямую, параллельную AD и пересекающую SA в точке L. Так как $MN = LN$ (рис. 37.1), а $ND = \frac{1}{2}SD$ $\left(SD = \frac{\sqrt{10}}{2}a\right)$, то $MN = \frac{a}{2}$.

Осталось найти высоту h равнобедренной трапеции, зная ее основания и боковую сторону.

Так как $AN = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$, $AB = a$, $MN = \frac{a}{2}$, то

$$h = \sqrt{AN^2 - \left(\frac{AB}{2} - \frac{MN}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{8}a^2 - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{17}}{4}.$$

Поэтому искомая площадь $s_1 = \frac{1}{2}(AB + MN)h = \frac{3a^2\sqrt{17}}{16}$.

Ответ. $\frac{3a^2\sqrt{17}}{16}$.

Пример 2. Найти отношение объема правильной четырехугольной пирамиды к объему шара, касающегося всех ребер пирамиды, если боковое ребро пирамиды в 2 раза больше стороны ее основания.

Решение. Пусть S — вершина пирамиды, M — центр основания $ABCD$ (рис. 37.2), E — середина AB, O — центр шара, R — радиус шара, $OF \perp BS$, $F \in BS$.

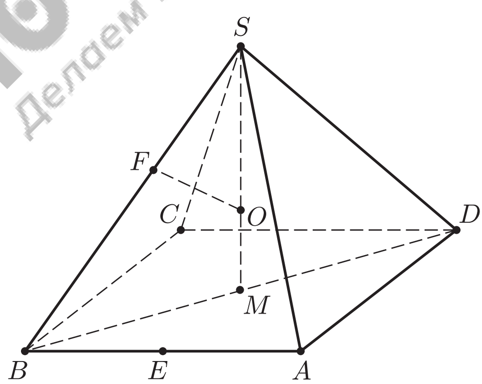

Рис. 37.2

Если $AB = 2a$, то по условию $SB = 2AB = 4a$. Кроме того, $BE = BF = a$, так как отрезки касательных к шару, проведенных из точки B, равны.

Отсюда находим $SF = SB - BF = 3a$, $BM = \frac{AB}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$, $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = a\sqrt{14}$. Из подобия треугольников SBM и SOF следует, что $\frac{OF}{BM} = \frac{SF}{SM}$, откуда находим $OF = R = \frac{3a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{14}} = \frac{3a}{\sqrt{7}}$.

Если v_1 и v_2 — объемы пирамиды и шара, то

$$v_1 = \frac{1}{3}AB^2 \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot a\sqrt{14} = \frac{4\sqrt{14}}{3}a^3,$$

$$v_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3a}{\sqrt{7}}\right)^3 = \frac{36}{7\sqrt{7}}\pi a^3,$$

откуда $\frac{v_1}{v_2} = \frac{49\sqrt{2}}{27\pi}$.

Ответ. $\frac{49\sqrt{2}}{27\pi}$.

Пример 3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 1, а высота SO равна 2 (рис. 37.3). Найти:
1) двугранный угол между боковой гранью и основанием;
2) двугранный угол между смежными боковыми гранями;
3) расстояние между AD и SC;
4) радиус описанной около пирамиды сферы;
5) радиус вписанной в пирамиду сферы.

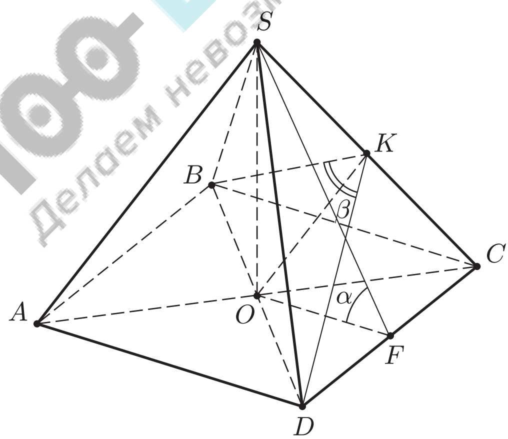

Рис. 37.3

Решение. 1) Пусть F — середина CD, тогда $\angle SFO = \alpha$ — двугранный угол между боковой гранью и основанием и

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{SO}{OF} = \frac{2}{1/2} = 4, \qquad \alpha = \operatorname{arctg} 4.$$

2) Если DK — высота в $\triangle SDC$, то $\angle BKD = \beta$ — двугранный угол между смежными боковыми гранями, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{OD}{OK} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot OK}$. Для нахождения OK вычислим двумя способами площадь треугольника SOC. Получим $OC \cdot SO = SC \cdot OK$, где $SO = 2$, $OC = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $SC = \sqrt{\frac{1}{2}+4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, откуда $OK = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $\beta = 2\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

3) Для нахождения расстояния x между AD и SC воспользуемся теоремой 4 (§ 32, п. 5). Получим

$$v_1 = \frac{1}{6} AD \cdot SC \cdot x \cdot \sin\varphi,$$

где v_1 — объем пирамиды $SADC$, φ — угол между AD и SC. Так как $v_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{1}{3}$, $AD = 1$, $SC = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{SF}{SC} = \frac{\sqrt{4+\frac{1}{4}}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{34}}{6}$, то $x = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

4) Продолжим высоту SO до пересечения с описанной около пирамиды сферой в точке M. Тогда угол при вершине C в треугольнике SMC (рис. 37.4) прямой, $OC \perp SM$, $SM = 2R$, где R — радиус описанной сферы.

Так как $OC^2 = SO \cdot OM$, то $\frac{1}{2} = 2(2R-2)$, откуда $R = \frac{9}{8}$.

5) Пусть O_1 — центр вписанной в пирамиду сферы, r — ее радиус, E — основание перпендикуляра, опущенного в треугольнике SOF из точки O_1 на сторону SF (рис. 37.5).

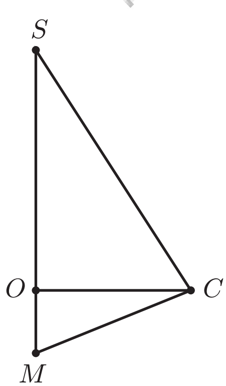

Рис. 37.4

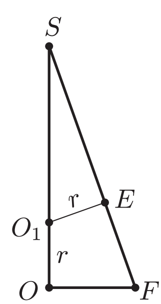

Рис. 37.5

Тогда $OO_1 = O_1E = r$ и из подобия треугольников SO_1E и SOF следует, что $\dfrac{r}{2-r} = \dfrac{OF}{SF} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$, откуда находим

$$r = \frac{\sqrt{17}-1}{8}.$$

Ответ. 1) $\operatorname{arctg} 4$; 2) $2\operatorname{arctg}\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$; 4) $\dfrac{9}{8}$; 5) $\dfrac{\sqrt{17}-1}{8}$.

Пример 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна a, боковое ребро равно $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на прямых BD и SC, параллельные плоскости SAD (рис. 37.6).

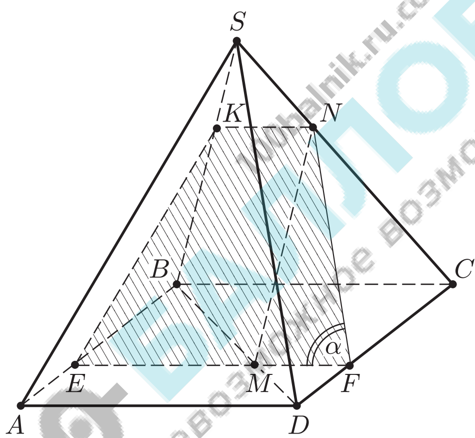

Рис. 37.6

1) Найти длину одного из этих отрезков, если он проходит через точку M диагонали BD так, что

$DM : DB = 1 : 3.$

2) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

Решение. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через некоторую точку M диагонали BD и параллельной плоскости SAD.

Сечением является равнобедренная трапеция $EKNF$, где $KN \parallel EF$, $EK \parallel SA$, $NF \parallel SD$. Пусть $DF = x$, $MN = d$, $\angle SDA = \angle SDC = \angle KEF = \angle NFE = \alpha$, тогда $MF = x$, так как $ABCD$ — квадрат и $EF \parallel AD$.

Из подобия треугольников CFN и CDS следует, что

$$\frac{NF}{SD} = \frac{CF}{CD}, \quad \text{где} \quad SD = 2a, \quad CD = a, \quad CF = a - x.$$

Отсюда находим $NF = 2(a - x)$.

1) Для нахождения длины отрезка MN воспользуемся теоремой косинусов. Получим

$$MN^2 = d^2 = NF^2 + MF^2 - 2NF \cdot MF \cdot \cos\alpha,$$

где

$$NF = 2(a - x), \qquad MF = x, \qquad \cos\alpha = \frac{AD/2}{SD} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$d^2 = 4(a - x)^2 + x^2 - 2 \cdot 2(a - x)x \cdot \cos\alpha = 6x^2 - 9ax + 4a^2. \qquad (1)$$

Наименьшее значение d^2 принимает при $x = \frac{9a}{12} = \frac{3}{4}a$ и это наименьшее значение равно $d^2\left(\frac{3}{4}a\right) = \frac{5}{8}a^2$, откуда $d_{\min} = \sqrt{\frac{5}{8}}a$.

Если $\frac{DM}{DB} = \frac{1}{3}$, то из подобия треугольников DFM и DBC следует, что $x = \frac{a}{3}$, а длину d_1 отрезка MN для этого случая найдем по формуле (1). Получим

$$d_1^2 = d^2\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{5}{3}a^2 \quad \text{и} \quad d_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}a.$$

Ответ. 1) $\sqrt{\frac{5}{3}}a$; 2) $\sqrt{\frac{5}{8}}a$.

Пример 5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $3\sqrt{2}$, а высота SO пирамиды равна 8. Через точку A проведена плоскость α, а через точки B и D (рис. 37.7) — параллельная ей плоскость β так, что сечения пирамиды этими плоскостями имеют равные площади. Найти:

1) отношение длин отрезков, на которые плоскости α и β разбивают ребро SC;

2) объемы многогранников, на которые разбивается пирамида этими плоскостями;

3) расстояние h между плоскостями α и β.

Решение. Сечения пирамиды плоскостями β и α — соответственно равнобедренный треугольник BDE ($BE = DE$) и дельтоид $AMFK$, причем $MK \| BD$ и $MK \perp AF$.

1) Если s_1 и s_2 — площади сечений, то имеем $s_1 = \frac{1}{2}BD \cdot OE$, $s_2 = \frac{1}{2}AF \cdot KM$, где $OE \| AF$, $OC = \frac{1}{2}AC$ и поэтому $OE = \frac{1}{2}AF$, $FE = EC$.

Так как $s_1 = s_2$, то $KM = \frac{1}{2}BD$ и поэтому AF пересекает высоту SO в точке P — середине высоты, а $SF = FE$ (PF — средняя линия в $\triangle SOE$).

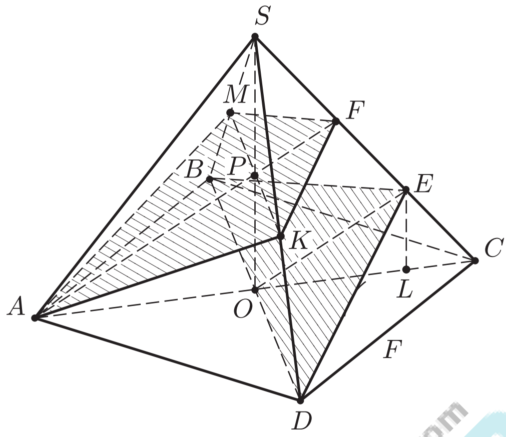

Рис. 37.7

Таким образом,

$$SF = FE = EC. \tag{1}$$

2) Из равенства (1) следует, что равны между собой: расстояние от точки S до плоскости α, расстояние h между плоскостями α и β и расстояние от точки C до плоскости β.

Пусть v_1, v_2, v_3 — объемы соответственно пирамиды $SAMFK$, части пирамиды $SABCD$, заключенной между плоскостями α и β, и пирамиды $EBCD$.

Тогда $v_1 = v_3$, так как соответствующие пирамиды имеют равные площади оснований, а высота каждой из них равна h.

Но $v_3 = \dfrac{1}{6}v$, где $v = \dfrac{1}{3}AB^2 \cdot SO = 48$ — объем пирамиды $SABCD$, так как высота EL пирамиды $EBCD$ равна $\dfrac{1}{3}SO$, а площадь треугольника BCD равна половине площади квадрата $ABCD$. Итак, $v_1 = v_3 = 8$, откуда находим $v_2 = v - (v_1 + v_3) = 32$.

3) Для нахождения h воспользуемся формулой $v_3 = \dfrac{1}{3}h \cdot s_2$, где $s_2 = \dfrac{1}{2}BD \cdot OE = 3OE$, а OE найдем из $\triangle OEL$, где $OL = \dfrac{2}{3}OC = 2$, $EL = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{8}{3}$. Тогда $OE = \sqrt{OL^2 + EL^2} = \dfrac{10}{3}$, $s_2 = 10$, $h = \dfrac{3v_3}{s_2} = \dfrac{12}{5}$.

Ответ. 1) $1 : 1 : 1$; 2) $8; 32; 8$; 3) $\dfrac{12}{5}$.

Пример 6. Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна 6, а точка пересечения его диагоналей O — ортогональная проекция вершины S на плоскость $ABCD$ (рис. 37.8). Точки P и Q выбраны на ребрах DS и AD

соответственно так, что $DP = \frac{1}{5}DS$, $DQ = \frac{1}{4}AD$, а точки N и M расположены на прямых CP и SQ так, что прямая MN перпендикулярна плоскости $ABCD$ и $MN = 8$. Найти объем пирамиды.

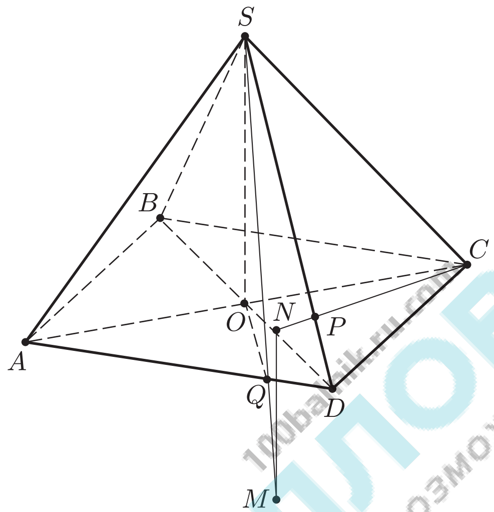

Рис. 37.8

Решение. Найдем решение задачи, используя векторы.

По условию, векторы $\overline{OS}$ и $\overline{MN}$ перпендикулярны основанию пирамиды и поэтому $\overline{OS} \| \overline{MN}$, откуда следует, что $\overline{MN} = k \cdot \overline{OS}$, где $k = \frac{MN}{OS}$, $MN = 8$.

Искомый объем $v = \frac{1}{3}s_1 \cdot SO$, где $s_1 = 6$ — площадь основания, $SO = \frac{8}{k}$ и поэтому $v = \frac{16}{k}$.

Таким образом, задача сводится к нахождению k.

Введем базисные векторы $\overline{a} = \overline{OC}$, $\overline{b} = \overline{OD}$, $\overline{c} = \overline{OS}$ и выразим вектор $\overline{MN}$ через $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. С одной стороны,

$$\overline{MN} = k \cdot \overline{OS} = k\overline{c}. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$\overline{MN} = \overline{MS} + \overline{SO} + \overline{OC} + \overline{CN},$$

где $\overline{MS} = -\overline{SM}$, $\overline{SM} = x \cdot \overline{SQ}$, $\overline{SO} = -\overline{c}$, $\overline{OC} = \overline{a}$, $\overline{CN} = y \cdot \overline{CP}$.

Выразим $\overline{SQ}$ и $\overline{CP}$ через базисные векторы. Так как $\overline{SQ} = \overline{SO} + \overline{OQ}$, где $\overline{SO} = -\overline{c}$, $\overline{OQ} = \overline{OD} + \frac{1}{4}\overline{DA} = \overline{b} + \frac{1}{4}(-\overline{b} - \overline{a})$, то $\overline{SQ} = -\frac{1}{4}\overline{a} + \frac{3}{4}\overline{b} - \overline{c}$.

Аналогично, $\overline{CP} = \overline{CD} + \overline{DP}$, где $\overline{CD} = \overline{CO} + \overline{OD} = -\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{DP} = \frac{1}{5}\overline{DS} = \frac{1}{5}\left(\overline{DO} + \overline{CS}\right) = -\frac{1}{5}\overline{b} + \frac{1}{5}\overline{c}$, и поэтому $\overline{CP} = -\overline{a} + \frac{4}{5}\overline{b} + \frac{1}{5}\overline{c}$.

Таким образом,

$$\overline{MN} = -x \cdot \overline{SQ} - \overline{c} + \overline{a} + y \cdot \overline{CP} =$$
$$= x\left(\frac{1}{4}\,\overline{a} - \frac{3}{4}\,\overline{b} + \overline{c}\right) - \overline{c} + \overline{a} + y\left(-\overline{a} + \frac{4}{5}\,\overline{b} + \frac{1}{5}\,\overline{c}\right)$$

или

$$\overline{MN} = \left(\frac{x}{4} - y + 1\right)\overline{a} + \left(-\frac{3}{4}\,x + \frac{4}{5}\,y\right)\overline{b} + \left(x + \frac{1}{5}\,y - 1\right)\overline{c}. \qquad (2)$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты разложений (1) и (2), получаем

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} - y + 1 = 0, \\ -\dfrac{3}{4}\,x + \dfrac{4}{5}\,y = 0, \\ x + \dfrac{1}{5}\,y - 1 = k, \end{cases}$$

откуда находим $x = \frac{16}{11}$, $y = \frac{15}{11}$, $k = \frac{8}{11}$.

Поэтому $v = \frac{16}{k} = 22$.

Ответ. 22.

Пример 7. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ равна 1, а сторона нижнего основания равна 7. Плоскость α, проходящая через ребро B_1C_1 перпендикулярно к плоскости AD_1C, делит пирамиду на два многогранника, имеющие равные объемы. Найти объем пирамиды.

Решение. Пусть E и F — точки пересечения плоскости α с ребрами AB и CD ($EF \| AC$, так как плоскости оснований параллельны), P — проекция точки B_1 на плоскость $ABCD$, тогда $B_1P = h$ — высота пирамиды (рис. 37.9).

Выразим объем v_1 клина $BCFEB_1C_1$ и объем v усеченной пирамиды через h и y, где $y = BE$.

Если провести через точки B_1 и C_1 плоскости, перпендикулярные B_1C_1, то клин разобьется на три равные части: две пирамиды равного объема $v_2 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot yh = yh$ и клин, имеющий площадь основания y и высоту h.

Следовательно, $v_1 = 2yh + \frac{1}{2}\,yh = \frac{5}{2}\,yh$.

Объем v усеченной пирамиды найдем, пользуясь известной формулой:

$$v = \frac{1}{3}\,h(1 + 49 + \sqrt{1 \cdot 49}) = 19h.$$

По условию $2v_1 = v$, откуда находим $y = \frac{19}{5}$.

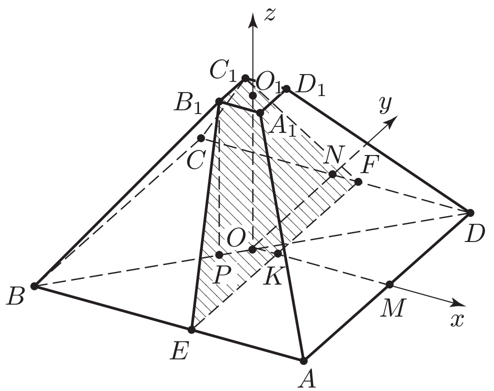

Рис. 37.9

Задача, таким образом, сводится к нахождению h из условия ортогональности плоскостей B_1C_1FE и AD_1C.

Пусть O и O_1 — центры оснований пирамиды, M и N — середины AD и CD. Выберем систему координат так, чтобы точка O была началом, а положительные направления осей Ox, Oy и Oz определялись векторами $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ и $\overline{OO_1}$.

Тогда, если K — точка пересечения OM и EF, то $OK = y - \frac{7}{2} = \frac{19}{5} - \frac{7}{2} = \frac{3}{10}$, $E\left(\frac{3}{10}; -\frac{7}{2}; 0\right)$, $F\left(\frac{3}{10}; \frac{7}{2}; 0\right)$, $C_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; h\right)$, $A\left(\frac{7}{2}; -\frac{7}{2}; 0\right)$, $D_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; h\right)$, $C\left(-\frac{7}{2}; \frac{7}{2}; 0\right)$.

Пусть $ax + by + cz + d = 0$ — уравнение плоскости EFC_1. Тогда, пользуясь тем, что точки E и F принадлежат этой плоскости, получаем

$$\begin{cases} \frac{3}{10}a - \frac{7}{2}b + d = 0, \\ \frac{3}{10}a + \frac{7}{2}b + d = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $b = 0$, $\frac{3}{10}a = -d$.

Возьмем $a = 10$, тогда $d = -3$.

В этой же плоскости лежит точка C_1, поэтому

$$-5 + c \cdot h - 3 = 0, \qquad \text{откуда} \quad c = \frac{8}{h}.$$

Следовательно, уравнение плоскости EFC_1 можно записать в виде

$$10 - x + \frac{8}{h}z - 3 = 0,$$

а $\overline{n}_1 = \left(5; 0; \frac{4}{h}\right)$ — вектор, перпендикулярный плоскости EFC_1.

Найдем коэффициенты уравнения плоскости AD_1C, записав это уравнение в виде

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точек A и C, получаем

$$\begin{cases} \frac{7}{2}a_1 - \frac{7}{2}b_1 + d_1 = 0, \\ -\frac{7}{2}a_1 + \frac{7}{2}b_1 + d_1 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $d_1 = 0$, $a_1 = b_1$. Полагая $a_1 = 1$ и подставляя в уравнение

$$x + y + c_1z = 0$$

координаты точки D_1, получаем $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c_1h = 0$, откуда находим $c_1 = -\frac{1}{h}$.

Следовательно, уравнение плоскости AD_1C можно записать в виде

$$x + y - \frac{1}{h}z = 0,$$

а $\overline{n}_2 = \left(1; 1; -\frac{1}{h}\right)$ — вектор, перпендикулярный плоскости AD_1C.

Так как плоскость EFC_1 перпендикулярна плоскости AD_1C, то $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$, т. е. $5 - \frac{4}{h^2} = 0$, откуда следует, что $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $v = 19h = \frac{38}{\sqrt{5}}$.

Ответ. $\frac{38}{\sqrt{5}}$.

Пример 8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (S — вершина) длина стороны основания равна 2. На ребрах AB и SD лежат соответственно вершины K и M ромба $KLMF$ (рис. 37.10) так, что $KM = 3$, а отрезок KL пересекает ребро SB. Найти объем пирамиды.

Решение. Пусть P — точка пересечения SB и KL, O — центр основания пирамиды. Заметим, что плоскость MFC параллельна плоскости ABS, так как $FC \| AB$, $MF \| KP$ ($KLMF$ — ромб).

Плоскость ASD пересекает параллельные плоскости ASB и MFC по параллельным прямым AS и OM, причем OM — средняя линия в треугольнике ASD, так как $AO = OD$. Отсюда следует, что M — середина ребра SD.

Пусть h — высота пирамиды ($SO = h$), $\frac{AK}{AB} = x$. Тогда $AK = 2x$. Выразим KM, KF и MF через x и h и воспользуемся тем, что $KF = MF$.

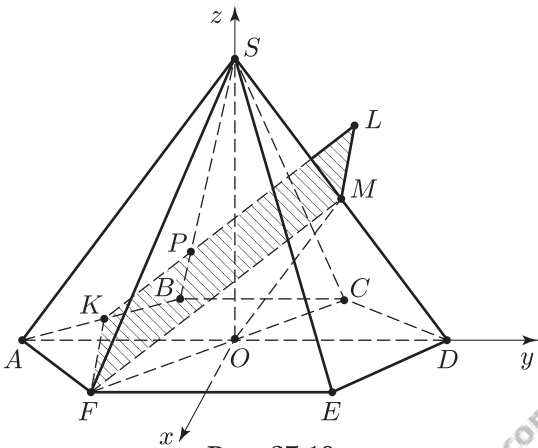

Рис. 37.10

Вычисления удобно провести, используя систему координат, указанную на рис. 37.10. Тогда

$$M\left(0;1;\frac{h}{2}\right),\quad F(\sqrt{3};-1;0),\quad K(-\sqrt{3}x;x-2;0),$$

$$\overline{KF}=(\sqrt{3}(1+x);1-x;0),\quad \overline{FM}=\left(-\sqrt{3};2;\frac{h}{2}\right),\quad \overline{KM}=\left(\sqrt{3}x;3-x;\frac{h}{2}\right),$$

откуда

$$KF^2=|\overline{KF}|^2=3(1+x)^2+(1-x)^2=4x^2+4x+4,\quad FM^2=3+4+\frac{h^2}{4}.$$

Так как $KF=MF$, то

$$4x^2+4x=3+\frac{h^2}{4}. \qquad (1)$$

Кроме того, по условию $KM^2=9$ и поэтому

$$3x^2+(3-x)^2+\frac{h^2}{4}=9,$$

т. е.

$$4x^2-6x+\frac{h^2}{4}=0. \qquad (2)$$

Из системы (1)–(2) находим $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=-\frac{1}{2}$. Значение $x_2=-\frac{1}{2}$ следует отбросить (оно соответствует положению точки K на прямой AB вне отрезка AB). Если $x_1=\frac{3}{4}$, то из (1) следует, что $h=3$.

Тогда $v=\frac{1}{3}h\cdot\frac{AB^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 6=6\sqrt{3}$.

Ответ. $6\sqrt{3}$.

Пример 9. Центр сферы, описанной около правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ (рис. 37.11) лежит на сфере, вписанной в эту пирамиду. Найти отношение радиусов сфер.

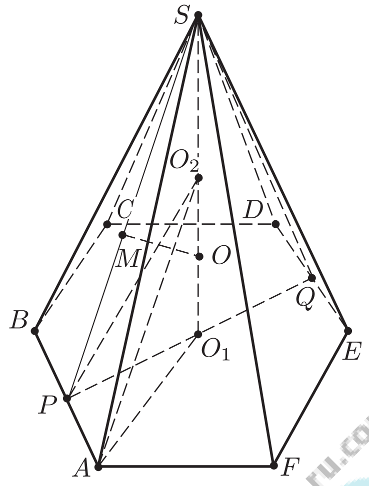

Рис. 37.11

Решение. Пусть O — центр вписанной сферы, P и Q — середины AB и DE, M — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на SP, R и r — радиусы описанной и вписанной сфер. Возможны два случая:

1) центр описанной сферы совпадает с центром O_1 основания $ABDEF$;

2) центр O_2 описанной сферы лежит на высоте SO_1 пирамиды.

Первый случай. Так как $SO_1 = AO_1 = R$, $OO_1 = OM = r$, то $PO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}AO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, $SP = \sqrt{PO_1^2 + SO_1^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}R$.

Если σ — площадь треугольника PSQ, то

$$2\sigma = PQ \cdot SO_1 = r(2PO_1 + 2SP),$$

т. е. $\sqrt{3}R^2 = r(\sqrt{3}R + \sqrt{7}R)$, откуда

$$\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Второй случай. Из треугольника SOM находим

$$SM = \sqrt{SO^2 - OM^2},$$

где $OM = OO_1 = OO_2 = r$, $O_2S = O_2A = R$, $SO = SO_2 + OO_2 = R + r$. Поэтому

$$SM = \sqrt{(R+r)^2 - r^2} = \sqrt{R^2 + 2Rr}.$$

Из треугольника AO_1O_2 имеем

$$AO_1 = \sqrt{AO_2^2 - O_1O_2^2} = \sqrt{R^2 - 4r^2},$$

откуда $PO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}AO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2 - 4r^2}$.

Из подобия треугольников SOM и SO_1P получаем

$$\frac{PO_1}{OM} = \frac{SO_1}{SM},$$

т. е.

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{R^2-4r^2}}{2r} = \frac{R+2r}{\sqrt{R^2+2rR}}.$$

Разделив обе части этого уравнения на $\sqrt{R+2r}$, находим

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{R-2r}}{2r} = \frac{1}{\sqrt{R}},$$

откуда

$$\frac{3}{4r^2}(R-2r) = \frac{1}{R}.$$

Полагая $\frac{R}{r} = t$, получаем квадратное уравнение $3t^2 - 6t - 4 = 0$, имеющее единственный положительный корень $t = 1 + \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Ответ. $1 + \sqrt{\frac{7}{3}}$.

§ 38. Призма

Примеры с решениями

Пример 1. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC$, высота $BD = \sqrt{3}$. На ребре BB_1 расположена точка P так, что $\angle A_1PC = \frac{\pi}{2}$, $A_1P = 2\sqrt{2}$, $PC = \sqrt{5}$ (рис. 38.1). Найти объем призмы.

Решение. Пусть $AB = x$, $BB_1 = y$, v — искомый объем. Тогда $v = AD \cdot BD \cdot BB_1$, где $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{x^2-3}$, $BB_1 = y = BP + PB_1 = \sqrt{PC^2 - BC^2} + \sqrt{PA_1^2 - A_1B_1^2} = \sqrt{5-x^2} + \sqrt{8-x^2}$. Кроме того, из прямоугольного треугольника A_1PC находим $PA_1^2 + PC^2 = A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2$, где $AC^2 = (2AD)^2 = 4(x^2-3)$. Следовательно, $8 + 5 = 4(x^2-3) + y^2$.

Решив систему

$$\begin{cases} y = \sqrt{5-x^2} + \sqrt{8-x^2}, \\ 4x^2 + y^2 = 25, \end{cases}$$

найдем $x = 2$, $y = 3$, $AD = \sqrt{x^2-3} = 1$, $BB_1 = y = 3$, $v = 3\sqrt{3}$.

Ответ. $3\sqrt{3}$.

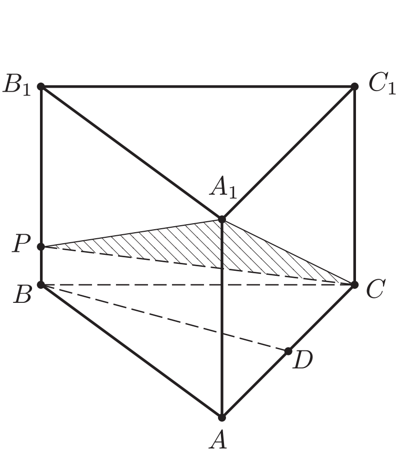

Рис. 38.1

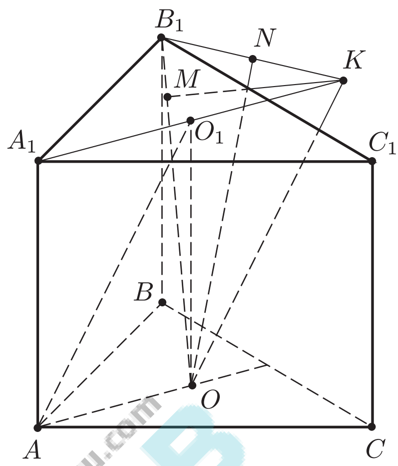

Рис. 38.2

Пример 2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a, точки O и O_1 являются центрами нижнего и верхнего оснований призмы (рис. 38.2), проекция отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5}{6}a$. Найти высоту призмы.

Решение. Проведем через точку O прямую, параллельную AO_1. Эта прямая пересечет плоскость $A_1B_1C_1$ в точке K, лежащей на пересечении описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ окружности с продолжением ее радиуса A_1O_1, так как $O_1K = AO = R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Задача сводится к нахождению проекции отрезка OK на прямую OB_1 в равнобедренном треугольнике OB_1K $(OK = OB_1)$.

Пусть $h = OO_1$ — высота призмы, M — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую OB_1, тогда имеем $OM = \frac{5}{6}a$, $OB_1 = \sqrt{OO_1^2 + O_1B_1^2} = OK = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}$, так как $O_1B_1 = AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Далее из прямоугольного треугольника A_1B_1K $\left(\angle A_1B_1K = \frac{\pi}{2},\ \angle B_1A_1K = \frac{\pi}{6}\right)$ находим $B_1K = \frac{A_1K}{2} = A_1O_1 = AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Чтобы найти h, выразим двумя способами площадь треугольника OB_1K. Получим

$$OB_1 \cdot KM = B_1K \cdot ON, \qquad (1)$$

где N — середина B_1K,

$$KM = \sqrt{OK^2 - OM^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{25}{36}a^2} = \sqrt{h^2 - \frac{13}{36}a^2},$$

$$ON = \sqrt{OK^2 - \left(\frac{B_1K}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12}} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Поэтому равенство (1) примет вид

$$\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}} \cdot \sqrt{h^2 - \frac{13}{36}a^2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}. \qquad (2)$$

Преобразуя уравнение (2), получим

$$\left(h^2 + \frac{a^2}{3}\right)\left(h^2 - \frac{13}{36}a^2\right) = \frac{a^2}{3}\left(h^2 + \frac{a^2}{4}\right),$$

$h^4 - \frac{13}{36}a^2h^2 - \frac{11}{54}a^4 = 0$, откуда $h^2 = \frac{2}{3}a^2$, $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Пример 3. На боковых ребрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены точки M, N, P (рис. 38.3) так, что

$$AM : AA_1 = B_1N : BB_1 = C_1P : CC_1 = 3 : 4. \qquad (1)$$

На отрезках CM и A_1N взяты точки E и F так, что $EF \| B_1P$. Определить отношение $EF : B_1P$.

Решение. Проведем в плоскости BB_1C_1C через точку C прямую, параллельную B_1P и пересекающую BB_1 в точке K. Тогда $PCKB_1$ — параллелограмм и $B_1K = PC = A_1M$ (условие (1)), откуда следует, что $MK \| A_1B_1$.

Покажем, что прямые A_1N и MK пересекаются в точке F. По условию $EF \| B_1P$. Но $B_1P \| KC$, откуда следует, что $EF \| KC$. Так как точка E лежит в плоскости MKC и $EF \| KC$, то точка F должна лежать в плоскости MKC. Таким образом, точка F лежит в плоскости MKC и на прямой A_1N, т. е. точка F — точка пересечения прямых A_1N и MK.

Из подобия треугольников MA_1F и NKF следует, что $A_1F = \frac{1}{2}FN$, $MF = \frac{1}{2}FK$, так как $A_1M = \frac{1}{2}KN$. Отсюда получаем, что $MF : MK = 1 : 3$.

Аналогично, из подобия треугольников EFM и MKC находим, что $\frac{EF}{KC} = \frac{MF}{MK} = \frac{1}{3} = \frac{EF}{PB_1}$.

Ответ. 1 : 3.

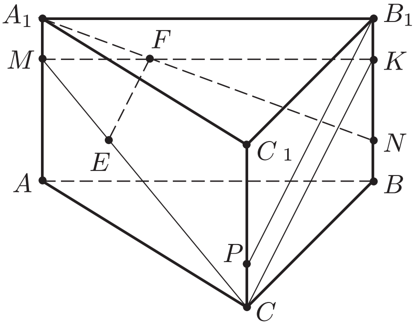

Рис. 38.3

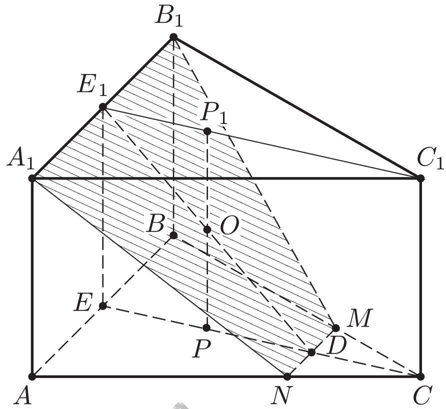

Рис. 38.4

Пример 4. Около сферы радиуса R описана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найти площадь сечения призмы плоскостью α, проходящей через сторону основания A_1B_1 и центр O сферы (рис. 38.4).

Решение. Пусть P и P_1 — центры оснований призмы, E и E_1 — середины AB и A_1B_1. D — точка пересечения E_1O и EC. Тогда O — середина отрезка PP_1, $OP = OP_1 = EP = R$, $EE_1 = PP_1 = 2R$, а искомое сечение — равнобедренная трапеция A_1B_1MN, где $D \in MN$, $MN \| A_1B_1$, $M \in BC$, $N \in AC$.

Площадь s сечения выражается формулой

$$s = \frac{1}{2}(A_1B_1 + MN) \cdot E_1D,$$

где $A_1B_1 = AB = 2\sqrt{3} \cdot EP = 2\sqrt{3}R$.

Так как OP — средняя линия в треугольнике EE_1D, то $PD = EP = R$, откуда следует, что $E_1D = EE_1 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}R$. Кроме того, $DC = \frac{1}{3}EC$ и поэтому

$$MN = \frac{1}{3}AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

Следовательно,

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}AB \cdot E_1D = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3}R \cdot 2\sqrt{2}R = \frac{8\sqrt{6}}{3}R^2.$$

Ответ. $\frac{8\sqrt{6}}{3}R^2$.

Пример 5. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. На ребрах AD и B_1C_1 взяты соответственно точки M и Q, а на ребре CD — точки P и N так, что $AM = C_1Q = CP = PN = \frac{a}{3}$ (рис. 38.5). Найти:

1) объем пирамиды $MNPQ$;

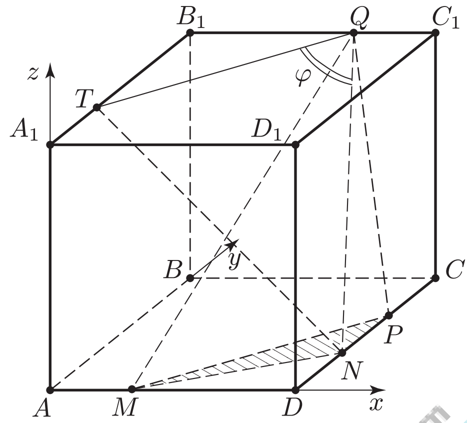

Рис. 38.5

2) угол φ между прямыми MP и QN;

3) расстояние между прямыми MP и QN;

4) двугранный угол α пирамиды $MNPQ$ при ребре MP.

Решение. 1) Пусть s — площадь треугольника MNP, v — объем пирамиды $MNPQ$.

Тогда $s = \dfrac{1}{2} NP \cdot MD = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{2a}{3} = \dfrac{a^2}{9}$, $v = \dfrac{1}{3} s \cdot CC_1 = \dfrac{1}{27} a^3$.

2) Проведем в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ через точку Q прямую, параллельную MP. Пусть T — точка пересечения этой прямой с ребром A_1B_1 (тогда $A_1T = \dfrac{a}{3}$) и $\angle TQN = \varphi$. Так как $TN = A_1D = a\sqrt{2}$, $TQ = \dfrac{2}{3} A_1C_1 = \dfrac{2}{3} a\sqrt{2}$, $QN^2 = \dfrac{4a^2}{9} + \dfrac{a^2}{9} + a^2 = \dfrac{14a^2}{9}$, то из $\triangle TQN$ по теореме косинусов получаем

$$\cos\varphi = \frac{TQ^2 + QN^2 - TN^2}{2 \cdot TQ \cdot QN} = \frac{\frac{8}{9} a^2 + \frac{14}{9} a^2 - 2a^2}{2 \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{28}} = \frac{1}{2\sqrt{7}},$$

откуда $\varphi = \arccos \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

Угол φ можно найти с помощью векторов. Выберем систему координат так, как указано на рис. 38.5. Тогда $M\left(\dfrac{a}{3}; 0; 0\right)$, $N\left(a; \dfrac{a}{3}; 0\right)$, $P\left(a; \dfrac{2}{3}a; 0\right)$, $Q\left(\dfrac{2}{3}a; a; a\right)$, $\overline{NQ} = \left(-\dfrac{a}{3}; \dfrac{2a}{3}; a\right)$, $\overline{MP} = \left(\dfrac{2}{3}a; \dfrac{2}{3}a; 0\right)$,

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{NQ} \cdot \overline{MP}|}{|\overline{NQ}| \cdot |\overline{MP}|} = \frac{\left| -\frac{2}{9} + \frac{4}{9} \right|}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1} \cdot \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{28}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

3) Пусть x — расстояние между MP и QN. Тогда

$$v = \frac{x}{6} MP \cdot NQ \sin\varphi,$$

где $v = \frac{1}{27} a^3$, $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{28}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $MP = TQ = \frac{2}{3} a\sqrt{2}$, $NQ = \frac{a\sqrt{14}}{3}$. Отсюда следует, что $x = \frac{a\sqrt{3}}{9}$.

4) Пусть $\overline{n}_1 = (x, y, z)$ — вектор, перпендикулярный плоскости MPQ. Тогда $\overline{MP} \cdot \overline{n}_1 = 0$, $\overline{PQ} \cdot \overline{n}_1 = 0$, где $\overline{MP} = \left(\frac{2}{3} a; \frac{2}{3} a; 0\right)$, $\overline{PQ} = \left(-\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; a\right)$.

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ -x + y + 3z = 0, \end{cases}$$

имеющую решение $x = 3$, $y = -3$, $z = 2$, и поэтому в качестве вектора $\overline{n}_1$ можно взять вектор $\overline{n}_1 = (3; -3; 2)$. Так как вектор $\overline{n}_2 = (0; 0; 1)$ перпендикулярен плоскости MNP, то искомый угол α определяется формулой $|\cos\alpha| = \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}$, где $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 2$, $|\overline{n}_1| = \sqrt{22}$, $|\overline{n}_2| = 1$. Отсюда находим $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{22}}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{27} a^3$; 2) $\arccos \frac{1}{2\sqrt{7}}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{9}$; 4) $\arccos \sqrt{\frac{2}{11}}$.

Пример 6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через центры граней $ABCD$, AA_1B_1B и середины ребер B_1C_1 и C_1D_1.

Решение. Пусть P и N — центры граней $ABCD$ и AA_1B_1B, M и K — середины ребер B_1C_1 и C_1D_1 (рис. 38.6), O — центр сферы, R — ее радиус.

Точка O равноудалена от точек M и K и поэтому она лежит в плоскости AA_1C_1C. Кроме того, точка O равноудалена от точек N и P и, следовательно, лежит в плоскости α, проходящей через AC_1, так как каждая из точек A и C_1 равноудалена от точек N и P.

Так как прямая AC_1 является линией пересечения плоскостей α и AA_1C_1C, то точка O лежит на AC_1.

Проведем через точку O прямую, параллельную AA_1. Пусть L и L_1 — точки пересечения этой прямой с гранями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, $AO = x$.

Так как $\triangle AOL \sim \triangle AC_1C$ и $CC_1 = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $AC_1 = a\sqrt{3}$, то $OL = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $AL = x\sqrt{\frac{2}{3}}$, $PL = \left|\frac{a}{\sqrt{2}} - x\sqrt{\frac{2}{3}}\right|$.

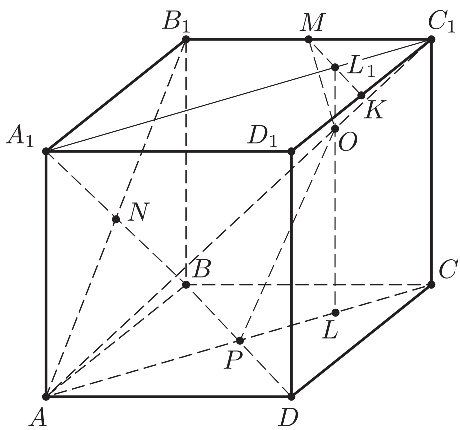

Рис. 38.6

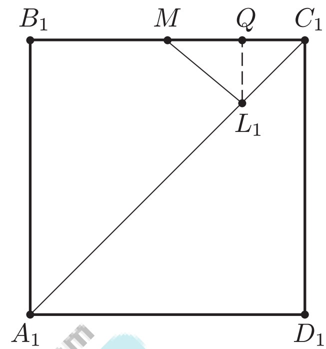

Рис. 38.7

Из $\triangle OPL$ и $\triangle OML_1$ по теореме Пифагора находим

$$OP^2 = PL^2 + OL^2, \qquad OM^2 = OL_1^2 + L_1M^2,$$

где $OP = OM = R$, $OL_1 = a - OL = a - \frac{x}{\sqrt{3}}$, $L_1M^2 = L_1Q^2 + MQ^2$ (рис. 38.7), $L_1Q \perp B_1C_1$, $L_1Q = C_1Q = \frac{C_1L_1}{\sqrt{2}} = \frac{LC}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(AC - AL) = a - \frac{x}{\sqrt{3}}$,

$MQ = MC_1 - C_1Q = \frac{a}{2} - \left(a - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{a}{2}$.

Отсюда следует, что

$$R^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2, \tag{1}$$

$$R^2 = \left(a - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(a - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{a}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем уравнение, из которого найдем $x = \frac{7a}{4\sqrt{3}}$, а затем из (1) получим $R = a\frac{\sqrt{51}}{12}$.

Ответ. $a\frac{\sqrt{51}}{12}$.

Замечание. Этот же результат можно получить, выбрав систему координат так, чтобы лучи AD, AB и AA_1 совпадали с положительными направлениями координатных осей, и обозначив $OL = t$. Тогда $P\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$, $M\left(\frac{a}{2}, a, a\right)$, $O(t, t, t)$. Так как $R^2 = OP^2 = OM^2$, то t определяется из равенств (1) и (2) с заменой $\frac{x}{\sqrt{3}}$ на t.

Пример 7. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 вписана сфера. Точка F расположена на продолжении ребра BB_1 за точку B_1, причем $FB_1=\frac{1}{6}$ (рис. 38.8). Из точки F проведена касательная к сфере, пересекающая грань куба CC_1D_1D в точке E так, что $\angle EFB_1=\arccos\frac{2}{7}$. Найти EF.

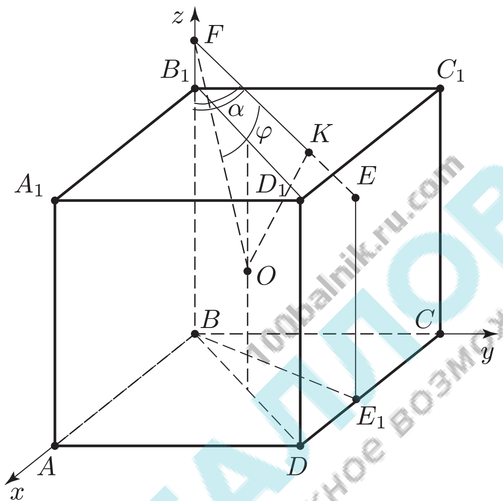

Рис. 38.8

Решение. Пусть O — центр куба, $\angle OFE=\varphi$, $\angle EFB_1=\alpha$. Тогда O — центр сферы, $\cos\alpha=\frac{2}{7}$.

Рассмотрим систему координат, выбранную указанным на рисунке 38.8 способом.

Тогда $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $F\left(0;0;\frac{7}{6}\right)$, $E(x;1;z)$, $\overline{OF}=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$, $\overline{EF}=\left(-x;-1;\frac{7}{6}-z\right)$.

Если K — точка, в которой прямая EF касается сферы, то $OK=R=\frac{1}{2}$, $\sin\varphi=\frac{OK}{OF}$, где $OF=|\overline{OF}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{4}{9}}=\frac{17}{3\sqrt{2}}$, и поэтому $\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{34}}$.

С другой стороны,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{OF}\cdot\overline{EF}}{|\overline{OF}|\cdot|\overline{EF}|},$$

где $\overline{OF}\cdot\overline{EF}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{7}{6}-z\right)$, $|\overline{OF}|=\frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$, $|\overline{EF}|=\sqrt{x^2+1+\left(z-\frac{7}{6}\right)^2}$.

Следовательно,

$$\frac{5}{\sqrt{34}}=\frac{\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{2}{3}\,t}{\dfrac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x^2+1+t^2}}\,, \tag{1}$$

где

$$t=\frac{7}{6}-z. \tag{2}$$

Уравнение (1) можно записать в виде

$$\sqrt{x^2+1+t^2}=\frac{3(x+1)+4t}{5}\,. \tag{3}$$

Аналогично,

$$\cos\alpha=\frac{2}{7}=\frac{\overline{BF}\cdot\overline{EF}}{|\overline{BF}|\cdot|\overline{EF}|}=\frac{\dfrac{7}{6}\left(\dfrac{7}{6}-z\right)}{\dfrac{7}{6}\sqrt{x^2+1+\left(\dfrac{7}{6}-z\right)^2}}=\frac{t}{\sqrt{x^2+1+t^2}}\,. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$\frac{3(x+1)+4t}{5}=\frac{7t}{2}\,,$$

откуда получаем

$$x=\frac{9}{2}\,t-1. \tag{5}$$

Подставив найденное по формуле (5) значение x в уравнение (4), получаем

$$\sqrt{\left(\frac{9}{2}\,t-1\right)^2+1+t^2}=\frac{7}{2}\,t,$$

откуда следует, что

$$9t^2-9t+2=0, \qquad t_1=\frac{1}{3}\,, \qquad t_2=\frac{2}{3}\,.$$

Если $t=\frac{1}{3}$, то из (5) и (2) найдем $x_1=\frac{1}{2}$, $z_1=\frac{5}{6}$, а если $t=\frac{2}{3}$, то $x_2=2$, что невозможно, так как проекция E_1 точки E на плоскость Oxy лежит на отрезке CD.

Итак, $x=\frac{1}{2}$, $z=\frac{5}{6}$, $\overline{EF}=\left(-\frac{1}{2}\,;-1;\frac{1}{3}\right)$, $EF=|\overline{EF}|=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{9}}=\frac{7}{6}$.

Ответ. $\frac{7}{6}$.

Пример 8. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна h, точка D лежит на ребре AB (рис. 38.9), прямая C_1D образует угол $\frac{\pi}{6}$ с плоскостью AA_1C_1C и угол $\alpha = \arcsin\frac{3}{4}$ с плоскостью ABC. Найти:

1) сторону основания призмы;

2) радиус шара с центром O на отрезке C_1D, касающегося плоскостей ABC и AA_1C_1C.

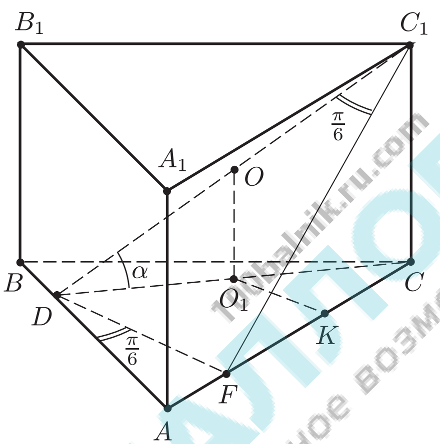

Рис. 38.9

Решение. 1) Проведем $DF \perp AC$, тогда DF — перпендикуляр к плоскости AA_1C_1C, так как плоскости BAC и AA_1C_1C перпендикулярны. Следовательно, C_1F — проекция DC_1 на плоскость AA_1C_1C и поэтому $\angle DC_1F = \frac{\pi}{6}$.

Пусть $AC = a$, $AD = x$. Так как $\angle ADF = \frac{\pi}{6}$ $\left(\angle DAF = \frac{\pi}{3}\right)$, то $AF = \frac{x}{2}$, $DF = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $DC_1 = 2DF = x\sqrt{3}$ $\left(\angle DFC_1 = \frac{\pi}{2}\right)$. Из $\triangle CDC_1$ находим $DC = CC_1 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, где $CC_1 = h$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, так как $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Итак, $DC = \frac{\sqrt{7}}{3}h$.

Применяя теорему косинусов к треугольнику ADC, получаем $DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos\varphi$, где $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $DC = h\frac{\sqrt{7}}{3}$, $AC = a$.

Следовательно,

$$\frac{7}{9}h^2 = x^2 + a^2 - ax. \qquad (1)$$

Выразим x через h. Из $\triangle CDC_1$ находим $DC_1=\frac{h}{\sin\alpha}=\frac{4}{3}h$. С другой стороны, $DC_1=x\sqrt{3}$. Поэтому $x=\frac{4h}{3\sqrt{3}}$ и тогда из (1) получим уравнение $a^2-\frac{4h}{3\sqrt{3}}a-\frac{5}{27}h^2=0$, откуда $a=\frac{5h}{3\sqrt{3}}$.

2) Пусть O — центр шара, r — его радиус, O_1 — проекция точки O на плоскость ABC, K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на AC. Тогда $O_1K\|DF$ и $O_1K=OO_1=r$, так как шар касается плоскостей AA_1C_1C и ABC, а расстояние от точки O до этих плоскостей равны O_1K и OO_1 соответственно.

Так как $\triangle DOO_1\sim\triangle DC_1C$, а $\triangle CO_1K\sim\triangle CDF$, то

$$\frac{r}{h}=\frac{DO_1}{DC}, \qquad \frac{r}{DF}=\frac{CO_1}{DC}=\frac{DC-DO_1}{DC}=1-\frac{DO_1}{DC},$$

откуда получаем $\frac{r}{DF}=1-\frac{r}{h}$, где $DF=\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3}h$.

Следовательно, $\frac{3r}{2h}=1-\frac{r}{h}$, откуда $r=\frac{2}{5}h$.

Ответ. 1) $\frac{5h}{3\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2}{5}h$.

Пример 9. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. На ребрах AA_1, B_1C_1, CD расположены точки E, F, K (рис. 38.10) так, что $AE=EA_1$, $B_1F=2FC_1$, $CK=3KD$.

Найти расстояние от центра куба M до плоскостей α и β, если:

1) α — плоскость, проходящая через точку C_1 и перпендикулярная KF,

2) β — плоскость, проходящая через точки E, F и K.

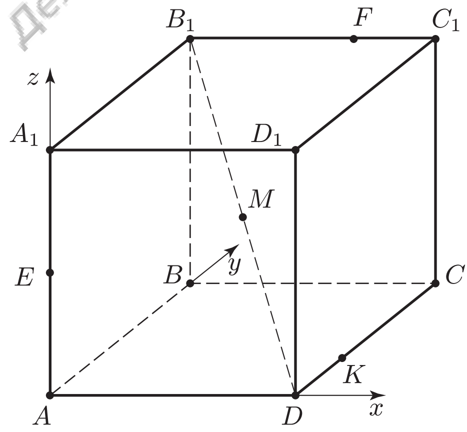

Рис. 38.10

Решение. Рассмотрим систему координат, указанную на рисунке.

Тогда $E\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $F\left(\frac{2}{3};1;1\right)$, $K\left(1;\frac{1}{4};0\right)$, $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $C_1(1;1;1)$, $\overline{KF}=\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{4};1\right)$.

Составим уравнения плоскостей α и β и для нахождения искомых расстояний воспользуемся теоремой 5 (§ 32,5) согласно которой расстояние ρ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равно

$$\rho=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (1)$$

1) Уравнение плоскости α имеет вид

$$-\frac{1}{3}(x-1)+\frac{3}{4}(y-1)+z-1=0$$

или

$$4x-9y-12z+17=0.$$

Используя формулу (1), где $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{2}$, получаем

$$\rho=\frac{\left|2-\frac{9}{2}-6+17\right|}{\sqrt{4^2+9^2+12^2}}=\frac{17}{2\sqrt{241}}.$$

2) Пусть $Ax+By+Cz+D=0$ — уравнение плоскости β. Этому уравнению должны удовлетворять координаты точек E, F, K и поэтому

$$\frac{C}{2}+D=0, \qquad \frac{2}{3}A+B+C+D=0, \qquad A+\frac{B}{4}+D=0,$$

откуда находим, что $C=-2D$, $B=2D$, $A=-\frac{3}{2}D$.

Взяв $D=-2$, запишем уравнение плоскости β в виде

$$3x-4y+4z-2=0.$$

По формуле (1) найдем искомое расстояние

$$\rho_1=\frac{\left|\frac{3}{2}-2+2-2\right|}{\sqrt{3^2+4^2+4^2}}=\frac{1}{2\sqrt{41}}.$$

Ответ. 1) $\frac{17}{2\sqrt{241}}$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{41}}$.

Пример 10. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Точки P, K, L — середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q — центр грани CC_1D_1D (рис. 38.11). Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

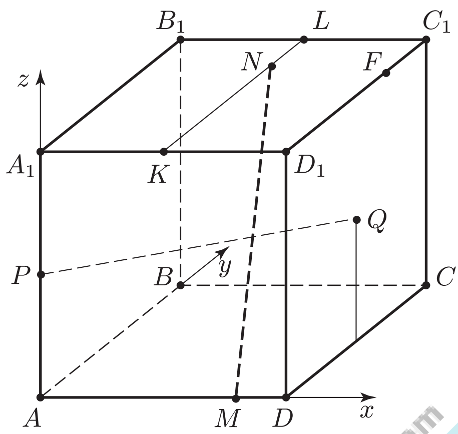

Рис. 38.11

Решение. Воспользуемся системой координат, указанной на рисунке 38.11. Тогда $P\left(0;0;\frac{a}{2}\right)$, $Q\left(a;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$, $M(x;0;0)$, $N(\frac{a}{2};y;a)$, $\overline{PQ}=\left(a;\frac{a}{2};0\right)$, $\overline{MN}=\left(\frac{a}{2}-x;y;a\right)$.

Так как $MN\perp PQ$, то $\overline{PQ}\cdot\overline{MN}=a\left(\frac{a}{2}-x\right)+\frac{a}{2}y=0$, т. е.

$$\frac{a}{2}-x+\frac{y}{2}=0. \qquad (1)$$

Кроме того, точки M, N, P, Q лежат в одной плоскости, откуда следует, что существуют числа α и β такие, что

$$\overline{PN}=\alpha\cdot\overline{PQ}+\beta\cdot\overline{PM},$$

где $\overline{PN}=\left(\frac{a}{2};y;\frac{a}{2}\right)$, $\overline{PM}=\left(x;0;-\frac{a}{2}\right)$, т. е.

$$\left(\frac{a}{2};y;\frac{a}{2}\right)=\alpha\left(a;\frac{a}{2};0\right)+\beta\left(x;0;-\frac{a}{2}\right). \qquad (2)$$

Из (2) следует, что

$$\frac{a}{2}=\alpha a+\beta x, \qquad y=\alpha\frac{a}{2}, \qquad \frac{a}{2}=-\beta\frac{a}{2},$$

откуда получаем $\beta=-1$,

$$x=a\left(\alpha-\frac{1}{2}\right), \qquad (3)$$

$$y=\alpha\cdot\frac{a}{2}. \qquad (4)$$

Подставляя найденные значения x и y в (1), находим $\alpha=\frac{4}{3}$, а затем, используя формулы (3) и (4), получаем

$$x=\frac{5}{6}a, \qquad y=\frac{2}{3}a.$$

Следовательно, $\overline{MN}=\left(\frac{a}{2}-x; y; a\right)=\left(-\frac{a}{2}; \frac{2}{3}a; a\right)$, откуда получаем $MN=|\overline{MN}|=a\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+1}=\frac{a\sqrt{14}}{3}$.

Ответ. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$.

Пример 11. Все ребра прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют длину a, основанием призмы является ромб $ABCD$, в котором $\angle A=\frac{\pi}{3}$.

Точка K — ортогональная проекция точки B_1 на плоскость DA_1C_1 (рис. 38.12), а точка L — ортогональная проекция точки K на плоскость DD_1C_1C.

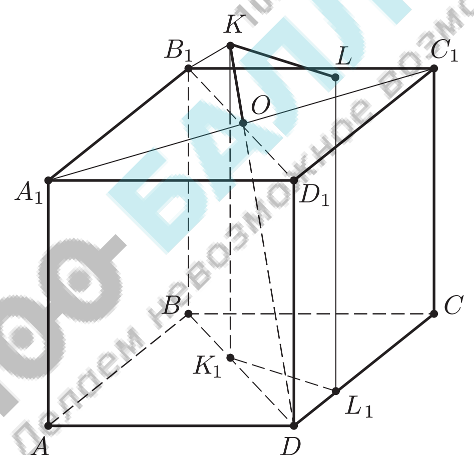

Рис. 38.12

Найти объем пирамиды $DCKL$.

Решение. Плоскость A_1C_1D перпендикулярна плоскости BB_1D_1D. Действительно, $A_1C_1 \perp B_1D_1$ (диагонали ромба перпендикулярны) и, кроме того, $A_1C_1 \perp DD_1$, так как DD_1 — высота призмы. Отсюда следует, что перпендикуляр B_1K к плоскости A_1C_1D лежит в плоскости BB_1D_1D.

Пусть K_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на плоскость $ABCD$. Прямая KK_1 лежит в плоскости BB_1D_1D, так как точка K лежит в этой плоскости и $KK_1 \parallel BB_1$. Поэтому $K \in BD$.

Опустим из точки K_1 перпендикуляр на плоскость CC_1D_1D и обозначим через L_1 основание этого перпендикуляра. Так как плоскость CC_1D_1D перпендикулярна основанию призмы, то K_1L_1 лежит в плоскости $ABCD$ и $L_1 \in CD$, а KK_1L_1L — прямоугольник.

Выберем треугольник DCL в качестве основания пирамиды $DCLK$, тогда KL — ее высота, а объем пирамиды равен

$$v=\frac{1}{6}CD\cdot LL_1\cdot KL=\frac{1}{6}a\cdot KK_1\cdot K_1L_1. \qquad (1)$$

Найдем длины отрезков KK_1 и K_1L_1, пользуясь тем, что $\triangle B_1KO \sim \triangle OD_1D$, где O — точка пересечения диагоналей верхнего основания призмы (прямая KD пересекает плоскость $A_1B_1C_1D_1$ в точке O, так как эта прямая принадлежит плоскостям BB_1D_1D и DA_1C_1). Имеем

$$\frac{KO}{B_1O}=\frac{OD_1}{OD}, \quad \text{где} \quad B_1O=\frac{A_1B_1}{2}=\frac{a}{2}, \qquad OD_1=\frac{a}{2},$$

$$OD=\sqrt{DD_1^2+OD_1^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2},$$

откуда

$$KO=\frac{a}{2\sqrt{5}}, \qquad KD=KO+OD=\frac{3a\sqrt{5}}{5}, \qquad KD=\frac{6}{5}OD.$$

Из подобия треугольников KK_1D и DD_1O следует, что $\frac{KK_1}{KD}=\frac{DD_1}{OD}$, откуда $KK_1=\frac{KD}{OD}\cdot DD_1=\frac{6}{5}a$, $DK_1=\frac{6}{5}OD_1=\frac{3}{5}a$.

Наконец находим $K_1L_1=DK_1\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{10}a$, и из (1) следует, что $v=\frac{3\sqrt{3}}{50}a^3$.

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{50}a^3$.

Пример 12. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AB угол, равный $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Найти площадь сечения куба плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и граней $ABCD$, BCC_1B_1 и DCC_1D_1.

Решение. Плоскость P пересечет плоскость BB_1D_1D по прямой $EF \parallel BD$, где $E \in DD_1$, а ребро CC_1 — в некоторой точке K (рис. 38.13). Пусть Q — середина BD, M и N — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек D и Q на плоскость P. Тогда $DM=QN$, так как $BD \parallel P$, и $N \in AK$.

По условию $\angle DAM=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$, $AD=a$, откуда находим $DM=AD\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{4}=QN$. Из треугольника AQN, в котором

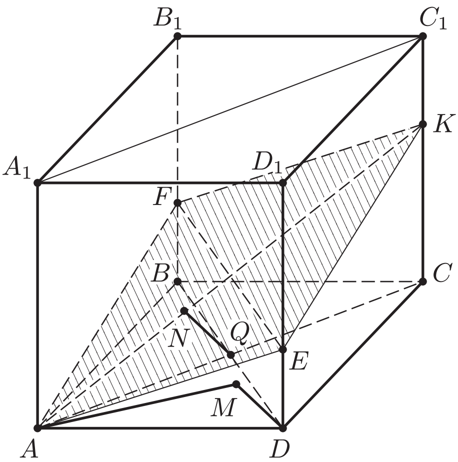

Рис. 38.13

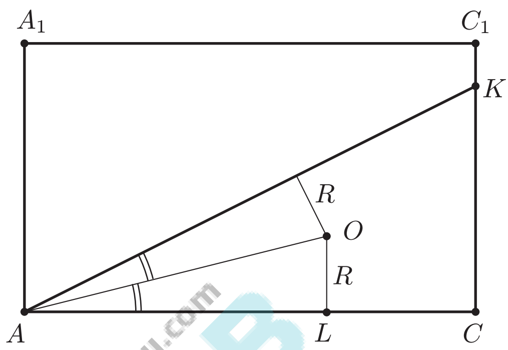

Рис. 38.14

$AQ=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $QN=\frac{AQ}{2}$, находим $\angle QAN=\frac{\pi}{6}$, и поэтому $AK=AC\,\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\,a.$

Пусть S — площадь сечения куба плоскостью P, тогда $S=\frac{1}{2}\,AK\cdot EF$, где $EF=BD=a\sqrt{2}$, и поэтому $S=\frac{2\sqrt{3}}{3}\,a^2$.

Найдем радиус R вписанного шара. Заметим, что центр O шара лежит на биссектрисе угла KAC (рис. 38.14), а проекция L точки O на грань $ABCD$ принадлежит AC.

Из треугольника AOL, в котором $\angle OAL=\frac{1}{2}\,\angle KAC=\frac{\pi}{12}$, $OL=R$, находим $AL=R\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$, где $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2+\sqrt{3}$. Так как $LC=R\sqrt{2}$, $AC=AL+LC$, то $a\sqrt{2}=R\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}+\sqrt{2}\right)$, откуда $R=\frac{a\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Замечание. Искомый радиус можно найти, заметив что он равен радиусу шара, вписанного в треугольную пирамиду KCE_1F_1, где E_1 — точка пересечения прямых KE и CD, F_1 — точка пересечения прямых KF и CB, используя формулу $R=\frac{3V}{S_\text{п}}$, где V — объем пирамиды KCE_1F_1, $S_\text{п}$ — ее полная поверхность.

Ответ. $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Глава 12

Круглые тела, комбинации геометрических тел

§ 39. Конус, цилиндр и сфера

Справочные сведения

Определение круглых тел (конуса, цилиндра, шара) дается в учебниках геометрии для 10–11 классов.

Сфера называется *вписанной* в конус (а конус — *описанным* около сферы), если сфера касается основания конуса и каждой его образующей.

В любой конус можно вписать сферу, центр которой совпадает с центром окружности, вписанной в осевое сечение конуса. Радиус сферы равен радиусу этой окружности.

Сфера называется *вписанной* в цилиндр (а цилиндр — *описанным* около сферы), если эта сфера касается обоих оснований цилиндра и каждой его образующей.

В цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда высота цилиндра равна диаметру его основания.

Сфера называется *описанной* около цилиндра (конуса), если окружности его оснований (окружность основания и вершина) принадлежат сфере.

Около любого цилиндра и около любого конуса можно описать сферу, центр которой совпадает с центром окружности, описанной около осевого сечения соответственно цилиндра или конуса, а радиус этой окружности равен радиусу сферы.

1. Конус и сфера. Цилиндр и сфера

Примеры с решениями

Пример 1. На высоте конуса как на диаметре построена сфера. Площадь части поверхности сферы, лежащей вне конуса, равна площади основания конуса. Найти угол в осевом сечении конуса.

Решение. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник ABC (рис. 39.1), высота которого BD равна диаметру сферы.

Пусть R — радиус сферы, O — ее центр, 2α — искомый угол.

Тогда $\angle DBC = \angle OC_1B = \angle B_1C_1D = \alpha$ (C_1 и B_1 — точки пересечения окружности с центром в точке O радиуса R со сторонами BC и BA треугольника ABC), $OC_1 = R$.

Пусть S_1 и S_2 — площадь основания конуса и площадь части поверхности сферы (шарового сегмента), лежащей вне конуса. Тогда

$S_1 = \pi \cdot DC^2$, где $DC = BD \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2R\operatorname{tg}\alpha$, т. е.

$$S_1 = 4\pi R^2 \operatorname{tg}^2\alpha.$$

$S_2 = 2\pi R \cdot BE$, где $BE = BC_1 \cdot \cos\alpha = 2R \cdot \cos^2\alpha$, т. е.

$$S_2 = 4\pi R^2 \cos^2\alpha.$$

По условию $S_1 = S_2$, откуда $\operatorname{tg}^2\alpha = \cos^2\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha$ $\left(o < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ или $\cos^2\alpha - \sin\alpha = 0$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ответ. $2\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

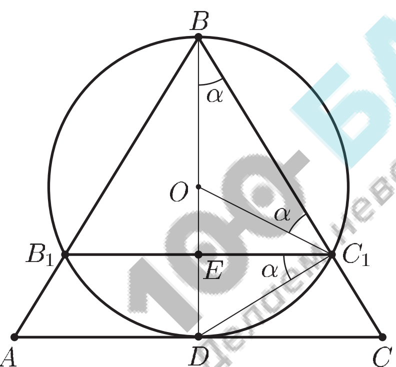

Рис. 39.1

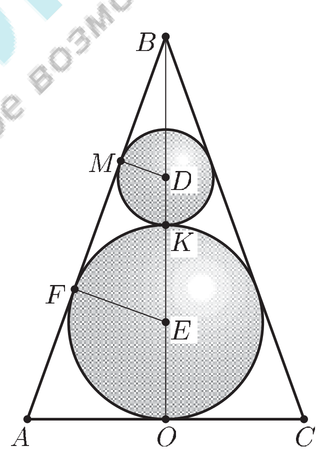

Рис. 39.2

Пример 2. Два шара и конус расположены так, что первый шар касается боковой поверхности конуса и второго шара, а второй шар касается первого шара, а также основания и боковой поверхности конуса. Найти объем конуса, если радиусы шаров равны r и $2r$ соответственно.

Решение. Пусть D и E — центры шаров, O — центр основания конуса, ABC — осевое сечение конуса (рис. 39.2), M и F — точки касания шаров с образующей AB конуса, K — точка касания шаров, $AO = R$, $BO = h$.

Тогда $OE = OF = KE = 2r$, $KD = DM = r$, $BD = h - 5r$, $BE = h - 2r$.

Из подобия треугольников MBD и FBE следует, что

$$\frac{r}{2r} = \frac{h - 5r}{h - 2r},$$

откуда $h = 8r$,

$$BM = \sqrt{BD^2 - MD^2} = \sqrt{(h - 5r)^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r.$$

Аналогично, из подобия треугольников MBD и ABO получаем $\frac{R}{h} = \frac{MD}{BM} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, откуда $R = \frac{h}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}r$, объем $v = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{64\pi}{3} r^3$.

Ответ. $\frac{64\pi}{3} r^3$.

Пример 3. В конус с высотой h и радиусом основания $2h$ вписан шар. Найти площадь сечения этого шара плоскостью α, проходящей через вершину под углом $\frac{\pi}{4}$ к его оси.

Решение. Рассмотрим осевое сечение ABC конуса (рис. 39.3), где $AD = h$, $BD = 2h$.

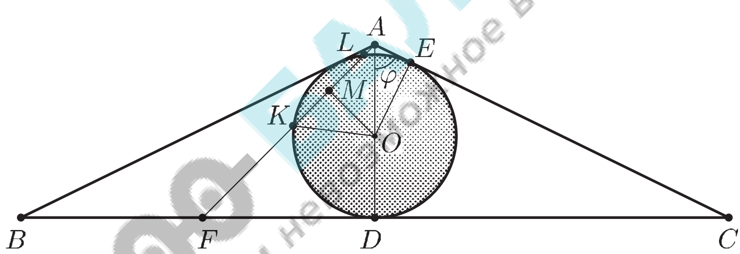

Рис. 39.3

Пусть O — центр шара, E — точка касания шара с образующей конуса AC, F — середина BD, K и L — точки пересечения шара с прямой AF, M — середина KL.

Тогда $\angle FAD = \frac{\pi}{4}$.

Если r — радиус шара, R — радиус круга, получаемого в сечении шара плоскостью α,

$$\angle BAD = \angle DAC = \varphi,$$

то $OE = OA \cdot \sin\varphi$, где $OA = h - r$, $OE = r$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{DC}{AD} = 2$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и поэтому

$$h - r = r\frac{\sqrt{5}}{2},$$

откуда

$$r = \frac{2h}{2 + \sqrt{5}} = 2h(\sqrt{5} - 2).$$

Из $\triangle OKM$ находим $KM^2 = OK^2 - OM^2$, где $KM = R$, $OK = r$, т. е. $OM = OA \cdot \sin\frac{\pi}{4}$, то есть $OM = \frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{h-r}{\sqrt{2}} = r\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Следовательно, $R^2 = r^2 - \frac{5}{8}r^2 = \frac{3}{8}r^2$, а искомая площадь $s = \pi R^2 = \pi\frac{3}{8}r^2 = \frac{3}{2}\pi h^2(\sqrt{5}-2)^2$.

Ответ. $\frac{3}{2}\pi h^2(\sqrt{5}-2)^2$.

Пример 4. Найти отношение объема конуса к объему вписанного в конус шара, если:

1) угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α;

2) отношение радиуса основания конуса к радиусу вписанного в него шара равно 2.

Решение. Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 39.4). Пусть S — вершина конуса, O — центр шара, M — центр основания конуса, SA и SB — образующие в осевом сечении конуса, $E \in SB$ и $OE \perp SB$, R — радиус основания конуса, $SM = h$ — высота конуса, r — радиус шара, v_1 — объем конуса, v_2 — объем шара.

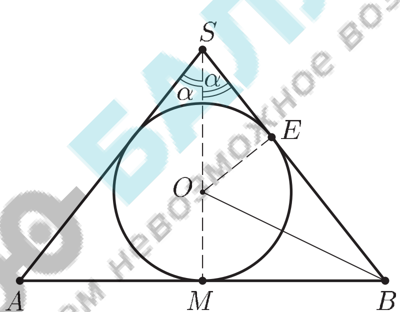

Рис. 39.4

Тогда $\angle ASB = 2\alpha$ — угол в осевом сечении конуса, $OE = OM = r$, $AM = MB = R$, $v_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, $v_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

1) Так как $\angle ASB = 2\alpha$, то $\angle MSB = \alpha$, $\angle MBS = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle MBO = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = \beta$, $\frac{OM}{MB} = \frac{r}{R} = \operatorname{tg}\beta$, $\frac{MB}{SM} = \operatorname{tg}\alpha$, $h = R\operatorname{ctg}\alpha$.

Поэтому

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R^2 h}{4r^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \cdot \frac{h}{R} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^3\beta\operatorname{ctg}\alpha,$$

где

$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно, $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{4}\cdot\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}\right)^3$.

2) Из подобия треугольников SOE и SMB следует, что

$$\frac{r}{h-r} = \frac{R}{\sqrt{h^2+R^2}}$$

или

$$\frac{1}{\dfrac{h}{r}-1} = \frac{\dfrac{R}{r}}{\sqrt{\left(\dfrac{h}{r}\right)^2+\left(\dfrac{R}{r}\right)^2}}.$$

Пусть $\dfrac{h}{r} = x$, тогда $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}}$, или $x^2+4 = 2(x^2-2x+1)$, откуда $x = 2+\sqrt{6}$.

Следовательно, $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{R}{r}\right)^2\cdot\dfrac{h}{r} = \dfrac{1}{4}\cdot 4\cdot(2+\sqrt{6}) = 2+\sqrt{6}$.

Ответ. 1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{4}\cdot\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}\right)^3$; 2) $2+\sqrt{6}$.

Пример 5. Внутри цилиндра расположены два шара радиуса r и один шар радиуса $2r$ так, что каждый шар касается двух других шаров, нижнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найти радиус основания цилиндра.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры шаров радиуса r, O_3 — центр шара радиуса $2r$, O — центр нижнего основания цилиндра; A, B, C — проекции на плоскость нижнего основания цилиндра точек O_1, O_2 и O_3 соответственно (рис. 39.5 и 39.6), $K \in O_3C$, $O_1K \perp O_3C$, x — радиус основания цилиндра.

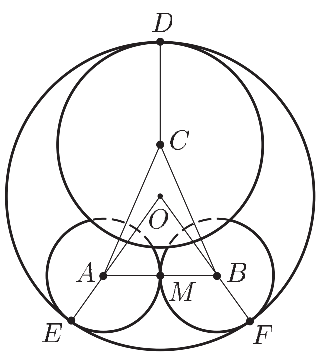

Рис. 39.5

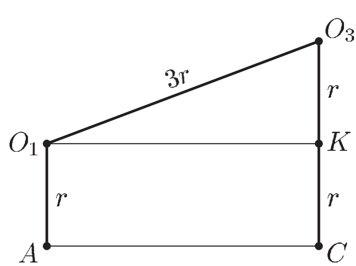

Рис. 39.6

Тогда $AC = O_1K$, $O_1O_3 = 3r$, $O_3K = r$, $O_1K = AC = BC = 2\sqrt{2}r$.

На рис. 39.5 E и F — проекции на плоскость нижнего основания цилиндра точек касания шаров с боковой поверхностью цилиндра, M — середина AB, $AE = BF = r$, $AB = 2r$, $OE = OF = OD = x$. $DC = 2r$, $AC = BC = 2\sqrt{2}r$, $CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{8r^2 - r^2} = r\sqrt{7}$. $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{(x-r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 - 2rx}$, $CO = CM - OM = r\sqrt{7} - \sqrt{x^2 - 2rx}$.

Так как $CO + CD = x$, где $CD = 2r$, то x — корень уравнения

$$2r + r\sqrt{7} - \sqrt{x^2 - 2rx} = x.$$

Запишем это уравнение в виде

$$r(2+\sqrt{7}) - x = \sqrt{x^2 - 2rx} \qquad (1)$$

и возведем обе части уравнения (1) в квадрат.

Получим $-2rx(2+\sqrt{7}) + r^2(2+\sqrt{7})^2 = -2rx$, откуда

$$x = r\,\frac{(2+\sqrt{7})^2}{2(1+\sqrt{7})} = r\,\frac{11+4\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{7})} = \frac{r}{12}(17+7\sqrt{7}).$$

Ответ. $\frac{r}{12}(17+7\sqrt{7})$.

2. Сфера, прямая и плоскость

Справочные сведения

Прямая l *касается* сферы в точке A, если эта точка является единственной общей точкой прямой и сферы.

Равносильное определение: прямая l касается сферы в точке A, если эта прямая перпендикулярна радиусу сферы, проведенному в *точку касания* A.

Поэтому плоскость, проведенная через точку касания A сферы с прямой l и перпендикулярная этой прямой, содержит центр сферы.

Если сфера имеет с плоскостью α единственную общую точку B, то говорят, что сфера *касается плоскости* α, а точку B называют *точкой касания*.

Справедливы следующие утверждения.

1) Плоскость α касается сферы в точке B тогда и только тогда, когда эта плоскость проходит через точку B и перпендикулярна радиусу сферы, проведенному в точку B.
2) Прямая l касается сферы в точке A тогда и только тогда, когда $A \in l$ и $A \in \alpha$, где α — *касательная плоскость* сферы.
3) Если из точки M, лежащей вне сферы с центром O, провести всевозможные касательные к сфере, то множество точек касания

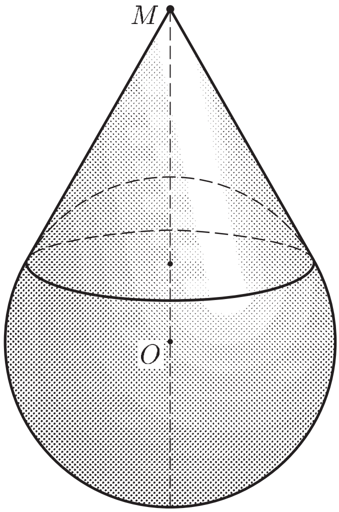

Рис. 39.7

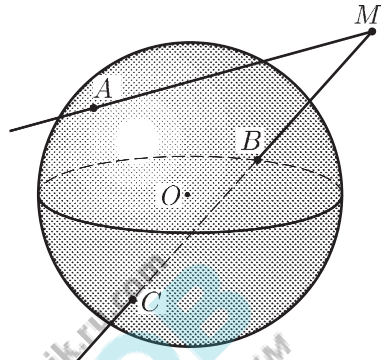

Рис. 39.8

этих прямых со сферой является окружностью (рис. 39.7), которая лежит в плоскости, перпендикулярной MO.

4) Если из точки M, лежащей вне сферы, проведены две прямые, одна из которых касается сферы в точке A, а другая пересекает сферу в точках B и C (рис. 39.8), то

$$MA^2 = MB \cdot MC.$$

Примеры с решениями

Пример 6. Сфера пересечена плоскостями α и β, расстояние между которыми равно 3. Найти радиус сферы, если радиусы окружностей, получаемых при пересечении сферы плоскостями α и β, равны 9 и 12.

Решение. Пусть R — искомый радиус. Изобразим сечение сферы плоскостью, проходящей через центр O сферы и перпендикулярной плоскостям α и β.

Нужно рассмотреть два случая, представленных на рисунке 39.9, где C и D — середины соответствующих хорд, $OD = x$, $AC = 9$, $BD = 12$, $CD = 3$.

В первом случае получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 12^2 = R^2, \\ (x+3)^2 + 9^2 = R^2, \end{cases}$$

откуда найдем $x = 9$ и $R = 15$.

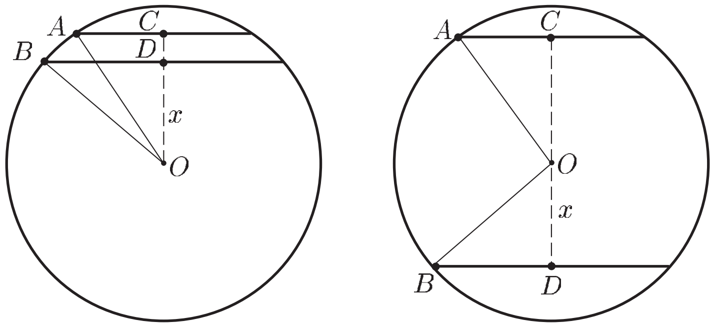

Рис. 39.9

Во втором случае получим систему

$$\begin{cases} (3-x)^2 + 9^2 = R^2, \\ x^2 + 12^2 = R^2, \end{cases}$$

откуда следует, что $x < 0$.

Ответ. 15.

Пример 7. Три шара радиуса r касаются плоскости α и попарно касаются друг друга. Найти радиус четвертого шара, который касается каждого из данных трех шаров и плоскости α.

Решение. Пусть A, B, C — центры данных шаров, A_1, B_1, C_1 — точки касания этих шаров с плоскостью α (рис. 39.10), O — центр четвертого шара, x — его радиус.

Тогда $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма со стороной основания $2r$ и боковым ребром r, а $OABC$ — правильная треугольная пирамида с вершиной O и боковым ребром $r + x$.

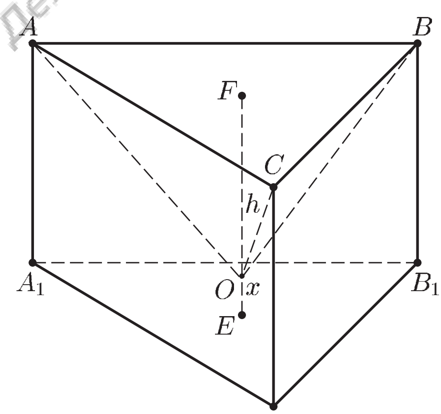

Рис. 39.10

Так как расстояние OE от точки O до плоскости $A_1B_1C_1$ равно x, а расстояние $OF = h$ от точки O до плоскости ABC (высота правильной пирамиды $OABC$, опущенная из вершины O) равняется $\sqrt{(r+x)^2 - \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2}$, то $x + h = r$.

Решив уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2rx - \frac{r^2}{3}} + x = r,$$

найдем $x = \frac{r}{3}$.

Ответ. $\frac{r}{3}$.

Пример 8. Основанием пирамиды $ABCD$ служит треугольник ABC, в котором $AB = 7$, $BC = 8$, $CA = 9$, высота DM пирамиды равна 5. Сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах ее основания. Найти радиус этой сферы.

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания сферы с боковыми гранями пирамиды, лежащие на сторонах AB, BC и CA соответственно (рис. 39.11), O — центр сферы, R — ее радиус. Тогда $OA_1 \perp A_1D$, $OB_1 \perp B_1D$, $OC_1 \perp C_1D$, так как сфера касается боковых граней пирамиды и поэтому ее радиусы, проведенные в точки A_1, B_1, C_1, перпендикулярны плоскостям ABD, BCD и CAD соответственно.

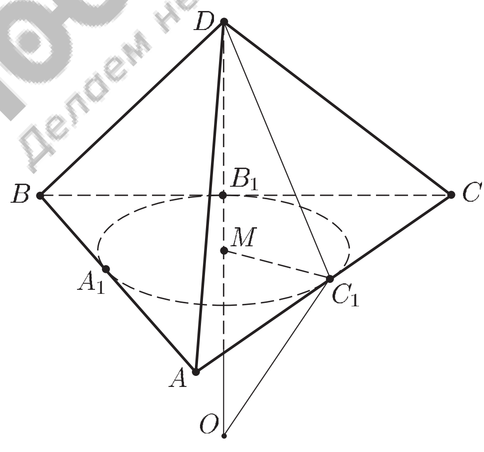

Рис. 39.11

Из равенства прямоугольных треугольников OA_1D, OB_1D и OC_1D следует, что $DA_1 = DB_1 = DC_1$, а из равенства прямоугольных треугольников DA_1M, DB_1M и DC_1M заключаем, что точка M равноудалена от точек A_1, B_1 и C_1 и поэтому является центром окружности L, проведенной через эти точки.

Но окружность L вписана в треугольник ABC, так как прямые AB, BC и CA являются касательными к сфере. Эта окружность получается в сечении сферы плоскостью ABC, а OM — перпендикуляр к плоскости ABC. Следовательно, точки O, M и D лежат на одной прямой.

Пусть $DC_1 = h$, $MC_1 = r$. Тогда из подобия треугольников OC_1M и MDC_1 ($OC_1 \perp DC_1$, $OD \perp MC_1$) следует, что $\frac{OC_1}{C_1M} = \frac{C_1D}{MD}$, откуда $R = \frac{rh}{5}$. Если S — площадь $\triangle ABC$, $p = \frac{AB + BC + CA}{2}$, то $S = rp$, где $p = 12$, $r = \sqrt{5}$, $h = \sqrt{DM^2 + MC_1^2} = \sqrt{30}$, $R = \frac{rh}{5} = \sqrt{6}$.

Ответ. $\sqrt{6}$.

§ 40. Комбинации круглых тел и многогранников

1. Цилиндр и многогранник. Конус и многогранник

Примеры с решениями

Пример 1. Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ служит равносторонний треугольник ABC со стороной a. Боковое ребро DA пирамиды перпендикулярно ее основанию и равно h. Среди всех прямых круговых цилиндров, вписанных в пирамиду, найти цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности.

Решение. Слова «цилиндр вписан в треугольную пирамиду» следует понимать так: нижнее основание цилиндра лежит на основании пирамиды, а верхнее основание цилиндра вписано в треугольник, получающийся при пересечении пирамиды плоскостью верхнего основания цилиндра.

Пусть A_1 — точка, лежащая на ребре DA, и пусть $AA_1 = x$ (рис. 40.1). Проведем через точку A_1 плоскость α, параллельную основанию ABC.

В сечении пирамиды плоскостью α получится равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников A_1B_1D и ABD следует, что

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1D}{AD}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{A_1B_1}{a} = \frac{h-x}{h},$$

откуда $A_1B_1 = \frac{h-x}{h}a$.

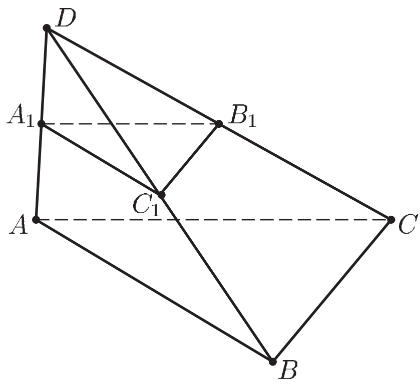

Рис. 40.1

Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, s — площадь боковой поверхности цилиндра, тогда

$$r = A_1B_1\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{h-x}{h}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad s = 2\pi r x = \frac{\pi a}{\sqrt{3}h}x(h-x).$$

Так как квадратичная функция $y = x(h-x)$ принимает наибольшее значение при $x = \frac{h}{2}$, то вписанный в пирамиду цилиндр с наибольшей боковой поверхностью имеет высоту, равную половине высоты пирамиды.

Пример 2. Внутри правильной треугольной пирамиды $ABCD$ расположен цилиндр так, что нижнее основание лежит на основании ABC пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковых граней пирамиды. Найти отношение объема пирамиды к объему цилиндра, если осевое сечение цилиндра — квадрат, а боковое ребро пирамиды образует с ее основанием угол $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Так как окружность верхнего основания цилиндра касается боковых граней пирамиды, то она вписана в треугольник $A_1B_1C_1$, получаемый в сечении пирамиды плоскостью верхнего основания цилиндра (рис. 40.2). Пусть $AB = a$, O_1 и O — центры оснований цилиндра, E — точка касания верхнего основания со стороной A_1C_1, $DO = h$, r — радиус основания цилиндра. Тогда O_1 и O — центры треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC, $O_1O = 2r$, $O_1E = r$, $B_1O_1 = 2r$, $DO = BO$, так как $\angle DBO = \frac{\pi}{4}$, $BO = \frac{a}{\sqrt{3}}$, т. е.

$$DO = h = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

С другой стороны, учитывая, что $DO_1 = B_1O_1 = 2O_1E = 2r$, получаем $DO = DO_1 + OO_1 = 4r$ и поэтому

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = 4r, \quad \text{откуда} \quad a = 4\sqrt{3}r.$$

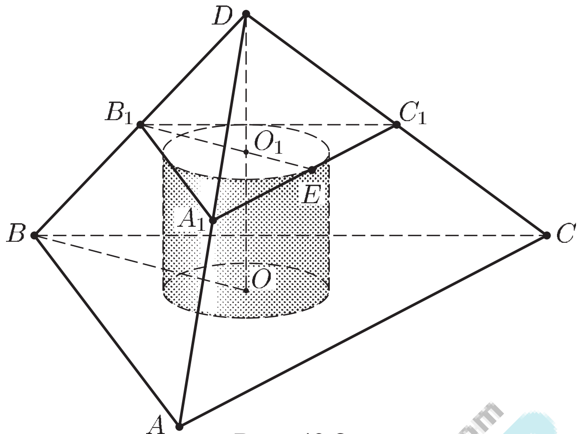

Рис. 40.2

Пусть v_1 и v_2 — объемы цилиндра и пирамиды. Тогда

$$v_1 = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3, \quad v_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{12}\, a^3 = 16\sqrt{3} r^3,$$

откуда $\frac{v_2}{v_1} = \frac{8\sqrt{3}}{\pi}$.

Ответ. $\frac{8\sqrt{3}}{\pi}$.

Пример 3. Правильная треугольная пирамида $SABC$ и цилиндр расположены так, что окружность нижнего основания цилиндра вписана в основание ABC пирамиды, а окружность верхнего основания цилиндра пересекает боковые ребра пирамиды. Найти отношение объема цилиндра к объему пирамиды.

Решение. Пусть D — середина AB, E и F — точки, в которых окружность верхнего основания цилиндра пересекает боковые ребра AS и BS пирамиды (рис. 40.3), M — центр верхнего основания цилиндра, K — середина EF, O — центр нижнего основания цилиндра, h и H — высоты цилиндра и пирамиды соответственно, a — сторона основания пирамиды, r — радиус основания цилиндра.

Тогда $DO = r$, $KM = \frac{r}{2}$, так как $ME = r$, а $\angle MEK = \frac{\pi}{6}$. Следовательно, KM — средняя линия в треугольнике ODS и поэтому $H = 2h$.

Пусть v_1 и v_2 — объем цилиндра и пирамиды, тогда $v_1 = \pi r^2 h$, где $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $v_2 = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2h$, откуда $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Ответ. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

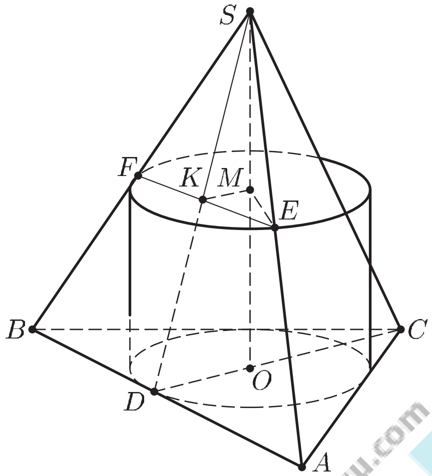

Рис. 40.3

Пример 4. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна a, боковое ребро равно $2a$. Конус расположен так, что его вершиной является точка A, а точки B, C и D лежат на боковой поверхности конуса (рис. 40.4). Найти угол между образующей конуса и его высотой.

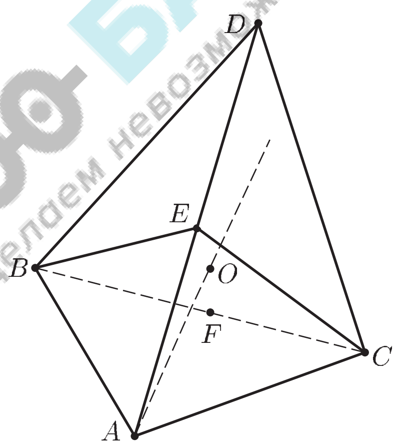

Рис. 40.4

Решение. Пусть E — середина AD, тогда точки B, C, E лежат на поверхности конуса (AD — образующая конуса) и равноудалены от его вершины A ($AB = AC = AE = a$). Следовательно, эти точки лежат на окружности, описанной около треугольника BCE, причем плоскость BCE перпендикулярна оси конуса, проходящей через центр O этой окружности.

Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника BCE, $\angle OAB = \varphi$ — искомый угол.

Тогда $\sin\varphi = \dfrac{BO}{AB} = \dfrac{R}{a}$, где

$$2R = \frac{BE}{\sin\alpha}, \qquad \alpha = \angle ECB.$$

Пусть $BE = x$, тогда $4x^2 + 4a^2 = 2(4a^2 + a^2)$ по свойству сторон и диагоналей параллелограмма (E — середина AD), откуда $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}a$.

Заметим, что x можно найти по теореме косинусов из $\triangle ABE$, в котором $\cos\beta = \dfrac{1}{4}$ ($\beta = \angle BAE$).

Найдем $\cos\alpha$ из $\triangle EFC$, где $EC = BE = x$, F — середина BC. Получим $\cos\alpha = \dfrac{BC}{2x} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$. Следовательно, $R = \dfrac{x}{2\sin\alpha} = \dfrac{3a}{2\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \dfrac{R}{a} = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$.

Ответ. $\arcsin\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$.

Пример 5. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти объем конуса, у которого вершина совпадает с точкой A, а окружность основания проходит через центры граней куба, не содержащих точку A.

Решение. Пусть E, F, G — центры соответственно граней BCC_1B_1, DCC_1D_1 и $A_1B_1C_1D_1$ куба (рис. 40.5), не проходящих через точку A, K и L — середины DC и D_1C_1, O — центр окружности, описанной около треугольника EFG.

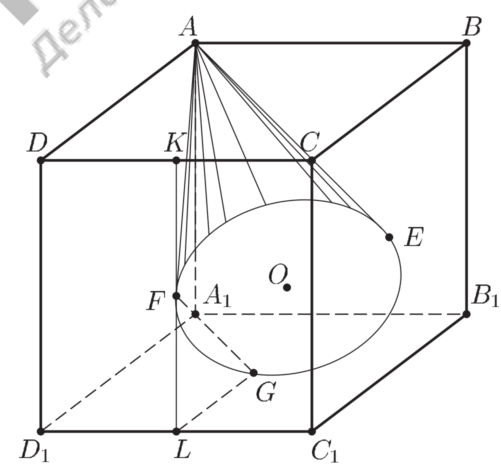

Рис. 40.5

Тогда $AF = AG = AE$, где $AF^2 = FK^2 + DK^2 + DA^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{3a^2}{2}$, $FG^2 = FL^2 + LG^2 = \frac{a^2}{2}$, $FG = GE = EF = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Если R — радиус основания, h — высота, v — объем конуса, то $R = \frac{FG}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$, $h^2 = AF^2 - R^2 = \frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{6} = \frac{4}{3}a^2$, откуда $h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, $v = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi a^3}{9\sqrt{3}} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{27}$.

Ответ. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{27}$.

Пример 6. Треугольная пирамида $ABCD$ и прямой круговой конус расположены так, что вершина D пирамиды является вершиной конуса, а окружность основания конуса вписана в треугольник BCM, где M — середина ребра DA, причем эта окружность касается стороны BC в ее середине N, а сторон BM и CM — в точках P и Q, которые совпадают с точками пересечения медиан треугольников ADB и ADC (рис. 40.6).

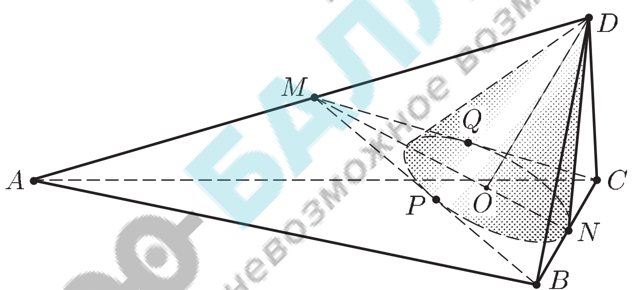

Рис. 40.6

Найти отношение площадей боковой поверхности пирамиды к площади ее основания, если высота конуса в 2 раза больше радиуса его основания.

Решение. Пусть O — центр основания конуса, r — радиус основания, h — высота, l — образующая конуса. Тогда $OP = OQ = ON = r$, $DN = DP = DQ = l$, $DO = h = 2r$, $l^2 = h^2 + r^2 = 5r^2$,

$$l = r\sqrt{5}.$$

Так как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны, то

$$MP = MQ = a, \qquad QC = CN, \qquad BN = BP.$$

Отсюда и из условия $BN = NC$ следует, что $MB = MC$ и поэтому $OC = OB$, откуда находим, что $DB = DC$ (из равенства прямоугольных треугольников DOB и DOC) и $\triangle MDB = \triangle MDC$ (по трем сторонам). Но тогда $\angle MDB = \angle MDC$ и $\triangle ADB = \triangle ADC$ (по двум сторонам и углу между ними).

Пусть s — площадь основания пирамиды, s_1 — площадь ее боковой поверхности. Тогда $s = \frac{1}{2} BC \cdot AN$, так как $AB = AC$. По условию, P и Q — точки пересечения медиан треугольников ADB и ADC, поэтому $PB = 2MP = 2a$, $BN = BP = 2a$, $BM = 3a$, $BC = 2BN = 4a$ и

$$s = 2a \cdot AN. \tag{1}$$

Так как площадь треугольника ADB равна удвоенной площади треугольника DMB, то

$$s_1 = \frac{1}{2} BC \cdot DN + 4 \cdot \frac{1}{2} BM \cdot DP,$$

где $BC = 4a$, $DN = l$, $BM = MP + PB = 3a$, $DP = l$, т. е.

$$s_1 = \frac{l}{2} 4a + 2l \cdot 3a = 8al = 8ar\sqrt{5}.$$

Чтобы найти искомое отношение $\frac{s_1}{s}$, нужно выразить r и AN через a.

Из подобия треугольников MOP и BMN следует, что $\frac{PM}{OP} = \frac{MN}{BN}$, $PM = a$, где $OP = r$, $BN = 2a$, $MN = \sqrt{BM^2 - BN^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$ и поэтому $r = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Отсюда

$$s_1 = 16a^2. \tag{2}$$

Для того, чтобы выразить AN через a, опустим из точки A перпендикуляр AF на плоскость BMC. Тогда $AF \| DO$, а точка F равноудалена от точек B и C ($AB = AC$) и поэтому лежит на прямой MN (рис. 40.7). Так как $DM = AM$, то $FA = DO = h = 2r = \frac{4a}{\sqrt{5}}$, $FM = OM = MN - ON = a\sqrt{5} - r$, т. е. $FM = a\sqrt{5} - \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}$, $FN = FM + MN = \frac{3a}{\sqrt{5}} + a\sqrt{5} = \frac{8a}{\sqrt{5}}$,

$$AN = \sqrt{FN^2 + FA^2} = a\sqrt{\frac{64}{5} + \frac{16}{5}} = 4a,$$

и из (1) следует, что

$$s = 8a^2, \tag{3}$$

а из (3) и (2) находим $\frac{s_1}{s} = 2$.

Ответ. 2.

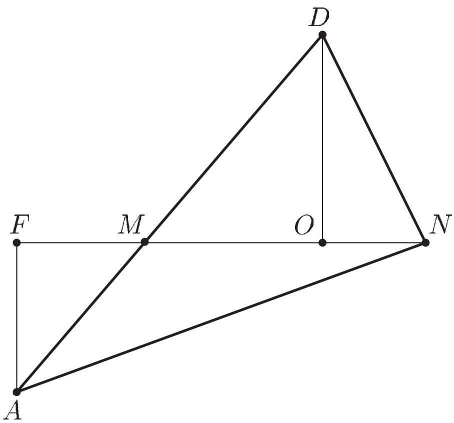

Рис. 40.7

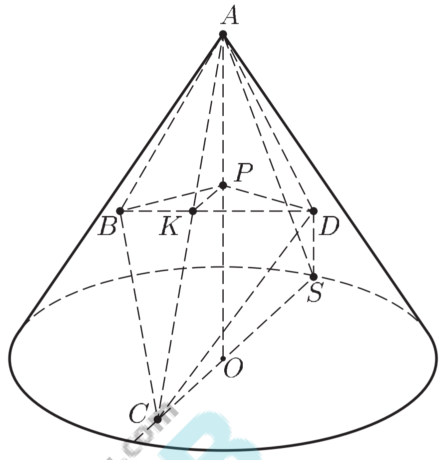

Рис. 40.8

Пример 7. Вершина A основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ совпадает с вершиной конуса (рис. 40.8), точки B и D лежат на боковой поверхности конуса, точка S — на окружности основания конуса, а точка C — в плоскости его основания. Найти отношение объема конуса к объему пирамиды.

Решение. Пусть a — сторона основания пирамиды, l — образующая конуса, R — радиус его основания. Так как боковое ребро SA пирамиды является образующей конуса ($SA = l$), то высота H пирамиды равна $\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{2}}$.

Если v_1 и v_2 — объемы соответственно пирамиды и конуса, то

$$v_1 = \frac{1}{3}a^2\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{2}}, \qquad v_2 = \frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2 - R^2},$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \pi\left(\frac{R}{a}\right)^2\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{R}{l}\right)^2}{1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2\frac{1}{2}}}.$$

Обозначим $\frac{a}{l} = x$, $\frac{R}{l} = y$, тогда

$$\frac{v_2}{v_1} = \pi\left(\frac{y}{x}\right)^2\sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - \frac{x^2}{2}}} \tag{1}$$

и для нахождения отношения $\frac{v_2}{v_1}$ достаточно вычислить x и y.

Пусть O — центр основания конуса. K — центр основания $ABCD$ пирамиды (K — середина AC), $KP \| OC$, $P \in AO$.

Тогда $AC^2 = AO^2 + OC^2$, где $AC = a\sqrt{2}$, $AO^2 = l^2 - R^2$, $OC = l - R$ ($SC = SA = l$, $SO = R$) и поэтому

$$a^2 = l^2 - Rl. \tag{2}$$

Найдем еще одно соотношение между a, l и R, пользуясь тем, что $PK = \frac{OC}{2}$ и $PK^2 = PD^2 - KD^2$ ($PB = PD$, PK — высота в равнобедренном треугольнике BPD).

Но $PD = AD \cdot \sin\varphi = a \sin\varphi$, где $\varphi = \angle PAD = \angle OAS$, $\sin\varphi = \frac{R}{l}$, $KD = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Отсюда получаем

$$PK^2 = \left(\frac{l-R}{2}\right)^2 = a^2 \cdot \frac{R^2}{l^2} - \frac{a^2}{2}. \tag{3}$$

Так как $\frac{a}{l} = x$, $\frac{R}{l} = y$, то равенства (2), (3) можно записать в виде

$$y = 1 - x^2, \qquad \left(\frac{1-y}{2}\right)^2 = y^2x^2 - \frac{1}{2}x^2,$$

откуда

$$\frac{x^4}{4} = x^2(1-x^2)^2 - \frac{1}{2}x^2,$$

где $x = 0$, и поэтому

$$\frac{x^2}{4} = (1-x^2)^2 - \frac{1}{2}.$$

Полагая $x^2 = t$, получаем $\frac{t}{4} = (1-t)^2 - \frac{1}{2}$ или $4t^2 - 9t + 2 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{4}$.

Значение $t = 2$ следует отбросить, так как $a < 1$. Поэтому $x^2 = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 1 - x^2 = \frac{3}{4}$. Подставляя найденные значения x и y в формулу (1), находим $\frac{v_2}{v_1} = \frac{9\pi}{4\sqrt{2}}$.

Ответ. $\frac{9\pi}{4\sqrt{2}}$.

Пример 8. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $ABCD$ равна 2, боковое ребро равно $\sqrt{14}$. Основание конуса вписано в треугольник AB_1D_1 (рис. 40.9), а вершина конуса лежит в плоскости AB_1C_1. Найти объем конуса.

Решение. Пусть F — середина B_1D_1, O — центр окружности, вписанной в треугольник AB_1D_1, r — радиус этой окружности (радиус основания конуса).

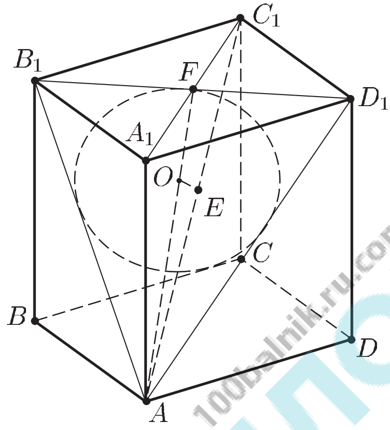

Рис. 40.9

Так как $AB_1 = AD_1$, то AF — биссектриса и высота в треугольнике AB_1D_1 и поэтому точка O лежит на AF, а $OF = r$.

Заметим, что диагональная плоскость AA_1C_1C призмы перпендикулярна плоскости AB_1D_1, в которой лежит основание конуса, так как прямая B_1D_1, принадлежащая плоскости AB_1D_1, перпендикулярна плоскости AA_1C_1C.

По условию, точка E лежит в плоскости AB_1C_1. Кроме того, точка E лежит в плоскости AA_1C_1C, так как прямая OE, перпендикулярная к плоскости AB_1D_1, лежит в плоскости AA_1C_1C. Следовательно, точка E принадлежит линии пересечения плоскостей AA_1C_1C и ABC_1, т. е. $E \in AC_1$.

Задача свелась к вычислению r и h, где $h = OE$ — длина отрезка прямой, проведенной в треугольнике AFC_1 через точку O перпендикулярно AF.

Для вычисления r воспользуемся формулой $r = \frac{s}{p}$, где s — площадь, p — полупериметр треугольника AB_1D_1.

По условию $BB_1 = \sqrt{14}$, $AB = 2$ и поэтому $AB_1 = AD_1 = \sqrt{14+4} = 3\sqrt{2}$, $B_1F = \sqrt{2}$, $AF = \sqrt{18-2} = 4$, $s = \frac{1}{2}B_1D_1 \cdot AF = \frac{1}{2}2\sqrt{2} \cdot 4 = 4\sqrt{2}$, $p = AB_1 + B_1F = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$, откуда $r = 1$.

Найдем $OE = h$, пользуясь формулой $OE = OA \cdot \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha = \angle OAE$, $OA = AF - OF = 4 - r = 3$. Поэтому $h = 3\operatorname{tg}\alpha$.

Для нахождения α воспользуемся теоремой косинусов в треугольнике AFC_1. Имеем

$$\cos\alpha = \frac{AF^2 + AC_1^2 - FC_1^2}{2AF \cdot AC_1}, \quad \text{где} \quad AF = 4, \quad FC_1 = \sqrt{2},$$

$$AC_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1C_1^2} = \sqrt{14 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{22}.$$

Следовательно, $\cos\alpha = \dfrac{16+22-2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{22}} = \dfrac{9}{2\sqrt{22}}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{22}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{9}$, $h = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$. Объем конуса $v = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi\sqrt{7}}{9}$.

Ответ. $\dfrac{\pi\sqrt{7}}{9}$.

Пример 9. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD, а вершиной конуса является точка O, лежащая на высоте BE треугольника ABC так, что $BE : OB = 3$. Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой B.

Решение. 1) Пусть O_1 — центр основания конуса, O_2 — центр грани ABC, E — середина AC, F — точка пересечения окружности основания конуса с DE (рис. 40.10), $\angle DAC = 2\alpha$, $\angle BED = \beta$. Тогда $OO_1 \perp DE$, $DO_2 \perp BE$, $O_2E = BO = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, $OF = OE = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $\angle OFE = \beta$, $\angle O_1AE = \alpha$, $r = OE\cdot\cos\beta = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\cos\beta = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $DE = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}\dfrac{1}{\cos\beta}$,

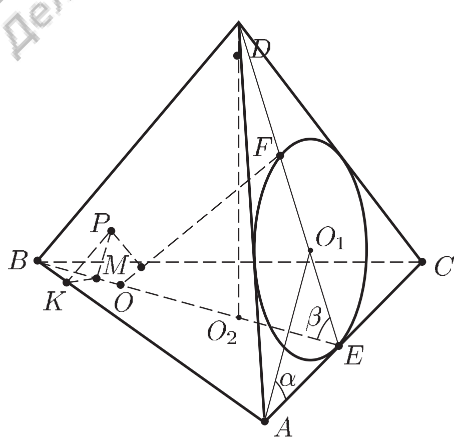

Рис. 40.10

откуда $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cos\beta}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\beta$, $\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$, $4\operatorname{tg}^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$, $\operatorname{ctg}\beta = \sqrt{\dfrac{3}{13}}$, $r = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{4}$.

2) Центр P вписанного шара лежит в плоскости BDE. Точка P равноудалена от OF и OB и принадлежит плоскости, делящей пополам двугранный угол при ребре AB.

Пусть R — радиус шара, M и K — проекции точки P на BE и AB соответственно (рис. 40.10). Тогда $\angle PKM = \dfrac{\beta}{2}$, $\angle BOP = \angle POF = \beta$, ($\angle BOF = 2\beta$ по свойству внешнего угла треугольника FOE). Поэтому $OM = R\operatorname{ctg}\beta$, $KM = R\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$, $BM = 2KM = 2R\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$. С другой стороны, $BM = BO - OM = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} - R\operatorname{ctg}\beta$. Следовательно, $2R\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} - R\operatorname{ctg}\beta$, откуда

$$R = \frac{a}{2\sqrt{3}\left(2\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\beta\right)}.$$

Так как $\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta} = \dfrac{4+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \dfrac{(4+\sqrt{3})^2}{13}$, то $\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ и

$$2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\beta = \frac{8+3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}; \quad R = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}(8+3\sqrt{3})} = \frac{a\sqrt{13}(8-3\sqrt{3})}{74\sqrt{3}}.$$

Ответ. Радиус основания конуса $r = \dfrac{a}{4}$, радиус шара $R = \dfrac{a\sqrt{13}(8-3\sqrt{3})}{74\sqrt{3}}$.

Пример 10. Две противоположные боковые грани четырехугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $\sqrt{5}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD = BC$), описанная около окружности и такая, что $AB = 6$, $\angle BAD = \dfrac{\pi}{3}$. Найти расстояние от точки D до плоскости SAB.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD, а вершина принадлежит грани SAB. Найти объем конуса.

Решение. Пусть E — точка пересечения BC и AD, M и N — середины отрезков CD и AB соответственно (рис. 40.11). Тогда ABE — правильный треугольник, $NE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = 3\sqrt{3}$, $MN = \dfrac{2}{3}NE = 2\sqrt{3}$, $ME = \sqrt{3}$, так как MN — диаметр вписанной в треугольник ABE окружности, радиус которой равен $\dfrac{1}{3}NE$.

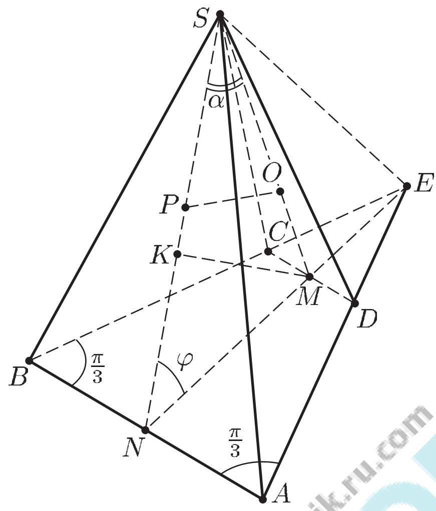

Рис. 40.11

Заметим, что перпендикулярными основанию пирамиды являются грани SBC и SAD, а линия их пересечения (прямая SE) — перпендикуляр к основанию и $SE = \sqrt{5}$.

Пусть MK — высота в треугольнике SMN, тогда MK — перпендикуляр к плоскости ABS ($KM \perp SN$ и $KM \perp AB$, так как AB — перпендикуляр к плоскости SNE). Прямая CD параллельна плоскости SAB и поэтому расстояние от точки D до плоскости SAB равно MK.

Если $\angle SNM = \varphi$, то $KM = MN\sin\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{SE}{NE} = \dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$, откуда $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$, $KM = 2\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{30}}{4}$.

2) Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник SCD, P — точка пересечения отрезка SN с перпендикуляром к стороне SM треугольника SMN, проведенным через точку O.

Радиус r этой окружности равен радиусу основания конуса, высота H конуса равна OP, а его объем $v = \dfrac{1}{3}\pi r^2 H$.

Если σ — площадь треугольника SCD, p — его полупериметр, то $\sigma = \dfrac{1}{2}CD \cdot SM$, $p = SD + \dfrac{CD}{2}$, где $CD = \dfrac{1}{3}AB = 2$, $SM = \sqrt{SE^2 + ME^2} = \sqrt{5+3} = 2\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{SM^2 + MD^2} = \sqrt{8+1} = 3$, $p = 4$, $\sigma = 2\sqrt{2}$ и поэтому $r = \dfrac{\sigma}{p} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $SO = SM - r = 2\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Пусть $\angle NSM = \alpha$, тогда $H = SO \cdot \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Найдем $\cos\alpha$, применив теорему косинусов к треугольнику SMN. Получим $MN^2 = SN^2 + SM^2 - 2SN \cdot SM\cos\alpha$, где

$SN = \sqrt{SE^2 + NE^2} = \sqrt{5+27} = 4\sqrt{2}$, $SM = 2\sqrt{2}$, откуда $\cos\alpha = \frac{7}{8}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{7}$ и $H = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{7} = \frac{3\sqrt{30}}{14}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{30}}{4}$, $\frac{\pi\sqrt{30}}{28}$.

2. Комбинации многогранников

Примеры с решениями

Пример 11. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $AC = BC = a$ (рис. 40.12).

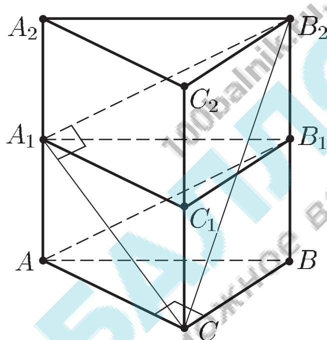

Рис. 40.12

Правильный тетраэдр расположен так, что две его вершины лежат на прямой CA_1, а две другие — на прямой AB_1. Найти:

1) объем призмы;

2) расстояние между серединами скрещивающихся ребер тетраэдра.

Решение. 1) Так как скрещивающиеся ребра правильного тетраэдра перпендикулярны, то $CA_1 \perp AB_1$. Угол между прямыми CA_1 и AB_1 равен углу между CA_1 и A_1B_2, где $A_1B_2 \| AB_1$.

Высоту призмы h найдем, пользуясь тем, что $A_1B_2 \perp A_1C$.

Чтобы найти h, построим призму $A_1B_1C_1A_1B_2C_2$, равную исходной призме.

Из $\triangle CA_1B_2$ имеем $CB_2^2 = CA_1^2 + A_1B_2^2$, где $CB_2^2 = 4h^2 + a^2$, $CA_1^2 = h^2 + a^2$, $A_1B_2^2 = A_1B_1^2 + B_1B_2^2 = 2a^2 + h^2$.

Следовательно, $a^2 + 4h^2 = h^2 + a^2 + 2a^2 + h^2$, откуда $h = a$, искомый объем $v = \frac{a^3}{2}$.

2) Так как отрезок, соединяющий середины скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, перпендикулярен этим ребрам, то его длина x равна расстоянию между скрещивающимися ребрами.

Заметим, что это расстояние равно расстоянию от какой-нибудь точки прямой AB_1 (например, от точки B_1) до плоскости A_1B_2C, параллельной прямой AB_1 и проходящей через прямую CA_1.

Чтобы найти x, вычислим двумя способами объем v пирамиды $B_1CA_1B_2$. Имеем $v = \frac{1}{3}s_1h_1$, где $s_1 = \frac{1}{2}B_1B_2 \cdot BC = \frac{a^2}{2}$ — площадь треугольника B_2CB_1, $h_1 = AC = a$ (расстояние от точки A_1 до плоскости B_2CB_1 равно расстоянию от точки A до этой плоскости, так как $AA_1 \| B_1B_2$, а прямая AC перпендикулярна плоскости B_2C_2CB, так как $AC \perp CC_2$ и $AC \perp CB$).

Итак, $v = \frac{1}{6}a^3$.

С другой стороны, $v = s_2x$, где $s_2 = \frac{1}{2}CA_1 \cdot A_1B_2 = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{6}}{6}$ — площадь треугольника B_2A_1C.

Следовательно, $\frac{a^2\sqrt{6}}{6}x = \frac{a^3}{6}$, откуда $x = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Ответ. 1) $\frac{a^3}{6}$; $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Пример 12. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и правильная четырехугольная пирамида $SMNPQ$ расположены так, что плоскость грани $ABCD$ куба совпадает с плоскостью основания пирамиды $MNPQ$, точка B_1 лежит на ребре SN, середина E ребра MQ лежит на прямой AB, $EA = AB$, а прямая SP пересекает ребро CC_1 в точке F. Найти отношение $C_1F : FC$.

Решение. Рассмотрим ортогональную проекцию куба и пирамиды на плоскость ее основания $MNPQ$ (рис. 40.13). Вершина S пирамиды спроектируется в центр O квадрата $MNPQ$, куб — в квадрат $ABCD$, его вершины B и C лежат на отрезках ON и OP, которые являются проекциями боковых ребер пирамиды.

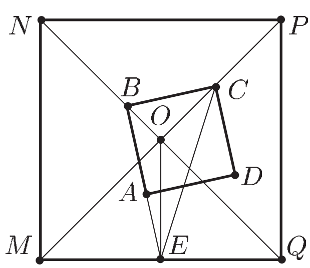

Рис. 40.13

По условию точка E (середина MQ) лежит на AB, а BCE — прямоугольный треугольник (B — прямой угол), в котором

$$BE = 2BC, \qquad CE = \sqrt{5}BC. \tag{1}$$

Обозначим $a = MN$, $x = OB$, $y = OC$, а затем воспользуемся теоремой косинусов для треугольников OBE и OCE, учитывая, что $\angle BOE = \angle COE = \frac{3}{4}\pi$, $OE = \frac{a}{2}$. Получим

$$BE^2 = x^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{ax}{\sqrt{2}} = 4(x^2 + y^2), \tag{2}$$

$$CE^2 = y^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{ay}{\sqrt{2}} = 5(x^2 + y^2), \tag{3}$$

так как $BE^2 = 4BC^2$, $CE = 5BC^2$, в силу (1), а $BC^2 = BO^2 + OC^2 = x^2 + y^2$.

Складывая и вычитая уравнения (1) и (3), получаем систему

$$\begin{cases} \frac{a^2}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}(x + y) = 8(x^2 + y^2), & (4) \\ \frac{a}{\sqrt{2}}(y - x) + y^2 - x^2 = x^2 + y^2. & (5) \end{cases}$$

Так как левую часть (5) можно записать в виде произведения $(y - x)\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + x + y\right)$, то, используя (4), из уравнения (5) найдем, что

$$y - x = \frac{a}{8\sqrt{2}}. \tag{6}$$

Решив систему (4), (6), равносильную системе (4), (5), получим

$$x = \frac{a}{4\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{3a}{8\sqrt{2}}. \tag{7}$$

Рассмотрим далее треугольники SON и SOP (рис. 40.14).

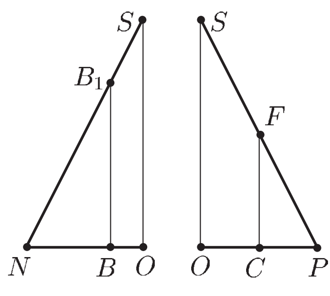

Рис. 40.14

Так как $\triangle SON \sim \triangle B_1BN$, $\triangle SOP \sim \triangle FCP$, где $NO = OP = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $OB = x = \frac{a}{4\sqrt{2}}$, $OC = y = \frac{3a}{8\sqrt{2}}$ в силу (7), то $B_1B = \frac{3}{4}SO$,

$FC = \frac{5}{8}SO$, $CC_1 = BB_1 = \frac{3}{4}SO$, $C_1F = CC_1 - FC = \frac{1}{8}SO$. Отсюда находим $C_1F : FC = \frac{1}{8}SO : \frac{5}{8}SO = 1 : 5$.

Ответ. $1 : 5$.

Пример 13. Правильная треугольная пирамида $SABC$ с вершиной S и правильная треугольная призма $A_1B_1CA_2B_2S$, в которой A_1A_2, B_1B_2 и SC — боковые ребра, а $A_1B_1C_1$ — одно из оснований, расположены так, что вершины A_1 и B_1 лежат в плоскости грани SAB пирамиды (рис. 40.15).

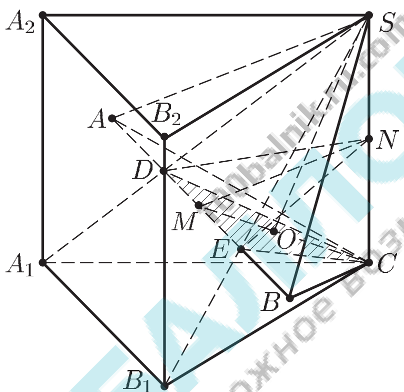

Рис. 40.15

Найти отношение $\frac{v_1}{v}$, где v — объем пирамиды $SABC$, а v_1 — объем части этой пирамиды, лежащей внутри призмы, если $\frac{SC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Решение. Так как точки S, A_1, B_1, A, B лежат в одной плоскости, то ребро AB пирамиды пересекает боковые грани призмы в точках E и D, лежащих на диагоналях SB_1 и SA_1 боковых граней, причем $BE = AD$ (призма и пирамида являются правильными).

Пусть N — точка пересечения с ребром SC плоскости, проходящей через AB и перпендикулярной SC, M — середина ED, $DM = ME = x$, $AB = BC = AC = a$.

Внутри призмы лежит пирамида $SCDE$, причем $\frac{v_1}{v} = \frac{s_1}{s_2}$, где s_1 — площадь треугольника CDE, s_2 — площадь треугольника ABC.

Так как $s_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $s_1 = MC \cdot x = \frac{a\sqrt{3}}{2}x$, то искомое отношение $\frac{v_1}{v} = \frac{2x}{a}$.

Пусть $\angle END = \alpha$, тогда $\alpha = \beta$, где β — двугранный угол при ребре SC призмы, так как EN и DN лежат в боковых гранях призмы, пересекающихся по ребру SC, и перпендикулярны SC (плоскость DNE перпендикулярна SC).

С другой стороны, $\beta = \frac{\pi}{3}$, так как призма прямая (угол между A_2S и B_2S — двугранный угол призмы при ребре SC).

Итак, $\angle DNE = \frac{\pi}{3}$ и поэтому $\angle ENM = \frac{\pi}{6}$, $ME = x = MN \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} MN$. Чтобы найти MN, вычислим двумя способами площадь $\triangle SMC$. Имеем

$$MN \cdot SC = MC \cdot SO, \quad \text{где} \quad SO \text{ — высота пирамиды},$$

$$MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = a\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = a.$$

Следовательно,

$$MN = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} : \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{3}{4}a, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a, \qquad \frac{v_1}{v} = \frac{2x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задачи к главам 10–12

Первый уровень

1. Из точки M проведена наклонная MA к плоскости α. Найти ее проекцию на плоскость, если $MA = 37$, а расстояние от точки M до плоскости α равно 12.
2. Найти расстояние от точки M до плоскости α, если наклонная MA, равная a, образует с плоскостью α угол $\frac{\pi}{6}$.
3. Перпендикуляр, проведенный из точки M к плоскости прямоугольника $ABCD$, проходит через его вершину A. Найти MC, если $AB = 8$, $BC = 6$, $MA = 10$.
4. Из точки M проведены к плоскости α перпендикуляр MA и наклонная MB. Найти проекцию MA на MB, если $MA = 4$, $MB = 5$.
5. Из концов отрезка AB, лежащего вне плоскости α, опущены на эту плоскость перпендикуляры AM и BN.
   Найти проекцию отрезка AB на плоскость α, если $AB = 26$, $AM = 42$, $BN = 32$.
6. Из концов отрезка AB, лежащего вне плоскости α, опущены на эту плоскость перпендикуляры AM и BN.
   Найти расстояние от середины отрезка AB до плоскости α, если $AM{=}12$, $BN{=}18$.
7. Отрезок AB параллелен плоскости α.
   Найти расстояние от точки A до проекции M точки B на плоскость α, если $AB = 4$, а наклонная AM образует с плоскостью α угол $\frac{\pi}{3}$.

8. Какая фигура получится, если куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересечен плоскостью P, проходящей через ребро AD и середину ребра CC_1?
Найти площадь этой фигуры, если ребро куба равно 1. Найти $\sin\alpha$, где α — угол между плоскостью P и основанием $ABCD$.
9. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти расстояние между прямыми: а) AA_1 и B_1D_1; б) AA_1 и C_1D; в) AA_1 и B_1D.
10. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 16, высота равна 6.
Найти: а) $\mathrm{tg}\,\alpha$, где α — двугранный угол между основанием и боковой гранью пирамиды; б) $\mathrm{tg}\,\beta$, где β — угол между боковым ребром и плоскостью основания.
11. Можно ли пересечь треугольную призму так, чтобы в сечении получился: а) четырехугольник; б) шестиугольник?
12. Можно ли утверждать, что параллелепипед является прямым, если две его диагонали равны?
13. Можно ли утверждать, что две пирамиды имеют равные объемы, если у них общие основания, а вершины пирамид расположены в плоскости, параллельной основанию?
14. От данной пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию, отсечена пирамида.
Найти отношение объемов этих пирамид, если отношение их высот равно $1 : 2$.
15. Найти высоту правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, если сторона ее основания $ABCD$ равна 8, а высота SE боковой грани равна 5.
16. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти:
а) диагональ AC_1 куба;
б) расстояние от точки A до середины ребра B_1C_1;
в) расстояние от точки A до диагонали B_1C боковой грани;
г) расстояние между серединами ребер CD и B_1C_1.
17. Какая фигура получится в сечении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер BB_1 и DD_1?
Найти площадь этой фигуры, если ребро куба равно 1.
18. Две треугольные призмы имеют равные соответственные боковые грани. Можно ли утверждать, что эти призмы равны?
19. Является ли призма правильной, если все ее ребра равны друг другу?
20. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a соединены середины ребер BC, C_1D_1 и AA_1. Найти периметр полученного треугольника.
21. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, все плоские углы при вершине пирамиды — прямые.
Найти высоту пирамиды.
22. Найти объем правильного тетраэдра, если:
а) радиус окружности, описанной около его грани, равен $\sqrt{6}$;
б) высота пирамиды равна $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.
23. Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если стороны его основания равны 3 и 4, а диагональ параллелепипеда равна $5\sqrt{2}$.
24. Найти угол наклона бокового ребра правильной треугольной пирамиды к ее основанию, если высота пирамиды и сторона основания равны 2.
25. Найти высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна $3\sqrt{3}$, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом $\frac{\pi}{4}$.

26. Найти площадь сечения правильного тетраэдра плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противолежащего ей бокового ребра, если ребро тетраэдра равно 2.

27. Найти объем прямой призмы, если площадь ее боковой поверхности равна 3, в основании лежит параллелограмм со сторонами 3 и 4, а угол между ними равен $\frac{\pi}{6}$.

28. Найти угол между двумя диагоналями граней куба, имеющими общий конец.

29. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через диагонали двух граней, если эти диагонали проведены из одной вершины куба, а ребро куба равно 1.

30. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого равна 4.
Найти площадь основания цилиндра.

31. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник.
Найти его площадь, если радиус основания конуса равен 5.

32. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 и 11, образующая равна 10.
Найти:
а) высоту усеченного конуса;
б) площадь его осевого сечения.

33. Найти площадь поверхности куба, диагональ которого равна $\sqrt{5}$.

34. Найти высоту конуса, если радиус его основания равен 3, а площадь боковой поверхности равна 15π.

35. Найти объем правильной пирамиды, в основании которой лежит квадрат со стороной $\sqrt{3}$, а боковые грани наклонены под углом $\frac{\pi}{6}$ к основанию.

36. Найти объем конуса, если радиус его основания равен 1, а угол при вершине в развертке боковой поверхности конуса равен $\frac{\pi}{2}$.

37. Высота конуса равна диаметру его основания.
Найти отношение площади основания к боковой поверхности конуса.

38. В конус, осевое сечение которого — равносторонний треугольник, вписан шар.
Найти объем конуса, если объем шара равен $\frac{32\pi}{3}$.

39. Найти отношение объема шара к площади его поверхности, если радиус шара равен 9.

40. Около шара описана правильная треугольная призма, а около нее описан шар.
Найти отношение площади поверхности большего шара к площади поверхности меньшего.

Второй уровень

1. Из точки M к плоскости α проведены перпендикуляр MO и наклонные MA и MB.
Найти MO, если $MA = 51$, $MB = 30$, $\frac{AO}{BO} = \frac{5}{2}$.

2. Угол с вершиной A расположен в плоскости α. Расстояния от точки M, лежащей вне плоскости α, до точки A и сторон угла равны 5, 4 и 3 соответственно.
Найти расстояние от точки M до плоскости α, если $\angle A = \frac{\pi}{3}$.

3. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна $\sqrt{3}$, а плоский угол при вершине равен $\frac{\pi}{6}$.

4. Найти объем конуса, если развертка его боковой поверхности — круговой сектор с центральным углом $\frac{6\pi}{5}$ и радиусом 5.

5. Найти радиус сферы, вписанной в конус, образующая которого равна l и наклонена к основанию конуса под углом α.

6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a, точки E и F — середины ребер AB и DD_1.
Найти: а) периметр треугольника A_1EF;
б) отношение объемов многогранников, на которые делит куб плоскость, проходящая через точки A_1, E и F.

7. Найти площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно боковому ребру, если сторона основания равна a, а боковое ребро равно b.

8. Найти площадь сечения правильного тетраэдра $SABC$ плоскостью, проведенной через вершину S перпендикулярно основанию ABC и параллельно стороне AB, если ребро тетраэдра равно a.

9. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, в которой боковое ребро равно 9, а двугранный угол между смежными боковыми гранями равен $\frac{2\pi}{3}$.

10. Две сферы с центрами O_1 и O_2 пересечены плоскостью α, перпендикулярной отрезку O_1O_2 и проходящей через его середину. Плоскость α делит площадь поверхности первой сферы в отношении $2:1$, а площадь поверхности второй сферы — в отношении $3:1$.
Найти отношение радиусов этих сфер.

11. Шар радиуса r вписан в конус, у которого угол осевого сечения при вершине равен 2α.
Найти объемы каждой из двух частей конуса, лежащих вне шара.

12. Найти объем треугольной пирамиды, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α, а каждое боковое ребро равно a и наклонено к плоскости основания под углом β.

13. Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна a, а угол между диагоналями боковых граней, исходящими из одной вершины, равен 2φ.

14. Основание прямой призмы — треугольник ABC, в котором $AB = BC = b$, $\angle ABC = \alpha$.
Найти объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна сумме площадей оснований призмы.

15. Найти отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности вписанного в конус шара, если высота конуса вдвое больше диаметра шара.

16. Основанием пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC, в котором $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $AB = BC = a$, $DA = DB = DC$. Высота DE боковой грани ADB равна a.
Найти радиус вписанной в пирамиду сферы.

17. Найти объем правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а радиус вписанного в пирамиду шара равен r.

18. Найти объем шара, описанного около конуса, если высота конуса равна диаметру его основания, а объем конуса равен v.

19. Найти угол между противоположными боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды, если отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади ее основания равно $\sqrt{3}$.

20. Найти угол между высотой и образующей конуса, если площадь его основания равна 2, а площадь боковой поверхности равна 4.

21. Через диагональ нижнего основания и вершину верхнего основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по отрезкам прямых, угол между которыми равен α.
Найти объем призмы, если сторона ее основания равна a.

22. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, в котором $AB = 17$, $BC = 15$, $AC = 8$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $\frac{\pi}{6}$.
Найти: а) объем пирамиды $SABC$;
б) двугранный угол между гранью ASC и основанием ABC пирамиды.

23. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ угол между стороной основания AD и диагональю параллелепипеда BD_1 равен α, а угол между AD и BD равен β.
Найти объем параллелепипеда, если $BD = b$.

24. Через две образующие конуса, угол между которыми равен 2α, проведена плоскость P.
Найти объем конуса, если его высота равна h, а угол между высотой конуса и плоскостью P равен β.

25. Найти радиус шара, вписанного в усеченный конус, если образующая усеченного конуса равна 10, а угол между образующей и основанием конуса равен $\frac{\pi}{4}$.

26. Найти радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, если боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{6}$, а радиус окружности, описанной около основания, равен $\sqrt{2}$.

27. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен $\frac{\pi}{3}$, а радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, равен $\sqrt{3}$.

28. Найти объем правильной треугольной пирамиды, если радиус вписанного в нее шара равен r, а угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α.

29. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β.
Найти угол между этими диагоналями.

30. Найти объем правильной треугольной пирамиды, в которой сторона основания равна 4, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $\frac{\pi}{3}$.

31. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F, G — середины ребер AD, DC и DD_1.
Найти объем пирамиды B_1EFG, если ребро куба равно 6.

32. Точка S — вершина правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, в которой $SA = AB = a$. В эту пирамиду вписан куб так, что вершина одной из граней куба лежит на основании $ABCD$ пирамиды, а вершины противоположной грани — на боковых ребрах пирамиды.
Найти ребро куба.

33. Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а угол между боковыми гранями равен α.

34. В конус вписаны два шара: первый шар касается боковой поверхности конуса и его основания, а второй — боковой поверхности конуса и первого шара.
Найти угол между образующими в осевом сечении конуса, если отношение объемов шаров равно 27.

35. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол между основанием пирамиды и ее боковой гранью равен α. Найти радиус описанной около пирамиды сферы.

36. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол между основанием и боковой гранью равен $\frac{\pi}{3}$.
Найти отношение объема пирамиды к объему вписанного в нее шара.

37. В треугольной пирамиде $ABCD$ через середины A_1 и B_1 ребер AD и BD проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке C_1 такой, что объем пирамиды $A_1B_1C_1D$ составляет $\frac{1}{6}$ объема пирамиды $ABCD$.
Найти отношение $\frac{C_1D}{CD}$.

38. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол:
а) между ребром AD и диагональю D_1C;
б) между ребром DC и диагональю A_1C_1;
в) между диагоналями AC_1 и B_1D_1.

39. В сферу радиуса R вписаны два прямых круговых конуса с общим основанием (вершины конусов лежат на сфере).
Найти площадь боковой поверхности каждого из конусов, если объем одного из них в 4 раза больше объема другого.

40. Конус вписан в шар.
Найти отношение объема конуса к объему шара, если образующая конуса наклонена к его основанию под углом α.

41. Угол между соседними боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды равен α, радиус описанной около этой пирамиды сферы равен R.
Найти боковое ребро пирамиды.

42. Два боковых ребра пирамиды, длины которых равны a и b, образуют угол $\frac{\pi}{3}$. Угол между проекциями этих ребер на плоскость основания пирамиды равен $\frac{2\pi}{3}$.
Найти высоту пирамиды.

43. В правильной треугольной пирамиде площадь боковой поверхности равна s, угол между основанием и боковой гранью равен α.
Найти высоту пирамиды.

44. Отношение объема усеченного конуса к объему вписанного в него шара равно $\frac{13}{6}$.
Найти угол между образующей конуса и его основанием.

45. Отношение радиуса основания конуса к радиусу вписанного в него шара равно m.
Найти отношение объема конуса к объему шара.

46. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c. Каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол α.
Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

47. Основанием конуса служит основание полусферы радиуса R. Боковая поверхность конуса пересекает сферу в точках, отстоящих от основания на расстоянии, равном $\frac{1}{4}$ высоты конуса.
Найти объем конуса.

48. Все ребра призмы равны a.
Найти площадь сечения призмы плоскостью, проведенной через сторону ее основания под углом α к плоскости основания $\left(\alpha > \frac{\pi}{3}\right)$.

49. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$ со стороной a, высота параллелепипеда равна $\frac{5}{4}a$.
Найти радиус сферы, проходящей через вершины A и B и касающейся граней параллелепипеда, параллельных AB.

50. Найти высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен 2α.

51. В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна a, боковое ребро равно $2a$, через середину бокового ребра и перпендикулярно к нему проведена плоскость.
Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

52. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостями AB_1D_1 и A_1C_1D, если $AB = 3$, $AD = 5$, $AA_1 = 4$.

53. Найти радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, если расстояния от центра шара до боковой грани и бокового ребра равны a и b соответственно.

54. Правильная треугольная пирамида и правильная треугольная призма расположены так, что стороны нижнего основания призмы являются средними линиями основания пирамиды, а стороны верхнего основания призмы пересекают боковые ребра пирамиды.
Найти отношение объема призмы к объему пирамиды.

55. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма со стороной основания a.
Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр шара и сторону основания призмы.

56. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 18, боковое ребро равно 15. Точка D лежит на ребре SC так, что $CD = 10$.
Найти расстояние от точки D до центра основания пирамиды.

57. Через середины двух смежных сторон основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол α и пересекающая три боковых ребра призмы.
Найти площадь сечения, если сторона основания равна a.

58. Через середину бокового ребра SA правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость, параллельная противоположному боковому ребру BC и перпендикулярная основанию ABC.
Найти объем отсеченной пирамиды, если объем пирамиды $SABC$ равен v.

59. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = c$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Через сторону AB под углом φ к основанию проведена плоскость, пересекающая ребро CC_1 в точке M.
Найти объем пирамиды $MABC$.

60. Найти объем прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, если площадь сечения, проведенного через точки B, C и A_1, равна s, а расстояние от точки B_1 до плоскости сечения равно h.

61. Треугольная пирамида, объем которой равен v, вписана в конус.
Найти объем конуса, если два угла треугольника, лежащего в основании пирамиды, равны α и β.

62. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если площадь ее боковой грани равна s, а угол между боковой гранью и основанием равен α.

63. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α.
Найти отношение объема вписанного в конус шара к объему шара, описанного около конуса.

64. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого составляет угол α с высотой.
Найти объем конуса.

65. Два касающихся друг друга шара расположены внутри конуса так, что оба шара касаются боковой поверхности конуса, а один из шаров касается основания конуса.
Найти объем конуса, если радиус меньшего шара равен R.

66. Найти радиус шара, касающегося всех ребер правильного тетраэдра, если ребро тетраэдра равно a.

67. Правильный тетраэдр с ребром a расположен внутри цилиндра так, что два его непересекающихся ребра являются диаметрами оснований цилиндра.
Найти радиус основания и высоту цилиндра.

68. В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине S равны α $\left(\alpha < \frac{2\pi}{3}\right)$, боковые грани ASC и ASB перпендикулярны основанию ABC, $AC = b$.
Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

69. Найти площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани, если сторона основания равна 12, а высота пирамиды равна $2\sqrt{6}$.

70. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. В пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом φ.
Найти объем конуса.

71. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β.
Найти угол между этими диагоналями.

72. Через вершину основания правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно к противоположному ребру проведена плоскость.
Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если боковое ребро пирамиды, равное l, образует с плоскостью основания угол α.

73. Пирамида, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами 3 и 4, а боковые ребра равны, рассечена плоскостью α, параллельной основанию, на две части равного объема.
Найти расстояние от вершины пирамиды до плоскости α.

74. Шар касается всех ребер куба.
Найти площадь части поверхности шара, лежащей внутри куба, если ребро куба равно 1.

75. В основании четырехугольной пирамиды лежит равнобедренная трапеция, в которой меньшее основание и боковая сторона равны b, а острый угол равен α. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ.
Найти объем пирамиды.

76. Полушар вписан в конус так, что основание полушара лежит на основании конуса.
Найти объем части конуса, лежащей вне шара, если образующая конуса равна 6, а угол между образующей и основанием конуса равен $\frac{\pi}{3}$.

77. Основание пирамиды — прямоугольник площади 9, боковые ребра пирамиды равны между собой и образуют с плоскостью основания угол $\frac{\pi}{4}$, угол между диагоналями основания равен $\frac{\pi}{3}$.
Найти объем пирамиды.

78. Найти двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием правильной треугольной пирамиды, если высота пирамиды равна 4, а боковое ребро равно 5.

79. Найти объем пирамиды, если ее основанием служит равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными b, и углом между ними, равным α, а все боковые ребра наклонены к основанию под углом φ.

80. Через вершину правильной четырехугольной пирамиды под углом φ к основанию проведена плоскость P параллельно стороне основания, равной a.
Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P, если плоский угол при вершине пирамиды равен α.

81. Шар радиуса r вписан в прямую призму, основанием которой является трапеция со средней линией, равной a.
Найти площадь боковой поверхности призмы.

82. Найти угол между медианой грани правильного тетраэдра и непересекающим ее ребром.

83. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a на продолжениях ребер AA_1, C_1D_1 и DC взяты точки E, F и K на расстоянии $\frac{a}{2}$ от точек A_1, C_1 и D соответственно.
Найти площадь треугольника EFK.

84. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро и высота основания равны a. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро основания перпендикулярно противолежащему ему боковому ребру.

Третий уровень

1. Сечением треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью α, параллельной противоположным ребрам AD и BC, является четырехугольник $EFMN$ такой, что его вершины E и F лежат на ребрах AB и AC, $EF = 1$, $AD = 4$, $BC = 2$.
Найти периметр четырехугольника $EFMN$.

2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a.
Найти радиус сферы, проходящей через вершины A и C_1 и середины ребер AA_1 и BB_1 куба.

3. Найти площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, которая проходит через ребро основания и делит пополам двугранный угол при основании, равный α, если сторона основания пирамиды равна a.

4. Найти отношение ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к радиусу сферы, проходящей через вершину A, середины ребер AB и AD и касающейся грани $A_1B_1C_1D_1$.

5. Основание наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α. Боковое ребро AA_1 равно b и образует с каждым из ребер AB и AD угол φ.
Найти объем параллелепипеда.

6. Основание треугольной пирамиды $ABCD$ — треугольник ABC, в котором $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\angle BAC = \alpha$. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный $\frac{\pi}{4}$.
Найти угол между гранями DAC и DBC.

7. Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = b$. Плоскость основания образует с гранью SDC угол, равный $\frac{\pi}{4}$, и перпендикулярна граням SAD и SAB.
Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a проведено сечение через вершину A перпендикулярно диагонали BD_1.
Найти: а) площадь сечения;
б) расстояние от точки B_1 до плоскости сечения.

9. Основание пирамиды $ABCD$ — правильный треугольник ABC. Боковая грань DAC перпендикулярна плоскости основания, а две другие боковые грани составляют с плоскостью основания угол $\frac{\pi}{4}$.
Найти угол между гранями DBC и DAC.

10. Найти угол между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α.

11. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка O — центр треугольника ABC, M, N и K — середины ребер AD, AB и CD соответственно.
Найти угол между OM и KN.

12. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1$ равна a, точки O и O_1 — центры оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5}{6}a$.
Найти высоту призмы.

13. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника ABC расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величины φ. Катет AB образует с ребром двугранного угла острый угол α.
Найти угол между этим ребром и катетом AC.

14. Стороны AB и AC равностороннего треугольника ABC расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величины φ. Сторона AB образует с ребром двугранного угла острый угол α.
Найти угол между плоскостью ABC и гранью Q.

15. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Внутри куба расположены касающиеся друг друга два шара, причем первый касается трех граней куба, сходящихся в вершине A, а второй — трех граней, сходящихся в вершине C.
Найти радиусы шаров, если их величины относятся как $1:2$.

16. Правильный тетраэдр $ABCD$ делится на две части равных объемов плоскостью α, проходящей через вершину A параллельно ребру CD.
Найти расстояние от вершины B до плоскости α, если ребро тетраэдра равно 1.

17. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре AB выбрана точка E так, что $AE = 2EB$. Через вершину D, точку E и середину F ребра C_1D_1 проведена плоскость α.
Найти двугранный угол между плоскостью α и гранью $ABCD$ куба.

18. Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник ABC со стороной a. Ребро куба AA_1 образует с плоскостью основания угол $\frac{\pi}{4}$, а центр треугольника ABC является ортогональной проекцией вершины A_1 на плоскость ABC.
Найти площадь боковой поверхности призмы.

19. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, сторона основания равна a.
Найти объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания под углом β к основанию.

20. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, в котором боковые стороны равны a и образуют между собой угол α. Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны к основанию, а третья боковая грань наклонена к основанию под углом α.
Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

21. Найти объем правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине пирамиды равен α, а расстояние между боковым ребром и противолежащей стороной основания пирамиды равно h.

22. Через вершину A прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость, пересекающая боковые ребра BB_1 и CC_1 в точках E и F соответственно.
В каком отношении эта плоскость делит объем призмы, если $AC = 6$, $AA_1 = 8$, $BE = EB_1$, а AF — биссектриса угла CAC_1?

23. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках A_1, B_1, C_1 соответственно.
В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если $\frac{SA_1}{AA_1} = \frac{SB_1}{B_1B} = 2$, а медиана SM треугольника SBC делится этой плоскостью пополам?

24. Около конуса описана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α.

Найти объем и площадь боковой поверхности пирамиды, если радиус основания конуса равен R, а его образующая наклонена к плоскости основания под углом β.

25. Найти объем конуса, описанного около правильной треугольной пирамиды, в которой двугранный угол при боковом ребре равен α, а высота равна h.

26. Найти угол между плоскостью основания $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и плоскостью, проходящей через вершину B и середины ребер AD и CC_1.

27. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна Q.
Ортогональной проекцией вершины S является точка пересечения диагоналей основания пирамиды, двугранные углы между основанием и боковыми гранями SAB и SBC равны α и β соответственно.
Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

28. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$ со стороной 8, ребро SA перпендикулярно основанию и $SA = 6$, точки E и F — середины отрезков AD и CD.
Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SDEF$.

29. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 12. Точка K лежит на продолжении ребра BC за точку C так, что $CK = 9$. Точка L лежит на ребре AB и $AL = 5$. Точка M лежит на диагонали основания A_1C_1 так, что $A_1M : MC_1 = 1 : 3$.
Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки K, L, M.

30. Через центр основания правильной шестиугольной пирамиды проведено сечение параллельно боковой грани.
Найти отношение площади сечения к площади боковой грани.

31. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре AB взята точка E так, что $AE = \frac{1}{4}AB$.
Найти двугранный угол между плоскостями AA_1C_1C и B_1OE, где O — центр грани $ABCD$.

32. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины ребер AB и AD соответственно.
Найти двугранный угол между плоскостями C_1B_1D и A_1MN.

33. Доказать, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскости AD_1B_1 и BDC_1 параллельны.
Найти расстояние между этими плоскостями, если ребро куба равно a.

34. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересечен плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, CD и центр грани $A_1B_1C_1D_1$.
Найти площадь сечения, если ребро куба равно a.

35. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны $3a$ и a. Через два параллельных ребра пирамиды, лежащих на разных основаниях и разных гранях, проведено сечение.
Найти площадь сечения, если угол между сечением и основанием пирамиды равен α.

36. Треугольная пирамида рассечена плоскостью α на два многогранника.
Найти отношение объемов этих многогранников, если известно, что плоскость α делит три боковые ребра, сходящиеся в одной вершине пирамиды, в отношениях $1 : 2$, $1 : 2$ и $2 : 1$, считая от вершины.

37. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а большее боковое ребро образует с основанием угол β. В пирамиду вписан шар.
Найти его радиус.

38. На плоскости P расположен треугольник ABC, в котором $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$. Расстояния от точки M, не лежащей в плоскости P, до точки A и прямых BC и AC равны a, b и c соответственно.
Найти расстояние от точки M до плоскости P.

39. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды и середину скрещивающегося с этой стороной бокового ребра проведено сечение.
Найти расстояние от вершины пирамиды до плоскости этого сечения, если сторона основания пирамиды равна a, а высота пирамиды равна h.

40. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а двугранный угол между основанием и боковой гранью равен α.
Найти расстояние между центром шара, вписанного в пирамиду, и центром шара, описанного около пирамиды.

41. Основанием пирамиды $SABCD$ служит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = a$, $BD = b$. Боковое ребро SA перпендикулярно основанию и равно l. Через точку A и середину ребра SC проведена плоскость, параллельная BD.
Найти площадь сечения.

42. Каждый из плоских углов трехгранного угла равен α. Точка M расположена внутри трехгранного угла на равном расстоянии от всех его граней. Найти это расстояние, если расстояние от точки M до вершины трехгранного угла равно d.

43. Через середину бокового ребра правильного тетраэдра под углом $\frac{\pi}{4}$ к его основанию и параллельно противолежащему ребру проведена плоскость.
Найти площадь сечения, если ребро тетраэдра равно a.

44. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро равно l.
Найти радиус шара, касающегося всех ребер пирамиды.

45. Ребро правильного тетраэдра равно a.
Найти радиус сферы, касающейся боковых граней тетраэдра, если центр этой сферы лежит на основании тетраэдра.

46. В полусферу радиуса R вписаны три равных шара так, что каждый шар касается двух других шаров, полусферы и ее основания.
Найти радиус этих шаров.

47. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если расстояния от центра ее основания до боковой грани и бокового ребра равны b и h соответственно.

48. Все боковые ребра треугольной пирамиды равны, а в ее основании лежит прямоугольный треугольник, в котором высота, опущенная из вершины прямого угла, равна h. Двугранные углы, образуемые гранями пирамиды, пересекающимися по катетам основания, равны α и β.
Найти объем пирамиды.

49. В правильной треугольной усеченной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ боковыми ребрами являются AA_1, BB_1 и CC_1, а сторона большего основания ABC равна a.
Найти высоту усеченной пирамиды, если расстояния от точек A и B_1 до плоскости A_1BC_1 равны p и q соответственно.

50. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD равны 6 и 8 соответственно, остальные ребра равны $\sqrt{74}$.
Найти радиус сферы, описанной около тетраэдра.

51. Два шара радиуса r и два шара радиуса x расположены так, что каждый шар касается трех других шаров и некоторой плоскости. Найти x.

52. Найти радиус сферы, проходящей через вершины нижнего основания куба с ребром a и касающейся ребер его верхнего основания.

53. Около конуса с высотой 2 описана правильная треугольная пирамида, сторона основания которой равна $3\sqrt{3}$.

Найти радиус сферы, вписанной в трехгранный угол при основании пирамиды и касающейся боковой поверхности конуса.

54. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины A, C_1 и середины ребер AA_1 и BB_1.

55. В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной a, боковое ребро призмы равно l. Прямая, проходящая через вершину B_1 и центр основания ABC, перпендикулярна основанию.
Найти площадь сечения, проходящего через ребро BC и середину ребра AA_1.

56. Внутри правильного тетраэдра с ребром a расположены четыре равных шара так, что каждый шар касается трех других шаров и трех граней тетраэдра.
Найти радиус этих шаров.

57. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна a, высота пирамиды равна $2\sqrt{2}a$. Через вершину A параллельно диагонали BD основания пирамиды проведена плоскость так, что угол между прямой AB и этой плоскостью равен $\frac{\pi}{6}$.

Найти площадь сечения.

58. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребре BD взята точка M так, что $DM = \frac{a}{3}$. Прямой круговой конус расположен так, что его вершина совпадает с серединой ребра AC, а окружность основания проходит через точку M и пересекает ребра AB и BC.
Найти радиус основания конуса.

59. В основании треугольной призмы лежит правильный треугольник со стороной a. Прямая, соединяющая одну из вершин верхнего основания с центром нижнего основания, перпендикулярна основаниям. Известно, что внутрь призмы можно поместить шар, касающийся всех граней призмы.
Найти боковое ребро призмы.

60. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна диагонали основания $ABCD$. Через вершину A параллельно прямой BD проведена плоскость, касающаяся вписанной в пирамиду сферы.
Найти отношение площади сечения к площади основания пирамиды.

61. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Через прямую B_1C проведена плоскость, пересекающая ребро AB в точке M и образующая угол $\frac{\pi}{3}$ с прямой A_1B.
Найти объем пирамиды $BCMB_1$.

62. Ребра AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$ равны $2\sqrt{5}$ и $2\sqrt{7}$ и образуют угол, равный $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{13}{7}}$. Отрезок, соединяющий середины ребер AB и CD, перпендикулярен к ним и равен $\sqrt{13}$.
Найти $\angle ACB$.

63. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и CD перпендикулярны, $AB = a$, $CD = b$, а углы, образуемые CD с гранями ACB и ABD, равны α. Найти объем пирамиды.

64. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=4$, $BC=2$; длины всех боковых ребер пирамиды равны 3. Через вершину B и середину M ребра SA параллельно диагонали AC основания проведена плоскость.
Найти угол между этой плоскостью и плоскостью SAC.

65. Шар касается одной грани куба и всех ребер противоположной грани.
Найти объем общей части шара и куба, если ребро куба равно a.

66. Радиус основания конуса равен 1. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен $\frac{\pi}{3}$.
Найти объем части конуса, лежащей в шаре радиуса $\sqrt{\frac{3}{2}}$, центр которого совпадает с центром основания конуса.

67. Найти объем части правильного тетраэдра с ребром a, заключенной между двумя сферами, одна из которых касается всех граней тетраэдра, а другая — всех ребер.

68. Конус, высота которого равна 4, касается внешне трех шаров радиуса 2, лежащих на плоскости основания конуса так, что каждый шар касается двух других.
Найти объем конуса.

69. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ угол между высотой SD боковой грани SBC и боковой гранью SAB равен $\frac{\pi}{4}$.
Найти высоту пирамиды, проведенную из ее вершины S, если сторона основания пирамиды равна a.

70. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и DC взаимно перпендикулярны, $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$, $\angle ABD = \frac{\pi}{6}$, угол между ребром CD и гранью ABD равен $\frac{\pi}{3}$, $AD = a$, середина ребра CD равноудалена от плоскостей ABD и ABC.
Найти длину ребра BC, угол CDB и угол между ребром AB и гранью BCD.

71. Внутри цилиндра лежит шар радиуса r и два равных шара радиуса $\frac{3r}{2}$ так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем шар радиуса r касается нижнего основания цилиндра, а два других шара касаются верхнего основания цилиндра. Найти радиус основания цилиндра, если его высота равна $4r$.

72. В основании четырехугольной пирамиды $SKLMN$ лежит равнобедренная трапеция $KLMN$, описанная около окружности и такая, что $KN = LM = 4$, $MN > KL$ и угол между прямыми KN и LM равен $\frac{\pi}{3}$.
Две противоположные боковые грани этой пирамиды перпендикулярны основанию и $SM = 12$. Найти расстояние от точки M до плоскости SKL.
Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SMN, а вершина принадлежит грани SKL. Вычислить высоту конуса.

Ответы

Первый уровень

1. 35. **2.** $\frac{a}{2}$. **3.** $10\sqrt{2}$. **4.** $\frac{16}{5}$. **5.** 24. **6.** 15. **7.** 8.

8. а) прямоугольник; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **9.** а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) 1; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

10. а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. **11.** а) да; б) нет. **12.** нет. **13.** да. **14.** $1:8$. **15.** 3.

16. а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; г) $\sqrt{\frac{3}{2}}$. **17.** а) ромб; б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **18.** да. **19.** нет.

20. $\frac{3a\sqrt{6}}{2}$. **21.** $\sqrt{6}$. **22.** а) 9; б) $\frac{9\sqrt{2}}{32}$. **23.** 60. **24.** $\frac{\pi}{3}$. **25.** 3. **26.** $\sqrt{2}$.

27. $\frac{9}{7}$. **28.** $\frac{\pi}{3}$. **29.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **30.** π. **31.** 25. **32.** а) 8; б) 128. **33.** 10.

34. 4. **35.** $\frac{1}{2}$. **36.** $\frac{\pi\sqrt{15}}{3}$. **37.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **38.** 24π. **39.** 3. **40.** 5.

Второй уровень

1. 24. **2.** $\sqrt{\frac{23}{3}}$. **3.** $2(2-\sqrt{3})$. **4.** 12π. **5.** $l \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$.

6. а) $\frac{a}{2}(\sqrt{6}+5\sqrt{2})$; б) $\frac{7}{41}$. **7.** $\frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$. **8.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{9}$. **9.** $108\sqrt{3}$.

10. $2:3$. **11.** $\frac{\pi r^3(1-\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha}$ и $\frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\cos^2\alpha}$. **12.** $\frac{1}{3}a^3\sin 2\alpha\sin\beta\cos^2\beta$.

13. $\frac{a^3}{8\sin\varphi}\sqrt{3-12\sin^2\varphi}$. **14.** $\frac{b^3\operatorname{tg}\alpha}{1+\cos\alpha}$. **15.** 2. **16.** $\frac{a(\sqrt{6}-1)}{5\sqrt{2}}$.

17. $\frac{a^4r}{\sqrt{3}(a^2-12r^2)}$. **18.** $\frac{125}{32}v$. **19.** $\frac{\pi}{2}$. **20.** $\frac{\pi}{6}$. **21.** $\frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

22. а) $\frac{170}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{17}{15\sqrt{3}}$. **23.** $\frac{b^3\sin 2\beta}{2\cos\alpha}\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}$.

24. $\frac{\pi h^3}{3\cos^2\alpha}(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta)$. **25.** $\frac{5}{\sqrt{2}}$. **26.** $\frac{3}{2}$. **27.** 12. **28.** $\sqrt{3}r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

29. $\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$. **30.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **31.** 22,5. **32.** $\frac{a}{1+\sqrt{2}}$.

33. $\frac{3a^2}{4\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}}$. **34.** $\frac{\pi}{3}$. **35.** $\frac{a}{2}\left(\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **36.** $\frac{9}{\pi}$. **37.** $\frac{2}{3}$.

38. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$. **39.** $\frac{8\pi R^2}{5\sqrt{5}}$, $\frac{6\pi R^2}{5\sqrt{5}}$. **40.** $2\sin^4\alpha\cos^2\alpha$.

41. $2R\sqrt{\cos\alpha}$. **42.** $\sqrt{\frac{4ab-a^2-b^2}{3}}$. **43.** $\sin\alpha\sqrt{\frac{s}{3\sqrt{3}\cos\alpha}}$. **44.** $\frac{\pi}{3}$.

45. $\frac{m^4}{2(m^2-1)}$. **46.** $\frac{c}{2\sin 2\alpha}$. **47.** $\frac{\pi R^3\sqrt{7}}{3}$. **48.** $\frac{a^2}{\sin\alpha}\left(1-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}\right)$.

49. $\frac{3}{4}a$. **50.** $\frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3(3-\operatorname{ctg}^2\alpha)}}$. **51.** $\frac{2\sqrt{11}}{49}a^2$. **52.** $2\operatorname{arctg}\frac{25}{12}$.

53. $\dfrac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$. **54.** $\dfrac{9}{16}$. **55.** $\dfrac{4a}{3}\sqrt{R^2-\dfrac{a^2}{4}}$. **56.** 8. **57.** $\dfrac{7a^2}{8\cos\alpha}$.

58. $\dfrac{v}{18}$. **59.** $\dfrac{a^3\sin^2\alpha\sin^2\beta\operatorname{tg}\varphi}{6\sin^2(\alpha+\beta)}$. **60.** sh. **61.** $\dfrac{\pi v}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$.

62. $\dfrac{4}{3}\sin\alpha\cdot Q^{3/2}\sqrt{\cos\alpha}$. **63.** $\sin^3 2\alpha\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$. **64.** $\dfrac{2}{3}\pi R^3\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha$.

65. $\dfrac{64}{3}\pi R^3$. **66.** $\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$. **67.** $\dfrac{a}{2}$, $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **68.** $\dfrac{b^2}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}(1+2\cos\alpha)$.

69. 25. **70.** $\dfrac{\pi a^3}{24}\sin^3\alpha\operatorname{tg}\varphi$. **71.** $\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$.

72. $2a^2\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$, $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. **73.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$. **74.** $\pi(3\sqrt{2}-4)$.

75. $\dfrac{2}{3}b^3\cos^3\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi$, $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$. **76.** $\dfrac{9}{4}\pi\sqrt{3}$. **77.** $3^{7/4}$. **78.** $\operatorname{arctg}\dfrac{8}{3}$.

79. $\dfrac{b^3}{6}\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi$. **80.** $\dfrac{a^2\sqrt{\cos\alpha}}{4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\varphi}$. **81.** $8ar$. **82.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

83. $\dfrac{7a^2\sqrt{3}}{8}$. **84.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{9}$.

Третий уровень

1. 6. **2.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **3.** $\dfrac{a^3\cos^3\dfrac{\alpha}{2}}{(1+2\cos\alpha)^2}$. **4.** $\dfrac{16}{9}$. **5.** $2a^2b\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\sin^2\varphi-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

6. $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)$. **7.** $\dfrac{\sqrt{a^2+2b^2}}{2}$. **8.** а) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **9.** $\operatorname{arctg}\sqrt{7}$.

10. $\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **11.** $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **12.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **13.** $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi)$.

14. $\arcsin\dfrac{2\sin\alpha\sin\varphi}{\sqrt{3}}$. **15.** $\dfrac{a}{5}$ и $\dfrac{2a}{5}$. **16.** $\sqrt{\dfrac{2(11+4\sqrt{2})}{89}}$. **17.** $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.

18. $\dfrac{a^2(\sqrt{6}+\sqrt{15})}{3}$. **19.** $\dfrac{\sin^2\alpha\cos\varphi+\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin^2(\alpha+\beta)}$. **20.** $a\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{4}$.

21. $\dfrac{h^3}{3\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$. **22.** $\dfrac{7}{17}$. **23.** $\dfrac{8}{37}$. **24.** $\dfrac{R^3}{6}\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, $\dfrac{R^2}{2\cos\beta}\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\operatorname{tg}\alpha$. **25.** $\dfrac{\pi h^3}{3}(3\operatorname{tg}^2\alpha-1)$. **26.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

27. $\dfrac{Q(\cos\alpha+\cos\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta}$. **28.** $\dfrac{12}{10+\sqrt{22}}$. **29.** 156. **30.** $\dfrac{5}{4}$. **31.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{11}}{3\sqrt{2}}$.

32. $\arccos\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$. **33.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **34.** $\dfrac{5\sqrt{14}}{16}a^2$. **35.** $\dfrac{11\sqrt{3}a^2}{2\cos\alpha}$. **36.** $\dfrac{2}{25}$.

37. $\dfrac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta}{1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}}$. **38.** $\sqrt{\dfrac{4(b^2+c^2)-5a^2+4\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}}{3}}$.

39. $\dfrac{2ah}{\sqrt{4h^2+9a^2}}$. **40.** $\dfrac{a}{4}\left(2\operatorname{ctg}\alpha+2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\alpha\right)$. **41.** $\dfrac{b}{6}\sqrt{a^2+l^2}$.

42. $\dfrac{d}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **43.** $\dfrac{a^2(1+\sqrt{2})}{6\sqrt{3}}$. **44.** $\dfrac{a(2l-a)}{2\sqrt{3l^2-a^2}}$. **45.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. **46.** $\dfrac{R}{4}(\sqrt{21}-3)$.

47. $\dfrac{2b^3h^3}{3(h^2-b^2)\sqrt{2b^2-h^2}}$. **48.** $\dfrac{h^3(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^{3/2}}{12\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. **49.** $\dfrac{a(2p+q)}{\sqrt{9a^2-12q^2}}$. **50.** 5.

51. $(2 \pm \sqrt{3})r$. **52.** $\frac{a\sqrt{41}}{8}$. **53.** $\frac{1}{3}$. **54.** $a\sqrt{\frac{7}{8}}$. **55.** $\frac{a}{8}\sqrt{15a^2 + 4l^2}$.

56. $\frac{a(\sqrt{6} - 1)}{10}$. **57.** $\frac{3\sqrt{2}a^2}{5}$. **58.** $\frac{13a}{6\sqrt{51}}$. **59.** $\frac{(\sqrt{5} - 1)a}{\sqrt{3}}$. **60.** $\frac{1}{3}$. **61.** $\frac{1}{12}$.

62. $\arccos\frac{5}{8}$. **63.** $\frac{ab^2 \operatorname{tg}\alpha}{12}$. **64.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{5}}$. **65.** $\frac{49\pi a^3}{192}$.

66. $\frac{\pi(12\sqrt{6} - 4\sqrt{3} - 9)}{24}$. **67.** $\frac{\pi a^3(7\sqrt{6} - 9\sqrt{2})}{216}$. **68.** $\frac{4\pi}{9}$. **69.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$, $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

70. $a\sqrt{3}$, $\arccos\frac{1}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **71.** $\frac{13 + 5\sqrt{7}}{8}\,r$. **72.** $\frac{12\sqrt{111}}{37}$, $\frac{48\sqrt{15}}{65}$.

Глава 13

Производная и интеграл

§ 41. Производная и ее применение к исследованию функций

Справочные сведения

1. ***Определение производной.***

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x и существует конечный предел отношения $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$, то этот предел называется *производной* функции $f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$, т. е.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

2. ***Производная суммы, произведения и частного.***

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные (дифференцируемы) в точке x, то

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x),$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \qquad g(x) \neq 0.$$

Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(Cf(x))' = Cf'(x).$$

3. ***Производная сложной функции.***

Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $f(y)$ — в точке y_0, где $y_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $z(x) = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и

$$z'(x_0) = f'(y_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

Правило дифференцирования сложной функции обычно записывают в виде

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

В частности, если $\varphi(x) = kx+b$ (k, b — постоянные, $k \neq 0$), то

$$(f(kx+b))' = kf'(kx+b).$$

4. ***Производные некоторых элементарных функций.***

1) $(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R}, \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbf{R},\ x > 0.$
2) $(e^x)' = e^x,\ (a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0.$
3) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x > 0;\ (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$
4) $(\sin x)' = \cos x.$
5) $(\cos x)' = -\sin x.$
6) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
7) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

5. ***Геометрический смысл производной. Уравнение касательной.***

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ (рис. 41.1), т. е.

$f'(a) = k = \operatorname{tg} \alpha.$

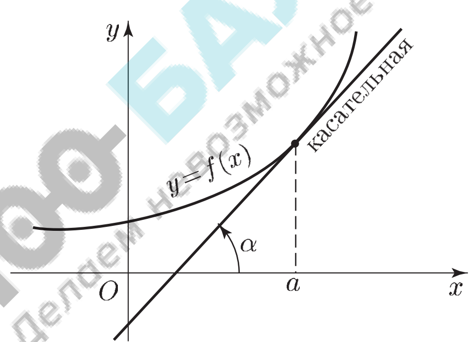

Рис. 41.1

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке a имеет вид

$y = f(a) + f'(a)(x - a).$

6. ***Возрастание (убывание) функции.***

Если $f'(x) > 0$ во всех точках интервала Δ, то функция $f(x)$ *возрастает* на этом интервале, а если $f'(x) < 0$ на интервале Δ, то функция $f(x)$ *убывает* на этом интервале.

7. ***Экстремумы функции.***

а) *Понятие экстремума.* Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки минимума и максимума функции называются ее *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремумами* данной функции.

б) *Необходимое условие экстремума.* Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

Точки, в которых производная данной функции обращается в нуль или не существует, называются *критическими точками* этой функции.

Точки экстремума функции являются ее критическими точками, но не всякая критическая точка является точкой экстремума.

в) *Достаточные условия экстремума.* Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, т. е. $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $\delta > 0$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 — точка минимума функции $f(x)$ (рис. 41.2);
2) если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$ (рис. 41.3);

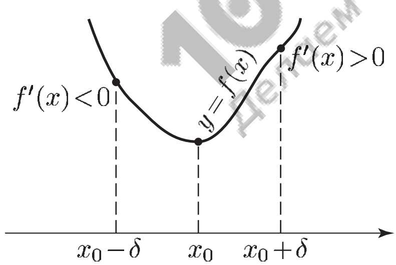

Рис. 41.2

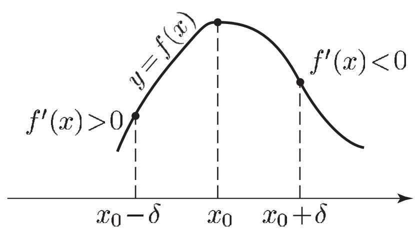

Рис. 41.3

3) если $f'(x)$ не меняет знака при переходе через точку x_0, то x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

8. ***Наибольшее и наименьшее значения функции.***

а) Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке Δ. Тогда, если существует точка $c \in \Delta$ такая, что для всех $x \in \Delta$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(c)$, то говорят, что функция $f(x)$

достигает на промежутке Δ своего *наибольшего значения*, а если для всех $x \in \Delta$ справедливо неравенство $f(x) \geqslant f(c)$, то говорят, что функция $f(x)$ достигает на промежутке Δ своего *наименьшего значения*.

б) Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, имеющей на интервале (a, b) конечное число критических точек, достаточно вычислить значения функции $f(x)$ во всех этих критических точках, а также значения $f(a)$ и $f(b)$, и из всех полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

в) Если непрерывная на интервале (a, b) или отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет критическую точку $x_0 \in (a, b)$ и возрастает (убывает) на промежутке $(a, x_0]$ и убывает (возрастает) на промежутке $[x_0, b)$, то число $f(x_0)$ является наибольшим (наименьшим) значением функции на интервале (a, b).

Примеры с решениями

Пример 1. Найти уравнение такой касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 3$, которая:

1) проходит через точку пересечения этого графика с осью Oy;
2) параллельна прямой $y = 4x - 3$.

Решение. Пусть $f(x) = x^2 - 2x + 3$, тогда $f'(x_0) = 2x_0 - 2$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, а уравнение касательной в этой точке можно записать в виде

$$y = f(x_0) + 2(x_0 - 1)(x - x_0).$$

1) Точка пересечения графика с осью Oy имеет координаты $x_0 = 0$, $f(x_0) = 3$, а $f'(x_0) = -2$. Поэтому прямая $y = 3 - 2x$ является касательной в точке $(0; 3)$;

2) Из равенства угловых коэффициентов прямой $y = 4x - 3$ и касательной в точке $(x_0; f(x_0))$ следует, что $f'(x_0) = 2x_0 - 2 = 4$, откуда $x_0 = 3$, $f(x_0) = 6$, а уравнение касательной в точке $(3; 6)$ имеет вид $y = 4x - 6$.

Ответ. 1) $y = 3 - 2x$; 2) $y = 4x - 6$.

Пример 2. Касательная к графику функции $y = \dfrac{27}{2}x^4 - \dfrac{1}{2}$ образует с осью абсцисс угол, равный $\operatorname{arctg} 2$, и пересекает в точках A и B окружность с центром в начале координат. Найти радиус этой окружности, если известно, что $AB = 1$.

Решение. Пусть $f(x) = \dfrac{27}{2}x^4 - \dfrac{1}{2}$, x_0 — абсцисса точки касания той касательной l к графику функции $y = f(x)$, которая имеет угловой коэффициент $k = 2$. Тогда имеем $f'(x_0) = 54x_0^3 = 2$, откуда $x_0 = \frac{1}{3}$, $f(x_0) = \frac{27}{2}x_0^4 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$, а уравнение прямой l имеет вид

$$y + \frac{1}{3} = 2\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Пусть $D(x_1, y_1)$ — середина хорды AB окружности, тогда $OD \perp AB$.

Воспользуемся тем, что если две прямые взаимно перпендикулярны, а k и k_1 — их угловые коэффициенты ($k \neq 0$, $k_1 \neq 0$), то $kk_1 = -1$. Тогда угловой коэффициент прямой OD (O — начало координат) равен $-\frac{1}{2}$, а уравнение прямой OD имеет вид $y = -\frac{x}{2}$.

Так как D — общая точка прямых l и OD, то $-\frac{x_1}{2} + \frac{1}{3} = 2\left(x_1 + \frac{1}{3}\right)$, откуда $x_1 = \frac{2}{5}$, $y_1 = -\frac{1}{5}$, $OD = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, а радиус окружности равен $\sqrt{OD^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$.

Ответ. $\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

Пример 3. К параболе $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ проведены касательные в ее вершине и в двух точках, лежащих по разные стороны от вершины. Треугольник с вершинами в точках пересечения этих касательных является правильным. Найти площадь этого треугольника.

Решение. Вершиной параболы $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$ является точка $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, а график параболы симметричен относительно ее оси, т. е. прямой $x = -1$ (рис. 41.4). Пусть E и F — точки пересечения касательных, проведенных к параболе в точках B и C соответственно, а N — точка пересечения прямых BE и CF. Так как по условию EFN — правильный треугольник, то точка N должна

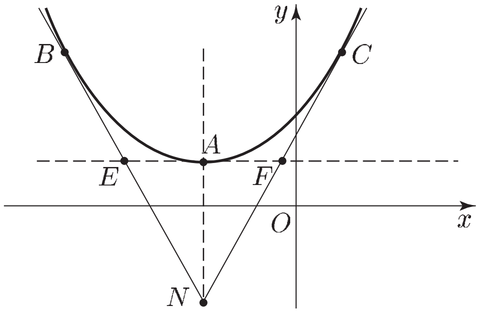

Рис. 41.4

лежать на оси параболы, а $\angle AFN = \frac{\pi}{6}$. Отсюда следует, что прямая CN образует угол $\frac{\pi}{3}$ с осью Ox и поэтому угловой коэффициент k прямой CN равен $\sqrt{3}$.

Пусть x_0, y_0 — координаты точки C, y_1 — ордината точки N, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Тогда $f'(x_0) = x_0 + 1 = k = \sqrt{3}$, откуда $x_0 = \sqrt{3} - 1$, $y_0 = f(x_0) = 2$, а уравнение прямой CN имеет вид

$$y - 2 = \sqrt{3}(x - \sqrt{3} + 1).$$

Точка $N(-1; y_1)$ лежит на прямой CN и поэтому $y_1 = -1$, а длина отрезка AN равна $\frac{1}{2} - y_1 = \frac{3}{2}$.

Пусть a — длина стороны треугольника EFN, S — его площадь, тогда $AN = h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$, откуда $a = \sqrt{3}$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Пример 4. Из точки C, расположенной на положительной полуоси Oy, проведены касательные к графику функции $y = \frac{4}{9x^2}$, пересекающие ось Ox в точках A и B (рис. 41.5). Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle ACB = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$.

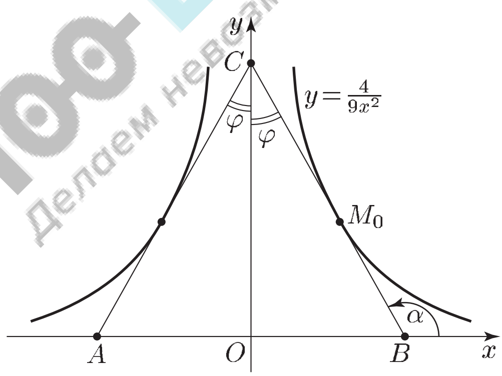

Рис. 41.5

Решение. Функция $y = \frac{4}{9x^2}$ является четной, ее график симметричен относительно оси Oy. Поэтому касательные CA и CB образуют равные углы с осью Oy и треугольник ABC равнобедренный, причем

$$\angle ACO = \angle OCB = \varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Пусть $OB = a$, $OC = b$, R — искомый радиус, тогда $2R = \dfrac{AB}{\sin 2\varphi} = \dfrac{2a}{\sin 2\varphi}$, где $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = 2\dfrac{1}{\sqrt{10}}\dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3}{5}$, откуда

$$R = \frac{5}{3}a.$$

Чтобы найти a, воспользуемся тем, что CB — касательная к графику функции $y = \dfrac{4}{9x^2}$.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ — точка касания прямой CB с графиком данной функции, α — угол, образуемый касательной с осью Ox. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = y'(x_0) = -\frac{8}{9x_0^3}.$$

С другой стороны $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \varphi$, и поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\varphi = -3.$$

Следовательно, $\dfrac{8}{9x_0^3} = 3$, откуда $x_0 = \dfrac{2}{3}$, $y_0 = y(x_0) = 1$.

Уравнение прямой BC имеет вид

$$y = kx + b, \quad \text{где} \quad k = \operatorname{tg}\alpha = -3.$$

Так как точка M_0 лежит на BC, то $1 = -3\cdot\dfrac{2}{3} + b$, откуда $b = 3$, $a = b\operatorname{tg}\varphi = 1$, $R = \dfrac{5}{3}a = \dfrac{5}{3}$.

Ответ. $\dfrac{5}{3}$.

Пример 5. Две параллельные касательные к графику функции $y = x^3 - 6$ пересекают оси координат: первая — в точках A и B, вторая — в точках C и D. Найти площадь треугольника AOB, если известно, что она в 4 раза меньше площади треугольника COD.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — абсциссы точек касания прямых с параболой, $f(x) = x^3 - 6$. Тогда $f'(x_1) = f'(x_2)$, т. е. $3x_1^2 = 3x_2^2$, откуда $x_2 = -x_1$, так как $x_1 \neq x_2$. Таким образом, одно из чисел x_1, x_2 положительно. Будем считать, что $x_1 > 0$ и запишем уравнения касательных в следующем виде:

$$y = (x - x_1)3x_1^2 + x_1^3 - 6 = f_1(x),$$
$$y = (x + x_1)3x_1^2 - x_1^3 - 6 = f_2(x).$$

Заметим, что $f_1(0) = -2x_1^3 - 6$, $f_2(0) = 2x_1^3 - 6$ — ординаты точек пересечения параллельных касательных с осью Oy, а при $x_1 > 0$ справедливо неравенство $|f_1(0)| > |f_2(0)|$.

Рассмотрим два возможных случая:

$$f_2(0) \geqslant 0, \qquad f_2(0) < 0.$$

В первом случае, т. е. при $x_1 \geqslant \sqrt[3]{3}$ (этот случай представлен на рис. 41.6), $f_2(0) = 2x_1^3 - 6 = OA$ — длина вертикального катета меньшего по площади треугольника AOB. Так как AOB и COD — подобные треугольники, а площадь первого в 4 раза меньше площади второго, то $OD = 2AO$, т. е. $2x_1^3 + 6 = 2(2x_1^3 - 6)$, откуда $x_1^3 = 9$, $x_1 = \sqrt[3]{9}$. Тогда $OA = f_2(0) = 12$, $\frac{OA}{OB} = k = 3x_1^2$, откуда $OB = \frac{12}{3\sqrt[3]{9^2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{9^2}}$, а площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{8}{\sqrt[3]{3}}$.

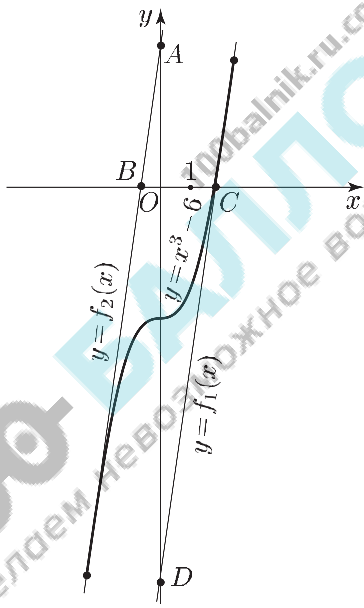

Рис. 41.6

Во втором случае $\left(x_1 < \sqrt[3]{3}\right)$ $OA = -f_2(0) = 6 - 2x_1^3$, $OC = -f_1(0) = 2x_1^3 + 6$. Так как $2AO = OC$, то $12 - 4x_1^3 = 2x_1^3 + 6$, откуда $x_1 = 1$, $f'(x_1) = 3$, $OB = OA \cdot \frac{1}{f'(x_1)} = \frac{OA}{3}$, где $OA = 4$. Поэтому $OB = \frac{4}{3}$, а площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{8}{3}$.

Ответ. $\frac{8}{\sqrt[3]{3}}$, $\frac{8}{3}$.

Пример 6. К графику функции $y = -\frac{x^2}{12} + x - \frac{16}{3}$ проведена касательная, пересекающая график функции $y = 3|x+6| - \frac{7}{3}$ в точках A и B. Найти радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках A, B и C $\left(-6; -\frac{7}{3}\right)$, если $\angle CAB = 2\arccos\frac{3}{\sqrt{10}} + \angle CBA$.

Решение. Построим графики функций $y = -\frac{x^2}{12} + x - \frac{16}{3}$ и $y = 3|x+6| - \frac{7}{3}$ (рис. 41.7), заметив, что C $\left(-6; -\frac{7}{3}\right)$ — точка минимума функции $y = 3|x+6| - \frac{7}{3}$.

Пусть l — касательная к параболе $y = f(x) = -\frac{x^2}{12} + x - \frac{16}{3}$, $D(x_0; y_0)$ — точка касания прямой l с параболой, k — угловой коэффициент прямой l. Тогда $k = f'(x_0) = 1 - \frac{x_0}{6}$, а уравнение прямой l можно записать в виде $y - f(x_0) = k(x - x_0)$.

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — точки пересечения прямой l с прямыми $y = 3x + \frac{47}{3}$ и $y = -3x - \frac{61}{3}$ соответственно, $\angle CBA = \alpha$, $\angle CAB = \beta$, $\angle BCA = 2\gamma$ (рис. 41.7).

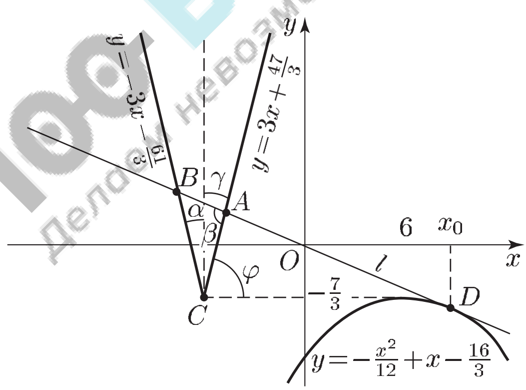

Рис. 41.7

По условию $\beta = \alpha + 2\gamma$. С другой стороны, $\beta = \pi - (\alpha + 2\gamma)$, откуда следует, что $\beta = \frac{\pi}{2}$, т. е. прямые AC и l взаимно перпендикулярны. Так как угловой коэффициент k_1 прямой AC равен 3, то $k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{3}$, т. е. $1 - \frac{x_0}{6} = -\frac{1}{3}$, откуда $x_0 = 8$, $f(8) = -\frac{8}{3}$ и поэтому уравнение прямой l примет вид $y + \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}(x - 8)$, т. е. $y = -\frac{1}{3}x$.

Найдем координаты точки B, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = -3x - \dfrac{61}{3}, \\ y = -\dfrac{1}{3}x. \end{cases}$$

Получим $x_2 = -\dfrac{61}{8}$, $y_2 = \dfrac{61}{24}$.

Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, тогда $R = \dfrac{BC}{2}$, где

$$BC = \sqrt{\left(-\frac{61}{8} + 6\right)^2 + \left(\frac{61}{24} + \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{8}\right)^2 + \left(\frac{39}{8}\right)^2} = \frac{13}{8}\sqrt{10}.$$

Ответ. $\dfrac{13\sqrt{10}}{16}$.

Пример 7. Найти интервалы возрастания и убывания, а также точки экстремума функции $y = f(x)$, если:

1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$; 2) $f(x) = xe^{-3x}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+3)^2}$.

Решение. 1) Уравнение $f'(x) = 6x^2 + 6x = 0$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 0$; $f'(x) > 0$ при $x < -1$, а также при $x > 0$; $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 0$. Следовательно, функция $y = f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$, $(0; +\infty)$ и убывает на интервале $(-1; 0)$.

Производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку -1 и с минуса на плюс — при переходе через точку 0. Поэтому -1 — точка максимума, а 0 — точка минимума функции $f(x)$.

2) Уравнение $f'(x) = e^{-3x} - 3xe^{-3x} = e^{-3x}(1 - 3x) = 0$ имеет единственный корень $x_0 = \dfrac{1}{3}$; $f'(x) > 0$ при $x < \dfrac{1}{3}$ и $f'(x) < 0$ при $x > \dfrac{1}{3}$. Следовательно, функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$, убывает на интервале $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$, а точка $x_0 = \dfrac{1}{3}$ является точкой максимума функции $f(x)$.

3) Функция определена и имеет производную

$$f'(x) = \frac{3x^2}{(x+3)^2} - \frac{2x^3}{(x+3)^3} = \frac{x^2(x+9)}{(x+3)^3}$$

при всех $x \in \mathbf{R}$, кроме $x = -3$; $f'(x) > 0$ при $x < -9$ и $x > -3$ $(x \neq 0)$, $f'(x) < 0$ при $-9 < x < -3$. На интервалах $(-\infty; -9)$ и $(-3; +\infty)$ функция возрастает, а на интервале $(-9; -3)$ — убывает; -9 и 0 — критические точки этой функции.

При переходе через точку -9 производная меняет знак с плюса на минус, поэтому $x = -9$ — точка максимума функции $f(x)$; точка $x = 0$ не является точкой экстремума функции $f(x)$, так как $f'(x)$ не меняет знака при переходе через эту точку.

Ответ. 1) $(-\infty; -1)$ и $(0; +\infty)$ — интервалы возрастания; а $(-1; 0)$ — интервал убывания функции; $x = -1$ — точка максимума функции; $x = 0$ — точка минимума функции;

2) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ — интервал возрастания, а $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ — интервал убывания функции; $x = \frac{1}{3}$ — точка максимума функции;

3) $(-\infty; -9)$ и $(-3; +\infty)$ — интервалы возрастания, а $(-9; -3)$ — интервал убывания функции; $x = -9$ — точка максимума функции.

Пример 8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке Δ, если:

1) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10, \quad \Delta = [-1; 1]$;
2) $f(x) = 2^{3x+1} - 9 \cdot 2^{2x} + 3 \cdot 2^{x+2}, \quad \Delta = [-1; 1]$;
3) $f(x) = 9x^5 - 5x^3 - 30x + 2, \quad \Delta = [-2; 2]$.

Решение. 1) Уравнение $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, из которых отрезку $[-1; 1]$ принадлежит только точка $x = 0$.

Так как $f(-1) = f(1) = 3$, $f(0) = 10$, то наименьшее значение функции равно 3, а наибольшее равно 10.

2) Находим производную:

$$f'(x) = \left(3 \cdot 2^{3x+1} - 18 \cdot 2^{2x} + 3 \cdot 2^{x+2}\right) \ln 2 = 3 \cdot 2^{x+1} \ln 2 \left(2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2\right).$$

Уравнение $f'(x) = 0$, равносильное уравнению $t^2 - 3t + 2 = 0$, где $t = 2^x$, имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Так как $f(0) = 5$, $f(1) = f(-1) = 4$, то наибольшее значение функции $f(x)$ равно 5, а наименьшее равно 4.

3) Уравнение $f'(x) = 45x^4 - 15x^2 - 30 = 15(3x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; $f(-1) = 28$, $f(1) = -24$, $f(-2) = -186$, $f(2) = 190$.

Следовательно, наименьшее значение функции равно -186, а наибольшее равно 190.

Ответ. 1) 10 и 3; 2) 5 и 4; 3) 190 и -186.

Пример 9. Найти точки экстремума, а также наибольшее и наименьшее значения функции $y = 5x^3 - x|x + 1|$ на отрезке $[-2; 0]$.

Решение. Обозначим $f(x) = 5x^3 - x|x + 1|$, $f_1(x) = 5x^3 + x^2 + x$, $f_2(x) = 5x^3 - x^2 - x$. Тогда $f(x) = f_1(x)$ при $-2 \leqslant x \leqslant -1$, $f(x) = f_2(x)$ при $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $f_1'(x) = 15x^2 + 2x + 1$, $f_2'(x) = 15x^2 - 2x - 1$.

Уравнение $f_1'(x) = 0$ не имеет действительных корней, а уравнение $f_2'(x) = 0$ имеет корни $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, из которых интервалу $(-1; 0)$ принадлежит только точка x_1. Так как $f'(x) > 0$ на интервалах $(-2; -1)$ и $\left(-1; -\frac{1}{5}\right)$, $f'(x) < 0$ при $-\frac{1}{5} < x < 0$, то точка -1 не является точкой экстремума (в этой точке функция $f(x)$ недифференцируема), а точка $-\frac{1}{5}$ — точка максимума функции $f(x)$. Наибольшим из чисел $f(-2) = -38$, $f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{25}$, $f(0) = 0$ является число $\frac{3}{25}$, а наименьшим — число -38.

Ответ. $x = -\frac{1}{5}$ — точка максимума; $f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{25}$ — наибольшее, а $f(-2) = -38$ — наименьшее значения функции.

Пример 10. На координатной плоскости Oxy дана точка $M(2; 4)$. Рассматриваются треугольники, у которых две вершины, симметричные относительно оси Oy, лежат на дуге параболы $y = 3x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а точка M является серединой одной из сторон каждого треугольника. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

Решение. Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$, $B(x; 3x^2)$ и $A(-x; 3x^2)$ — вершины одного из рассматриваемых треугольников (рис. 41.8). Третья вершина C определена неоднозначно, так как точка M может быть либо серединой стороны BC, либо серединой стороны AC (на рис. 41.8 это точки C_1 и C_2).

Площади треугольников AC_1B и AC_2B равны, так как у этих треугольников общее основание AB и равные высоты h_1 и h_2, где $h_1 = h_2 = h$, причем h равняется удвоенной разности ординат точек M и A, т. е. $h = 2(4 - 3x^2)$.

Пусть $S = S(x)$ — площадь треугольника ABC, тогда

$$S(x) = \frac{1}{2} AB \cdot h = xh = 8x - 6x^3.$$

Найдем критические точки функции $S(x)$ из уравнения $S'(x) = 8 - 18x^2 = 0$. На отрезке $[0, 1]$ это уравнение имеет единственный корень $x_0 = \frac{2}{3}$, причем $S'(x) > 0$ при $0 \leqslant x < \frac{2}{3}$ и $S'(x) < 0$ при $x > \frac{2}{3}$. Поэтому наибольшее значение, равное $S\left(\frac{2}{3}\right) = 3\frac{5}{9}$, функция $S(x)$ принимает в точке $x_0 = \frac{2}{3}$.

Ответ. $3\frac{5}{9}$.

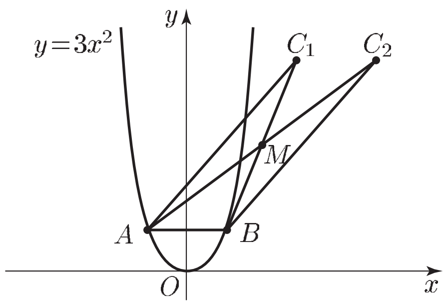

Рис. 41.8

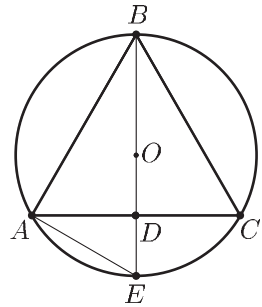

Рис. 41.9

Пример 11. Найти высоту конуса, имеющего наибольший объем среди всех конусов, вписанных в сферу радиуса R.

Решение. В сечении сферы плоскостью, проходящей через ось конуса, образуется окружность радиуса R с центром в точке O (рис. 41.9), а в сечении конуса — равнобедренный треугольник ABC.

Пусть D — центр основания конуса, h — его высота, r — радиус основания. Тогда $BD = h$, $AD = r$. Продолжим отрезок BD до пересечения с окружностью в точке E. Так как $\angle BAE$ прямой, то по свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла, $AD^2 = ED \cdot DB$, где $ED = BE - BD = 2R - h$. Следовательно, $r^2 = (2R - h)h$. Пусть V — объем конуса, тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h) = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2 - h^3),$$

откуда

$$V' = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) = \frac{1}{3}\pi h(4R - 3h).$$

Заметим, что $0 < h < 2R$ и на интервале $(0; 2R)$ уравнение $V' = 0$ имеет единственный корень $h = \frac{4R}{3}$, причем $V' > 0$ при $0 < h < \frac{4R}{3}$ и $V' < 0$ при $\frac{4R}{3} < h < 2R$. Следовательно, объем является наибольшим при $h = \frac{4R}{3}$.

Ответ. $\frac{4R}{3}$.

Пример 12. Рассматриваются всевозможные параболы, симметричные относительно прямой $x = 1$, касающиеся прямой $y = -2x - 3$ и такие, что их ветви направлены вниз.

Найти уравнение той из этих парабол, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой.

Решение. Абсцисса вершины каждой из рассматриваемых парабол равна 1, а уравнение параболы можно записать в виде

$$y = a(x-1)^2 + b. \qquad (1)$$

Так как парабола (1) касается прямой $y = -2x - 3$, то она имеет с этой прямой единственную общую точку и поэтому уравнение

$$a(x-1)^2 + b = -2x - 3 \qquad (2)$$

имеет единственный корень. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда дискриминант D квадратного уравнения (2) равен нулю, т. е. $(a-1)^2 - a(a+b+3) = 0$, откуда $a = \frac{1}{5+b}$. Заметим, что $b \neq -5$, так как ордината b вершины параболы должна быть меньше ординаты точки пересечения прямых $y = -2x - 3$ и $x = 1$, равной -5 (рис. 41.10).

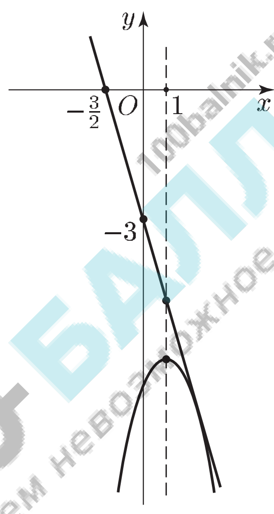

Рис. 41.10

Так как ордината точки пересечения параболы с осью Oy равна $a + b = b + \frac{1}{5+b}$, то задача сводится к нахождению наибольшего значения функции

$$f(b) = b + \frac{1}{5+b} \quad \text{при} \quad b < -5.$$

Критические точки функции $f(b)$ определяются из уравнения $f'(b) = 1 - \frac{1}{(5+b)^2} = 0$. Это уравнение при $b < -5$ имеет единственный корень $b = -6$, причем $f'(b) > 0$ при $b < -6$ и $f'(b) < 0$ при $-6 < b < -5$. Следовательно, при $b = -6$ функция $f(b)$ принимает наибольшее значение. Поэтому $a = \frac{1}{5+b} = -1$ и искомое уравнение параболы имеет вид $y = -(x-1)^2 - 6$.

Ответ. $y = -(x-1)^2 - 6$.

Пример 13. Графику функции $y=-x^3+ax^2+bx+c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x=2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку $(0;2)$, а другая — через точку $(0;6)$. Найти значения a, b и c.

Решение. Пусть $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$, x_1 и x_2 — абсциссы точек A и B. Так как точки A и B симметричны относительно прямой $x=2$, то их ординаты одинаковы, а $x_1=2-t$, $x_2=2+t$, где $t>0$. Итак, $A(2-t;y_0)$, $B(2+t;y_0)$.

По условию $f'(x_1)=f'(x_2)$, т. е. $-3(2-t)^2+2a(2-t)+b=-3(2+t)^2+2a(2+t)+b$, откуда $24t=4at$, $a=6$, так как $t>0$. Следовательно,

$$f'(x_1)=f'(x_2)=-3(2+t)^2+12(2+t)+b=-3t^2+12+b. \tag{1}$$

Но $f(x_1)=f(x_2)$, т. е. $-(2-t)^3+6(2-t)^2+b(2-t)+c=-2(2+t)^3+6(2+t)^2+b(2+t)+c$. Это равенство можно записать в виде $2t^3-24t-2bt=0$, откуда

$$b=t^2-12, \tag{2}$$

так как $t>0$.

Из (1) и (2) следует, что

$$f'(x_1)=f'(x_2)=-2t^2<0,$$

и поэтому касательная l_1 к графику функции $y=f(x)$, проходящая через точку A, лежит ниже касательной l_2, проходящей через точку B. Таким образом прямая l_1 проходит через точку $C(0;2)$ и задается уравнением

$$y-y_0=-2t^2\,[x-(2-t)],$$

а прямая l_2 проходит через точку $D(0;6)$ и задается уравнением

$$y-y_0=-2t^2\,[x-(2+t)].$$

Так как точки C и D принадлежат соответственно прямым l_1 и l_2, то

$$2-y_0=2t^2(2-t), \tag{3}$$
$$6-y_0=2t^2(2+t),$$

откуда получаем

$$4=4t^3,\qquad t=1,\qquad x_1=2-t=1,$$

а из (2) находим $b=-11$.

Подставляя $t=1$ в уравнение (3), находим $y_0=0$. Так как $f(x_1)=f(1)=y_0=0$, то $-1+6-11+c=0$, откуда $c=6$.

Ответ. $a=6$, $b=-11$, $c=6$.

Пример 14. График функции $y=x^3+ax^2+bx+c$, $c<0$, пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M, проходит через точку A. Найти a, b, c, если площадь треугольника AMN равна 1.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — абсцисса точек, в которых график функции $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, где $c<0$, пересекает ось Ox. Тогда

x_1 и x_2 — корни многочлена $f(x)$, а $f(x)$ делится на $(x - x_1)(x - x_2)$, откуда следует, что $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - \alpha)$, где α — одно из чисел x_1, x_2 (уравнение $f(x) = 0$ по условию имеет ровно два различных корня). Таким образом, многочлен $f(x)$ имеет вид $f(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)$, откуда находим $f'(x_1) = 0$ и касательная к графику функции в точке $(x_1, 0)$ совпадает с осью Ox.

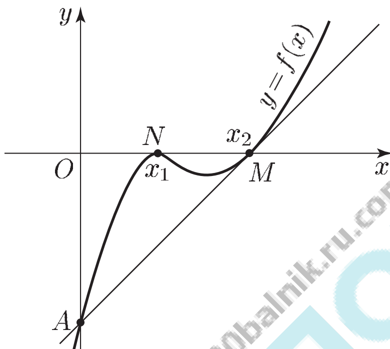

Рис. 41.11

По условию ордината точки A равна c, где $c < 0$, а касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке M проходит через точку A. Поэтому абсцисса точки M равна x_2, а абсцисса точки N равна x_1 (рис. 41.11). Задача сводится к нахождению чисел x_1 и x_2. Так как $f'(x_2) = (x_2 - x_1)^2 = k$, то уравнение прямой, касающейся в точке M графика функции $y = f(x)$, имеет вид $y = k(x - x_2)$. Эта прямая проходит через точку $A(c, 0)$, где $c = f(0) = -x_2x_1^2$. Поэтому $c = -kx_2$ и $x_2x_1^2 = x_2(x_2 - x_1)^2$, откуда $x_2 = 2x_1$ $(x_2 \neq 0)$ и $c = -2x_1^3$. Пусть S — площадь $\triangle AMN$, тогда $S = 1 = -c\,\dfrac{1}{2}\,(x_2 - x_1) = -\,\dfrac{1}{2}\,cx_1$, откуда $c = -\,\dfrac{2}{x_1} = -2x_1^3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $f(x) = (x - 1)^2(x - 2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Ответ. $a = -4$, $b = 5$, $c = -2$.

Задачи

1. Записать уравнения касательной к параболе $y = x^2 - 2x$ в точках ее пересечения с осью Ox.

2. Записать уравнение той касательной к параболе $y = 4 - x^2$, которая:

1) образует с осью Ox угол, равный $\dfrac{3\pi}{4}$;

2) параллельна прямой $y = 2x - 3$.

3. Записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = 3^x + 3^{-2x}$, $x_0 = 1$.

4. Найти угол между касательными, проведенными из точки $(0; 2)$ к параболе $y = -3x^2$.

5. Найти точки, в которых касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол $\frac{3\pi}{4}$.

6. Через точки с абсциссами 1 и 3, принадлежащими параболе $y = x^2$, проведена прямая l. Записать уравнение прямой l и уравнение той касательной к параболе, которая параллельна l.

7. Записать уравнение той касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 3$, которая перпендикулярна прямой $y = -\frac{x}{2} + 1$.

8. На параболе $y = x^2 - 4x + 2$ найти такие точки, что проведенные в них касательные к параболе проходят через точку $(4; 1)$.

9. Найти площадь треугольника ABC, где $A(0; 3)$, B и C — точки, в которых прямые, проведенные через точку A, касаются параболы $y = \frac{x^2}{2} - x + 5$.

10. Касательная к параболе $y = -x^2 + 4x - 2$ пересекает ось Ox в точке A, а ось Oy в точке B так, что $BO = 2AO$, где O — начало координат. Найти длину отрезка AB.

11. Касательная к параболе $y = -x^2 + 2x + 2$ пересекает ось Ox в точке A, ось Oy в точке B. Записать уравнение касательной, если $AC = 2AB$, а точка касания A лежит в первой четверти.

12. Касательная к графику функции $y = \frac{3}{16}x^4 - \frac{11}{16}$ образует угол с осью абсцисс, равный $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, и пересекает в точках C и D окружность с центром в начале координат. Найти радиус этой окружности, если известно, что $CD = \frac{24}{5}$.

13. К параболе $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}$ в двух ее точках проведены касательные, пересекающиеся в точке A и пересекающие ось x в точках B и C. Треугольник ABC равнобедренный и его угол ABC равен $\frac{2\pi}{3}$. Найти площадь этого треугольника.

14. Из точки M, расположенной на положительной полуоси ординат, проведены касательные к графику функции $y = \frac{8}{x^2}$, пересекающие ось абсцисс в точках K и L. Найти радиус окружности, описанной около треугольника MKL, если известно, что угол KML равен $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

15. Две параллельные касательные к графику функции $y = x^3 + \frac{2}{3}$ пересекают оси координат: первая — в точках A и B, вторая — в точках C и D. Найти площадь треугольника AOB, если известно, что она в 4 раза меньше площади треугольника COD.

16. Через точку $M(5; 6)$ проведена касательная к параболе $y = \frac{6}{25}x^2$, пересекающей ось абсцисс в точке N, а ось ординат в точке P. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник NOP (O — начало координат).

17. В точках A и B параболы $y = x^2 - 3x + 1$ проведены касательные, угловой коэффициент одной из них равен 1. Парабола $y = 4x^2 + ax + 1$, где $a > 0$, также касается одной из этих прямых. Найти a и расстояние между точками A и B.

18. К графику функции $y = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ проведена касательная, пересекающая график функции $y = 1 - \frac{3}{2}|x + 1|$ в точках A и B. Найти радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках A, B и C, если $\angle CAB = 2\arccos\frac{3}{\sqrt{13}} + \angle CBA$.

19. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = 8x^3 - x^4$; 2) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 8x + 5$;

3) $f(x) = xe^{-x}$; 4) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

5) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$; 6) $f(x) = (2^x - 1)(2^x - 2)^2$.

20. Найти точки экстремума функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$; 2) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x + 5$;

3) $f(x) = xe^x$; 4) $f(x) = (x+2)^2(x-3)^3$;

5) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$; 6) $f(x) = 2x + \sqrt{|x^2 - 3|}$.

21. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке Δ, если:

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 48x$, $\Delta = [0; 9]$; 2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $\Delta = [1; 2]$;

3) $f(x) = x - 2\ln x$, $\Delta = \left[\frac{3}{2}; e\right]$; 4) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\Delta = \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;

5) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{1 + x - x^2}$, $\Delta = [0; 1]$; 6) $f(x) = (x-3)e^{|x+1|}$, $\Delta = [-2; 4]$.

22. Среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, найти треугольник с наибольшим периметром.

23. Найти высоту цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности среди всех цилиндров, вписанных в шар радиуса R.

24. Найти радиус основания цилиндра, имеющего наибольший объем среди всех цилиндров, вписанных в шар радиуса R.

25. Около цилиндра, радиус основания которого равен R, описан конус наименьшего объема. Плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают. Найти радиус основания этого конуса.

26. Найти высоту и радиус основания цилиндра, имеющего наибольшую боковую поверхность среди всех цилиндров, вписанных в конус, если радиус основания конуса равен R, а его высота равна H.

27. Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 5x + 4}.$$

28. В какой точке нужно провести касательную к графику функции $y = (x-2)^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наименьшей?

29. На координатной плоскости даны точки $B(3; 1)$ и $C(5; 1)$. Рассматриваются трапеции, для которых отрезок BC является одним из оснований, а вершины другого основания лежат на дуге параболы $y = (x-1)^2$, выделяемой условием $0 \leqslant x \leqslant 2$. Среди этих трапеций выбрана та, которая имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

30. На координатной плоскости дана точка $K(3;6)$. Рассматриваются треугольники, у которых две вершины симметричны относительно оси Oy и лежат на дуге параболы $y = 4x^2$, выделяемой условием $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а точка K является серединой одной из сторон. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

31. Рассматриваются всевозможные параболы, касающиеся оси Ox и прямой $y = \frac{x}{2} - 3$ и такие, что их ветви направлены вниз. Найти уравнение той параболы, для которой сумма расстояний от начала координат до точек пересечения ее с осями координат является наименьшей.

32. К параболе $y = ax^2 - x$ $(a > 0)$ проведены касательные в ее вершине и в двух точках, лежащих по разные стороны от вершины. Точки пересечения этих касательных являются вершинами правильного треугольника, длина стороны которого равна $\sqrt{3}$. Найти коэффициент a.

33. На положительном луче оси ординат выбрана точка A так, что проведенные через нее касательные к параболе $y = ax^2 + c$ $(a > 0,\ c > 0)$ взаимно перпендикулярны. Одна из касательных пересекает ось абсцисс в точке B, другая касается параболы в точке C. Треугольник ABC равнобедренный, а его площадь равна 4. Найти коэффициенты a и c.

34. В точке M, принадлежащей параболам $y = -x^2 + 2x - 6$ и $y = x^2 + ax + 2$ $(a < 0)$, эти параболы имеют общую касательную, которая пересекает ось абсцисс в точке N. Из точки N проведена еще одна касательная к первой параболе, касающаяся ее в точке P. Найти коэффициент a и расстояние между точками M и P.

35. Из точки $M(1;1)$ проведены касательные к двум ветвям гиперболы $y = \frac{k}{x}$ $(k < 0)$, касающиеся этих ветвей в точках A и B, причем треугольник MAB — правильный. Найти коэффициент k и площадь треугольника MAB.

36. Графику функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x = -2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку $(0;1)$, а другая — через точку $(0;5)$. Найти значения a, b и c.

37. График функции $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$, $c < 0$, пересекает ось ординат в точке M и имеет ровно две общие точки A и B с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке A, проходит через точку M. Найти a, b, c, если площадь треугольника ABM равна 1.

Ответы

1. $y = -2x$, $y = 2x - 4$. **2.** 1) $y = \frac{17}{4} - x$, 2) $y = 2x + 5$.

3. 1) $y = x - 1$, 2) $y = \frac{1}{9}(25\ln 3 \cdot x + 28 - 25\ln 3)$. **4.** $\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{24}$.

5. $(0;-1)$, $(4;3)$. **6.** $y = 4x - 3$, $y = 4x - 4$. **7.** $y = 2x - 1$. **8.** $(5;7)$, $(3;-1)$. **9.** 4.

10. 0, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{7\sqrt{5}}{2}$. **11.** $y = -2x + 6$. **12.** $\frac{13}{5}$. **13.** $3\sqrt{3}$. **14.** $\frac{15}{4}$. **15.** $\frac{8}{27}$, $\frac{\sqrt[3]{3}}{81}$.

16. 1. **17.** 9, $40\sqrt{2}$. **18.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

19. 1) $(-\infty;6)$ — интервал возрастания, $(6;+\infty)$ — интервал убывания; 2) $(-\infty;-1)$ и $(2;+\infty)$ — интервалы возрастания, $(-1;2)$ — интервал убывания; 3) $(-\infty;1)$ — интервал возрастания, $(1;+\infty)$ — интервал убывания; 4) $(0;1)$ и $(1;e)$ — интервалы убывания, $(e;+\infty)$ — интервал возрастания; 5) $(-\infty;2)$ и $(4;+\infty)$ — интервалы возрастания, $(2;4)$ — интервал убывания; 6) $\left(-\infty;\log_2\frac{4}{3}\right)$ и $(1;+\infty)$ — интервалы возрастания, $\left(\log_2\frac{4}{3};1\right)$ — интервал убывания.

20. 1) $x=1$ — точка минимума; 2) $x=1$ — точка минимума; 3) $x=-1$ — точка минимума; 4) $x=0$ — точка минимума, $x=-2$ — точка максимума; 5) $x=3$ — точка минимума; 6) $x=-2$ и $x=2\sqrt{\frac{3}{5}}$ — точки максимума; $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ — точки минимума.

21. 1) 80 и 0; 2) 3 и -13. 3) $e-2$ и $2(1-\ln 2)$; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и -2; 5) 1 и $\frac{3}{5}$; 6) e^5 и $-e^3$. **22.** Равносторонний треугольник. **23.** $\sqrt{2}R$. **24.** $R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

25. $\frac{3R}{2}$. **26.** $\frac{H}{2}$, $\frac{R}{2}$. **27.** $\frac{7}{23}$. **28.** $\left(\frac{4}{3};\frac{4}{9}\right)$. **29.** $\frac{32}{27}$. **30.** $4\sqrt{2}$.

31. $y=-\frac{1}{16}(x-8)^2$. **32.** $\frac{1}{4}$. **33.** $a=\frac{1}{4}$, $c=3$. **34.** -6, $6\sqrt{17}$.

35. $-\frac{1}{2}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **36.** $a=6$, $b=11$, $c=5$. **37.** $a=-4$, $b=-5$, $c=-2$.

§ 42. Интеграл и его приложения

Справочные сведения

1. ***Первообразная.***

а) Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка справедливо равенство

$$F'(x)=f(x).$$

б) Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на промежутке Δ, то функция $F(x)+C$, где C — любое число, также является первообразной функции $f(x)$ на промежутке Δ.

в) Если функция $f(x)$ имеет на промежутке Δ первообразную $F(x)$, то любая первообразная $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на промежутке Δ имеет вид

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

где C — некоторое число.

г) Таблица первообразных

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
$x^p,\ p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$	e^x	$e^x + C$
$\dfrac{1}{x},\ x > 0$	$\ln x + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\cos x$	$\sin x + C$

д) Правила нахождения первообразных (правила интегрирования).

Если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке, то:

функция $F(x) + G(x)$ — первообразная функции $f(x) + g(x)$;

функция $aF(x)$ — первообразная функции $af(x)$, где a — постоянная;

функция $\dfrac{1}{k}F(kx + b)$, где k, b — постоянные, $k \neq 0$, является первообразной функции $f(kx + b)$.

2. ***Формула Ньютона–Лейбница.***

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $F(x)$ — ее первообразная, то интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ вычисляется с помощью формулы Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

3. ***Вычисление площади плоской фигуры.***

а) Если Ф — *криволинейная трапеция*, т. е. фигура, ограниченная отрезком $[a; b]$ оси Ox, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 42.1) и графиком непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$, где $f(x) \geqslant 0$ при $x \in [a, b]$, то площадь S фигуры Ф вычисляется по формуле

$$S = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$.

б) Если фигура Ф ограничена отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ таких, что $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ при $x \in [a, b]$ (рис. 42.2), то площадь S фигуры Ф выражается формулой

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

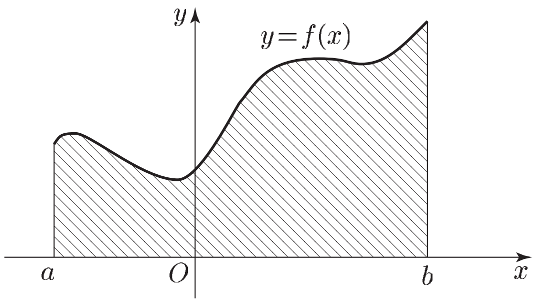

Рис. 42.1

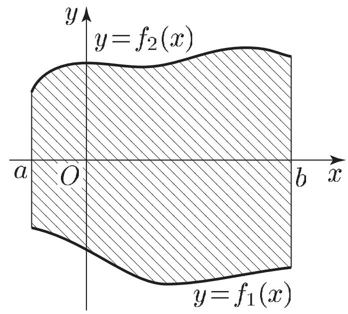

Рис. 42.2

Примеры с решениями

Пример 1. Для функции $f(x)$ найти такую первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку M, если:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\quad M(-2; 1)$; $\qquad$ 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad M(4; 6)$;

3) $f(x) = \sin 2x$, $\quad M\left(\dfrac{\pi}{4}; 2\right)$; $\qquad$ 4) $f(x) = e^{-3x}$, $\quad M\left(\ln 2; \dfrac{5}{24}\right)$.

Решение. 1) Так как $-\dfrac{1}{x}$ — одна из первообразных функции $\dfrac{1}{x^2}$, то $F(x) = -\dfrac{1}{x} + C$. По условию $F(-2) = 1$, т. е. $1 = \dfrac{1}{2} + C$, откуда $C = \dfrac{1}{2}$, $F(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}$.

2) Функция $\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}}$ — одна из первообразных функции $\sqrt{x}$. Поэтому $F(x) = \dfrac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + C$, $F(4) = 6$, т. е. $6 = \dfrac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + C$, откуда $C = \dfrac{2}{3}$, $F(x) = \dfrac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right)$.

3) $F(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2} + C$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2 = C$, $F(x) = 2 - \dfrac{\cos 2x}{2}$.

4) $F(x) = -\dfrac{1}{3}\, e^{-3x} + C$, $F(\ln 2) = \dfrac{5}{24} = -\dfrac{1}{3}\, e^{-3\ln 2} + C = -\dfrac{1}{3}\, e^{\ln 2^{-3}} + C = -\dfrac{1}{24} + C$, $C = \dfrac{1}{4}$, $F(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}\, e^{-3x}$.

Ответ. 1) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}$; 2) $\dfrac{2}{3}\left(1 + x^{\frac{3}{2}}\right)$; 3) $2 - \dfrac{\cos 2x}{2}$; 4) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}\, e^{-3x}$.

Пример 2. Вычислить интеграл I, если:

1) $I = \displaystyle\int_1^2 \left[(x-1)^2 + (x-2)^3\right] dx$; $\qquad$ 2) $I = \displaystyle\int_1^4 \dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}\, dx$;

3) $I = \int\limits_0^3 \frac{x^2+3x+4}{x+1}\,dx$; 4) $I = \int\limits_0^2 x\sqrt{x+2}dx$;

5) $I = \int\limits_0^{\pi} \sin^4 x dx$; 6) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos x dx$.

Решение. 1) Применяя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$I = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-2)^4}{4}\right]\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

2) $I = \int\limits_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4 =$

$$= \left(\frac{2}{3}\cdot 8 - 2\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{17}{3}.$$

3) $I = \int\limits_0^3 \frac{x^2+x+2(x+1)+2}{x+1}\,dx = \int\limits_0^3 \left(x+2+\frac{2}{x+1}\right)dx =$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln(x+1)\right]\Bigg|_0^3 = \frac{21}{2} + 2\ln 4.$$

4) $I = \int\limits_0^2 (x+2-2)\sqrt{x+2}dx = \int\limits_0^2 \left[(x+2)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{1}{2}}dx\right] =$

$$= \left[\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot 2^5 - \frac{4}{3}\cdot 2^3 - \left(\frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2} - \frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{2}\right) = \frac{16}{15}(2+\sqrt{2}).$$

5) $\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) =$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x,$$

$$I = \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$

6) $\sin 3x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$,

$$I = \left(-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{17}{3}$; 3) $\frac{21}{2}+2\ln 4$; 4) $\frac{16}{15}(2+\sqrt{2})$; 5) $\frac{3\pi}{8}$; 6) $\frac{1}{2}$.

Пример 3. Найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, если:

1) $a = -3$, $b = 0$, $f(x) = 3 - 2x - x^2$;

2) $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{3\pi}{4}$, $f(x) = \sin x$;

3) $a = -2$, $b = 2$, $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$.

Решение. 1) Эскиз графика параболы $y = 3 - 2x - x^2 = 4 - (x+1)^2$ представлен на рис. 42.3, а искомая площадь S выражается формулой

$$S = \int\limits_{-3}^{0} (3 - 2x - x^2)dx = \int\limits_{-3}^{0} \left[4 - (x+1)^2\right] dx = \left[4x - \frac{(x+1)^3}{3}\right]\Bigg|_{-3}^{0} = 9.$$

$$2)\ S = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \quad (\text{рис. } 42.4).$$

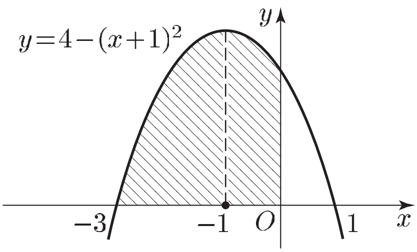

Рис. 42.3

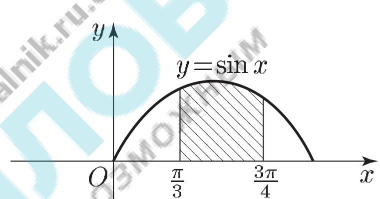

Рис. 42.4

3) Функция $y = x^2 - 2|x| + 3$ является четной, ее график симметричен относительно оси Oy. При $x \geqslant 0$ функция принимает вид $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ (рис. 42.5), а прямая $x = 1$ — ось симметрии параболы $y = (x-1)^2 + 2$. Искомая площадь $S = 4S_1$, где S_1 — площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ и графиком функции $y = (x-1)^2 + 2$. Так как $S_1 = \int\limits_0^1 \left[(x-1)^2 + 2\right] dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 2x\right]\Big|_0^1 = \frac{7}{3}$, то $S = \frac{28}{3}$.

Ответ. 1) 9; 2) $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$; 3) $\frac{28}{3}$.

Пример 4. Найти площадь фигуры Ф, ограниченной параболой $y = 6x - x^2$ и прямой $y = x + 4$.

Решение. Прямая $y = x + 4$ пересекает параболу $y = 6x - x^2$ в точках A и B (рис. 42.6), абсциссы которых являются корнями уравнения $6x - x^2 = x + 4$. Решая это уравнение, получаем $x_1 = 1$ (это абсцисса точки A), $x_2 = 4$ (это абсцисса точки B).

Фигура Ф заштрихована на рисунке 42.6. Ее площадь $S = S_1 - S_2$, где S_1 — площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = 4$, осью Ox и параболой $y = 6x - x^2$,

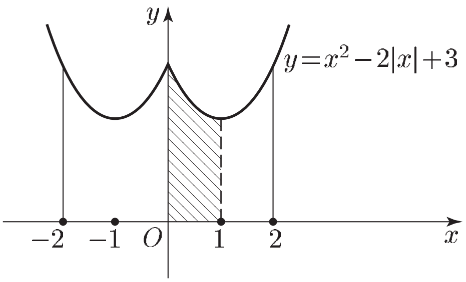

Рис. 42.5

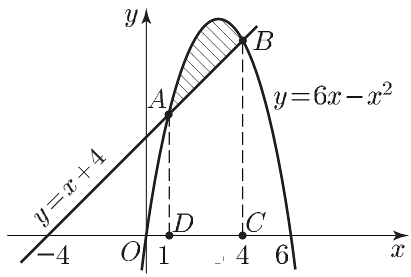

Рис. 42.6

а S_2 — площадь трапеции $ABCD$. Используя формулу для вычисления площади криволинейной трапеции, получаем:

$$S_1 = \int_1^4 (6x - x^2)dx, \qquad S_2 = \int_1^4 (x+4)dx,$$

откуда

$$S = \int_1^4 (6x - x^2)dx - \int_1^4 (x+4)dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)dx.$$

Применяя формулу Ньютона–Лейбница, находим:

$$S = \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_1^4 = \frac{9}{2}.$$

Ответ. $\frac{9}{2}$.

Пример 5. Найти площадь фигуры Ф, которая задается на координатной плоскости Oxy системой неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| < 2, & (1)\\ y < x^2. & (2) \end{cases}$$

Решение. Множество точек, определяемых неравенством (1), — квадрат $ABCD$ (см. § 26, пример 4), где $A(2;0)$, $B(0;2)$, $C(-2;0)$, $D(0;-2)$.

Неравенством (2) определяется множество точек, лежащих ниже параболы $y = x^2$, а фигура Ф — часть квадрата $ABCD$, расположенная ниже параболы.

Пусть S — искомая площадь, S_1 — площадь квадрата $ABCD$, S_2 — площадь фигуры, ограниченной отрезком OB, прямой BA и дугой параболы $y = x^2$.

Тогда $S = S_1 - 2S_2$, где $S_1 = 8$, а S_2 можно найти с помощью интеграла.

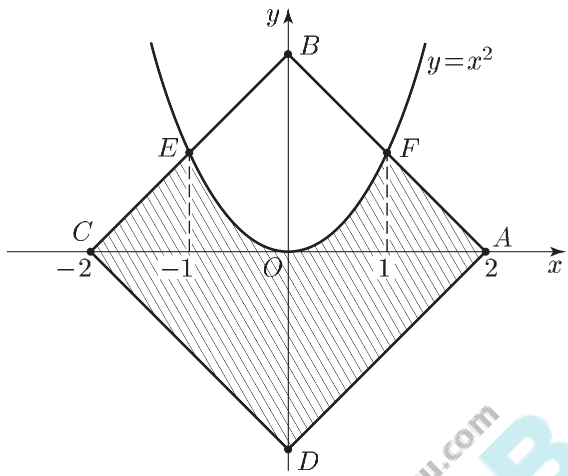

Рис. 42.7

Так как прямая AB задается уравнением $y = 2 - x$ и эта прямая пересекает параболу в точке F с абсциссой 1, то

$$S_2 = \int_0^1 (2 - x - x^2)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}.$$

Следовательно, $S = 8 - 2 \cdot \frac{7}{6}$, т. е. $S = \frac{17}{3}$.

Ответ. $\frac{17}{3}$.

Пример 6. Прямая $y = ax + b$ касается каждой из парабол $y = 8 - 3x - 2x^2$ и $y = 2 + 9x - 2x^2$. Найти значения a и b, координаты точек касания и площадь фигуры, ограниченной этими параболами и касающейся их прямой (рис. 42.8).

Решение. Так как прямая $y = ax + b$ должна иметь единственную общую точку с каждой из парабол, то дискриминанты квадратных уравнений

$$8 - 3x - 2x^2 = ax + b, \qquad (1)$$

$$2 + 9x - 2x^2 = ax + b, \qquad (2)$$

должны равняться нулю, т. е.

$$(a + 3)^2 - 8(b - 8) = a^2 + 6a - 8b + 73 = 0,$$

$$(a - 9)^2 - 8(b - 2) = a^2 - 18a - 8b + 97 = 0,$$

откуда $a = 1$, $b = 10$.

При $a = 1$, $b = 10$ уравнения (1) и (2) принимают вид $(x+1)^2 = 0$, $(x - 2)^2 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, где x_1 и x_2 — абсциссы точек A и B, в которых прямая $y = x + 10$ касается парабол.

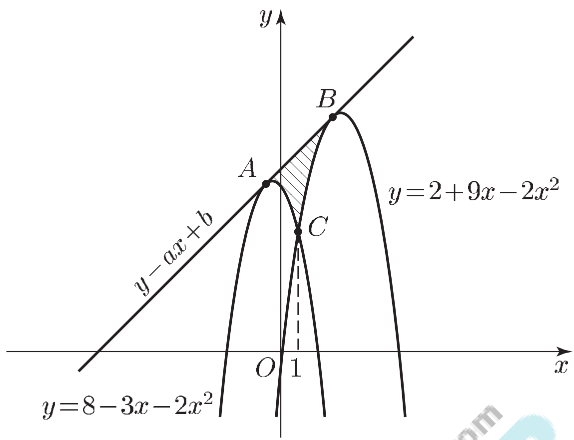

Рис. 42.8

Решив уравнение $8-3x-2x^2=2+9x-2x^2$, находим абсциссу $x_0=\dfrac{1}{2}$ точки C, в которой пересекаются параболы. Искомая площадь равна

$$S=\int\limits_{-1}^{\frac12}\left[x+10-(8-3x-2x^2)\right]dx+\int\limits_{\frac12}^{2}\left[x+10-(2+9x-2x^2)\right]dx=$$

$$=2\int\limits_{-1}^{\frac12}(x+1)^2dx+2\int\limits_{\frac12}^{2}(x-2)^2dx=\frac{2}{3}\left[(x+1)^3\Big|_{-7}^{\frac12}+(x-2)^3\Big|_{\frac12}^{2}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 2\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{2}.$$

Ответ. $a=1$, $b=10$; $(-1;9)$ и $(2;12)$; $\dfrac{9}{2}$.

Пример 7. Фигура M на плоскости (x,y) ограничена графиками функций $y=4e^{-ax}$ и $y=12-5e^{ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y=-12x+4$. Найти a и площадь фигуры M.

Решение. Точка $A(0;4)$ при любом a является общей точкой прямой $y=-12x+4$ и фигуры M. Поэтому эта прямая должна быть касательной к графику функции $y_1=4e^{-ax}$ в точке $x=0$. Так как $y_1'(0)=-4a$, то $-12=-4a$, откуда $a=3$.

Найдем общие точки кривых $y_1=4e^{-3x}$ и $y_2=12-5e^{3x}$, решив уравнение $\dfrac{4}{t}=12-5t$, где $t=e^{3x}$. Это уравнение имеет корни $t_1=\dfrac{2}{5}$, $t_2=2$. Если $t=\dfrac{2}{5}$, то $e^{3x}=\dfrac{2}{5}$, откуда $x_1=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}$, а если

$t = 2$, то $e^{3x} = 2$, откуда $x_2 = \frac{1}{3}\ln 2$. Искомая площадь

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1)dx = \int_{x_1}^{x_2} (12 - 5e^{3x} - 4e^{-3x})dx = 4\ln 5 - \frac{16}{3}.$$

Ответ. $4\ln 5 - \frac{16}{3}$.

Пример 8. График функции $y = f(x) = -2x^3 - 8ax^2 - 4a^2x + 5$, $a < 0$, и прямая l, заданная уравнением $y = 4a^2x + 5$, имеют ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямой l, равна $\frac{27}{2}$.

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y = f(x)$ в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наименьшей ординатой. Найти эту ординату.

Решение. Так как уравнение $-2x^3 - 8ax^2 - 4a^2x + 5 = 4a^2x + 5$ равносильно уравнению $x(x + 2a) = 0$, то точки $A(0; 5)$ и $B(-2a; 5 - 8a^3)$ являются общими точками графика функции $y = f(x)$ и прямой l, заданной уравнением $y = g(x)$, где $g(x) = 4a^2x + 5$.

Площадь S рассматриваемой фигуры определяется формулой

$$S = \left| \int_0^{-2a} (g(x) - f(x))\,dx \right| = \left| \int_0^{-2a} (2x^3 + 8ax^2 + 8a^2x)dx \right| = \frac{8a^4}{3}.$$

По условию $S = \frac{27}{2}$ и поэтому $a = -\frac{3}{2}$, так как $a < 0$. Следовательно, $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 9x + 5$.

2) Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, задаваемая уравнением $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, пересекает ось Oy в точке с ординатой $b(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. В задаче требуется найти наименьшее значение функции $b(x) = f(x) - x \cdot f'(x)$. Так как $b'(x) = -xf''(x) = -x(-12x + 24)$, то уравнение $b'(x) = 0$ имеет единственный положительный корень $x = 2$, причем $b'(x) < 0$ при $x < 2$ и $b'(x) > 0$ при $x > 2$. Отсюда следует, что $b(x)$ принимает наименьшее значение при $x = 2$ и $b(2) = -11$.

Ответ. 1) $a = -\frac{3}{2}$; 2) -11.

Задачи

1. Для функции $f(x)$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку M, если:

1) $f(x) = \frac{2}{x^4}$, $M(2; -1)$;   2) $f(x) = \sin x - \cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$;

3) $f(x) = e^{2x} + \dfrac{1}{x+1}$, $\quad M(0; 2)$; $\qquad$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x}$, $\quad M(1; -3)$;

5) $f(x) = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$, $\quad M(\pi; 0)$; $\qquad$ 6) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $\quad M(-1; 1)$;

7) $f(x) = \sin x \cos 3x$, $\quad M(\pi; 1)$; $\qquad$ 8) $f(x) = \dfrac{2x+6}{x^2+6x+5}$, $\quad M(0; -\ln 5)$.

2. Вычислить интеграл:

1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \left[(x+2)^2 + (x-1)^3\right] dx$; $\qquad$ 2) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$; $\qquad$ 3) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 3} e^{3x} dx$;

4) $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^2}$; $\qquad$ 5) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x^2+3}{x+1} dx$; $\qquad$ 6) $\displaystyle\int_{0}^{3} x\sqrt{x+1} dx$;

7) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin^4 x + \cos^2 x) dx$; $\qquad$ 8) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$.

3. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox, если:

1) $a = 1$, $\quad b = 3$, $\quad f(x) = x^2 - 4x + 5$;

2) $a = -\dfrac{1}{2}$, $\quad b = -\dfrac{1}{3}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

3) $a = 1$, $\quad b = 3$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x+2}$;

4) $a = 0$, $\quad b = \ln 4$, $\quad f(x) = e^{-2x}$;

5) $a = -1$, $\quad b = 1$, $\quad f(x) = 1 + \sqrt{|x|}$;

6) $a = \dfrac{3\pi}{4}$, $\quad b = \pi$, $\quad f(x) = \cos^2 x$;

7) $a = -2$, $\quad b = 4$, $\quad f(x) = x^2 - 4|x| + 5$;

8) $a = 1$, $\quad b = 2$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox, если:

1) $f(x) = 2x - x^2$; $\qquad$ 2) $f(x) = 2 + x - x^2$; $\qquad$ 3) $f(x) = |\sin x|$, $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

1) $y = x^2 + 4$, $\quad y = 2x + 4 - x^2$; $\qquad$ 2) $y = x^3$, $\quad y = \sqrt{x}$;

3) $y = 8x - x^2 - 7$, $\quad y = x + 3$; $\qquad$ 4) $y = \dfrac{4}{x^2}$, $\quad y = x - 1$, $\quad x = 1$;

5) $y = x^2 - 4x$, $\quad y = -4$, $\quad x = 0$; $\qquad$ 6) $y = \sin x$, где $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$, и $y = \dfrac{2x}{\pi}$.

6. Найти площадь фигуры, которая задана на координатной плоскости Oxy системой неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| < 2, \\ y > x^2. \end{cases}$$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Oy, параболой $y = 2 - x^2$ и касательной к ней в точке с абсциссой 2.

8. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и касательными к ней в точках с абсциссами O и 2.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x$ и касательными к ней, проходящими через точку $M\left(\frac{5}{2}; -6\right)$.

10. Фигура Ф ограничена графиком функции $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Под каким углом к оси Ox нужно провести прямую через точку $O(0; 0)$, чтобы она разбивала фигуру Ф на две равновеликие части?

11. Прямая $y = ax + b$ касается каждой из двух парабол $y = x^2 + 5x + 7$ и $y = x^2 - x - 5$. Найти: a и b; координаты точки касания; площадь фигуры, ограниченной этими параболами и касающейся их прямой.

12. Прямые $y = 2x + 2$ и $y = -x + \frac{7}{2}$ касаются параболы $y = ax^2 + x + b$. Найти значения a и b, координаты точек касания и площадь фигуры, ограниченной параболой и данными прямыми.

13. Фигура M на плоскости (x, y) ограничена графиками функций $y = 3e^{ax}$ и $y = 7 - 2e^{-ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y = 9x + 3$. Найти a и площадь фигуры M.

14. При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$, будет наименьшей?

15. График функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^3 + 2ax^2 + \frac{5}{4}a^2x + 1$, $a < 0$, и прямая l, заданная уравнением $y = \frac{a^2x}{4} + 1$, имеют ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямой l, равна $\frac{27}{4}$.

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y = f(x)$ в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой. Найти эту ординату.

Ответы

1. 1) $-\frac{2}{3x^2} - \frac{11}{12}$; 2) $2 - \sin x - \cos x$; 3) $\frac{e^{2x}}{2} + \ln(1+x) + \frac{3}{2}$; 4) $2\sqrt{x} - 2\ln x - 5$; 5) $x - \sin x - \pi$; 6) $x + 2 - 3\ln(x+2)$; 7) $\frac{1}{8}(2\cos 2x - \cos 4x + 7)$; 8) $\ln(x+5) + \ln(x+1) - 2\ln 5$.

2. 1) $-\frac{45}{4}$; 2) 1; 3) $\frac{26}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{3}{2} + 4\ln\frac{4}{3}$; 6) $\frac{116}{15}$; 7) $\frac{7\pi}{16}$; 8) $\frac{2}{3}$.

3. 1) $\frac{8}{3}$; 2) 1; 3) $\ln\frac{5}{2}$; 4) $\frac{15}{32}$; 5) $\frac{10}{3}$; 6) $\frac{1}{8}(\pi - 2)$; 7) 14; 8) $\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2}$.

4. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{9}{2}$; 3) 2. **5.** 1) 5; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{9}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{8}{3}$; 6) $1 - \frac{\pi}{4}$. **6.** $\frac{7}{3}$. **7.** $\frac{8}{3}$.

8. $\frac{2}{3}$. **9.** $\frac{9}{4}$. **10.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{\pi^2}$. **11.** $a = -2$, $b = -\frac{21}{4}$; $\left(-\frac{7}{2}; \frac{7}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{17}{4}\right)$; $\frac{9}{4}$.

12. $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$; $(-1; 0)$, $\left(2; \frac{3}{2}\right)$; $\frac{9}{8}$. **13.** $a = 3$; $\frac{7\ln 6 - 10}{3}$. **14.** 2. **15.** -3; 9.

Глава 14

Задачи с параметрами. Разные задачи

§ 43. Уравнения и системы уравнений с параметрами

Опыт вступительных экзаменов в вузы показывает, что решение уравнений и неравенств, содержащих параметры, вызывает большие затруднения у абитуриентов. Это связано с тем, что решение задач с параметрами требует не только знания свойств уравнений и неравенств и умения выполнять алгебраические преобразования, но также высокой логической культуры и хорошей техники исследования.

Решить задачу с параметрами — это значит выяснить, при каких значениях параметров задача имеет решения, и найти эти решения, зависящие, как правило, от параметров.

Условимся считать, что параметры в уравнениях и неравенствах принимают действительные значения и в задачах с параметрами отыскиваются действительные решения.

Отметим также, что некоторые задачи с параметрами были рассмотрены в §§ 7, 9, 15, 20, 21.

Примеры уравнений с параметрами

Пример 1. Решить уравнение

$$ax^2 - 2x + 1 = 0. \tag{1}$$

Решение. Если $a = 0$, то уравнение (1) имеет единственный корень $x = \frac{1}{2}$. Если же $a \neq 0$, то уравнение (1) является квадратным, а его дискриминант $D = 4(1 - a)$.

Пусть $a > 1$, тогда $D < 0$ и уравнение (1) не имеет корней.

Пусть $a = 1$, тогда $D = 0$ и уравнение (1) имеет единственный корень $x = 1$ (кратности 2).

Пусть $a < 1$ и $a \neq 0$, тогда уравнение (1) имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}, \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}. \tag{2}$$

Ответ. Уравнение не имеет корней при $a > 1$; имеет единственный корень x_0 при $a = 0$ и $a = 1$ ($x_0 = \frac{1}{2}$ при $a = 0$, $x_0 = 1$ при

$a = 1$); имеет два различных корня, определяемых формулами (2), при $a < 1$, $a \neq 0$.

Пример 2. Найти все значения a, при которых уравнения

$$ax^3 - x^2 - x - (a+1) = 0, \tag{3}$$
$$ax^2 - x - (a+1) = 0 \tag{4}$$

имеют общий корень, и найти этот корень.

Решение. При $a = 0$ уравнения (3) и (4) не имеют общего корня.

Пусть $a \neq 0$ и пусть x_0 — общий корень уравнений (3) и (4). Тогда верны равенства

$$ax_0^3 - x_0^2 - x_0 - (a+1) = 0, \tag{5}$$
$$ax_0^2 - x_0 - (a+1) = 0. \tag{6}$$

Умножая равенство (6) на x_0 и вычитая из полученного равенства равенство (5), находим

$$x_0 = \frac{a+1}{a}. \tag{7}$$

Таким образом, если уравнения (3) и (4) при некотором значении a (где $a \neq 0$) имеют общий корень, то он определяется формулой (7).

Нетрудно проверить, что x_0 — корень каждого из уравнений (3) и (4) (это достаточно установить лишь для уравнения (4)).

Ответ. $\frac{a+1}{a}$, $a \neq 0$.

Пример 3. Найти все значения a, при которых уравнение

$$(a + 1 - |x+2|)(x^2 + 4x + 1 - a) = 0 \tag{8}$$

имеет ровно три корня.

Решение. Уравнение (8) равносильно совокупности двух уравнений

$$a = |x+2| - 1, \tag{9}$$
$$a = x^2 + 4x + 1. \tag{10}$$

Введем систему координат, в которой осью абсцисс является ось Ox, а осью ординат — ось Oa, и построим графики функций, заданных формулами (9) и (10) (рис. 43.1).

Пусть E — искомое множество значений a. Тогда $a_0 \in E$ в том и только в том случае, если горизонтальная прямая $a = a_0$ пересекает объединение построенных графиков в трех точках (каждая из этих трех точек принадлежит прямой $a = a_0$ и хотя бы одному из графиков функций (9) и (10)). Этим свойством обладает лишь прямая $a = -1$, имеющая одну общую точку с графиком функции (9) и две общие точки с графиком функции (10).

Ответ. $a = -1$.

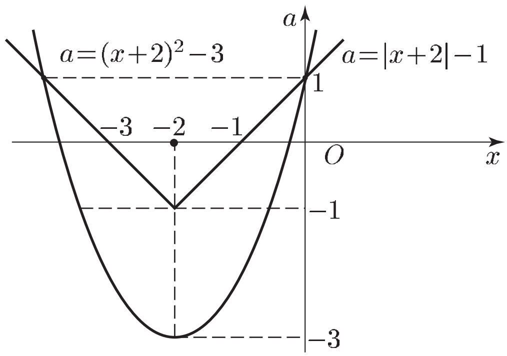

Рис. 43.1

Пример 4. Найти все значения a, при которых найдется хотя бы одна пара действительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющая уравнению

$$x^2 - 5xy + 5ay^2 + \left(2a - \frac{15}{2}\right) y + 2x + 2 = 0. \qquad (11)$$

Решение. Будем рассматривать уравнение (11) как квадратное относительно x. Найдем дискриминант этого уравнения:

$$D(y, a) = (2 - 5y)^2 - 4 \left(5ay^2 + 2ay - \frac{15}{2} y + 2\right) =$$
$$= 5(5 - 4a)y^2 + 2(5 - 4a)y - 4.$$

Хотя бы одна пара действительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющая уравнению (11), существует тогда и только тогда, когда неравенство $D(y, a) \geqslant 0$, т. е. неравенство

$$5(5 - 4a)y^2 + 2(5 - 4a)y - 4 \geqslant 0, \qquad (12)$$

имеет решения.

Возможны три случая:

1) $a = \frac{5}{4}$; 2) $a < \frac{5}{4}$; 3) $a > \frac{5}{4}$.

В первом случае неравенство (12) не является верным. Во втором случае это неравенство имеет решения, так как у параболы $z = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$, где $\alpha > 0$, имеются точки, расположенные выше оси Oy (ветви параболы направлены вверх).

Наконец, в третьем случае, т. е. при $a > \frac{5}{4}$, неравенство (12) имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант D_1 квадратного трехчлена, стоящего в левой части этого неравенства неотрицателен:

$$D_1(a) = 4(5 - 4a)^2 + 80(5 - 4a) =$$
$$= 4(5 - 4a)(5 - 4a + 20) = 64 \left(a - \frac{5}{4}\right) \left(a - \frac{25}{4}\right) \geqslant 0. \qquad (13)$$

Действительно, если $\alpha < 0$, то ветви параболы $z = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$ направлены вниз и хотя бы одна точка параболы лежит выше оси Oy (или на этой оси) тогда и только тогда, когда $D_1 = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geqslant 0$. При $a > \frac{5}{4}$ решениями неравенства (13) являются значения a такие, что $a \geqslant \frac{25}{4}$.

Ответ. $a < \frac{5}{4}$, $a \geqslant \frac{25}{4}$.

Пример 5. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin^2 x + (3 - 2a)\sin x - 6a = 0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

Решение. Разложив левую часть уравнения на множители, запишем уравнение в виде

$$(\sin x - 2a)(\sin x + 3) = 0.$$

Так как уравнение $\sin x + 3 = 0$ не имеет корней, то исходное уравнение, равносильное уравнению $\sin x = 2a$, имеет корни тогда и только тогда, когда $|2a| \leqslant 1$, т. е. при $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. Эти корни определяются по формуле

$$x = (-1)^n \arcsin 2a + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 6. При каких значениях a уравнение

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a \tag{14}$$

имеет корни? Найти эти корни.

Решение. Используя тождество

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4x),$$

(§ 4, п. 1, пример 4, б), запишем уравнение (14) в виде

$$\frac{1}{8}(5 + 3\cos 4x) = a$$

или

$$\cos 4x = \frac{8a - 5}{3}. \tag{15}$$

Уравнение (15), равносильное уравнению (14), имеет корни тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$-1 \leqslant \frac{8a - 5}{3} \leqslant 1.$$

Решив это неравенство, получаем $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1$.

Ответ. Уравнение имеет корни, если $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1$;

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{8a - 5}{3} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 7. Найти все значения a, при которых уравнение

$$2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$$

имеет единственный корень на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Решение. Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то уравнение можно записать в виде

$$4\sin^2 x - 2a\sin x - (a+1) = 0, \qquad (16)$$

откуда получаем

$$\sin x = -\frac{1}{2}, \qquad (17)$$

$$\sin x = \frac{a+1}{2}. \qquad (18)$$

Уравнение (17) имеет на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ единственный корень $x_0 = -\frac{\pi}{6}$. Поэтому уравнение (16) и равносильное ему исходное уравнение будут иметь единственный корень тогда и только тогда, когда уравнение (18) либо не имеет корней, либо имеет единственный корень $x = x_1$, где $x_1 = x_0$. Но уравнение (18) не имеет корней на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в том и только в том случае, когда $\frac{a+1}{2} \geqslant 0$ или $\frac{a+1}{2} \leqslant -1$, т. е. при $a \geqslant -1$, а также при $a \leqslant -3$. Равенство $x_1 = x_0$ возможно лишь в случае, когда $\frac{a+1}{2} = -\frac{1}{2}$, т. е. при $a = -2$.

Ответ. $a \leqslant -3$, $a = -2$, $a \geqslant -1$.

Пример 8. При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = a \qquad (19)$$

имеет корни? Найти эти корни.

Решение. Уравнение (19) равносильно уравнению

$$(1-a)\sin^2 x - \sin x\cos x - (a+2)\cos^2 x = 0. \qquad (20)$$

1) Пусть $a \neq 1$. Тогда из (20) следует, что $\cos x \neq 0$ (в противном случае $\sin x = \cos x = 0$). Поэтому, разделив обе части (20) на $\cos^2 x$ и положив $t = \operatorname{tg} x$, получим уравнение

$$(1-a)t^2 - t - (a+2) = 0, \qquad (21)$$

равносильное уравнению (20).

Уравнение (19) при $a \neq 1$ имеет корни в том и только в том случае, когда дискриминант квадратного уравнения (21) неотрицателен, т. е.

$$D = -4a^2 - 4a + 9 \geqslant 0.$$

Решая это неравенство, получаем

$$-\frac{\sqrt{10}+1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{10}-1}{2}.$$

Если t_1, t_2 — корни уравнения (21), то корни уравнения (19) имеют вид $x_1 = \operatorname{arctg} t_1 + \pi n$, $x_2 = \operatorname{arctg} t_2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2) Пусть $a = 1$. Тогда уравнение (19) можно записать в виде

$$\cos x(\sin x + 3\cos x) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ. Уравнение имеет корни при $a \in E$, где $E = \left[-\frac{\sqrt{10}-1}{2}, \frac{\sqrt{10}+1}{2}\right]$; если $a \in E$ и $a \neq 1$, то

$$x = \operatorname{arctg} t_1 + \pi n, \qquad x = \operatorname{arctg} t_2 + \pi n,$$

где $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9 - 4a - 4a^2}}{2(1-a)}$, $n \in \mathbf{Z}$; если $a = 1$, то

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, \qquad x \in \mathbf{Z}.$$

Пример 9. Найти все значения p, при которых уравнение

$$(p-1)3^{2x} - (2p-1)3^x - 1 = 0$$

имеет два различных корня.

Решение. Обозначим $t = 3^x$, тогда уравнение примет вид

$$(p-1)t^2 - (2p-1)t - 1 = 0, \tag{22}$$

где $t > 0$.

Исходное уравнение имеет два различных корня тогда и только тогда, когда уравнение (22) имеет два различных положительных корня.

Заметим, что уравнение

$$at^2 + bt + c = 0, \qquad \text{где} \quad a \neq 0,$$

имеет два различных положительных корня в том и только в том случае (§ 21, п. 2, (4)), когда

$$D = b^2 - 4ac > 0, \qquad ab < 0, \qquad ac > 0. \tag{23}$$

Условия (23) применительно к уравнению (22) приводят к системе неравенств

$$\begin{cases} (2p-1)^2 + 4(p-1) > 0, \\ (2p-1)(p-1) > 0, \\ p - 1 < 0, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} 4p^2 > 3, \\ \left(p - \frac{1}{2}\right)(p-1) > 0, \\ p < 1. \end{cases} \qquad (24)$$

Решив систему (24), получаем $p < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ. $p < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 10. При каких значениях a уравнение

$$\log_5 x + 4(1-a^2)\log_{25x} 5 - 2 = 0 \qquad (25)$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше $\frac{24}{5}$?

Решение. Допустимые значения x определяются условиями

$$x > 0, \qquad x \neq \frac{1}{25}.$$

Предполагая, что эти условия выполнены, и переходя к логарифмам по основанию 5, преобразуем уравнение (25) к виду

$$\log_5 x + \frac{4(1-a^2)}{2+\log_5 x} - 2 = 0$$

или

$$\log_5^2 x - 4a^2 = 0,$$

откуда $\log_5 x = \pm 2a$,

$$x_1 = 5^{2a}, \qquad x_2 = 5^{-2a}.$$

Если $a = 0$, то $x_1 = x_2 = 1$, а если $|a| = 1$, то одно из чисел x_1, x_2 равно $\frac{1}{25}$. Поэтому значения $a = 0$, $a = -1$, $a = 1$ не удовлетворяют условиям задачи.

Пусть $a \neq 0$, $|a| \neq 1$, тогда уравнение (25) имеет два различных корня.

По условию $|x_1 - x_2| > \frac{24}{5}$, т. е.

$$|5^{2a} - 5^{-2a}| > \frac{24}{5}. \qquad (26)$$

Если $a \geqslant 0$, то $5^{2a} \geqslant 5^{-2a}$ и неравенство (26) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$5^{2a} - 5^{-2a} > \frac{24}{5}, \qquad (5^{2a})^2 - \frac{24}{5}\cdot 5^{2a} - 1 > 0,$$

$$(5^{2a} - 5)\left(5^{2a} + \frac{1}{5}\right) > 0, \qquad 5^{2a} > 5, \qquad \text{откуда} \quad a > \frac{1}{2}.$$

Если $a < 0$, то неравенство (26) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$5^{-2a} - 5^{2a} > \frac{24}{5}, \qquad (5^{2a})^2 + \left(\frac{24}{5}\right)5^{2a} - 1 < 0,$$

$$(5^{2a} + 5)\left(5^{2a} - \frac{1}{5}\right) < 0, \qquad 5^{2a} < \frac{1}{5}, \qquad \text{откуда} \quad a < -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $|a| > \frac{1}{2}$, $|a| \neq 1$.

Пример 11. Найти все значения a, при которых ровно один корень x_1 уравнения

$$x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0 \tag{27}$$

удовлетворяет условию

$$x_1 < -1. \tag{28}$$

Решение.

Пусть D — дискриминант уравнения (27). Тогда

$$D = 4(a^2 - 3a + 2) = 4(a-1)(a-2).$$

Пусть $a = 1$ или $a = 2$, тогда $D = 0$, и уравнение (27) имеет единственный корень x_1, причем $x_1 = -1$ при $a = 1$ и $x_1 = -2$ при $a = 2$. Условие (28) удовлетворяет только $a = 2$.

При $D < 0$ уравнение (27) не имеет действительных корней, а если $D > 0$, то либо $a < 1$, либо $a > 2$, и уравнение (27) имеет два различных корня

$$x_1 = -a - \sqrt{(a-1)(a-2)} \quad \text{и} \quad x_2 = -a + \sqrt{(a-1)(a-2)}.$$

Из условий задачи следует, что неравенству (28) должен удовлетворять меньший из корней уравнения (27), т. е. x_1 (если $x_2 < -1$, то $x_1 < -1$). Таким образом, требуется найти все значения a, при которых справедливы неравенства

$$x_1 < -1, \quad x_2 \geqslant -1. \tag{29}$$

Аналитический способ решения задачи требует решения системы неравенств

$$\begin{cases} -a - \sqrt{(a-1)(a-2)} < -1 \\ -a + \sqrt{(a-1)(a-2)} \geqslant -1. \end{cases}$$

Более простым и наглядным является геометрическое решение, основанное на свойствах квадратичной функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 2ax + 3a - 2$. Пусть второе из неравенств (3) является строгим. Так как ветви параболы $y = f(x)$ направлены вверх, то из условий $x_1 < -1$, $x_2 > -1$ следует, что $f(-1) < 0$ (рис. 43.2). Обратно, если $f(-1) < 0$, то $x_1 < -1 < x_2$. Рассмотрим выражение

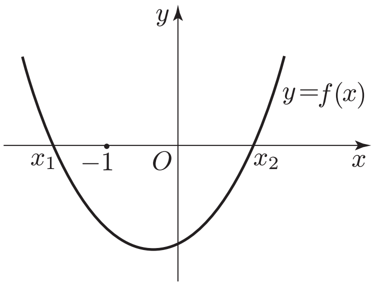

Рис. 43.2

$f(-1) = 1 - 2a + 3a - 2 = a - 1$. Решив неравенство $a - 1 < 0$, находим $a < 1$.

Пусть $x_1 < -1$, $x_2 = -1$, тогда $\sqrt{(a-1)(a-2)} = a - 1$, откуда следует, что либо $a = 1$ (тогда $x_1 = -1$), либо $a - 2 = a - 1$, что невозможно.

Ответ. $a = 2$, $a < 1$.

Пример 12. Найти все значения a, при которых уравнение

$$ax^2 + (3 + 4a)x + 2a^2 + 4a + 3 = 0 \tag{30}$$

имеет только целые корни.

Решение. Пусть $a = 0$, тогда из (30) следует, что $3x + 3 = 0$, $x = -1$. Поэтому $a = 0$ удовлетворяет условиям задачи.

Пусть $a \neq 0$, тогда уравнение равносильно уравнению

$$x^2 + \left(4 + \frac{3}{a}\right)x + 2a + 4 + \frac{3}{a} = 0. \tag{31}$$

Если x_1 и x_2 — целые корни уравнения (31), то $-4 - \frac{3}{a}$ и $2a + 4 + \frac{3}{a}$ — целые числа (теорема Виета), откуда следует, что их сумма, т. е. $2a$ — целое число.

Пусть $2a = n$, где $n \in \mathbf{Z}$, тогда $a = \frac{n}{2}$, $\frac{3}{a} = \frac{6}{n}$, причем $\frac{6}{n}$ — целое число ($-4 - \frac{3}{a}$ — целое число). Отсюда следует, что n — делитель числа 6, т. е. n может принимать значения из множества чисел ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

Проверка показывает, что только при $n = -1$ и $n = 3$ (т. е. при $a = -\frac{1}{2}$ и $a = \frac{3}{2}$) все корни уравнения (30) являются целыми числами.

Ответ. 0, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$.

Пример 13. Найти все значения a, при которых уравнение

$$x^2 - 6x + a = 0 \qquad (32)$$

имеет два различных действительных корня, из которых только один принадлежит интервалу $(1;\ 7)$.

Решение. Обозначим $f(x) = x^2 - 6x + a$ и заметим, что абсцисса вершины параболы $y = f(x)$ равна 3, а точки x_1 и x_2, являющиеся корнями уравнения (32), расположены на оси Ox симметрично относительно точки $x_0 = 3$ (рис. 43.3). Поэтому, если $x_1 < x_2$, то интервалу $(1;\ 7)$ должна принадлежать только точка x_2 (если $x_1 \in (1;\ 7)$, то $x_1 \in (1;\ 3)$ и тогда $x_2 \in (3;\ 5)$ и $x_2 \in (1;\ 7)$, т. е. оба корня уравнения (32) лежат на интервале $(1;\ 7)$).

Следовательно $x_1 \leqslant 1$ и поэтому $f(1) \leqslant 0$, а $f(7) > 0$, так как $x_2 < 7$.

Задача свелась к решению системы неравенств $f(1) \leqslant 0$, $f(7) > 0$, т. е. системы

$$\begin{cases} -5 + a \leqslant 0 \\ 7 + a > 0, \end{cases}$$

откуда находим $-7 < a \leqslant 5$.

Ответ. $-7 < a \leqslant 5$.

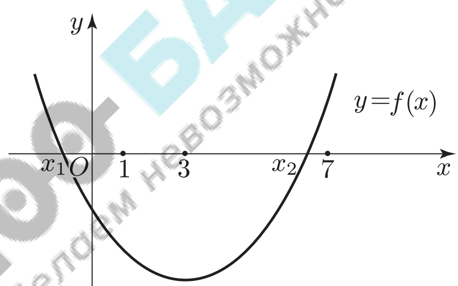

Рис. 43.3

Пример 14. Найти все значения a, при которых уравнение

$$2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3 = 0 \qquad (33)$$

имеет ровно два корня, и найти эти корни.

Решение. Обозначим $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3$. Если уравнение (33) имеет ровно два различных корня x_1 и x_2, то один из них должен иметь кратность 2 (например, x_1) и тогда

$$f(x) = 2(x - x_1)^2(x - x_2), \qquad (34)$$

откуда следует, что $f(x_1) = 0$, т. е. x_1 — корень уравнения

$$f(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x - 3)(x + 2) = 0,$$

откуда находим, что либо $x_1 = -2$, либо $x_1 = 3$.

Пусть $x_1 = -2$, тогда

$f(x_1) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 36(-2) + a - 3 = 0,$

т. е. $41 + a = 0$, откуда $a = -41$,

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 44 = 2x^2(x+2) - 7x(x+2) - 22(x+2) =$$
$$= (x+2)(2x^2 - 7x - 22) = (x+2)^2(2x - 11),$$

откуда $x_2 = \dfrac{11}{2}$.

Пусть $x_1 = 3$, тогда $f(x_1) = a - 84 = 0$, откуда $a = 84$,

$$f(x) = 2x^2(x-3) + 3x(x-3) - 27(x-3) =$$
$$= (x-3)(2x^2 + 3x - 27) = (x-3)^2(2x+9),$$

откуда $x_2 = -\dfrac{9}{2}$.

Заметим, что представление многочлена $f(x)$ в виде (34), где $x_2 \neq x_1$, является необходимым и достаточным условием для того, чтобы этот многочлен имел ровно два различных корня.

Ответ. $a = -41$, $x_1 = -2$, $x_2 = \dfrac{11}{2}$; $a = 84$, $x_1 = 3$, $x_2 = -\dfrac{9}{2}$.

Пример 15. Выяснить, при каких значениях a уравнение

$$|x+2| + a|x-1| = 3 \qquad (35)$$

а) имеет единственный корень и найти его;

б) имеет ровно два корня и найти их;

в) имеет бесконечное множество корней.

Решение. Запишем уравнение (35) в виде

$$a|x-1| = 3 - |x+2| \qquad (36)$$

и построим графики функций $y = 3 - |x+2|$ и $y = a|x-1|$ (рис. 43.4). Из рисунка видно, что при любом $a \in \mathbf{R}$ графики указанных функций имеют общую точку (1; 0) и поэтому число $x_1 = 1$ — корень уравнения (35).

а) Пусть $|a| > 1$, тогда графики функций имеют единственную общую точку (1; 0), а число $x_1 = 1$ — корень уравнения (35).

б) Пусть $|a| < 1$, тогда графики имеют общую точку с абсциссой $x_2 < -2$. Так как $|x-1| = 1 - x$, $|x+2| = -x - 2$ при $x < -2$, то x_2 — корень уравнения $3 + x + 2 = a(1 - x)$, т. е. $x_2 = \dfrac{a-5}{a+1}$.

в) Пусть $a = 1$, тогда графики совпадают на отрезке $[-2; 1]$ и поэтому каждое значение $x \in [-2; 1]$ — корень уравнения (35).

г) Если $a = -1$, то графики совпадают при $x \geqslant 1$, поэтому значения $x \in [1; +\infty)$ — корни уравнения (35).

Ответ. а) $|a| > 1$, $x = 1$; б) $|a| < 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{a-5}{a+1}$; в) $a = 1$ и $a = -1$.

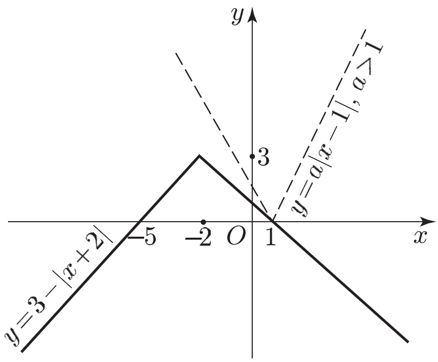

Рис. 43.4

Пример 16. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x-9} = ax + 7a - 3 \qquad \textbf{(37)}$$

имеет единственное решение.

Решение. Обозначим $t = x + 7$, тогда уравнение (37) примет вид

$$\sqrt{t-16} = at - 3 \qquad \textbf{(38)}$$

Чтобы решить задачу, требуется найти все значения a, при которых графики функций $y = \sqrt{t-16}$ и $y = at - 3$ имеют при $t \geqslant 16$ единственную общую точку (рис. 43.5).

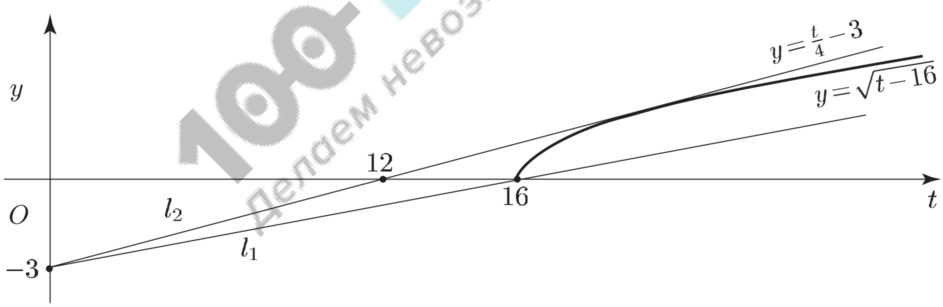

Рис. 43.5

Из рисунка видно, что при $a \leqslant 0$ прямая $y = at - 3$ и парабола $y = \sqrt{t-16}$ не имеют общих точек.

Заметив, что прямая $y = at - 3$ проходит через точку $A(0;\ -3)$, а ее угловой коэффициент равен a, найдем угловые коэффициенты a_1 и a_2 прямых l_1 и l_2, проходящих через точку A и таких, что l_1 проходит через точку $(16;\ 0)$, а l_2 касается параболы $y = \sqrt{t-16}$. Подставляя в уравнение $y = at - 3$ значения $t = 16$, $y = 0$, находим $a_1 = \dfrac{3}{16}$.

Число a_2 является тем значением a, при котором уравнение (38) имеет единственный корень $t_1 > 16$. Возводя обе части уравнения (38) в квадрат, получаем уравнение $a^2t^2 - (6a+1)t + 25 = 0$, дискриминант которого $D = (6a+1)^2 - 100a^2$. Уравнение $D = 0$ имеет единственный положительный корень $a = \frac{1}{4}$ и поэтому $a_2 = \frac{1}{4}$.

Если $\frac{3}{16} \leqslant a < \frac{1}{4}$, то прямая $y = at - 3$ и парабола $y = \sqrt{t - 16}$ имеет две общие точки, а при $a > \frac{1}{4}$ не имеют общих точек.

Ответ. $0 < a < \frac{3}{16}$, $a = \frac{1}{4}$.

Пример 17. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_5(x + \sqrt{2 - a}) + \log_{\frac{1}{5}}(a - 1 - x) = \log_{25} 9$$

имеет решение.

Решение. Переходя к логарифмам по основанию 5, получаем уравнение

$$\log_5(x + \sqrt{2 - a}) - \log_5(a - 1 - x) = \log_5 3, \tag{39}$$

уравнение (39) равносильно уравнению

$$x + \sqrt{2 - a} = 3(a - 1 - x), \tag{40}$$

если выполняется условие

$$a - 1 > x. \tag{41}$$

Выражая x из (40) и подставляя в (41), получаем неравенство

$$\sqrt{2 - a} > 1 - a. \tag{42}$$

Чтобы решить неравенство (42), построим графики функции $y = \sqrt{2 - a}$ и $y = 1 - a$ (рис. 43.6).

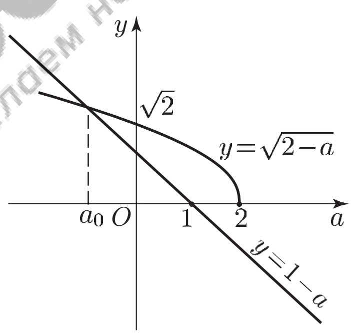

Рис. 43.6

Из рисунка видно, что решения неравенства (42) образуют промежуток $(a_0; 2]$, где $a_0 < 0$ и a_0 — корень уравнения $\sqrt{2 - a} = 1 - a$.

Тогда $2 - a = (1 - a)^2$ или $a^2 - a - 1 = 0$, откуда $a_0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < a \leqslant 2$.

Пример 18. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{4x}(1+ax) = \frac{1}{2} \qquad (43)$$

имеет единственное решение.

Решение. Уравнение (43) равносильно уравнению

$$1 + ax = 2\sqrt{x} \qquad (44)$$

при условиях

$$x > 0, \quad x \neq \frac{1}{4}. \qquad (45)$$

Полагая $\sqrt{x} = t$, запишем уравнение (44) в виде

$$at^2 - 2t + 1 = 0. \qquad (46)$$

Если $a = 0$, то $t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$ и не выполняется второе из условий (45).

Пусть $a \neq 0$, тогда уравнение (46) является квадратным и имеет действительные корни тогда и только тогда, когда $D = 4 - 4a \geqslant 0$, т. е. при $a \leqslant 1$.

Если $D = 0$ ($a = 1$), то уравнение (46) имеет единственный положительный корень $t = 1$, а уравнение (44) имеет единственный корень $x = 1$, удовлетворяющий условиям (45).

Пусть $D > 0$ ($a < 1$), тогда уравнение (46) имеет два действительных и различных корня. Так как $t = \sqrt{x} \geqslant 0$, то в случае $D > 0$ задача сводится к нахождению тех значений a, при которых уравнение (46) имеет один положительный корень (а другой отрицательный), т. е. имеет действительные корни разных знаков. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда $D > 0$ и $\frac{1}{a} < 0$, т. е. при $a < 0$.

Приведем другое решение этой задачи, используя графики функций $y = 1 + ax$ и $y = 2\sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$ (рис. 43.7). Требуется найти все значения a, при которых эти графики имеют единственную общую точку и при этом выполняются условия (45).

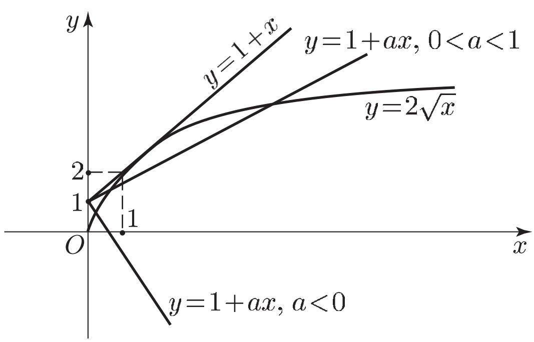

Рис. 43.7

Если $a < 0$, то прямая $y = 1 + ax$ пересекает параболу $y = 2\sqrt{x}$ в единственной точке.

Если $a = 0$, то из уравнения (44) находим $x = \frac{1}{4}$ (не выполняются условия (44)).

Пусть $a > 0$, тогда прямая $y = 1 + ax$ имеет единственную общую точку с параболой только в том случае, когда она касается параболы.

В этом случае уравнение (46) имеет единственный корень ($D = 0$, $a = 1$). При $0 < a < 1$ прямая $y = 1 + ax$ пересекает параболу $y = 2\sqrt{x}$ в двух точках, а при $a > 1$ прямая и парабола не имеют общих точек.

Ответ. $a < 0$, $a = 1$.

Пример 19. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$9|x-1| - 4x + |3x - |x+a|| = 0 \tag{1}$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Пусть

$$f_a(x) = 9|x-1| - 4x + |3x - |x+a|| \tag{2}$$

Эта функция является линейной на каждом из отрезков с концами в точках 1, $-a$, $\frac{a}{2}$ $(a > 0)$ и $-\frac{a}{4}$ $(a < 0)$.

Если $x > 1$, то угловой коэффициент каждой из этих линейных функций, определяемый первым слагаемым суммы (2), положителен, и поэтому функция $f_a(x)$ является возрастающей при $x > 1$.

Если $x < 1$, то функция $f_a(x)$ является убывающей. Поэтому значение $f_a(1)$ является наименьшим значением функции $f_a(x)$, а уравнение (1) будет иметь решение тогда и только тогда, когда $f_a(1) \leqslant 0$, т. е. $|3 - |a+1|| \leqslant 4$.

Обозначив $t = |a+1|$, получаем неравенство $|t-3| \leqslant 4$, откуда $0 \leqslant t \leqslant 7$, так как $t \geqslant 0$.

Итак, $|a+1| \leqslant 7$, откуда $-8 \leqslant a \leqslant 6$.

Ответ. $-8 \leqslant a \leqslant 6$.

Пример 20. Множество M состоит из точек $(a; b)$ координатной плоскости, для которых $|a| \neq 1$ и уравнение

$$(3a - 4b + 15)x^4 + (7a - 24b + 35)x^2 + |a^2 - 1| + a^2 - 1 = 0 \tag{47}$$

имеет ровно три действительных корня. Доказать, что множество M является внутренней областью многоугольника, в который можно вписать окружность, и найти координаты центра этой окружности.

Решение. Уравнение (47) имеет три действительных корня тогда и только тогда, когда число $x = 0$ является корнем уравнения (47) и уравнение

$$(3a-4b+15)x^2+7a-24b+35=0 \qquad (48)$$

имеет два действительных корня.

Число $x=0$ является корнем уравнения (47), если $|a^2-1|+a^2-1=0$, т. е. если $a^2\leqslant 1$ или $|a|\leqslant 1$. Так как $|a|\neq 1$, то $|a|<1$.

Действительные корни уравнения (47), отличные от нуля (если таковые имеются), являются корнями уравнения (48), а уравнение (48) имеет два действительных корня, если его коэффициент при x^2 и свободный член — числа разных знаков (их произведение отрицательно).

Итак, множество M задается системой неравенств

$$\begin{cases} |a|<1, & (49)\\ (3a-4b+15)(7a-24b+35)<0. & (50)\end{cases}$$

Изобразим на координатной плоскости Oab прямые l_1 и l_2 (рис. 43.8), заданные уравнениями $b=\dfrac{3}{4}a+\dfrac{15}{4}$ и $b=\dfrac{7}{24}a+\dfrac{35}{24}$. Эти прямые пересекаются в точке $E(-5;0)$.

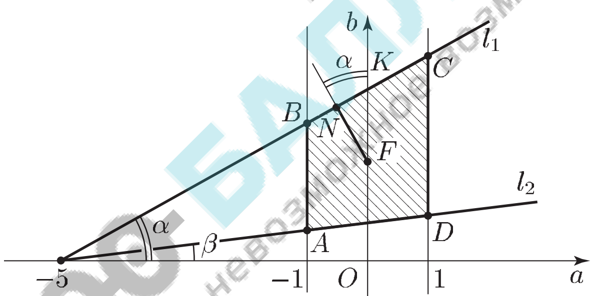

Рис. 43.8

Так как в точке $(0;2)$ левая часть неравенства (50) отрицательна, а неравенство (49) задает вертикальную полосу, ограниченную прямыми $a=-1$ и $a=1$, то система неравенств (49), (50) определяет трапецию, образованную в результате пересечения прямых l_1 и l_2 с прямыми $a=-1$ и $a=1$. Вершинами этой трапеции являются следующие точки:

$$A\left(-1;\frac{7}{6}\right),\quad B(-1;3),\quad C\left(1;\frac{9}{2}\right),\quad D\left(1;\frac{7}{4}\right).$$

Найдем стороны трапеции. Имеем $AB=\dfrac{11}{6}$, $CD=\dfrac{11}{4}$, $BC=\dfrac{2}{\cos\alpha}$, $AD=\dfrac{2}{\cos\beta}$, где $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$, $\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{7}{24}$. В эту трапецию можно вписать окружность, так как $AB+CD=BC+AD$. Радиус окружности равен 1, а ее центр лежит на оси Ob. Пусть $F(0;b_0)$ — центр окружности, K — точка пересечения l_1 с осью Ob, $FN\perp BC$. Тогда

$OK = \dfrac{15}{4}$, $KF = \dfrac{15}{4} - b_0$, $FN = 1$. Из равенства $KF \cdot \cos\alpha = 1$, где $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, следует, что $b_0 = \dfrac{5}{2}$.

Ответ. $\left(0; \dfrac{5}{2}\right)$.

Пример 21. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из точек, координаты $(a; b)$ которых удовлетворяют условиям $0 < a < 3$, $0 < b < 22$ и таковы, что уравнение

$$(b - 11a)x^4 + (b - 4a)x^2 + a - b = 0$$

имеет четыре различных действительных корня. Требуется:

а) установить, принадлежит ли точка $N(1; 2)$ фигуре Ф;

б) найти площадь многоугольника, внутренней областью которого является фигура Ф.

Решение. Сначала выясним, при каких значениях a и b исходное уравнение имеет четыре различных корня.

При $b = 11a$ данное уравнение примет вид

$$7ax^2 = 10a. \qquad (51)$$

Так как по условию $a \neq 0$, то уравнение (51) имеет лишь два корня. Чтобы исходное уравнение имело четыре корня, должно выполняться условие

$$b \neq 11a. \qquad (52)$$

Исходное уравнение при выполнении условия (52) является биквадратным и имеет четыре различных действительных корня в том и только в том случае, когда квадратное уравнение

$$(b - 11a)t^2 + (b - 4a)t + (a - b) = 0 \qquad (53)$$

имеет два различных положительных корня. Это справедливо тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения (53) положителен, т. е.

$$(b - 4a)^2 - 4(b - 11a)(a - b) > 0, \qquad (54)$$

а сумма и произведение корней уравнения (53) положительны. Используя теорему Виета, получаем (см. § 21, п. 2, (4))

$$\begin{cases} -\dfrac{b - 4a}{b - 11a} > 0, \\ \dfrac{a - b}{b - 11a} > 0. \end{cases} \qquad (55)$$

Неравенство (54) равносильно каждому из неравенств

$$5b^2 - 56ab + 60a^2 > 0,$$

$$\left(b - \frac{6}{5}a\right)(b - 10a) > 0, \qquad (56)$$

а система неравенств (55) равносильна системе

$$\begin{cases} (b - 4a)(b - 11a) < 0, & (57) \\ (b - a)(b - 11a) < 0. & (58) \end{cases}$$

Итак, фигура Φ — это множество точек, координаты $(a; b)$ которых удовлетворяют системе неравенств (56)–(58) и условиям

$$0 < a < 3, \qquad 0 < b < 22. \tag{59}$$

Если $a > 0$, то неравенство (56) является верным при $b < \frac{6}{5}a$ и при $b > 10a$, а решениями неравенств (57) и (58) являются соответственно такие пары чисел $(a; b)$, что

$$4a < b < 11a,$$
$$a < b < 11a.$$

Следовательно, при $a > 0$ решения системы неравенств (56)–(58) определяются условиями

$$10a < b < 11a, \tag{60}$$

а фигура Φ, задаваемая на координатной плоскости неравенствами (59) и (60), представляет собой треугольник ABO, лежащий в I квадранте и ограниченный прямыми $b = 11a$, $b = 10a$, $b = 22$ (рис. 43.9), где $A(2; 22)$, $b(2{,}2; 22)$.

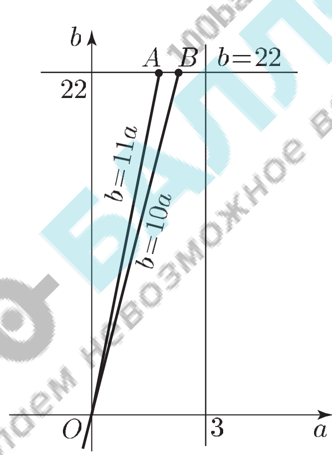

Рис. 43.9

Точка $N(1; 2)$ не принадлежит фигуре Φ, а искомая площадь $S = \frac{1}{2}AB \cdot 22 = 0{,}1 \cdot 22 = 2{,}2$.

Ответ. а) Нет; б) 2,2.

Примеры систем уравнений с параметрами

Пример 1. Найти значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ y = ax + b \end{cases} \tag{1}$$

имеет действительные решения при любом значении b.

Решение. Подставляя $y = ax + b$ в уравнение $x^2 - y^2 = 1$, получаем

$$x^2(1 - a^2) - 2abx - (1 + b^2) = 0. \qquad (2)$$

Система (1) имеет действительные решения при любом значении b тогда и только тогда, когда уравнение (2) имеет действительные корни, так как уравнение (2) вместе со вторым уравнением системы (1) образует систему, равносильную системе (1).

Если $|a| \neq 1$, то уравнение (2) является квадратным, а его дискриминант $D = 4(1 + b^2 - a^2)$.

Пусть $|a| < 1$, т. е. $-1 < a < 1$, тогда $1 - a^2 > 0$, откуда следует, что $D > 4b^2 \geqslant 0$ и поэтому уравнение (2) имеет действительные корни при любом значении b.

Пусть $|a| = 1$, тогда при $b = 0$ уравнение (2) не имеет корней. Пусть, наконец, $|a| > 1$. Тогда $D < 0$ при $b = 0$. Итак, если $|a| \geqslant 1$, то найдется такое значение b (именно $b = 0$), для которого система (1) не имеет действительных корней.

Ответ. $-1 < a < 1$.

Пример 2. Найти все значения параметра k, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y - \dfrac{1}{2} = k(x + 2), \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

имеет решения.

Решение. Так как $y \geqslant 0$ и $y^2 = x$, то задача сводится к нахождению всех значений k, при которых уравнение

$$2ky^2 - 2y + 4k + 1 = 0 \qquad (3)$$

имеет хотя бы один неотрицательный корень.

Если $k = 0$, то $y = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{4}$.

Если $k \neq 0$, то т. е. уравнение (3) имеет т. е. действительные корни в том и только в том случае, когда

$$D = 4 - 8k(4k + 1) \geqslant 0,$$

т. е.

$$8k^2 + 2k - 1 \leqslant 0. \qquad (4)$$

Решив неравенство (4), получим

$$-\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{1}{4}. \qquad (5)$$

При $k \neq 0$ уравнение (3) равносильно следующему:

$$y^2 - \frac{1}{k}y + \frac{4k + 1}{2k} = 0. \qquad (6)$$

Для корней уравнения (6) возможны два случая:

1) оба корня неотрицательны тогда и только тогда, когда наряду с условием (5) выполняются условия

$$k > 0, \qquad \frac{4k + 1}{2k} \geqslant 0; \qquad (7)$$

2) один из корней неотрицателен, если наряду с (5) справедливо неравенство

$$\frac{4k+1}{2k} \leqslant 0. \qquad (8)$$

Из (5) и (7) следует, что $0 < k \leqslant \frac{1}{4}$, и из (5) и (8) получаем $-\frac{1}{4} \leqslant k < 0$.

Ответ. $-\frac{1}{4} < k < \frac{1}{4}$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 3y = 6a - 4, \\ x + y = 2a \end{cases} \qquad (9)$$

равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2y^4 - 6x + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 - (2a+4)x + 2(a^2 + a + 2) = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Решение. Если $a = 3$, то обе системы несовместны и поэтому равносильны. Пусть $a \neq 3$, тогда система (9) имеет единственное решение. Система (10), в которую y входит в четвертой степени, может иметь единственное решение только в том случае, когда $y = 0$. Полагая $y = 0$, из системы (9) находим

$$\begin{cases} ax = 6a - 4, \\ x = 2a \end{cases}$$

и, значит, $2a^2 = 6a - 4$, откуда $a = 1$, $a = 2$.

При $a = 2$ система (9) имеет решение $(4; 0)$, которое является единственным решением системы (10).

При $a = 1$ система (9) имеет решение $(2; 0)$, а система (10) — два решения: $(2; 0)$ и $(4; 0)$.

Ответ. $a = 2$ и $a = 3$.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 3y + 3 = 0, & (11) \\ y^2 + (5 - 2a)y + a^2 - 2a = 0 & (12) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Из уравнения (11) находим

$$y = \frac{1}{3}(x^2 + 4a + 3). \qquad (13)$$

Так как

$$x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1 \geqslant -1,$$

то из равенства (13) следует, что

$$y \geqslant -\frac{1}{3}. \qquad (14)$$

Поэтому задача сводится к нахождению тех значений a, при которых уравнение (12) имеет хотя бы один корень, удовлетворяющий условию (14).

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$z = y^2 + (5 - 2a)y + a^2 - 2a. \qquad (15)$$

Его дискриминант

$$D = (5 - 2a)^2 - 4(a^2 - 2a) = 25 - 12a \geqslant 0$$

при $a \leqslant \frac{25}{12}$. Чтобы уравнение (12) имело хотя бы один корень, необходимо выполнение условия

$$a \leqslant \frac{25}{12}. \qquad (16)$$

Пусть y_0 — абсцисса вершины A параболы (15), изображенной на рис. 43.10. Тогда $y_0 = \frac{2a-5}{2} = a - \frac{5}{2}$, и если выполняется условие (16), то

$$y_0 < \frac{25}{12} - \frac{5}{2} = -\frac{5}{12} < -\frac{1}{3},$$

т. е. вершина A параболы расположена левее прямой $y = -\frac{1}{3}$ (рис. 43.10).

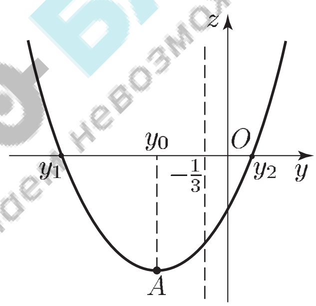

Рис. 43.10

Очевидно, квадратный трехчлен (15) имеет корень y_2 такой, что $y_2 \geqslant -\frac{1}{3}$, тогда и только тогда, когда $z\left(-\frac{1}{3}\right) \leqslant 0$, т. е.

$$\frac{1}{9} + (5 - 2a)\left(-\frac{1}{3}\right) + a^2 - 2a \leqslant 0,$$

т. е.

$$9a^2 - 12a - 14 \leqslant 0.$$

Ответ. $\frac{2}{3} - \sqrt{2} \leqslant a \leqslant \frac{2}{3} + \sqrt{2}$.

Пример 5.

Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y\sqrt{1-x^2}-x^2=2a-1, & (17)\\ y^2+y\sqrt{1-x^2}=2a-a^3 & (18)\end{cases}$$

а) не имеет решений;

б) имеет конечное множество решений;

в) имеет бесконечное множество решений.

В случаях б), в) найти все решения.

Решение. Вычитая почленно из уравнения (18) уравнение (17), получаем

$$y^2+x^2=1-a^3. \qquad (19)$$

Складывая почленно уравнения (17) и (18), находим

$$\left(y+\sqrt{1-x^2}\right)^2=4a-a^3. \qquad (20)$$

Система (19), (20), равносильная системе (17), (18), может иметь решения лишь при выполнении условий

$$\begin{cases} 1-a^3\geqslant 0,\\ 4a-a^3\geqslant 0,\end{cases} \qquad (21)$$

так как левые части неравенств (19) и (20) неотрицательны.

Решая систему (21), получаем

$$a\leqslant -2, \qquad 0\leqslant a\leqslant 1. \qquad (22)$$

Чтобы найти x и y, рассмотрим систему (17), (20), равносильную системе (17), (18). Полагая $\sqrt{1-x^2}=t$, запишем систему (17), (18) в виде

$$\begin{cases} t(y+t)=2a, & (23)\\ (y+t)^2=4a-a^3. & (24)\end{cases}$$

Так как при решении системы (23), (24) удобно разделить почленно ее уравнения, нужно выделить те значения a, удовлетворяющие условиям (22), при которых правые части уравнений (23) и (24) обращаются в нуль, т. е. значения $a=0$ и $a=-2$.

Если $a=0$, то система (19), (20) принимает вид

$$\begin{cases} x^2+y^2=1,\\ y=-\sqrt{1-x^2}.\end{cases}$$

Полученная система имеет бесконечное множество решений вида $\left(x_0; -\sqrt{1-x_0^2}\right)$, где $-1\leqslant x_0\leqslant 1$. Эти пары чисел являются решениями и системы (17), (18).

При $a=-2$ система (19), (20), а, значит, и система (17), (18), несовместна, так как в этом случае уравнение (19) имеет вид $x^2+y^2=9$, а из (20) при $a=-2$ следует, что $x^2+y^2=1$.

Итак, остается рассмотреть следующие значения a:

$$a<-2, \qquad 0<a\leqslant 1. \qquad (25)$$

При выполнении условий (25) правые части уравнений (23) и (24) отличны от нуля. Поэтому, разделив почленно уравнение (24) на уравнение (23), получаем уравнение:

$$\frac{y}{t} + 1 = \frac{4a - a^3}{2a}, \tag{26}$$

которое вместе с уравнением (23) образует систему, равносильную системе (23), (24).

Из (26) находим

$$\frac{y}{t} = 1 - \frac{a^2}{2}. \tag{27}$$

Исключая y из системы (23), (27), получаем

$$t^2 = 1 - x^2 = \frac{4a}{4 - a^2},$$

откуда

$$x^2 = \frac{a^2 + 4a - 4}{a^2 - 4}. \tag{28}$$

Уравнение (28) имеет действительные корни только тогда, когда

$$\frac{a^2 + 4a - 4}{a^2 - 4} \geqslant 0. \tag{29}$$

Решая неравенство (29) с учетом условий (25), получаем

$$a \leqslant -2 - 2\sqrt{2}, \qquad 0 < a \leqslant 2\sqrt{2} - 2. \tag{30}$$

При выполнении условий (30) из равенства (28) находим

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2 + 4a - 4}{a^2 - 4}},$$

а из (27) и (28) получаем

$$y = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\sqrt{1 - x^2} = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{a^2 + 4a - 4}{a^2 - 4}} = (2 - a^2)\sqrt{\frac{a}{4 - a^2}}.$$

Ответ. а) Если $-2 - 2\sqrt{2} < a < 0$ или $a > 2\sqrt{2} - 2$, то решений нет; б) если $a \leqslant -2 - 2\sqrt{2}$ или $0 < a < 2\sqrt{2} - 2$, то система имеет два решения $(x_0; y_0)$ и $(-x_0; y_0)$, где $x_0 = \sqrt{\dfrac{a^2 + 4a - 4}{a^2 - 4}}$, $y_0 = (2 - a^2)\sqrt{\dfrac{a}{4 - a^2}}$; в) если $a = 0$, то система имеет бесконечное множество решений $(x_0; -\sqrt{1 - x_0^2})$, где $-1 \leqslant x_0 \leqslant 1$.

Пример 6. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(a; b)$ которых таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} ax + (b - 4)y = 2, & (31)\\ (a - 4)x + by = 3, & (32)\\ bx - (a + 6)y = 3 & (33) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Требуется:

а) изобразить фигуру Ф;

б) составить уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку (0; 7) и имеет с фигурой Ф единственную общую точку.

Решение. Найдем x и y из системы (31)–(33). Из уравнения (31), умноженного на b, вычтем уравнение (32), умноженное на $b-4$. Получим

$$4(a+b-4)x = 12 - b. \tag{34}$$

Аналогично, вычитая из уравнения (32), умноженного на a, уравнение (31), умноженное на $a-4$, получаем

$$4(a+b-4)y = a + 8. \tag{35}$$

1) Пусть

$$a + b \neq 4. \tag{36}$$

Условие (36) означает, что определитель системы уравнений (34), (35) отличен от нуля. Если выполнено условие (36), то система (34), (35), а значит, и система (31), (32) имеет единственное решение

$$x = \frac{12-b}{4(a+b-4)}, \qquad y = \frac{a+8}{4(a+b-4)}. \tag{37}$$

Подставляя значения x и y, определяемые формулами (37), в уравнение (33), получаем уравнение окружности

$$(a+13)^2 + b^2 = 169. \tag{38}$$

Отсюда следует, что для всех пар чисел $(a; b)$, удовлетворяющих уравнению (38), за исключением тех, для которых

$$a + b = 4, \tag{39}$$

система (31)–(33) имеет единственное решение. Решив систему (38), (39), найдем два ее решения $(-1; 5)$ и $(-8; 12)$.

2) Пусть условие (36) не выполняется, тогда справедливо равенство (39). В этом случае система (31)–(33) равносильна системе

$$\begin{cases} ax - ay = 2 \\ -4x + 4y = 1, \\ (4-a)x - (a+6)y = 3. \end{cases} \tag{40}$$

Из первых двух уравнений системы (40) следует, что эта система совместна только при $a = -8$. Если $a = -8$, то $b = 12$ и система (40) равносильна системе

$$\begin{cases} -4x + 4y = 1, \\ 12x + 2y = 3, \end{cases}$$

имеющей единственное решение.

Таким образом, фигура Ф — это окружность (см. рис. 43.11), определяемая уравнением (38), с выколотой точкой $A(-1; 5)$. Из

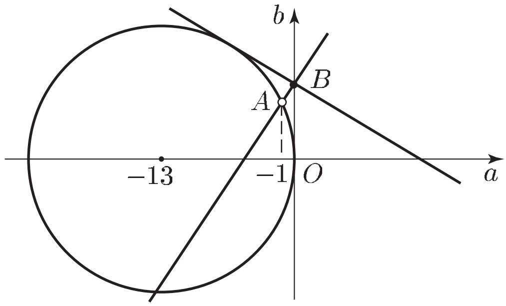

Рис. 43.11

всех прямых, проходящих через точку $B(0;7)$, с этой окружностью единственную общую точку имеют:

прямые $a = 0$ и $b = -\dfrac{60}{91}a + 7$, которые касаются окружности;

прямая $b = 2a + 7$, которая проходит через точку $(-1;5)$, не принадлежащую фигуре Ф.

Ответ. а) Фигура Ф — окружность $(a+13)^2 + b^2 = 169$ с выколотой точкой $(-1;5)$; б) $a = 0$, $b = 2a + 7$, $b = -\dfrac{60}{91}a + 7$.

Пример 7. Для каждого числа p на координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты $(a;b)$ которых удовлетворяют условиям

$$a > 0, \quad b > 0, \quad a + b > 1, \quad 3ap < bp + 2p^2 \tag{41}$$

и таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} px^2 + 2xy + y^2 = b^2, \\ 3x + y = a \end{cases} \tag{42}$$

не имеет действительных решений.

а) Найти площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество M, если $p = \dfrac{21}{5}$.

б) Найти все действительные значения p, при которых множество M является внутренней областью многоугольника.

Решение. Исключая y из системы (42), получаем

$$x^2(p+3) - 4ax + a^2 - b^2 = 0. \tag{43}$$

Система (41) не имеет действительных решений в том и только в том случае, когда уравнение не имеет действительных корней.

При $p = -3$ уравнение (43) имеет действительный корень, так как
a, b — действительные числа и $a \neq 0$.

Если $\neq -3$, то уравнение (43) является квадратным. Оно не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен, т. е.

$$16a^2 - 4(a^2 - b^2)(p+3) < 0,$$

или

$$a^2(1-p) + b^2(p+3) < 0. \qquad (44)$$

Если $-3 < p \leqslant 1$, то $1 - p \geqslant 0$, $p + 3 > 0$ и поэтому левая часть неравенства (44) неотрицательна. В этом случае уравнение (43) имеет действительные корни. Следовательно, уравнение (43) может не иметь действительных корней лишь в следующих случаях: $p > 1$; $p < -3$.

1) Пусть $p > 1$, тогда условия (41) можно записать в виде

$$a > 0, \quad b > 0, \quad b > 1 - a, \quad b > 3a - 2p, \qquad (45)$$

а неравенство (44) при $p > 1$, $a > 0$, $b > 0$ равносильно неравенству

$$0 < b < a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}. \qquad (46)$$

Пусть l_1, l_2 и l_3 — прямые, заданные соответственно уравнениями

$$b = 3a - 2p, \qquad b = a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}, \qquad b = 1 - a.$$

Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке $A(a_0; b_0)$, где

$$a_0 = \frac{2p}{3-\alpha}, \qquad b_0 = \frac{2p\alpha}{3-\alpha}, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{p-1}{p+3}}. \qquad (47)$$

Заметим, что фигура M, заданная при $p > 1$ неравенствами (45) и (46), является многоугольником тогда и только тогда, когда точка A лежит выше прямой l_3 (рис. 43.12), т. е. когда

$$b_0 > 1 - a_0. \qquad (48)$$

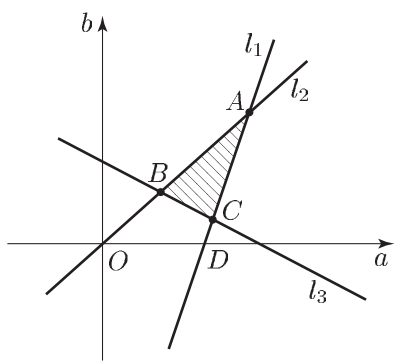

Рис. 43.12

Неравенство (48) в силу (47), где $0 < \alpha < 1$, равносильно неравенству

$$\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}(1+2p) > 3-2p. \qquad (49)$$

Неравенство (49) в случае $1 < p \leqslant \frac{3}{2}$ равносильно неравенству $p > \frac{7}{6}$, а в случае $p > \frac{3}{2}$ оно является верным, т. е. решениями неравенства (49) являются значения $p > \frac{7}{6}$.

При этом если $\frac{7}{6} < p \leqslant \frac{3}{2}$, то точка D пересечения прямой l_1 с осью абсцисс лежит не выше прямой l_3, и фигура M является треугольником ABC (рис. 43.12). Если же $p > \frac{3}{2}$, то точка D лежит выше прямой l_3, и фигура M является четырехугольником $ABCD$ (рис. 43.13).

В частности, если $p = \frac{21}{5} > 3$, то $A\left(\frac{18}{5}; \frac{12}{5}\right)$, $B\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $C(1; 0)$, $D\left(\frac{14}{5}; 0\right)$ и площадь четырехугольника $ABCD$ равна $\frac{79}{25}$ (разности площадей треугольников AOD и OBC).

2) Рассмотрим, наконец, случай $p < -3$. В этом случае фигура M определяется неравенствами

$$b > 1-a, \quad b > a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}} > 0, \quad b < 3a - 2p$$

и является четырехугольником $ABEF$ (рис. 43.14) тогда и только тогда, когда прямые l_1 и l_2 пересекаются и точка A их пересечения лежит в I квадранте.

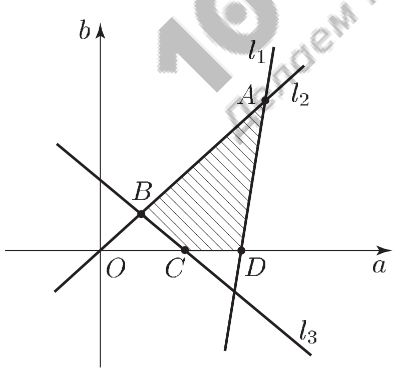

Рис. 43.13

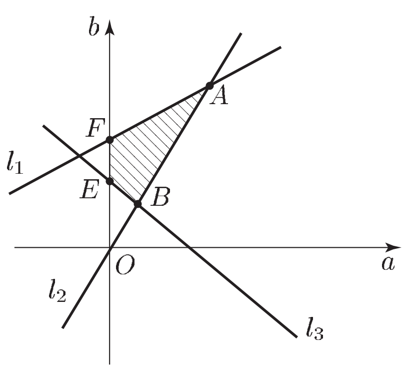

Рис. 43.14

Отсюда следует, что $\sqrt{\frac{p-1}{p+3}} > 3$, т. е. $p > -\frac{7}{2}$.

Ответ. а) $\frac{79}{25}$; б) $-\frac{7}{2} < p < -3$, $p > \frac{7}{6}$.

Пример 8. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+64-16x}+\sqrt{x^2+y^2+36+12y}=10 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Первому уравнению системы удовлетворяют координаты точки $M(x;y)$ такой, что сумма расстояний от точки M до точек $M_1(8;\ 0)$ и $M_2(0;\ -6)$, равна 10.

Так как расстояние M_1M_2 равно 10, то точка M должна принадлежать отрезку M_1M_2 (в противном случае сумма указанных расстояний была бы больше 10 согласно свойству сторон треугольника).

Итак, первому уравнению системы удовлетворяют координаты точек отрезка M_1M_2 и только эти точки.

Второму уравнению системы удовлетворяют координаты точек окружности радиуса $|a|$ с центром O. Эта окружность имеет с отрезком M_1M_2 единственную общую точку в следующих случаях:

а) окружность касается отрезка M_1M_2; в этом случае $|a|=h$, где $h=\dfrac{6\cdot 8}{10}=\dfrac{24}{5}$;

б) окружность пересекает отрезок M_1M_2, в одной точке; в этом случае ее радиус должен быть больше катета OM_2, но не превышать катета OM_1 прямоугольного треугольника OM_1M_2, т. е. $6<|a|\leqslant 8$.

Ответ. $-8\leqslant a<-6,\ a=-\dfrac{24}{5},\ a=\dfrac{24}{5},\ 6<a\leqslant 8$.

Пример 9 (ЕГЭ). Найти все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ |y|-x=b \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Первое уравнение системы задает окружность C радиуса $\sqrt{2}$ с центром $(0,0)$.

Второе уравнение запишем в виде

$$x=|y|-b \tag{50}$$

и будем рассматривать x как функцию от y (рис. 43.15).

График функции (50) — ломаная с вершиной в точке $(0;-b)$, получаемая сдвигом ломаной $x=|y|$ вдоль оси Ox. Из рисунка видно, что этот график имеет ровно три общие точки с окружностью C в том и только в том случае, когда этот график проходит через точку $M_0(0;-\sqrt{2})$. Тогда $-\sqrt{2}=-b$, откуда $b=\sqrt{2}$.

Ответ. $b=\sqrt{2}$.

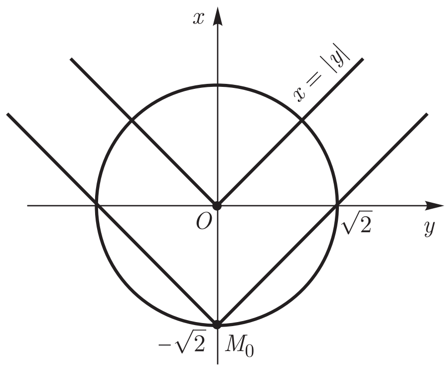

Рис. 43.15

Пример 10 (ЕГЭ). Найти все положительные значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(|x|-5\right)^2+(y-4)^2=4, & (51)\\ (x-2)^2+y^2=a^2 & (52)\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Уравнение (51) задает объединение (совокупность) двух окружностей: окружность C_1 радиуса 2 с центром O_1 $(5; 4)$ и окружность C_2 радиуса 2 с центром $O_2(-5; 4)$, а уравнение (52) задает окружность C с центром $O(2; 0)$ радиуса a $(a > 0)$. Проведем из точки O лучи OO_1 и OO_2 (рис. 43.16).

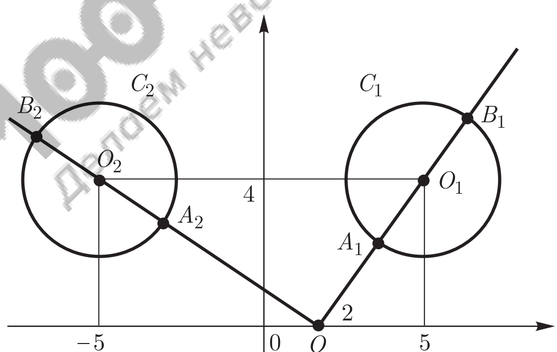

Рис. 43.16

Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения луча OO_1 с окружностью C_1, A_2 и B_2 — точки пересечения луча OO_2 с окружностью C_2.

Тогда $OO_1 = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, $OA_1 = OO_1 - 2 = 3$, $OB_1 = 7$, $OO_2 = \sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{65}$, $OA_2 = \sqrt{65} - 2$, $OB_2 = \sqrt{65} + 2$.

Система (51), (52) будет иметь единственное решение только тогда, когда окружность C касается (внутренне или внешне) одной из окружностей C_1, C_2 и при этом не имеет общих точек с другой окружностью, т. е. при $a = OA_1 = 3$ и при $a = OB_2 = \sqrt{65} + 2$ (при $a = 7$ окружность C пересечет окружность C_2, а при $a = \sqrt{65} - 2$ — окружность C_1, так как $3 < \sqrt{65} - 2 < 7$).

Ответ. $a = 3$, $a < \sqrt{65} + 2$.

Пример 11. Пусть x, y — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = a - 2, & (53)\\ x^2 + 9y^2 = 2a + 6. & (54)\end{cases}$$

Найти значения параметра a, при которых произведение xy принимает наименьшее значение.

Решение. Возводя в квадрат обе части уравнения (53), получаем

$$x^2 + 9y^2 + 6xy = a^2 - 4a + 4. \tag{55}$$

Вычитая из уравнения (55) уравнение (54), находим

$$6xy = a^2 - 6a - 2 = (a - 3)^2 - 11,$$

откуда

$$xy = \frac{1}{6}\left[(a-3)^2 - 11\right]. \tag{56}$$

Равенство (56) — следствие системы (53), (54). Из него следует, что если эта система имеет действительные решения, то произведение xy принимает наименьшее значение, равное $-\dfrac{11}{6}$, при $a = 3$.

Остается проверить, что при $a = 3$ система (53), (54) имеет действительные решения.

При $a = 3$ система примет вид

$$\begin{cases} x + 3y = 1,\\ x^2 + 9y^2 = 12,\end{cases}$$

откуда получаем уравнение $18y^2 - 6y - 1 = 0$, имеющее действительные корни, откуда следует, что при $a = 3$ исходная система имеет действительные решения.

Ответ. $a = 3$.

Пример 12. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |x+1| - 2y = 0,\\ x^2 + y^2 - 2ay + 2a = 1\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Первое уравнение системы запишем в виде

$$y = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1,\\ |x|, & |x| > 1.\end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 43.17.

Второе уравнение системы, записанное в виде $x^2+(y-a)^2 = (a-1)^2$, является при $a \neq 1$ уравнением окружности с центром в точке

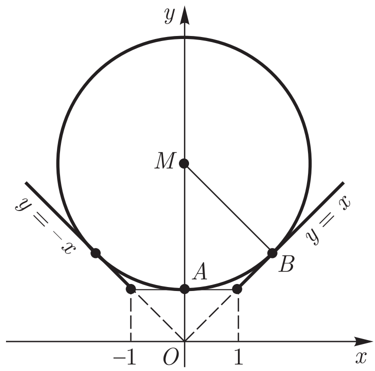

Рис. 43.17

$(0; a)$ радиуса $|a-1|$. При любых $a \neq 1$ эта окружность проходит через точку $A(0; 1)$ и касается прямой $y = 1$ в точке A.

При $a = 1$ окружность вырождается в точку A, и в этом случае система имеет единственное решение $(0; 1)$.

Если $a < 1$, то окружность лежит (при $y \neq 1$) ниже прямой $y = 1$; в этом случае система также имеет единственное решение $(0; 1)$.

Пусть $a > 1$. Тогда окружность расположена (при $y \neq 1$) выше прямой $y = 1$, а система будет иметь, кроме решения $(0; 1)$, еще два решения тогда и только тогда, когда окружность касается прямых $y = x$ и $y = -x$. Достаточно рассмотреть одну из этих прямых, например, прямую $y = x$.

Если точка $M(0; a)$ — центр окружности радиуса r, касающейся прямой $y = x$ в точке B, то $MA = MB = r$, $OM = r + 1 = a$. Так как прямые $y = x$ и $y = -x$ пересекаются в точке O под прямым углом, то $\angle MOB = \frac{\pi}{4}$, $OM = \dfrac{BM}{\sin\frac{\pi}{4}}$, т. е. $r + 1 = r\sqrt{2}$, откуда

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1, \quad a = r + 1 = 2 + \sqrt{2}.$$

Ответ. $2 + \sqrt{2}$.

Пример 13. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + 2|y| + |2y - 3x| = 12, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два действительных решения.

Решение. Графиком первого уравнения системы является замкнутая ломаная L (граница многоугольника) с вершинами в точках, лежащих на прямых $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}x$ (см. рис. 43.18).

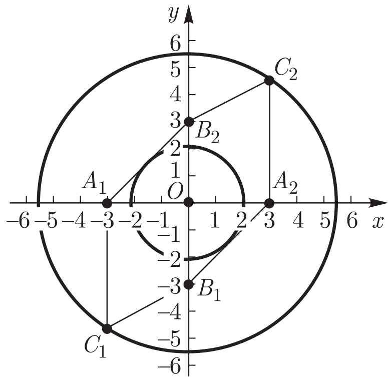

Рис. 43.18

Найдем эти вершины. Если $x = 0$, то $|y| = 3$ ($y = 3$ и $y = -3$); если $y = 0$, то $|x| = 3$; если $y = \frac{3}{2}x$, то $|x| = 3$, $|y| = \frac{9}{2}x$.

Ломаная L изображена на рис. 43.18, где $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;-3)$, $B_2(0;3)$, $C_1\left(-3;-\frac{9}{2}\right)$, $C_2\left(3;\frac{9}{2}\right)$.

Графиком второго уравнения при $a > 0$ является окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $O(0;0)$.

Данная система уравнений имеет ровно два решения в следующих случаях:

1) окружность касается отрезков A_1B_2 и A_2B_1, тогда $\sqrt{a} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ и $a = \frac{9}{2}$;

2) радиус окружности равен расстоянию от точки O до точек C_1 и C_2, тогда $a = 3^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{117}{4}$.

Ответ. $\frac{9}{2}$, $\frac{117}{4}$.

Пример 14. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (2a-2)x + a^2 - 2a - 3 = 0, \\ \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-a)^2} = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Левая часть второго уравнения есть расстояние между точками $A(0;a)$ и $B(-4;a)$.

Поскольку расстояние между точками A и B равно 4, второе уравнение системы задает отрезок AB, т. е. множество точек вида $(t;a)$, где $-4 \leqslant t \leqslant 0$.

Решая первое уравнение как квадратное уравнение относительно x, находим, что $x_1 = -a-1$, $x_2 = -a+3$. Таким образом, первое уравнение задает две вертикальных прямых на плоскости. Для того чтобы система имела ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы ровно одна из этих двух вертикальных прямых пересекала отрезок AB.

Первая прямая пересекает AB при $-4 \leqslant x_1 \leqslant 0$, т. е. при $-1 \leqslant a \leqslant 3$; вторая прямая — при $-4 \leqslant x_2 \leqslant 0$, т. е. при $3 \leqslant a \leqslant 7$. Следовательно, система имеет ровно одно решение при $a \in [-1; 3) \cup (3, 7]$.

Ответ. $a \in [-1; 3) \cup (3, 7]$.

Пример 15. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y + a = 0, \\ x + y^2 + a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если (x, y) — решение системы при некотором значении a, то $(-y, -x)$ также является решением этой системы.

Поэтому система может иметь единственное решение только в том случае, когда $y = -x$.

Но если $y = -x$, то каждое из уравнений системы имеет вид $x^2 + x + a = 0$, или $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4} = 0$.

Если $a < \frac{1}{4}$, то это уравнение имеет два действительных решения, а если $a > \frac{1}{4}$, то уравнение не имеет действительных решений.

Если $a = \frac{1}{4}$, то $x = -\frac{1}{2}$, и тогда $y = \frac{1}{2}$.

Итак, только при $a = \frac{1}{4}$ система имеет единственное решение $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ. $a = \frac{1}{4}$.

Пример 16 (ЕГЭ). Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25, \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Первое уравнение системы задает окружность K радиуса 5 с центром $M(3; 6)$, касающуюся прямой $y = 1$ в точке $P(3; 1)$.

Второе уравнение задает ломаную (угол L) с вершиной $A(a; 1)$. Исходная система имеет ровно три различных решения тогда и только тогда, когда K и L имеют ровно три общие точки.

Возможны два случая:

1) Вершина прямого угла (точка A) совпадает с точкой $P(3; 1)$. В этом случае, кроме решения $(3; 1)$ есть еще два решения,

определяемые точками пересечения L и K — это решения $(8; 6)$ и $(-2; 6)$.

2) Одна из сторон угла L касается окружности K, а другая пересекает K в двух точках (на рис. 43.19 представлен случай, когда прямая $y = x - a + 1$ касается окружности K в точке B, а другая пересекает K в точках E_1 и E_2).

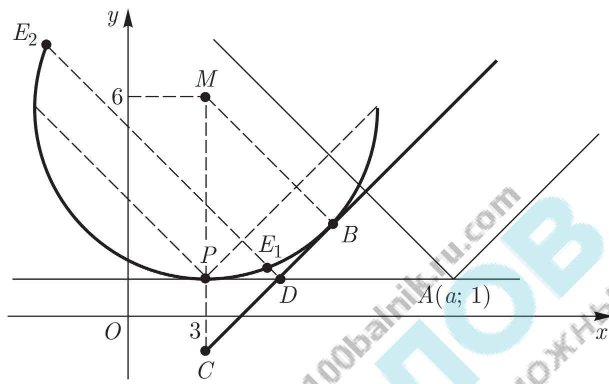

Рис. 43.19

Пусть D и C — точки пересечения прямой $y = x - a + 1$ (проходит через точку B) с прямыми $y = 1$ и $x = 3$. Так как $\triangle BMC$ — равнобедренный и прямоугольный (угловой коэффициент прямой $y = x - a + 1$ равен 1), а $MP = MB = 5$, то $MC = 5\sqrt{2}$, $PC = 5\sqrt{2} - 5 = PD$. Но $OD = 3 + PD = 5\sqrt{2} - 2 = a_1$ — искомое значение a.

Случаю касания прямой $y = x - a + 1$ и K соответствует точка D', симметричная D относительно прямой $x = 3$ (соответствующее значение параметра $a_2 = 3 - PD = 3 - (5\sqrt{2} - 5) = 8 - 5\sqrt{2}$).

Ответ. $a = 3$, $a = 5\sqrt{2} - 2$, $a = 8 - 5\sqrt{2}$.

Задачи

1. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\frac{a(x+1)^2}{x} + (a-1)^2 = 0$$
имеет корни, и решить это уравнение.

2. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\frac{x^2 + (3a+1)x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$$
имеет только один корень.

3. Найти все значения a, при которых уравнение
$$(a+1)x^2 - 2ax + a - 2 = 0$$
имеет два различных положительных корня.

4. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b, c уравнения
$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$
чтобы это уравнение имело четыре различных действительных корня?

5. Найти все значения a, при которых каждый корень уравнения
$(a-3)x^2-2(a+1)x+a=0$
больше -1.

6. Найти все значения a, при которых каждый корень уравнения
$2ax^2+2(5-a)x+5(a-1)=0$
меньше -1.

7. Найти все значения a, при которых уравнение
$x^2+(a+2)x+1-a=0$
имеет два действительных корня x_1 и x_2 такие, что
$x_1x_2<0$, $|x_1|<4$, $|x_2|<4$.

8. Найти все значения a, при которых уравнение
$(2a+3)x^2+(3a+5)x+a+6=0$
имеет на отрезке $[-1,\ 1]$ хотя бы один корень.

9. Найти все значения a, при которых уравнение
$9^x+(1-a)3^x+2a+3=0$
имеет единственный корень.

10. Найти все значения a, при которых уравнение
$25^x+(a^2+5)5^x+9-a^2=0$
не имеет корней.

11. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\frac{x(x-1)}{x-2}+\frac{a(x-2)}{x^2-x}=1$$
имеет хотя бы один корень.

12. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\frac{\sqrt{x+a}-x-1}{x^2-x}=0$$
имеет единственный корень.

13. Найти все значения a, при которых уравнение
$x^3+5x^2+3x+a=0$
имеет хотя бы два корня, больших a.

14. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\frac{x^4}{x-1}+a(x-1)=6x^2$$
имеет более двух различных корней.

15. Найти все значения a, при которых уравнение
$\sqrt{6x-x^2}=x+a$
имеет хотя бы один корень.

16. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\log_{2x}(1-ax)=\frac{1}{2}$$
имеет единственное решение.

17. Найти все значения a, при которых уравнение
$\sqrt{x-8}=-ax+3a+2$
имеет единственное решение.

18. Найти все значения a, при которых уравнение
$\log_2(x+\sqrt{3-a})+\log_{\frac{1}{2}}(a+1-x)=\log_4 9$
имеет решение.

19. Найти все значения a, при которых уравнение
$x^2-6|x|+6-a=0$
имеет два различных корня.

20. Найти все значения a, при которых уравнение

$$9^x - (a+2)3^{x-\frac{1}{x}} + 2a \cdot 3^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два корня.

21. Найти все значения a, при которых уравнение

$|2x^2 - 5x - 3| = a$:

а) имеет ровно два корня;
б) имеет ровно три корня;
в) имеет ровно четыре корня.

22. Найти все значения a, при которых уравнение

$|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = a$:

а) имеет ровно два корня;
б) имеет ровно три корня;
в) имеет ровно четыре корня.

23. Найти все значения a, при которых уравнение

$$|x-2| + a|x+3| = 5$$

имеет ровно два корня, и найти эти корни.

24. Найти все значения a, при которых уравнение

$$(a - 6 + |x-1|)(a - x^2 + 2x) = 0$$

имеет: а) ровно три корня; б) ровно два корня.

25. Найти все значения a, при которых уравнение

$$x^2 + 4x - 2|x+a| + 2 + a = 0$$

имеет ровно два действительных и различных корня.

26. Найти все значения a, при которых уравнение

$$ax^2 - (a^2 + a - 6)(|x| - 1) + 6 = 0$$

имеет единственный корень.

27. Найти все значения a и b, при которых уравнения

$$x(x^2 + x - 8) = a \quad \text{и} \quad x(x^2 - 6) = b$$

имеют два общих различных корня.

28. Найти все значения a, при которых уравнение

$$2ax^2 + 5x + 4a^2 + 5 = 0$$

имеет только целые корни.

29. Найти все значения a, при которых уравнение

$$|x^2 + 2x| + |x^2 + 3x + 2| = x^2 + 4x + a$$

имеет ровно три различные корня.

30. Пусть p и q — целые числа и пусть рациональное число x_0 является корнем уравнения $x^2 + px + q = 0$. Доказать, что x_0 — целое число.

31. Пусть коэффициенты уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ являются целыми числами. Доказать, что если эти уравнения имеют общий нецелый корень, то $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.

32. Найти все значения a, при которых найдется хотя бы одна пара действительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$5x^2 + axy + y^2 + 8ax + 8y + 20 = 0.$$

33. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a$$

имеет корни, и решить это уравнение.

34. Найти все значения a, при которых уравнение

$$4\sin^2 x + 2(a-3)\cos x + 3a - 4 = 0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

35. Найти все значения a, при которых уравнение
$4\cos 2x + (2-4a)\sin x = a+3$
имеет единственный корень на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

36. Найти все значения a, при которых уравнение
$$(1-a)\,\mathrm{tg}^2\,x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0$$
имеет не более одного корня не интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

37. Найти все значения a, при которых уравнение
$(a^2+2)\sin^2 x + 4a\sin x\cos x + a^2 + 3 = 0$
имеет корни, и решить это уравнение.

38. Найти все значения a, при которых уравнение
$\cos^8 x + \sin^8 x = a$
имеет корни, и решить это уравнение.

39. Найти все значения a, при которых уравнение
$\sin^{10} x + \cos^{10} x = a$
имеет корни, и решить это уравнение.

40. Найти все значения a, при которых уравнение
$$(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$$
имеет ровно два корня.

41. Найти все значения p, при которых сумма всех действительных корней уравнения
$$\left(x - \frac{9}{4}p\right)^4 - 4p(p-1)\left(x - \frac{9}{4}p\right)^2 - p^3(2p-3) = 0$$
меньше $-5p^2 + 11p + 7$.

42. Корни уравнения
$$x^3 - (\log_{\frac{p}{8}} p)x^2 + \left|\frac{5}{2}\log_4 p\right| x - \frac{15}{8} = 0$$
являются длинами сторон некоторого треугольника, а корни уравнения
$$x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{p}x^2 + \frac{2p}{15}x - \frac{p}{p+14} = 0$$
— длинами высот этого треугольника. Найти p и площадь треугольника.

43. При каких значениях a уравнение
$$\log_3 x + (a^2-4)\log_{3x}\frac{1}{3} - 3 = 0$$
имеет два корня, расстояние между которыми больше 8?

44. Множество M состоит из точек $(a;b)$ координатной плоскости, для которых
$|a| \neq 2$ и уравнение
$(4a - 3b + 40)x^4 + (3a - 4b + 30)x^2 + |a^2 - 4| + a^2 - 4 = 0$
имеет ровно три корня. Доказать, что в многоугольник, внутренней областью которого является множество M, можно вписать окружность, и найти координаты центра этой окружности.

45. На координатной плоскости рассматривается множество N всех точек, координаты $(a;b)$ которых удовлетворяют условиям $a<b$, $|a|<3$, $|b|<3$ и таковы, что уравнение
$$(a^3 - b^3)x^4 + (3a+b)x^2 + \frac{1}{a-b} = 0$$
не имеет корней. Требуется:
а) установить, принадлежит ли точка $P(-2;-1)$ множеству N;
б) найти площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество N.

46. На координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты $(a;b)$ которых удовлетворяют условиям $-3 < a < 0$, $0 < b < 9$ и таковы, что уравнение

$$(b+2a)x^4 + (b+7a)x^2 + b - a = 0$$

имеет четыре различных корня. Требуется:

а) установить, принадлежит ли точка $N(-2;3)$ множеству M;

б) найти площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество M.

47. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 4ax - y = 8a + 4 \\ (1+5a)x - (a+2)y = 18a + 9: \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;

б) не имеет решений;

в) имеет бесконечное множество решений.

48. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_5(y+3) - 2\log_{25} x = 0 \\ (x+a)^2 - 2(y+6) - 9a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

49. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_3(2-x-y) + 2 = \log_3(17-8x-10y) \\ (x-a)^2 + x = y + a + 6 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

50. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$$

имеет два решения.

51. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + |x| = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

52. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{y} = 1, \\ a + 3 - \sqrt{y} = \frac{1}{2}(a-x)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

53. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2(a-1)y = a - 2, \\ 2|x+1| + ay = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, и найти это решение.

54. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$$

имеет решение.

55. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

56. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} 8xy = 25, \\ x^2 = y + 2x \end{cases}$$
имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

57. Найти все значения параметра a, при которых равносильны системы уравнений
$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ ay - x = a - 2a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 = 6a. \end{cases}$$

58. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(a; b)$ которых таковы, что система уравнений
$$\begin{cases} (a+2)x + by = 1, \\ ax + (b-2)y = 2, \\ (b+4)x - ay = 2 \end{cases}$$
имеет единственное решение.
Изобразить фигуру Ф и составить уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку $(10; 0)$ и имеет с фигурой Ф единственную общую точку.

59. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(a; b)$ которых таковы, что система уравнений
$$\begin{cases} ax + 4y = 2, \\ bx + ay = -1, \\ (b+3)x + (a+8)y = -3 \end{cases}$$
имеет решение.
Изобразить фигуру Ф и составить уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку $(-6; 4)$ и имеет с фигурой Ф единственную общую точку.

60. Для каждого числа p на координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты $(a; b)$ которых удовлетворяют условиям
$$a > 0, \qquad b > 0, \qquad a + b > \frac{1}{2}, \qquad 6ap < 3bp + p^2$$
и таковы, что система уравнений
$$\begin{cases} px^2 - 2xy + y^2 = b^2, \\ 2x + y = a \end{cases}$$
не имеет решений. Найти:
а) площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество M, если $p = 4$;
б) все действительные значения p, при которых множество M является внутренней областью многоугольника.

61. Для каждого числа p на координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты $(a; b)$ которых удовлетворяют условиям
$$a > 0, \qquad b > 0, \qquad a + 2b < 1, \qquad 6b > 2a + p$$
и таковы, что система уравнений
$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + py^2 = a^2, \\ x + y = b \end{cases}$$
имеет два различных решения. Найти:
а) площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество M, если $p = -\dfrac{1}{8}$;
б) все действительные значения p, при которых множество M является внутренней областью многоугольника.

Ответы

1. Если $a = 0$, то корней нет; если $a = 1$, то $x = -1$; если $a = -1$, то $x = 1$; если $a \neq 0$, $|a| \neq 1$, то $x_1 = -a$, $x_2 = -\dfrac{1}{a}$.

2. $a_1 = 2$, $a_2 = -\dfrac{1}{2}$. **3.** $-2 < a < -1$, $a > 2$. **4.** $b^2 - 4ac > 0$, $ab < 0$, $ac > 0$.

5. $a < \dfrac{1}{4}$, $a = 3$. **6.** $-\dfrac{5}{3} \leqslant a < -1$. **7.** $1 < a < \dfrac{9}{5}$. **8.** $a \leqslant -\dfrac{7}{3}$, $a \geqslant 15 + 4\sqrt{17}$.

9. $a < -\dfrac{3}{2}$, $a = 11$. **10.** $-3 \leqslant a \leqslant 3$. **11.** $a \leqslant 65\sqrt{2} - 92$. **12.** $a = \dfrac{3}{4}$, $1 \leqslant a < 3$, $a > 3$. **13.** $-9 \leqslant a < -1$. **14.** $a \leqslant 0$. **15.** $-6 \leqslant a \leqslant 3(\sqrt{2} - 1)$.

16. $a = -\dfrac{1}{2}$, $a > 0$. **17.** $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{2}{5}$, $a = -\dfrac{1}{10}$. **18.** $-\dfrac{3 + \sqrt{17}}{2} < a \leqslant 3$.

19. $a = -3$, $a = 9$. **20.** $0 < a < \dfrac{1}{9}$, $a > 9$. **21.** а) $a = 0$, $a > \dfrac{49}{8}$; б) $a = \dfrac{49}{8}$; в) $0 < a < \dfrac{49}{8}$. **22.** а) $a > 5$; б) $a = 5$; в) $3 < a < 5$.

23. $-1 < a < 1$, $x_1 = -3$, $x_2 = \dfrac{7 - 3a}{a + 1}$. **24.** а) $a = 6$, $a = -1$; б) $a < -1$.

25. $a < 2$, $a > \dfrac{7}{3}$. **26.** $a = 0$. **27.** $a = 6$, $b = 4$. **28.** $-\dfrac{5}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, 0, $\dfrac{1}{2}$. **29.** 4, $\dfrac{19}{4}$.

32. $a \leqslant -2$, $a \geqslant 2$. **33.** $\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$, $x = \pm\dfrac{1}{4}\arccos(4a - 3) + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

34. $-2 \leqslant a \leqslant 2$, $x = \pm\arccos\dfrac{a}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **35.** $a \leqslant 1$, $a = \dfrac{3}{2}$, $a \geqslant 3$.

36. $\dfrac{1}{3} < a < \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2} < a < 1$. **37.** $|a| \geqslant 1$, $x = \operatorname{arctg}(2a \pm \sqrt{3a^2 - 3}) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

38. $\dfrac{1}{8} \leqslant a \leqslant 1$, $x = \pm\dfrac{1}{4}\arccos(4\sqrt{2(1 + a)} - 7) + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

39. $\dfrac{1}{16} \leqslant a \leqslant 1$, $x = \pm\dfrac{1}{4}\arccos\left(-3 + 4\sqrt{\dfrac{1 + 4a}{5}}\right) + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

40. $a = -3$, $a = 9$. **41.** $-\dfrac{7}{10} < p \leqslant 0$, $\dfrac{4}{3} \leqslant p < \dfrac{7}{5}$, $\dfrac{3}{2} \leqslant p < 2$. **42.** $p = 16$, $S = \dfrac{1}{2}$.

43. $|a| > 1$, $a \neq -2$, $a \neq 2$. **44.** $(0; 10)$. **45.** а) Да; б) $\dfrac{81}{5}$. **46.** а) Нет; б) $\dfrac{9}{2}$.

47. а) $a \neq -1$, $a \neq \dfrac{1}{4}$; б) $a = -1$; в) $a = \dfrac{1}{4}$. **48.** $-1 \leqslant a < \dfrac{9 + \sqrt{105}}{2}$.

49. $-5 < a < 2 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **50.** $a = -\sqrt{2}$, $-1 < a < 1$. **51.** $1 < a < \sqrt{2}$.

52. $a = -\dfrac{5}{4}$, $-1 < a \leqslant 5$. **53.** $\dfrac{2}{3} < a < 2$, $\left(-\dfrac{a}{2}; 1\right)$. **54.** $-2 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{4}$.

55. 1, $-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{7}{2} - 2\sqrt{2}$, $-\dfrac{7}{2} + 2\sqrt{2}$. **56.** $|a| \geqslant \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$. **57.** $a = -2$, $a = -1$.

58. Окружность $a^2 + (b + 5)^2 = 25$ с исключенной точкой $P(-3; -1)$; прямые $b = 0$, $b = \dfrac{4}{3}(a - 10)$ и $b = \dfrac{1}{13}(a - 10)$.

59. Парабола $b = \dfrac{1}{12}(a^2 - a + 6)$ с исключенной точкой $P\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{9}{16}\right)$; прямые $a = -6$, $b = -\dfrac{13}{12}a - \dfrac{5}{2}$, $b = -\dfrac{11}{24}a + \dfrac{5}{4}$.

60. а) $\dfrac{23}{216}$; б) $-11 < p < -8$, $p > \dfrac{33}{17}$. **61.** а) $\dfrac{31}{192}$; б) $p < \dfrac{4}{3}$, $p \neq 0$.

§ 44. Неравенства и системы неравенств с параметрами

Примеры с решениями

Пример 1. Для каждого положительного значения параметра a решить неравенство

$$\sqrt{2ax - x^2} \geqslant a - x. \qquad (1)$$

Решение. Первый способ. Полагая $t = a - x$ и используя равенство $2ax - x^2 = a^2 - (a - x)^2 = a^2 - t^2$, запишем неравенство (1) в виде

$$\sqrt{a^2 - t^2} \geqslant t. \qquad (2)$$

Рассмотрим два возможных случая: $t \geqslant 0$, $t < 0$.

1) Если $t \geqslant 0$, то неравенство (2) равносильно каждому из неравенств $a^2 - t^2 \geqslant t^2$, $t^2 \leqslant \dfrac{a^2}{2}$.

Так как $t \geqslant 0$ и $a > 0$, то отсюда следует, что $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, т. е. $0 \leqslant a - x \leqslant \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ или

$$a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqslant x \leqslant a. \qquad (3)$$

2) Если $t < 0$, то неравенству (1) удовлетворяют все значения t, при которых определена функция $\sqrt{a^2 - t^2}$, т. е. значения t из промежутка $[-a, 0)$. Следовательно, $-a \leqslant t < 0$, т. е. $-a \leqslant a - x < 0$, откуда

$$a < x \leqslant 2a. \qquad (4)$$

Множество решений неравенства (1) есть объединение промежутков (3) и (4), т. е. отрезок

$$\Delta = \left[a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), 2a\right].$$

Ответ. $a\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqslant x \leqslant 2a$.

Второй способ. Построим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $f(x) = \sqrt{2ax - x^2}$, $g(x) = a - x$. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 2a]$, а ее графиком является полуокружность C радиуса a с центром в точке $(a, 0)$, расположенная над осью Ox (рис. 44.1), так как при $y \geqslant 0$ уравнение $y = \sqrt{2ax - x^2}$ равносильно уравнению $y^2 = a^2 - (x - a)^2$.

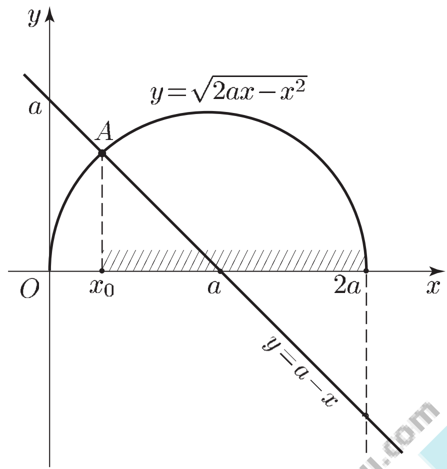

Рис. 44.1

Прямая $y = a - x$ пересекает полуокружность C в точке $A(x_0; y_0)$, где $0 < x_0 < a$ и x_0 — корень уравнения $f^2(x) = g^2(x)$, т. е. уравнения $2ax - x^2 = (x - a)^2$. Это уравнение, равносильное уравнению $(x - a)^2 = \frac{a^2}{2}$, имеет корни $x_1 = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x_2 = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Следовательно, $x_0 = x_1$. Из рис. 44.1 видно, что на промежутке $(x_0, 2a]$ полуокружность C лежит выше прямой $y = a - x$, а в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные значения. Поэтому множество решений неравенства (1) — отрезок Δ.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-6} < a. \qquad (5)$$

Решение. Неравенство (5) имеет смысл, если $x \geqslant 6$. Так как левая часть этого неравенства неотрицательна для любого $x \geqslant 6$, то при $a \leqslant 0$ оно не имеет решений. Путь $a > 0$ и $x \geqslant 6$, тогда при возведении в квадрат обеих частей неравенства (5) получается неравенство

$$2x - 8 + 2\sqrt{x^2 - 8x + 12} < a^2,$$

равносильное (5), а также неравенству

$$2\sqrt{x^2 - 8x + 12} < a^2 - 2x + 8. \qquad (6)$$

Неравенство (6) может иметь решения только в том случае, когда

$$a^2 - 2x + 8 > 0. \qquad (7)$$

Если $x \geqslant 0$ и выполняется условие (7), то при возведении в квадрат обеих частей неравенства (6) получается неравенство

$$4(x^2 - 8x + 12) < (a^2 - 2x + 8)^2,$$

равносильное неравенству (6), откуда находим

$$x < \frac{a^4 + 16a^2 + 16}{4a^2}, \tag{8}$$

так как $4a^2 > 0$ при $a > 0$.

Из множества значений x, определяемых неравенством (8), нужно выбрать те значения, которые удовлетворяют условию $x \geqslant 6$ и неравенству (7), равносильному неравенству

$$x < \frac{a^2 + 8}{2}. \tag{9}$$

Обозначим правые части неравенств (8) и (9) соответственно через A и B. Тогда

$$A - B = \frac{a^4 + 16a^2 + 16}{4a^2} - \frac{a^2 + 8}{2} = \frac{16 - a^4}{4a^2}, \tag{10}$$

откуда с учетом условия $a > 0$ получаем:

1) если $0 < a \leqslant 2$, то из (10) следует, что $A \geqslant B$ и поэтому неравенствам (8) и (9) удовлетворяют значения x такие, что $x < B$;

2) если $a > 2$, то $A < B$ и тогда неравенства (8) и (9) верны при $x < A$.

Остается проверить выполнение условия $x \geqslant 6$, т. е. сравнить A и B с числом 6.

Если $0 < a \leqslant 2$, то $B = \frac{a^2}{2} + 4 \leqslant 6$. В этом случае неравенство (5) не имеет решений, так как ни одно из решений неравенства $x < B$ не удовлетворяет условию $x \geqslant 6$.

Если $a > 2$, то

$$A - 6 = \frac{a^4 + 16a^2 + 16}{4a^2} - 6 = \frac{a^4 - 8a^2 + 16}{4a^2} = \frac{(a^2 - 4)^2}{4a^2} > 0,$$

откуда $A > 6$. Поэтому все значения x такие, что $6 \leqslant x < A$, являются решениями неравенства (5).

Ответ. Если $a \leqslant 2$, то решений нет; если $a > 2$, то $6 \leqslant x < \frac{a^4 + 16a^2 + 16}{4a^2}$.

Пример 3. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\log_a x + \log_a (x + 1) > 2. \tag{11}$$

Решение. Область допустимых значений неравенства (11) определяется условием $x > 0$, параметр a может принимать любые положительные значения, кроме 1.

Если $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, то неравенство (11) равносильно неравенству

$$\log_a [x(x + 1)] > \log_a a^2. \tag{12}$$

Рассмотрим два возможных случая: $a > 1$, $0 < a < 1$.

1) Если $a > 1$, то неравенство (12) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x(x+1) > a^2. \end{cases} \tag{13}$$

Так как квадратное уравнение $x^2 + x - a^2 = 0$ имеет корни $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4a^2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$, где $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, то множество решений второго неравенства системы (13) — объединение промежутков $E_1 = (-\infty, x_1)$ и $E_2 = (x_2, +\infty)$, а множество решений системы (13) — промежуток E_2, т. е. $x > x_2$.

2) Если $0 < a < 1$, то неравенство (12) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x(x+1) < a^2. \end{cases} \tag{14}$$

Множество решений второго неравенства системы (14) — интервал (x_1, x_2), а множество решений системы (14) — интервал $(0, x_2)$.

Ответ. Неравенство не имеет решений при $a < 0$ и $a = 1$. Если $a > 1$, то $x > \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$; если $0 < a < 1$, то $0 < x < \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$.

Пример 4. Найти все значения a, при которых неравенство

$$x^2 - 6x + a \leqslant 0 \tag{15}$$

имеет хотя бы одно решение на промежутке $(-\infty, 2]$.

Решение. Обозначим $f(x) = x^2 - 6x + a$, тогда $f(x) = (x-3)^2 + a - 9$. Если $a > 9$, то $f(x) > 0$ при всех x, а если $a = 9$, то неравенство (15) имеет единственное решение $x = 3$. Пусть $a < 9$, тогда множество решений неравенства (15) — отрезок $[x_1, x_2]$, где x_1, x_2 — точки, расположенные на оси Ox симметрично относительно точки $x = 3$. Если $f(2) > 0$, то $f(x) > 0$ при $x < 2$. Если $f(2) < 0$, то $2 > x_1$ и множество решений неравенства (15) содержит отрезок $[2, x_1]$. Если $f(2) = 0$, то $x = 2$ — решение неравенства (15).

Следовательно, условиям задачи удовлетворяют те и только те значения a, при которых

$$f(2) = 4 - 6 \cdot 2 + a \leqslant 0, \quad a \leqslant 8.$$

Ответ. $a \leqslant 8$.

Пример 5. Найти все значения a, при которых неравенство

$$x^2 + 2|x-a| \geqslant a^2 \tag{16}$$

является верным при всех $x \in \mathbf{R}$.

Решение. Если $x \geqslant a$, то неравенство (16) равносильно каждому из неравенств $x^2 + 2x \geqslant a^2 + 2a$, $(x+1)^2 \geqslant (a+1)^2$,

$$|x+1| \geqslant |a+1|. \tag{17}$$

Аналогично, при $x < a$ неравенство (16) равносильно неравенству

$$|x-1| \geqslant |a-1|. \tag{18}$$

Если $a = 0$, то неравенство (16) является верным при всех $x \in \mathbf{R}$.

Пусть $a > 0$, тогда при всех $x \geqslant a$ справедливо неравенство (17). Если $a > 1$, то неравенство (18) не выполняется при $x = 1 < a$. Если же $0 < a \leqslant 1$, то $|a - 1| = 1 - a$, $|x - 1| = 1 - x > 1 - a$ при $x < a$, т. е. неравенство (18) является верным при всех $x \in \mathbf{R}$, если $a \in [0, 1]$.

Пусть $a < 0$. Если $a < -1$, то неравенство (17) не выполняется при $x = -1 > a$. Если же $-1 \leqslant a < 0$, то неравенство (17) справедливо при $x \geqslant a$, так как в этом случае $|1 + x| = 1 + x \geqslant 1 + a$. Неравенство (18) также является верным, если $-1 \leqslant a < 0$, так как при $x < a$ оно равносильно неравенству $1 - x \geqslant 1 - a$.

Ответ. $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Пример 6. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 3}{x + 3a - 1} \leqslant 0 \qquad (19)$$

является верным при всех x из отрезка $[0, 2]$.

Решение. Пусть $f(x) = (x - 2a - 3)(x + 3a - 1)$, $x_1 = 2a + 3$, $x_2 = -3a + 1$. Тогда неравенство (19) равносильно неравенству $f(x) \leqslant 0$, т. е.

$$(x - x_1)(x - x_2) \leqslant 0 \qquad (20)$$

при условии, что

$$x \neq x_2 \qquad (21)$$

Так как множество решений неравенства (20) — отрезок Δ с концами x_1 и x_2, то задача сводится к нахождению значений a, при которых $[0, 2] \subset \Delta$ при условии (21).

Заметим, что $x_2 > x_1$ при $a > -\frac{2}{5}$ и $x_2 < x_1$ при $a < -\frac{2}{5}$.

Пусть $a > -\frac{2}{5}$, тогда должны выполняться условия $x_1 < 0 < 2 \leqslant x_2$, так как точка x_1 не может быть концом отрезка $[0, 2]$ согласно условию (21). Итак, $-3a + 1 < 0$ и $2a + 3 \geqslant 2$, откуда $a > \frac{1}{3}$.

Аналогично при $a < -\frac{2}{5}$ имеем $2a + 3 \leqslant 0$, $2 < -3a + 1$, откуда $a \leqslant -\frac{3}{2}$.

Ответ. $a \leqslant -\frac{3}{2}$, $a > \frac{1}{3}$.

Пример 7. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\sqrt{x^2 + 2ax} < x + 3a \qquad (22)$$

имеет решения, и решить это неравенство.

Решение. Рассмотрим три возможных случая: $a = 0$, $a < 0$, $a > 0$.

а) Пусть $a = 0$, тогда неравенство (22) можно записать в виде $|x| < x$. Это неравенство не имеет решений.

б) Пусть $a < 0$. Построим графики функций $y = \sqrt{x^2 + 2ax}$ и $y = x + 3a$ (рис. 44.2). Функция $y = \sqrt{x^2 + 2ax}$ определена вне

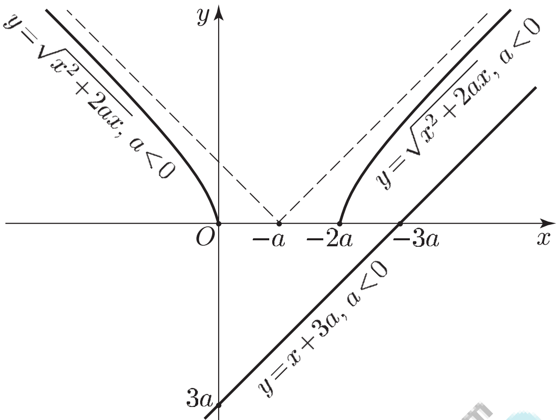

Рис. 44.2

интервала $(0,-2a)$ ее график симметричен относительно прямой $x=-a$ и лежит ниже графика функции $y=|x+a|$, так как $y=\sqrt{x^2+2ax}=\sqrt{(x+a)^2-a^2}<|x+a|$ (прямая $y=x+a$ — асимптота этого графика при $x\to+\infty$, а прямая $y=-x-a$ — асимптота при $x\to-\infty$).

Прямая $y=x+3a$, параллельная прямой $y=x+a$, пересекает оси Ox и Oy в точках $(-3a,0)$ и $(0,3a)$ и лежит ниже графика функции $y=\sqrt{x^2+2ax}$, если $a<0$. Следовательно, при $a<0$ неравенство (22) не имеет решений.

в) Пусть $a>0$ (рис. 44.3). В этом случае прямая $y=x+3a$ пересекает левую ветвь гиперболы $y=\sqrt{x^2+2ax}$ $(x\leqslant-2a)$ в точке A с абсциссой x_0, где x_0 — корень уравнения $\sqrt{x^2+2ax}=x+3a$ такой, что $-3a<x_0<-2a$. Решим это уравнение: $x^2+2ax=x^2+6ax+9a^2$. Отсюда находим $x_0=-\dfrac{9}{4}a$.

Из рисунка 44.3 видно, что при $a>0$ график функции $y=\sqrt{x^2+2ax}$ лежит ниже прямой $y=x+3a$ на промежутках $\left(-\dfrac{9}{4}a,\ -2a\right]$ и $[0,\ +\infty)$.

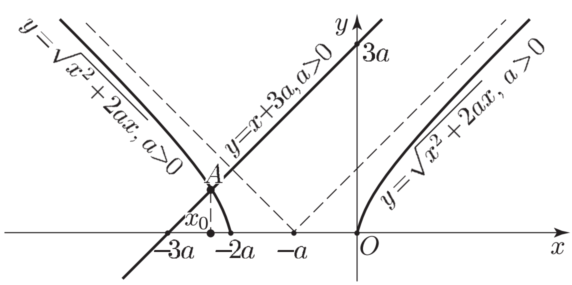

Рис. 44.3

Следовательно, неравенство (22) имеет решения только при $a > 0$, а множество его решений — совокупность промежутков $\left(-\frac{9}{4}a,\ -2a\right]$ и $[0,\ +\infty)$.

Ответ. $a > 0$; $-\frac{9}{4}a < x \leqslant -2a$, $x \geqslant 0$.

Пример 8. Найти все значения a, при которых множество решений неравенства

$$ax^2 - 7x + 6 < 0 \qquad (23)$$

непусто и содержится в множестве решений неравенства

$$ax^2 - 15x + 14 < 0. \qquad (24)$$

Решение. Пусть E_1 и E_2 — множества решений неравенств (23) и (24) соответственно. Если $a = 0$, то $E_1 = \left(\frac{6}{7}, +\infty\right)$ и $E_2 = \left(\frac{14}{15}, +\infty\right)$, откуда следует, что $E_1 \not\subset E_2$ и поэтому число $a = 0$ не удовлетворяет условию примера.

а) Пусть $a < 0$ и пусть D_1 и D_2 — дискриминанты квадратных трехчленов $f_1(x) = ax^2 - 7x + 6$ и $f_2(x) = ax^2 - 15x + 14$, тогда $D_1 = 49 - 24a > 0$, $D_2 = 225 - 56a > 0$. Корни x_1 и x_2 уравнения $f_1(x) = 0$ и корни x_3 и x_4 уравнения $f_2(x) = 0$ выражаются формулами:

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{49 - 24a}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{7 + \sqrt{49 - 24a}}{2a}, \qquad (25)$$

$$x_3 = \frac{15 - \sqrt{225 - 56a}}{2a}, \qquad x_4 = \frac{15 + \sqrt{225 - 56a}}{2a}. \qquad (26)$$

Так как $E_1 = (-\infty, x_2) \cup (x_1, +\infty)$, $E_2 = (-\infty, x_4) \cup (x_3, +\infty)$, то при $a < 0$ из (25) и (26) следует, что $x_4 < x_2$, $x_1 < x_3$, поэтому $E_1 \not\subset E_2$. Таким образом, значения $a < 0$ не удовлетворяют условиям примера.

б) Пусть $a > 0$, тогда $D_1 \leqslant 0$ при $a \geqslant \frac{49}{24}$, и множество решений неравенства (23) пусто при $a \geqslant \frac{49}{24}$.

Остается рассмотреть случай, когда $0 < a < \frac{49}{24}$; в этом случае $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$, $x_1 < x_2$ и $x_3 < x_4$. Число $a \in \left(0, \frac{49}{24}\right)$ тогда и только тогда удовлетворяет условиям задачи, когда справедливы неравенства $x_3 \leqslant x_1$ и $x_2 \leqslant x_4$, так как при $a > 0$ множество решений неравенства (23) — интервал (x_1, x_2), а множество решений неравенства (24) — интервал (x_3, x_4). Итак, нужно решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{15 - \sqrt{225 - 56a}}{2a} \leqslant \dfrac{7 - \sqrt{49 - 24a}}{2a}, \\[2ex] \dfrac{7 + \sqrt{49 - 24a}}{2a} \leqslant \dfrac{15 + \sqrt{225 - 56a}}{2a}, \end{cases}$$

которая при $a > 0$ равносильна следующей

$$\begin{cases} \sqrt{225-56a} - \sqrt{49-24a} \geqslant 8, & (27)\\ \sqrt{225-56a} - \sqrt{49-24a} \geqslant -8. & (28)\end{cases}$$

Но если справедливо неравенство (27), то выполняется и (28), а неравенство (27) равносильно при $0 < a < \frac{49}{24}$ каждому из неравенств

$$\sqrt{225-56a} \geqslant 8 + \sqrt{49-24a},$$
$$225 - 56a \geqslant 64 + 16\sqrt{49-24a} + 49 - 24a,$$
$$\sqrt{49-24a} \leqslant 7 - 2a,$$
$$49 - 24a \leqslant 49 - 28a + 4a^2$$
$$4a^2 - 4a \geqslant 0, \quad a(a-1) \geqslant 0,$$

откуда $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 1$. С учетом того,что $0 < a < \frac{49}{24}$, окончательно получаем $1 \leqslant a < \frac{49}{24}$.

Ответ. $1 \leqslant a < \frac{49}{24}$.

Пример 9. Найти все значения p, при которых каждое решение неравенства

$$\log_{x+1}(3 - px) > 0 \qquad (29)$$

является решением неравенства

$$x^2 + \frac{2p-5}{2p}x - \frac{5}{2p} > 0 \qquad (30)$$

Решение. Разложив левую часть неравенства (30) на множители, заменим неравенство (30) следующим равносильным неравенством:

$$(x+1)\left(x - \frac{5}{2p}\right) > 0. \qquad (31)$$

Неравенство (29) равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} 0 < x + 1 < 1,\\ 0 < 3 - px < 1; \end{cases} \qquad (32)$$

$$\begin{cases} x + 1 > 1,\\ 3 - px > 1, \end{cases} \qquad (33)$$

а неравенство (31) при $x + 1 > 0$ равносильно неравенству

$$x > \frac{5}{2p}. \qquad (34)$$

Рассмотрим два возможных случая: $p > 0$, $p < 0$.

1) Пусть $p > 0$. Тогда из системы (32) следует, что $x < 0$, $px > 2$, что невозможно: если $p > 0$ и $x < 0$, то $px < 0$. Таким образом, при $p > 0$ система (32) несовместна.

Система (33) при $p > 0$ равносильна двойному неравенству

$$0 < x < \frac{2}{p},$$

а значения x из интервала $\left(0, \frac{2}{p}\right)$ не удовлетворяют условию (34). Итак, при $p > 0$ ни одно решение неравенства (29) не является решением неравенства (30).

2) Пусть $p < 0$. Тогда любое число $x > 0$ является решением как системы (33), так и неравенства (34). Остается выяснить, при каких значениях p ($p < 0$) каждое решение системы (32) является решением неравенства (34).

Система (32) при $p < 0$ равносильна системе

$$\begin{cases} -1 < x < 0, \\ \frac{3}{p} < x < \frac{2}{p}. \end{cases} \tag{35}$$

Обращаясь к неравенству (34), заметим, что если $p < 0$, то

$$\frac{3}{p} < \frac{5}{2p} < \frac{2}{p}.$$

Положим

$$E_1 = (-1, 0), \qquad E_2 = \left(\frac{3}{p}, \frac{5}{2p}\right), \qquad E_3 = \left(\frac{5}{2p}, +\infty\right),$$

где $p < 0$.

Если $\frac{5}{2p} > -1$, то значения x из промежутка $E_1 \cap E_2$ (из пересечения интервалов E_1 и E_2) не удовлетворяют неравенству (34).

Если же $\frac{5}{2p} \leqslant -1$, то $-\frac{5}{2} \leqslant p$, так как $p < 0$. В этом случае каждое решение системы (35) удовлетворяет неравенству (34), поскольку $E_1 \subset E_3$. Таким образом, условиям задачи удовлетворяют все значения p такие, что $p < 0$ и $-\frac{5}{2} \leqslant p$, т. е. значения p из промежутка $\left[-\frac{5}{2}, 0\right)$ и только эти значения.

Ответ. $-\frac{5}{2} \leqslant p < 0$.

Пример 10. Найти все значения a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4x + a \leqslant 0, & (36) \\ x^2 - 2x - 3a \leqslant 0 & (37) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Обозначим $f(x) = x^2 + 4x + a$, $g(x) = x^2 - 2x - 3a$, тогда $f(x) = (x+2)^2 + a - 4$, $g(x) = (x-1)^2 - 3a - 1$. Если $a - 4 > 0$, т. е. $a > 4$, то $f(x) > 0$ при всех x и неравенство (1) не имеет решений. При $a = 4$ неравенство (36) имеет единственное решение $x = -2$, которое является решением неравенства (37).

При $a < -\frac{1}{3}$ неравенство (37) не имеет решений, а при $a = -\frac{1}{3}$ оно имеет единственное решение $x = 1$, которое не является решением неравенства (36).

Остается рассмотреть значения a из интервала $\left(-\frac{1}{3},\ 4\right)$. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $f(x) = 0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $g(x) = 0$. Тогда $x_1 = -2 - \sqrt{4-a}$, $x_2 = -2 + \sqrt{4-a}$, $x_3 = 1 - \sqrt{3a+1}$, $x_4 = 1 + \sqrt{3a+1}$. Система (36)–(37) при $a \in \left(-\frac{1}{3}, 4\right)$ может иметь единственное решение только тогда, когда отрезки $[x_1, x_2]$ и $[x_3, x_4]$ имеют единственную общую точку, а это возможно лишь в следующих случаях: $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3$.

Пусть $x_1 = x_4$, тогда $-2 - \sqrt{4-a} = 1 + \sqrt{3a+1}$. Это уравнение не имеет корней.

Пусть $x_2 = x_3$, тогда $-2 + \sqrt{4-a} = 1 - \sqrt{3a+1}$ или

$$\sqrt{4-a} = 3 - \sqrt{3a+1}. \qquad (38)$$

Задача сводится к нахождению корней уравнения (38), принадлежащих интервалу $\left(-\frac{1}{3}, 4\right)$.

Из (38) следует, что $3a + 1 = 13 - a - 6\sqrt{4-a}$, $3\sqrt{4-a} = 2(3-a)$, $4a^2 - 15a = 0$, откуда $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{15}{4}$.

Число $a = 0$ — корень уравнения (38), а число $a = \frac{15}{4}$ — посторонний корень для этого уравнения. Проверка показывает, что при $a = 0$ система (36)–(37) имеет единственное решение $x = 0$.

Ответ. $a = 0$, $a = 4$.

Пример 11. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + (2-5a)x + 4a^2 - 2a \leqslant 0, & (39) \\ x^2 + a^2 = 4 & (40) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Неравенство (39) можно записать в виде

$$(x-a)(x+2-4a) \leqslant 0. \qquad (41)$$

Изобразим на плоскости (a, x) прямые $x = a$, $x = 4a - 2$ и окружность $x^2 + a^2 = 4$ (рис. 44.4). Эти прямые пересекаются в точке $M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Множество решений неравенства (41) на плоскости (a, x) — пара вертикальных углов с вершиной M (вместе с их границами), которые заштрихованы на рис. 44.4 (координаты точки $(0, -1)$ удовлетворяют неравенству (41)). Искомые значения a — абсциссы дуг A_1B_1 и A_2B_2 окружности $x^2 + a^2 = 4$, лежащих в заштрихованных углах.

Точки A_1 и A_2 принадлежат прямой $x = a$ и окружности и их абсциссы равны $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$, абсцисса точки B_2 равна 0, а абсцисса точки B_1 определяемая уравнением $\sqrt{4-a^2} = 4a - 2$, равна

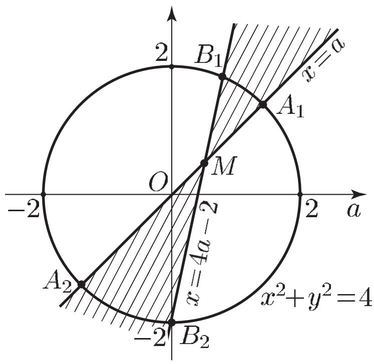

Рис. 44.4

$\frac{16}{17}$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют значения a из отрезков $[-\sqrt{2}, 0]$ и $\left[\frac{16}{17}, \sqrt{2}\right]$ и только эти значения.

Ответ. $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 0$, $\frac{16}{17} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$.

Пример 12. Найти все значения a, при которых множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - (a-2)x - 2 - y \leqslant 0, \\ 2x + y - a \leqslant 0 \end{cases} \tag{42}$$

содержит отрезок $[-1, 0]$ оси Ox.

Решение. Подставив в систему (42) $y = 0$, получаем

$$\begin{cases} x^2 - (a-2)x - 2 \leqslant 0, & (43) \\ 2x - a \leqslant 0. & (44) \end{cases}$$

Множество решений неравенства (44) — луч $x \leqslant \frac{a}{2}$, а отрезок $\Delta = [-1, 0]$ принадлежит этому лучу тогда и только тогда, когда $\frac{a}{2} \geqslant 0$, т. е. при $a \geqslant 0$.

Множество решений неравенства (43) — отрезок $\Delta_1 = [x_1, x_2]$, где x_1 и x_2 — абсциссы точек пересечения параболы $y = f(x) = x^2 - (a-2)x - 2$ с осью Ox. Если $\Delta \subset \Delta_1$, то

$$f(-1) \leqslant 0, \quad f(0) \leqslant 0, \tag{45}$$

так как $f(x) \leqslant 0$ для всех $x \in \Delta_1$. Обратно, если выполняются условия (45), то $-1 \in \Delta_1$ и $0 \in \Delta_1$, откуда следует, что $\Delta \in \Delta_1$. Таким образом, условиям задачи удовлетворяют те и только те значения $a \geqslant 0$, для которых выполняются неравенства (45), т. е. $f(-1) = 1 + (a-2) - 2 \leqslant 0$, $f(0) = -2 \leqslant 0$, откуда находим $0 \leqslant a \leqslant 3$.

Ответ. $0 \leqslant a \leqslant 3$.

Пример 13. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2ax + \frac{3}{4}a^2 - a - 1 > 0, & (46) \\ x^2 + ax - \frac{3}{4}a^2 + 4a - 4 \leqslant 0, & (47) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Найдем множество E всех значений a, при которых система (46), (47) не имеет решений. Тогда искомое множество E_1 дополняет E до $\mathbf{R}$, т. е. множество E_1 получается из $\mathbf{R}$ удалением всех точек множества E. Введем обозначения:

$$f(x) = x^2 + 2ax + \frac{3}{4}a^2 - a - 1, \qquad g(x) = x^2 + ax - \frac{3}{4}a^2 + 4a - 4.$$

Квадратный трехчлен $g(x)$ имеет корни

$$x_1 = -\frac{a}{2} - |a-2| \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{a}{2} + |a-2|, \tag{48}$$

а множество решений неравенства (47) — отрезок $\Delta = [x_1, x_2]$.

Заметим, что система (46), (47) не имеет решений тогда и только тогда, когда одновременно выполняются неравенства

$$f(x_1) \leqslant 0, \qquad f(x_2) \leqslant 0. \tag{49}$$

Действительно, если не выполняется хотя бы одно из условий (49), например $f(x_1) > 0$, то число x_1 — решение неравенства (46) и системы (46), (47). Если выполнены условия (49), то квадратный трехчлен $f(x)$ имеет корни x_3 и x_4, где $x_3 \leqslant x_4$ (ветви параболы $y = f(x)$ направлены вверх), причем $x_1 \in \Delta_1 = [x_3, x_4]$, $x_2 \in \Delta_1$, и поэтому $\Delta \subset \Delta_1$. Тогда, если $x_0 \in \Delta_1$, то $f(x_0) \leqslant 0$, т. е. каждое решение неравенства (47) не является решением неравенства (46) и поэтому система (46), (47) не имеет решений.

Подставляя найденные по формулам (48) значения x_1 и x_2 в левую часть неравенства (46), получаем

$$f(x_1) = a^2 - a|a-2| - 5a + 3, \qquad f(x_2) = a^2 + a|a-2| - 5a + 3,$$

откуда следует, что система (49) как при $a \leqslant 2$, так и при $a > 2$ имеет один и тот же вид (меняются местами неравенства этой системы):

$$\begin{cases} a^2 - a(a-2) - 5a + 3 \leqslant 0, \\ a^2 + a(a-2) - 5a + 3 \leqslant 0. \end{cases} \tag{50}$$

Система (50) равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} -3a + 3 \leqslant 0, \\ 2a^2 - 7a + 3 \leqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geqslant 1, \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)(a-3) \leqslant 0, \end{cases}$$

откуда находим $1 \leqslant a \leqslant 3$.

Следовательно, $E = [1, 3]$, а искомое множество — объединение промежутков $a < 1$ и $a > 3$.

Ответ. $a < 1$ и $a > 3$.

Пример 14. Найти все значения a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} ax^2 + 2(a+1)x + a + 5 \leqslant 0, & (51) \\ (a+1)x^2 + 2(a+2)x + a + 2 \geqslant 0, & (52) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Обозначим $f(x) = ax^2 + 2(a+1)x + a + 5$,

$$g(x) = (a+1)x^2 + 2(a+2)x + a + 2.$$

а) При $a = 0$ получаем систему $2x + 5 \leqslant 0$, $x^2 + 4x + 2 \geqslant 0$, имеющую бесконечное множество решений; при $a = -1$ — систему $-x^2+4 \leqslant 0$, $2x+1 \geqslant 0$, которая также имеет бесчисленное множество решений.

Если $a \neq 0$, $a \neq -1$, то $f(x)$ и $g(x)$ — квадратные трехчлены, а их дискриминанты равны соответственно

$$D_1 = 4(1 - 3a), \quad D_2 = 4(a+2).$$

б) Пусть $a < -2$, тогда $a + 1 < 0$, $D_2 < 0$, откуда следует, что $g(x) < 0$ при всех x и поэтому неравенство (2) не имеет решений.

в) Пусть $a = -2$, тогда $D_2 = 0$ и неравенство (52) имеет единственное решение $x = 0$, которое (при $a = -2$) не является решением неравенства (51).

г) Пусть $-2 < a < \frac{1}{3}$ и $a \neq -1$, $a \neq 0$, тогда $D_1 > 0$, $D_2 > 0$. Заметим, что если дискриминант квадратного трехчлена $h(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ положителен, а x_1, x_2 — его корни, то множество решений нестрогого неравенства $h(x) \leqslant 0$ (или $h(x) \geqslant 0$) представляет из себя либо отрезок $[x_1, x_2]$, если $x_1 < x_2$, либо совокупность лучей $x \leqslant x_1$, $x \geqslant x_2$ (внешность интервала (x_1, x_2)). Отсюда следует, что система (51)–(52) в рассматриваемом случае ($D_1 > 0$, $D_2 > 0$) может иметь в качестве единственного решения общую граничную точку множеств решений неравенств (51) и (52), т. е. общий корень уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$.

Итак, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + 2(a+1)x + a + 5 = 0, \\ (a+1)x^2 + 2(a+2)x + a + 2 = 0. \end{cases} \quad (53)$$

Вычитая из второго уравнения системы (53) первое, получаем $x^2 + 2x - 3 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

При $x = 1$ каждое из уравнений системы (53) примет вид $4a + 7 = 0$, откуда $a = -\frac{7}{4}$.

Если $a = -\frac{7}{4}$, то $f(x) = -\frac{7}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4} = -\frac{1}{4}(7x^2 + 6x - 13) = -\frac{7}{4}(x-1)\left(x + \frac{13}{7}\right)$, $g(x) = -\frac{1}{4}(3x^2 - 2x - 1) = -\frac{3}{4}(x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

Поэтому система (51)–(52), равносильная системе

$$\begin{cases} (x-1)\left(x+\dfrac{13}{7}\right) \geqslant 0, \\ (x-1)\left(x+\dfrac{1}{3}\right) \leqslant 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1$.

Если $x = -3$, то из (53) следует, что $a = \dfrac{1}{4}$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{21}{4} = \frac{1}{4}(x^2 + 10x + 21) = \frac{1}{4}(x+3)(x+7),$$

$$g(x) = \frac{5}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}(5x^2 + 18x + 9) = \frac{5}{4}(x+3)(x+\frac{3}{5}).$$

В этом случае система (51)–(52) равносильна системе

$$\begin{cases} (x+3)(x+7) \leqslant 0, \\ (x+3)(x+\frac{3}{5}) \geqslant 0, \end{cases}$$

а множество ее решений — отрезок $[-7, -3]$.

д) Пусть $a = \dfrac{1}{3}$, тогда $D_1 = 0$, $f(x) = \dfrac{1}{3}(x+4)^2$ и неравенство $f(x) \leqslant 0$ имеет единственное решение $x = -4$, которое удовлетворяет и неравенству (52).

е) Пусть $a > \dfrac{1}{3}$, тогда $D_1 < 0$, $f(x) > 0$ при всех x и неравенство (51) не имеет решений.

Таким образом, система (51)–(52) имеет единственное решение при $a = -\dfrac{7}{4}$ и $a = \dfrac{1}{3}$.

Ответ. $a = -\dfrac{7}{4}$ и $a = \dfrac{1}{3}$.

Пример 15. Вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ имеют соответственно координаты $(-2; -3)$, $(1; 3)$, $(6; 1)$. Найти:

а) все значения a, для которых координаты вершины D являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2a \leqslant 0, \\ 6x - 2y + 7a \geqslant 0; \end{cases} \tag{54}$$

б) все значения a, для которых координаты хотя бы одной точки отрезка AC являются решениями этой системы.

Решение. а) Пусть x_0, y_0 — координаты вершины D. Тогда из равенств $\overline{AB} = \overline{DC}$, где $\overline{AB} = (3; 6)$, $\overline{DC} = (6 - x_0; 1 - y_0)$, следует, что $x_0 = 3$, $y_0 = -5$. Подставляя $x = 3$, $y = -5$ в систему (54), получаем $-4 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

б) Уравнение прямой AC имеет вид

$$y + 3 = k(x + 2), \tag{55}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$, α — угол наклона вектора $\overline{AC}$ к оси Ox. Следовательно,

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1-(-3)}{6-(-2)} = \frac{1}{2}$$

и уравнение (55) можно записать так:

$$y = \frac{1}{2}x - 2, \tag{56}$$

а система (54) равносильна системе

$$\begin{cases} y \leqslant -\dfrac{3}{2}x - a, \\ y \leqslant 3x + \dfrac{7}{2}a. \end{cases} \tag{57}$$

Пусть l_1 и l_2 — прямые, заданные уравнениями $y = -\dfrac{3}{2}x - a$ и $y = 3x + \dfrac{7}{2}a$ соответственно (рис. 44.5). Тогда системе (57) удовлетворяют точки, лежащие ниже каждой из этих прямых (в заштрихованной на рис. 44.5 области M).

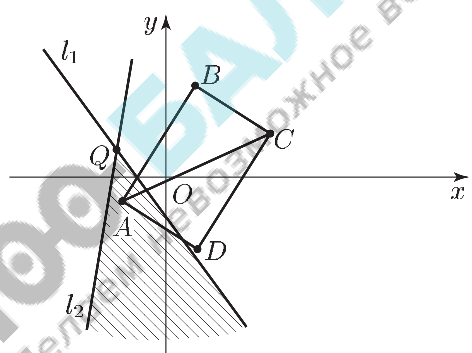

Рис. 44.5

Требуется найти все значения a, при которых хотя бы одна точка диагонали AC лежит в области M. Для этого необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

1) точка Q пересечения прямых l_1 и l_2 лежала выше прямой AC;

2) точка A лежала ниже прямой l_1;

3) точка C лежала ниже прямой l_2.

Так как точка Q имеет координаты $x_1 = -a$, $y_1 = \dfrac{a}{2}$, то условие 1 означает, что $y_1 \geqslant \dfrac{1}{2}x_1 - 2$, откуда $a \geqslant -2$. Из условия 2 следует, что $a \leqslant 6$, а из условия 3 получаем $a \geqslant -\dfrac{34}{7}$. Следовательно, $a \in [-2, 6]$.

Ответ. а) $-4 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$; б) $-2 \leqslant a \leqslant 6$.

Пример 16. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(a; b)$ которых таковы, что система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (3 - a^2 - b^2)x - 3(a^2 + b^2) < 0, & (58)\\ 2x^2 + (2a + 2b - 25)x - 25(a + b) > 0 & (59)\end{cases}$$

не имеет решений. Найти площадь фигуры Ф.

Решение. Так как квадратный трехчлен

$$x^2 + (3 - a^2 - b^2)x - 3(a^2 + b^2)$$

имеет корни -3 и a^2+b^2, то решениями неравенства (58) являются все числа из интервала $\Delta_1 = (-3, a^2 + b^2)$, и только эти числа. Аналогично, решения неравенства (59) — все числа, лежащие вне отрезка Δ_2 с концами в точках $\dfrac{25}{2}$ и $-(a + b)$.

Система неравенств (58), (59) не имеет решений тогда и только тогда, когда интервал Δ_1 целиком содержится в отрезке Δ_2, т. е. когда одно из чисел $\dfrac{25}{2}$ и $-(a + b)$ не меньше, чем $a^2 + b^2$, а другое — не больше, чем -3. Так как $\dfrac{25}{2} > -3$, то должны выполняться неравенства $a^2 + b^2 \leqslant \dfrac{25}{2}$ и $-(a + b) \leqslant -3$.

Итак, условиям задачи удовлетворяют те и только те пары чисел $(a; b)$, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leqslant \dfrac{25}{2},\\ a + b \geqslant 3. \end{cases} \qquad (60)$$

Фигура Ф, задаваемая на плоскости Oab системой неравенств (60), — это сегмент, ограниченный дугой окружности радиуса $R = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ с центром в точке O (рис. 44.6) и прямой $a + b = 3$. Искомая площадь

$$S = S_1 - S_2,$$

где S_1 — площадь сектора AOB, S_2 — площадь треугольника AOB.

Для нахождения координат точек A и B составим систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{25}{2},\\ a + b = 3, \end{cases}$$

решив которую, получим $A\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{7}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$, откуда $AB = 4\sqrt{2}$. Если C — середина AB, $\angle AOB = 2\alpha$, то имеем $AC = 2\sqrt{2}$,

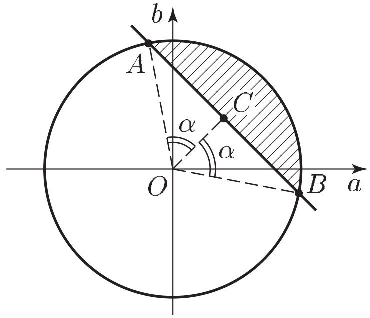

Рис. 44.6

$OC = \sqrt{R^2 - AC^2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $S_2 = \dfrac{1}{2} OC \cdot AB = 6$, $S_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 2\alpha R^2$, где $\cos\alpha = \dfrac{OC}{R} = \dfrac{3}{5}$.

Ответ. $\dfrac{25}{2} \arccos\dfrac{3}{5} - 6$.

Пример 17. Пусть M — множество точек плоскости с координатами $(x; y)$ таких, что числа $3x$, $2y$ и $9 - y$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры M.

Фигура Φ состоит из точек множества M таких, что неравенство $t^2 + 2t(x-2) + 7 - y > 0$ выполняется при всех значениях параметра t. Найти площадь фигуры Φ.

Решение. 1) Так как указанные в условии задачи числа являются длинами сторон треугольника, то эти числа положительны и удовлетворяют неравенству треугольника, т. е.

$$\begin{cases} 0 < 3x < 2y + 9 - y, \\ 0 < 2y < 3x + 9 - y, \\ 0 < 9 - y < 3x + 2y, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y - 3x + 9 > 0, \\ y - x - 3 < 0, \\ y + x - 3 > 0, \\ x > 0,\ y > 0,\ y < 9. \end{cases} \tag{61}$$

Условиям (61) удовлетворяют точки треугольника ABC (рис. 44.7), где $A(0; 3)$, $B(6; 9)$, $C(3; 0)$, а площадь S фигуры M равна $S_1 - S_2 - S_3$, где S_1 — площадь трапеции $OABD$, $D(6; 0)$, S_2 — площадь треугольника OAC, S_3 — площадь треугольника BCD. Так как $S_1 = \dfrac{1}{2}(3 + 9)6 = 36$, $S_2 = \dfrac{9}{2}$, $S_3 = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = \dfrac{27}{2}$, то $S = 18$.

2) Неравенство

$t^2 + 2t(x-2) + 7 - y > 0$

является верным при всех $t \in \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда $(x-2)^2 - (7 - y) < 0$, т. е.

$$y < 7 - (x-2)^2. \tag{62}$$

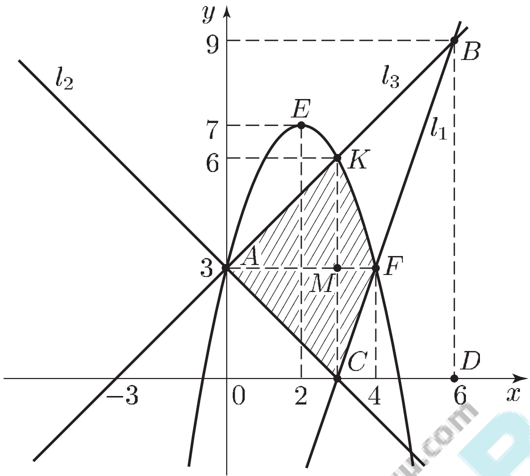

Рис. 44.7

Условию (62) удовлетворяют все точки, лежащие под параболой $y = 7 - (x-2)^2$ с вершиной $E(2;7)$.

Пусть l_1, l_2, l_3 — прямые, заданные соответственно уравнениями $y = 3x - 9$, $y = 3 - x$ и $y = x + 3$. Парабола пересекает прямую l_1 в точке $F(4;3)$, а прямую l_3 — в точках A и $K(3;6)$.

Если σ — площадь фигуры Φ, то $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, где σ_1 — площадь треугольника ACF, σ_2 — площадь треугольника AKM, $M(3;3)$, σ_3 — площадь криволинейного треугольника KMF. Так как $\sigma_1 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 6$, $\sigma_2 = \frac{9}{2}$, $\sigma_3 = \int\limits_3^4 (-x^2+4x)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_3^4 = \frac{5}{3}$, то $\sigma = \frac{73}{6}$.

Ответ. 18, $\frac{73}{6}$.

Пример 18. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 31 \leqslant 8(|x| + |y|), \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Неравенство системы можно записать в виде

$$x^2 - 8|x| + 16 + y^2 - 8|y| + 16 \leqslant 1$$

или

$$(|x| - 4)^2 + (|y| - 4)^2 \leqslant 1.$$

Множество E решений этого неравенства — объединение кругов K_1, K_2, K_3, K_4 (вместе с их границами) радиуса 1 (см. рис. 44.8) с центрами $O_1(4; 4)$, $O_2(4; -4)$, $O_3(-4; 4)$ и $O_4(-4; -4)$.

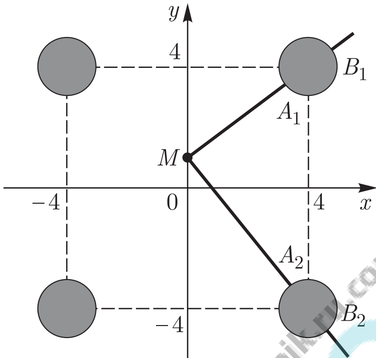

Рис. 44.8

Запишем уравнение системы в виде

$$x^2 + (y - 1)^2 = a^2.$$

Это уравнение задает окружность L с центром в точке $M(0; 1)$ радиуса $|a|$. Исходная система имеет хотя бы одно решение при тех значениях a, при которых окружность L имеет общие точки с множеством E.

При этом достаточно (ввиду симметричного расположения кругов) выяснить, при каких значениях a окружность L имеет общие точки с кругами, центрами которых являются точки O_1 и O_2.

Проведем из точки M лучи l_1 и l_2 в направлении точек O_1 и O_2. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения l_1 и окружности с центром O_1, A_2 и B_2 — точки пересечения l_2 и окружности с центром O_2. Тогда

$$MO_1 = 5, \qquad MO_2 = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41},$$

$$MA_1 = 4, \qquad MB_1 = 6,$$

$$MA_2 = \sqrt{41} - 1, \qquad MB_2 = \sqrt{41} + 1.$$

Так как $\sqrt{41} - 1 < 6$, то объединение отрезков $[4; 6]$ и $[\sqrt{41} - 1; \sqrt{41} + 1]$ есть отрезок $[4; \sqrt{41} + 1]$, а искомое множество значений a определяется неравенством $4 \leqslant |a| \leqslant \sqrt{41} + 1$.

Ответ. $4 \leqslant |a| \leqslant \sqrt{41} + 1$.

Задачи

Для каждого значения параметра a решить неравенство (1–5):

1. $a\sqrt{x-1} < 1$.
2. $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$.
3. $|x - a^2| + |x + 5 - 2a| \leqslant 4$.
4. $2|x - a| + x^2 + 2 < 2ax$.
5. $\sqrt{2x+a} \geqslant x$.
6. Найти все значения a, при которых неравенство $x^2+2(2a+1)x+4a^2-3>0$ является верным при всех $x \geqslant 1$.
7. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства

$$ax^2 - x + 1 - a < 0$$

принадлежат интервалу $0 < x < 1$.
8. Найти все значения a, при которых неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ является верным при всех $x > 0$.
9. Найти все значения a, при которых неравенство $(a^2+3a)x^2-(2a+6)x-3a-9 \geqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.
10. Найти все значения a, при которых неравенство $(x^2+(2-a)x-2a^2-4a) \times \sqrt{1+x} \leqslant 0$ имеет единственное решение.
11. Найти все значения a, при которых неравенство $\log_a(x^2+4) > 1$ является верным при всех $x \in \mathbf{R}$.
12. Найти все значения a, при которых множество решений неравенства $x - \sqrt{(\frac{a}{2} - x)(x+a)} \geqslant 2a+1$ является отрезком.
13. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства $(a^2+a-2)x^2 - (a+5)x - 2 \leqslant 0$ принадлежит отрезку $0 \leqslant x \leqslant 1$.
14. Найти все значения a, при которых множество решений неравенства $\sqrt{x+a} \geqslant x$ есть отрезок длины $2|a|$.
15. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства

$$x^2 - 4(a+1)x + 4a^2 + 8a + 3 < 0$$

является также решением неравенства $x^2 + 2(2a+1)x + 2a - 3 < 0$.
16. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства $4x^2 + 8x + 3 > 0$ содержится среди решений неравенства $2ax^2 + (4-7a)x - 14 > 0$.
17. Найти все значения p, при которых каждое решение неравенства $\log_{1-x}(2+px) > 0$ удовлетворяет также неравенству $x^2 + \dfrac{3-2p}{2p}x - \dfrac{3}{2p} > 0$.
18. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant (y-a)^2, \\ y \geqslant (x-a)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?
19. Вершины B, C, D параллелограмма $ABCD$ имеют соответственно координаты $(-3;2)$, $(2;3)$, $(3;-4)$. Найти:
а) все значения a, для которых координаты вершины A являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x - y - 2a \leqslant 0, \\ 2x + 6y + 5a \leqslant 0; \end{cases}$$

б) все значения a, для которых координаты хотя бы одной точки отрезка BD являются решением этой системы.

20. Вершины A, B, C треугольника имеют соответственно координаты $(-2;-1)$, $(0;9)$, $(8;1)$. Найти:

а) все значения a, для которых координаты точки пересечения медиан треугольника ABC являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x - y + a \leqslant 0, \\ 6x + 3y + 5a \geqslant 0; \end{cases}$$

б) все значения a, для которых координаты хотя бы одной точки отрезка BC являются решениями этой системы.

21. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(a;b)$ которых таковы, что система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (a - b + 25)x + 25(a - b) > 0, \\ 2x^2 + (a^2 + b^2 - 16) - 8(a^2 + b^2) < 0 \end{cases}$$

не имеет решений. Найти площадь фигуры Ф.

22. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(a;b)$ которых таковы, что каждое решение неравенства

$$x^2 - (2a^2 - b^2)x - 2b^2(2a^2 + b^2) \leqslant 0$$

является решением неравенства

$$x^2 - (a^2 - b^2 + 8)x - (b^2 + 1)(a^2 + 9) \leqslant 0.$$

Найти площадь фигуры Ф.

23. Найти все значения параметра a, при которых множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (a + 4)x + 4a \leqslant y, \\ 3x + y - (2a + 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

содержит отрезок AB, где $A(-2;0)$, $B(-1;0)$.

24. Пусть M — множество точек плоскости с координатами $(x;y)$ таких, что числа x, y и $6 - 2x$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры M.

Фигура Ф состоит из точек множества M таких, что неравенство $t^2 + 2tx + 4x - y > 0$ выполняется при всех значениях параметра t. Найти площадь фигуры Ф.

25. Найти все значения a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x - a \leqslant 0, \\ x^2 - 4x + 6a \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

26. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2a \leqslant y, \\ y^2 + 2a \leqslant x \end{cases}$$

имеет единственное решение.

27. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^3 + (a + 3)x^2 + (3a + 2)x + 2a \leqslant 0, \\ x^3 + (a + 3)x^2 + 3ax \geqslant 0. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответы

1. Если $a \leqslant 0$, то $x \geqslant 1$; если $a > 0$, то $1 \leqslant x < 1 + \frac{1}{a^2}$.

2. Если $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 4$, то решений нет; если $0 < a < 2$, то $-a \leqslant x \leqslant a$; если $a = 2$, то $-2 < x < 2$; если $2 < a < 4$, то $-\frac{a\sqrt{4a - a^2}}{2} < x < \frac{a\sqrt{4a - a^2}}{2}$.

3. Если $a = 1$, то $-3 \leqslant x \leqslant 1$; если $a \neq 1$, то решений нет.

4. Если $a < -\sqrt{2}$ и $a > \sqrt{2}$, то $a + 1 - \sqrt{a^2 - 1} < x < a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}$; если $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$, то решений нет.

5. Если $a < -1$, то решений нет; если $a = -1$, то $x = 1$; если $-1 < a \leqslant 0$, то $1 - \sqrt{1 + a} \leqslant x \leqslant 1 + \sqrt{1 + a}$.

6. $a < -1$, $a > 0$. **7.** $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$. **8.** $a > 1$. **9.** $a \leqslant -3$, $a \geqslant -\frac{1}{3}$.

10. $-1 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{2}$. **11.** $1 < a < 4$. **12.** $a < \frac{-36 - \sqrt{288}}{63}$.

13. $-3 \leqslant a \leqslant 3$. **14.** $a = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$, $a = 2$. **15.** $-\frac{7}{6} \leqslant a \leqslant -\frac{1}{2}$.

16. $a \geqslant 4$. **17.** $-\frac{3}{2} \leqslant p < 0$. **18.** $a = -\frac{1}{4}$. **19.** а) $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{34}{5}$; б) $-4 \leqslant a \leqslant 2$.

20. а) $-\frac{21}{5} \leqslant a \leqslant -1$; б) $-9 \leqslant a \leqslant 9$. **21.** $50 \arcsin \frac{3}{5} - 24 = \frac{25}{2}\pi - 50 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} - 24$.

22. $18 \arcsin \frac{1}{3} + 4\sqrt{2}$. **23.** $-\frac{7}{2} \leqslant a \leqslant 1$. **24.** 6 и $\frac{25}{6}$.

25. $a = -1$, $a = 0$. **26.** $a = \frac{1}{8}$. **27.** $a \geqslant 3$.

§ 45. Делимость целых чисел, сравнения, целочисленные решения уравнений

Элементарные сведения о целых числах, включая признаки делимости на 3, 4, 9, 11, даны в гл. 1 (§ 1).

Рассмотрим еще несколько несложных примеров.

Примеры с решениями

Пример 1. Найдем все целые числа n, при которых дробь $a = \frac{n^5 + 3n^2 + 3n + 3}{n^2 + 1}$ является целым числом.

Решение. Представим число a в виде суммы многочлена от n и дроби, числитель которой — многочлен первой степени. С этой целью запишем a в следующем виде:

$$a = \frac{n^3(n^2 + 1) + 2n(n^2 + 1) + n + 3}{n^2 + 1}.$$

Произведя деление, получаем

$$a = n^3 + 2n + \frac{n + 3}{n^2 + 1}.$$

Так как $n^3 + 2n$ — целое число, число a будет целым тогда и только тогда, когда дробь $\dfrac{n+3}{n^2+1}$ — целое число. Этому условию удовлетворяют только целые числа -3, -1, 0, 1, 2.

Пример 2. Пусть a и b — такие целые числа, что число $c = 4a + 3b$ делится на 17. Докажем, что число $d = 20a + 49b$ делится на 17.

Решение. Воспользуемся равенством

$$d = 5(4a + 3b) + 34b.$$

Так как числа $5(4a + 3b) = 5c$ и $34b$ делятся на 17, то и число d делится на 17.

Пример 3. Докажем, что при любых натуральных m и n число $a = (m + 5n + 3)^5(3m + 7n + 2)^4$ делится на 16.

Решение. Если числа m и n либо оба четные, либо оба нечетные, то $3m+7n+2$ — четное число, и поэтому $(3m+7n+2)^4$ делится на 16. Если одно из чисел m, n четное, а другое нечетное, то $m+5n+3$ — четное число, и поэтому $(m+5n+3)^5$ делится на 32. Следовательно, число a делится на 16 при любых $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$.

1. *Сравнения.*

Если целые числа a и b при делении на натуральное число $m > 1$ дают равные остатки, то говорят, что эти числа *сравнимы по модулю* m и пишут

$$a \equiv b \pmod{m}. \qquad (1)$$

Иначе говоря, запись $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что разность $a - b$ делится на m. В частности, если $a \equiv 0 \pmod{m}$, то число a делится на m.

Например, $96 = 6 \pmod{10}$, $42 = 3 \pmod{13}$, $32 \equiv -1 \pmod{11}$, $90 \equiv -2 \pmod{23}$.

Перечислим основные свойства сравнений.

1. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
2. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то

$$a + c \equiv b + d \pmod{m},$$

$$a - c \equiv b - d \pmod{m},$$

$$ac \equiv bd \pmod{m},$$

т. е. сравнения можно складывать, вычитать и перемножать, как и верные числовые равенства. В частности, можно обе части сравнения умножать на одно и то же целое число и возводить в натуральную степень.

3. Если $ak \equiv bk \pmod{m}$, $m \neq 1$, а числа k и m взаимно просты, то $ak \equiv bk \pmod{m}$, т. е. обе части сравнения можно сокращать

на их общий множитель, если он и модуль m — взаимно простые числа.

Ограничимся доказательством свойства 3.

По условию число $ak - bk = k(a - b)$ делится на m. Так как k не делится на m (k и m — взаимно простые числа, $m \neq 1$), то $a - b$ делится на m, т. е. $a \equiv b \pmod{m}$.

Пример 4. Докажем, что число a делится на m, если:

1) $a = 76^{21} + 42^{17} - 8 \cdot 23^{16}$, $m = 10$;

2) $a = 78^{35} + 55^{19}$, $m = 7$.

Решение. 1) Так как $76 \equiv 6 \pmod{10}$, то $76^{21} \equiv 6^{21} \equiv 6 \pmod{10}$.

Используя результат задачи 4 (§ 1, гл. 1), получаем: $42^{17} \equiv 2^{17} \equiv 2 \pmod{10}$, $23^{16} \equiv 3^{16} \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$.

По свойствам сравнений $a \equiv 6 + 2 - 8$, т. е. $a \equiv 0 \pmod{10}$. Это означает, что a делится на 10.

2) Пользуясь тем, что $78 \equiv 1 \pmod 7$, $55 \equiv -1 \pmod 7$, получаем $78^{35} \equiv 1 \pmod 7$, $55^{19} \equiv (-1)^{19} \pmod 7$, т. е. $55^{19} \equiv -1 \pmod 7$. Следовательно, $a \equiv 1 - 1 \pmod 7$, т. е. a делится на 7.

Пример 5. Найти остаток от деления числа a на m, если:

1) $a = 23^{45} \cdot 37^{21} \cdot 49^{25}$, $m = 3$;

2) $a = 5 \cdot 2^{73} + 7 \cdot 44^9$, $m = 15$.

Решение. 1) Числа 23, 37 и 49 не делятся на 3. Поэтому их квадраты при делении на 3 дают в остатке единицу, т. е. $23^2 \equiv 37^2 \equiv 49^2 \equiv 1 \pmod 3$, откуда следует, что $23^{46} \equiv 37^{20} \equiv$ $\equiv 49^{24} \equiv 1 \pmod 3$.

По свойствам сравнений

$$a \equiv 23 \cdot 37 \cdot 49 \equiv 2 \cdot 1 \cdot 1, \quad \text{т. е.} \quad a \equiv 2 \pmod 3.$$

Следовательно, искомый остаток равен 2.

2) Так как $2^4 \equiv 1 \pmod{15}$, а $44 \equiv -1 \pmod{15}$, то $2^{73} = 2 \cdot (2^4)^{18} \equiv 2 \pmod{15}$, $44^9 \equiv -1 \pmod{15}$. Следовательно, $a \equiv 5 \cdot 2 + 7 \cdot (-1)$, т. е. $a \equiv 3 \pmod{15}$.

Поэтому искомый остаток равен 3.

2. *Решение уравнений в целых числах.*

Обратимся к линейным уравнениям с двумя неизвестными, т. е. к уравнениям вида

$$ax + by = c. \tag{1}$$

Предположим, что a, b, c — целые числа, и поставим задачу — найти целочисленные решения уравнения (1), т. е. все пары целых чисел x, y, при которых уравнение (1) обращается в верное числовое равенство, или показать, что таких чисел нет.

Будем считать, что коэффициенты a, b, c уравнения (1) не имеют общего делителя, отличного от единицы (в противном случае разделим обе части уравнения на этот общий делитель).

Пусть d — наибольший общий делитель чисел a, b. Возможны два случая: $d = 1$, $d \neq 1$.

В первом случае уравнение (1) имеет целочисленные решения, во втором не имеет. Справедливы следующие утверждения.

1. Если коэффициенты a и b уравнения $ax + by = c$ являются взаимно простыми числами ($d = 1$), то это уравнение имеет по крайней мере одно целочисленное решение.

2. Если $d \neq 1$, то уравнение $ax + by = c$ не имеет целочисленных решений.

3. Если $d = 1$, то уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечное множество целочисленных решений, которые задаются формулами

$$x = \alpha + bt, \quad y = \beta - at, \tag{2}$$

где $(\alpha; \beta)$ — некоторое целочисленное решение уравнения $ax + by = c$, а t — произвольное целое число.

Ограничимся доказательством утверждений 2 и 3.

а) Докажем утверждение 2. Пусть уравнение (1) имеет целочисленное решение. Тогда существуют целые числа x и y, которые обращают уравнение (1) в верное числовое равенство.

Так как d — наибольший общий делитель чисел a и b, причем $d \neq 1$, то $a = md$, $b = nd$, где m и n — целые числа, не имеющие общих натуральных делителей, отличных от единицы (m и n — взаимно простые числа).

Тогда равенство (1) примет вид $dmx + dny = c$, или

$$d(mx + ny) = c. \tag{3}$$

По предположению числа a, b, c не имеют общего делителя, отличного от единицы. Но из равенства (3) следует, что c делится на d, где $d \neq 1$, т. е. a, b и c имеют общий делитель $d \neq 1$.

Полученное противоречие означает, что уравнение (1) при $d \neq 1$ не может иметь целочисленных решений.

б) Докажем утверждение 3, опираясь на утверждение 1. Пусть $(\alpha; \beta)$ — целочисленное решение уравнения (1), тогда является верным равенство

$$a\alpha + b\beta = c. \tag{4}$$

Если $(x; y)$ — произвольное целочисленное решение уравнения (1), то равенство (1) является верным. Вычитая почленно из равенства (1) равенство (4), получаем

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0,$$

откуда следует, что

$$x = \alpha + \frac{b(\beta - y)}{a}. \tag{5}$$

Число α — целое и, кроме того, a и b — взаимно простые числа. Поэтому число x, определяемое формулой (5), будет целым тогда и только тогда, когда $\beta - y$ делится на a. Введем обозначение

$$t = \frac{\beta - y}{a}. \tag{6}$$

тогда t — целое число, и равенство (5) примет вид

$$x = \alpha + bt,$$

а из (6) следует, что

$$y = \beta - at.$$

Таким образом, доказано, что если $(\alpha;\beta)$ — какое-либо целочисленное решение уравнения (1), то все решения этого уравнения задаются формулами (2), где $t \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Если $(x_1; y_1)$ — целочисленное решение уравнения $ax + by = 1$, то $(cx_1; cy_1)$ является целочисленным решением уравнения (1), так как из верного равенства $ax_1 + by_1 = 1$ следует верное равенство

$$a(cx_1) + b(cy_1) = c.$$

Это утверждение часто оказывается полезным при отыскании решения уравнения (1).

Пример 6. Доказать, что уравнение $32x + 56y = 17$ не имеет целочисленных решений.

Решение. Левая часть уравнения при любых целых x и y является четным числом, а правая — нечетным. Поэтому уравнение не может иметь целочисленных решений. К этому же выводу можно прийти, применяя утверждение 2.

Пример 7. Найти все целочисленные решения уравнения $7x + 11y = 4$.

Решение. Рассмотрим уравнение $7x + 11y = 1$. Оно имеет целочисленное решение $(-3; 2)$. Поэтому (см. замечание к утверждениям 1–3) исходное уравнение имеет целочисленное решение $(-12; 8)$, а все решения этого уравнения имеют вид (2), т. е. $x = -12 + 11t$, $y = 8 - 7t$, $t \in \mathbf{Z}$.

Пример 8. Найти все целочисленные решения уравнения $x^2 - y^2 = 7$.

Решение. Так как делителями правой части уравнения являются пары чисел $1, 7$ и -1, -7, то совокупность всех целочисленных решений уравнения совпадает с множеством всех целых решений следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = -7; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -7, \\ x + y = -1. \end{cases}$$

Решив эти системы, найдем все искомые решения: $(4; 3)$, $(4; -3)$, $(-4; -3)$, $(-4; 3)$.

Пример 9. Докажем, что уравнение $x^2 - y^2 = 2014$ не имеет целочисленных решений.

Решение. 1) Если числа x и y являются либо оба четными, либо оба нечетными, то левая часть уравнения $(x+y)(x-y)$ делится на 4, а правая не делится на 4. В этом случае целых решений нет.

2) Если одно из чисел четное, а другое нечетное, то левая часть уравнения — нечетное число. Так как 2014 — четное число, то и в этом случае целых решений нет.

Пример 10. Найти целочисленные решения уравнения $2x^2y^2 + x^2 = 14y^2 + 25$.

Решение. Выражая из уравнения x^2 через y^2, запишем его в виде $x^2 = 7 + \dfrac{18}{2y^2+1}$.

Если $y = 0$, то $x^2 = 25$, $x = \pm 5$. Если $y^2 = 1$, то $x^2 = 13$, а если $y^2 = 4$, то $x^2 = 9$, $x = \pm 3$. При других целых значениях y знаменатель дроби $\dfrac{18}{2y^2+1}$ больше числителя. Итак, уравнение имеет шесть целочисленных решений:

$(5; 0)$, $(-5; 0)$, $(3; 2)$, $(-3; 2)$, $(3; -2)$, $(-3; -2)$.

Пример 11. Найти все целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 17x^2 + 8xy + y^2 = 2, \\ x^2 + y^2 - 2x + 8y + 16 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем второе уравнение в виде: $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 1$.

Из этого уравнения следует, что $(x-1)^2 \leqslant 1$ или $|x-1| \leqslant 1$. Неравенству $|x-1| \leqslant 1$ удовлетворяют целые числа $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Если $x = 0$, то из второго уравнения находим $y = -4$. Пара чисел $(1; -4)$ не удовлетворяет первому уравнению системы.

Если $x = 1$, то $|y+4| = 1$, откуда находим $y_1 = -5$, $y_2 = -3$. Обе пары чисел $(1; -5)$ и $(1; -3)$ удовлетворяют первому уравнению системы.

Наконец, если $x = 2$, то $y = -4$. Пара чисел $(2; -4)$ не удовлетворяет первому уравнению системы.

Ответ. $(1; -5)$, $(1; -3)$.

Пример 12. Найти все пары целых чисел x, y, при которых является верным равенство

$$x^3 - 3x^2 - xy - 8x - 2y + 27 = 0.$$

Решение. Выразив y через x, получим:

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 - 8x + 27}{x+2}.$$

Выделим целую часть, преобразовав дробь:

$$y = \frac{x^3 + 2x^2 - 5(x^2 + 2x) + 2(x + 2) + 23}{x + 2} = x^2 - 5x + 2 + \frac{23}{x + 2}\,.$$

Целые значения y примет при целых x тогда и только тогда, когда $\frac{23}{x+2}$ примет целые значения, т. е. в следующих случаях: $x+2 = 1$, $x+2 = -1$, $x+2 = 23$, $x+2 = -23$. Отсюда находим $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 21$, $x_4 = -25$, а затем находим соответствующие значения y.

Ответ. $(-1; 31)$, $(-3; 3)$, $(21; 339)$, $(-25; 751)$.

Пример 13. Найти все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению

$$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = 0. \tag{1}$$

Решение. Запишем уравнение (1) в виде

$$x^2(9y^2 + 6y + 1) + x(9y^2 + 18y + 5) + 2y^2 + 7y + 6 = 0. \tag{2}$$

Решая уравнение (2) как квадратное относительно x, получаем

$$x = \frac{-(9y^2+18y+5) \pm \sqrt{(9y^2+18y+5)^2 - 4(9y^2+6y+1)(2y^2+7y+6)}}{2(3y+1)^2}$$

или

$$x = \frac{-(9y^2+18y+5) \pm \sqrt{9y^4+24y^3+22y^2+8y+1}}{2(3y+1)^2}\,. \tag{3}$$

Так как

$$9y^4 + 24y^3 + 22y^2 + 8y + 1 = (3y^2 + 4y + 1)^2,$$

то равенство (3) можно записать в виде

$$x = \frac{-(9y^2 + 18y + 5) \pm (3y^2 + 4y + 1)}{2(3y + 1)^2}\,. \tag{4}$$

Из равенства (4) следует, что либо

$$x = -\frac{6y^2 + 11y + 3}{(3y + 1)^2} = -\frac{(3y + 1)(2y + 3)}{(3y + 1)^2} = -\frac{2y + 3}{3y + 1}\,, \tag{5}$$

либо

$$x = -\frac{3y^2 + 7y + 2}{(3y + 1)^2} = -\frac{(3y + 1)(y + 2)}{(3y + 1)^2} = -\frac{y + 2}{3y + 1}\,. \tag{6}$$

Задача сводится к нахождению всех целых y, при которых правые части равенств (5) и (6) являются целыми числами.

1) Если $y = 0$, то из (5) и (6) находим $x_1 = -3$, $x_2 = -2$.
2) Если $y \in \mathbf{N}$ и $y > 2$, то из (5) и (6) следует, что x — нецелое ($2y + 3 < 3y + 1$, $y + 2 < 3y + 1$).

3) Если $y = 1$, то значения x, определяемые формулами (5) и (6), не являются целыми.

4) Если $y = 2$, то из (5) следует, что $x = -1$, а из (6) — что x — нецелое.

5) Если $y \in \mathbf{Z}$ и $y < 0$, то, полагая $z = -y$, запишем формулы (5) и (6) в виде

$$x = -\frac{2z-3}{3z-1}, \tag{7}$$

$$x = -\frac{z-2}{3z-1}, \tag{8}$$

где $z \in \mathbf{N}$. При $z \neq 2$ дроби $\frac{2z-3}{3z-1}$ и $\frac{z-2}{3z-1}$ не являются целыми числами, а при $z = 2$ из (8) находим $x = 0$.

Ответ. $(0; -2)$, $(-2; 0)$, $(-3; 0)$, $(-1; 2)$.

Задачи

1. Доказать, что:
1) число $16^{20} + 2^{76}$ делится на 17;
2) число $16^3 + 31^4 - 2$ делится на 15;
3) число $10^{10} + 28^3 - 2$ делится на 9;
4) число $36^3 + 19^3 - 16$ делится на 17.

2. Найти остаток от деления числа a на m, если:
1) $a = 26^{36}$, $m = 7$;
2) $a = 2007^{2009}$, $m = 13$;
3) $a = 24^{25} \cdot 36^{11} \cdot 49^{15}$, $m = 11$.

3. Доказать, что число a делится на m, если:
1) $a = 96^{19} + 32^{13} - 8 \cdot 73^{16}$, $m = 10$;
2) $a = (17^{15} + 15^{17})^{1517}$, $m = 32$.

4. Найти все целочисленные решения уравнения:
1) $x^2 + 2x = y^2 + 6$;
2) $x^2 - 8 = y^2 + 4y$;
3) $x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0$.

5. Доказать, что уравнение не имеет целочисленных решений:
1) $x^2 - y^2 = 2010$;
2) $21x^2 - 7y^2 = 9$.

6. Найти все целочисленные решения уравнения:
1) $7x + 15y = 1$;
2) $4x - 3y = 11$.

7. Найти все целочисленные решения уравнения:
1) $3xy + 10x - 13y - 35 = 0$;
2) $3xy + 19x + 10y + 55 = 0$.

8. Найти все целочисленные решения уравнения:
1) $9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0$;
2) $15x^2y^2 - 8x^2y + 28y^2x + x^2 + 5y^2 - 58xy + 8x - 24y + 16 = 0$.

Ответы

2. 1) 1; 2) 5; 3) 8.
4. 1) $(3;3)$, $(3;-3)$, $(-5;-3)$, $(-5;3)$;
2) $(2;-2)$, $(-2;-2)$;
3) $(4;27)$, $(2;-17)$, $(22;423)$, $(-16;307)$.
6. 1) $x = -6+15t$, $y = 3-7t$, $t \in \mathbf{Z}$;
2) $x = 2-3t$, $y = -1-4t$, $t \in \mathbf{Z}$.
7. 1) $(6;-5)$, $(4;5)$, $(-4;-3)$;
2) $(-5;-8)$, $(-3;2)$, $(5;-6)$.
8. 1) $(0;2)$, $(0;-3)$, $(-2;0)$, $(2;1)$;
2) $(-2;-2)$, $(-4;0)$, $(0;4)$.

§ 46. Элементы комбинаторики

Справочные сведения

При решении многих практических задач часто приходится имеющиеся предметы (элементы) соединять в разные наборы (комбинации). Задачи, в которых рассматриваются такие соединения и определяется число различных соединений, называют комбинаторными, а раздел математики, в котором изучаются такие задачи, называют комбинаторикой.

1. *Правило произведения.*

Пусть имеется множество X, состоящее из m различных элементов одного вида, и множество Y, состоящее из n различных элементов другого вида. Тогда число различных пар, состоящих из одного элемента множества X и одного элемента множества Y, равно mn.

Рассмотрим основные виды соединений.

2. *Перестановки.*

Перестановками из n разных элементов называются соединения, которые состоят из n элементов и отличаются друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n = n!\,. \tag{1}$$

3. *Размещения.*

Размещениями из m элементов по n элементов ($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из m элементов по n элементов:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1)). \tag{2}$$

Если $m = n$, то $A_n^n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-1)n = n!$, т. е. $A_n^n = P_n$.

4. *Сочетания.*

Сочетаниями из m элементов по n элементов ($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных n разных элементов, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

Число сочетаний из m элементов по n элементов:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} \tag{3}$$

или $C_m^n P_n = A_m^n$,

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}. \tag{4}$$

Примеры с решениями

Пример 1. Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя цифры 0, 2, 4, 6, 8?

Решение. В качестве первой цифры можно выбрать любую из этих пяти цифр, кроме цифры 0 (таких цифр 4), а в качестве второй можно выбрать любую из этих пяти цифр.

По правилу произведения искомое количество чисел равно $4 \cdot 5 = 20$.

Пример 2. Сколькими способами можно разместить 6 человек за столом, на котором поставлены 6 приборов?

Решение. По формуле (1) находим $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Пример 3. Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы A, B, C, D, E, F?

Решение. По формуле (2) находим $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Пример 4. Сколько существует способов выбора трех карт из колоды в 36 карт?

Решение. По формуле (4) находим $C_{36}^3 = \dfrac{36!}{(36-3)!3!} = \dfrac{34 \cdot 35 \cdot 36}{6} = 7\,140$.

Пример 5. Найти количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 700$, $1 \leqslant b \leqslant 700$, сумма $a+b$ делится на 7, а произведение ab делится на 5. (При $a \neq b$ пары $(a; b)$ и $(b; a)$ считаются различными.)

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть a делится на 5 (на отрезке $[1; 700]$ имеется $700 : 5 = 140$ таких значений a). Для каждого такого значения a подходят те и только те значения b, при которых сумма остатков от деления a на 7 и b на 7 равна 0 или 7, т. е. подходит

одно из каждых семи последовательных значений b. Итого, для каждого значения а получаем по 100 вариантов.

2) Пусть a не делится на 5 (на отрезке $[1; 700]$ имеется $700 - 140 = 560$ таких значений a). Для каждого такого a подходят те и только те значения b, кратные 5, при которых сумма остатков от деления a на 7 и b на 7 равна 0 или 7, т. е. подходит одно из каждых $5 \cdot 7 = 35$ последовательных значений b. Итого, для каждого значения a получаем по 20 вариантов.

Суммируем количество пар: $100 \cdot 140 + 560 \cdot 20 = 25\,200$.

Пример 6. На клетчатой доске размера 22×25 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 7 и 4 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Пусть сторона длины 25 — горизонтальная, сторона длины 22 — вертикальная. Дополним каждую нужную тройку клеток четвертой клеткой так, чтобы центры этих четырех клеток образовывали прямоугольник 4×7. Достаточно посчитать количество k таких четверок и результат умножить на 4.

Пусть катет длины 7 направлен по вертикали. Тогда положение прямоугольника однозначно определяется его левой нижней вершиной, которая может быть расположена в любой из $22 - 7 = 15$ нижних строк доски и в любом из $25 - 4 = 21$ левых столбцов доски. Итого $15 \cdot 21 = 315$ вариантов.

Если катет длины 7 направлен по горизонтали, то аналогично находим количество способов: $(25 - 7)(22 - 4) = 324$.

Итак, $k = 324 + 315 = 639$; в итоге получаем $4k = 2\,556$.

Задачи

1. Сколькими способами можно поставить рядом на полке четыре различные книги?
2. Сколько разных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 6, 7 и 8?
3. Сколько пятизначных чисел, не содержащих одинаковые цифры, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы:
   1) последней была цифра 5;
   2) первой была цифра 2, а второй — цифра 3?
4. Сколько различных слов можно составить, переставляя местами буквы в слове «треугольник» (считая и само это слово)?
5. В классе изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 6 разных предметов?
6. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать две карты?
7. На окружности отмечено 12 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

8. На плоскости имеется 15 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько различных отрезков можно построить, соединяя эти точки попарно?

Ответы

1. 24. **2.** 27. **3.** 1) 24; 2) 6.
4. P_{11}. **5.** 60480.
6. 630. **7.** 220. **8.** 105.

§ 47. Разные задачи по алгебре

Примеры с решениями

Пример 1. Найти все значения a, при которых уравнение $\sin x = (4a-2)^2$ имеет корни, а числа $\dfrac{1-4a}{27a^4}$ являются целыми.

Решение. Уравнение $\sin x = (4a-2)^2$ имеет корни тогда и только тогда, когда $(4a-2)^2 \leqslant 1$, т. е. $\left|a-\dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$, откуда $\dfrac{1}{4} \leqslant a \leqslant \dfrac{3}{4}$. Задача сводится к нахождению всех значений a, при которых функция $f(a) = \dfrac{1-4a}{27a^4}$ принимает целые значения на отрезке $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$.

Уравнение $f'(a) = \dfrac{1}{27}(-4a^{-5} + 12a^{-4}) = \dfrac{4}{27}a^{-5}(3a-1) = 0$ имеет на отрезке $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$ единственный корень $a = \dfrac{1}{3}$, причем $f'(a) < 0$ при $a < \dfrac{1}{3}$ и $f'(a) > 0$ при $a > \dfrac{1}{3}$. Следовательно, функция $f(a)$ убывает при $a \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right)$ и возрастает при $a \in \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{4}\right]$. Так как $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 0$ и $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -1$ — целые числа, а $-1 < f\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{2^9}{3^7} < 0$, то искомое множество значений a состоит из чисел $\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{1}{3}$.

Ответ. $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{3}$.

Пример 2. Доказать, что многочлен

$$P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$$

принимает положительные значения при всех $x \in \mathbf{R}$.

Решение. Докажем, что неравенство $P(x) > 0$ является верным на каждом из промежутков $x \leqslant 0$, $0 < x < 1$, $x \geqslant 1$.

1) Пусть $x \leqslant 0$, тогда $x^8 \geqslant 0$, $x^2 \geqslant 0$, $-x^5 \geqslant 0$, $-x \geqslant 0$ и поэтому $P(x) \geqslant 1$ при $x \leqslant 0$.

2) Пусть $0 < x < 1$. Запишем многочлен $P(x)$ в виде

$$P(x) = x^8 + (x^2 - x^5) + (1 - x) = x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x).$$

Так как $x^8 > 0$, $x^2 > 0$, $1 - x^3 > 0$, $1 - x > 0$ при $0 < x < 1$, то и $P(x) > 0$ при $0 < x < 1$.

3) Пусть $x \geqslant 1$. Запишем многочлен $P(x)$ в виде

$$P(x) = x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1.$$

Так как $x^5 \geqslant 1$, $x^3 - 1 \geqslant 0$, $x - 1 \geqslant 0$ при $x \geqslant 1$, то и $P(x) > 0$ при $x \geqslant 1$.

Итак, $P(x) > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$.

Пример 3. Найти все значения a, при которых существует единственная тройка чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющая уравнениям

$$x + y + z = x^2 + 4y^2, \qquad (1)$$
$$x + 2y + 3z = a. \qquad (2)$$

Решение. Выразим z из уравнения (2):

$$z = \frac{a}{3} - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}. \qquad (3)$$

Исключив z из уравнений (1) и (3), находим

$$x^2 - \frac{2}{3}x + 4y^2 - \frac{y}{3} = \frac{a}{3}$$

или

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2y - \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{a}{3} + \frac{17}{144}. \qquad (4)$$

Обозначим правую часть уравнения (4) через b. Если $b < 0$, то уравнение (4) не имеет действительных решений, а если $b > 0$, то каждому значению y соответствуют два различных значения x.

Пусть $b = 0$, т. е. $\frac{a}{3} + \frac{17}{144} = 0$. Тогда уравнение (4) имеет единственное решение, а из уравнения (3) определяется единственное значение x.

Ответ. $a = -\frac{17}{48}$.

Пример 4. Найти наименьшее из тех значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1. \qquad (5)$$

Решение. Рассматривая уравнение (5) как квадратное относительно z, найдем его дискриминант D. Имеем

$$D = (y + x)^2 - 4(2y^2 + x^2 + xy - 1) = 4 - 3x^2 - 7y^2 - 2xy.$$

Значения x, y, z, удовлетворяющие уравнению (5), могут существовать в том и только в том случае, когда $D \geqslant 0$, т. е.

$$3x^2 + 7y^2 + 2xy - 4 \leqslant 0. \qquad (6)$$

Рассматривая неравенство (6) как квадратное относительно y, заключаем, что оно имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант D_1 соответствующего квадратного уравнения неотрицателен, т. е.

$$D_1 = (2x)^2 - 28(3x^2 - 4) \geqslant 0 \quad \text{или} \quad 5x^2 \leqslant 7,$$

откуда $|x| \leqslant \sqrt{\frac{7}{5}}$. Следовательно, наименьшее значение x равно $-\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Ответ. $-\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Пример 5. Числа x, y, z удовлетворяют уравнению

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 2. \qquad (7)$$

Найти наибольшее значение выражения

$$t = 2x + y - z. \qquad (8)$$

Решение. Исключая z из системы (7), (8), получаем

$$x^2 + 3y^2 + 4x^2 + y^2 + t^2 + 4xy - 4xt - 2yt = 2$$

или

$$4y^2 + 2(2x - t)y + 5x^2 + t^2 - 2 - 4xt = 0. \qquad (9)$$

Уравнение (9) является квадратным относительно y и имеет действительные решения тогда и только тогда, когда его дискриминант D неотрицателен, т. е.

$$D = 4(2x - t)^2 - 16(5x^2 + t^2 - 4xt - 2) \geqslant 0$$

или

$$16x^2 - 12xt + 3t^2 - 8 \leqslant 0. \qquad (10)$$

Неравенство (10) является квадратным относительно x и имеет решения в том и только в том случае, когда дискриминант D_1 соответствующего квадратного уравнения неотрицателен, т. е.

$$D_1 = (12t)^2 - 64(3t^2 - 8) \geqslant 0 \quad \text{или} \quad 3t^2 \leqslant 32,$$

откуда $|t| \leqslant \sqrt{\frac{32}{5}}$. Следовательно, наибольшее значение, которое может принимать заданное выражение, равно $\sqrt{\frac{32}{3}}$.

Ответ. $\sqrt{\frac{32}{3}}$.

Задачи

1. Найти все значения a, при которых уравнение $\cos x = (6a-2)^2$ имеет корни, а числа $\dfrac{1-6a}{32a^3}$ являются целыми.

2. Найти все значения a, при которых наименьшее значение функции $y = x^2 + ax + a - 5$ на отрезке $[0; 2]$ равно -4.

3. Найти множество значений функции $f(x)$, если:

а) $f(x) = 3\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x$; б) $f(x) = \sin^{10} x + \cos^{10} x$;

в) $f(x) = \dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$; г) $f(x) = \dfrac{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}{2\cos^4 x + \sin^2 x}$.

4. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_4(1+6x) + \left|\log_{\frac{1}{8}}(1+7x)\right|}.$$

5. Представить функцию $y = -26x^3 + 24x^2 - 6x$ в виде суммы кубов двух линейных функций.

6. Найти значения a, при которых произведение xy принимает наибольшее значение, если x, y, a удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = a - 1, \\ x^2 + y^2 = 5a^2 - 3a + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

7. Найти все значения параметра a, при которых существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая уравнению

$$ax^2 + (3a+2)y^2 + 4axy - 2ax + (4-6a)y + 2 = 0.$$

8. Найти все значения a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x, y, удовлетворяющая уравнению

$$3x^2 + 11xy + 10y^2 = 7$$

и неравенствам

$$x + y > 0, \qquad 4a^2x - 3ay < 0.$$

9. Найти наименьшее из значений, которые принимает выражение $x + 5y$, если x, y положительны и удовлетворяют условию

$$x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leqslant 0.$$

10. Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x + 3y$, если пара чисел x, y удовлетворяет неравенству

$$x^2 + xy + 4y^2 \leqslant 3.$$

11. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x + 2y < \dfrac{15}{2}, \\ 2x^2 + 2y^2 + 24x + 167 < 28y. \end{cases}$$

12. Числа x, y, z таковы, что $2x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x - 2y + z$?

13. Найти наибольшее из значений z, для которых существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4.$$

14. Найти такие решения $(x; y; z; u)$ системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + u^2 = 9, \\ xu + yz \geqslant 6, \end{cases}$$

для которых сумма $x + z$ принимает наибольшее значение.

15. Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y.$$

16. Пусть D — множество точек координатной плоскости Oxy, координаты $(x; y)$ которых образуют решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - 3y^2 = \dfrac{10p - p^2}{4p^2 + 9}, \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = \dfrac{10 - p}{4p^2 + 9} \end{cases}$$

такие, что $x \leqslant 0$, $y > 0$.

Найти наибольшее и наименьшее значения длины отрезка, соединяющего начало координат с точкой множества D.

17. Найти все значения a, при которых уравнения

$$2x^4 - 3x^3 - 8ax^2 + 33x + 22 = 0 \quad \text{и} \quad 2x^4 + ax^3 - 21x^2 - 33x - 11 = 0$$

имеют общие корни. Найти эти корни.

Ответы

1. $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$. **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** а) $[4 - \sqrt{5}; 4 + \sqrt{5}]$; б) $\left[\frac{1}{16}; 1\right]$; в) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; г) $\left[\frac{3}{2}; \frac{15}{7}\right]$.

4. $-\frac{1}{7} < x \leqslant -\frac{1}{8}$, $x \geqslant 0$. **5.** $y = (x - 1)^3 + (1 - 3x)^3$. **6.** $a = 0$. **7.** $0 < a < 2$.

8. $-\frac{5}{11} < a < -\frac{1}{3}$. **9.** $7\sqrt{3}$. **10.** $2\sqrt{2}$. **11.** $(-7; 7)$, $(-6; 6)$. **12.** $-\frac{\sqrt{66}}{2}$.

13. $\sqrt{5}$. **14.** $\left(\frac{4}{\sqrt{13}}; \frac{6}{\sqrt{13}}; \frac{9}{\sqrt{13}}; \frac{6}{\sqrt{13}};\right)$. **15.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

16. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{7}}$. **17.** $a = \frac{3}{8}$, $x = -2$; $a = 3$, $x_1 = -\sqrt{11}$, $x_2 = \sqrt{11}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$; $a = \frac{297}{64}$, $x = -4$.

Варианты олимпиад и письменных вступительных экзаменов по математике в МФТИ

Вариант 1 (1998 г.)

1. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{|\cos x|} + \frac{2\cos x}{\cos 3x} = -1.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{3x^2 - 8x - 3} > \frac{1-2x}{3}.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD. В треугольник ACD вписана окружность, а около треугольника BCD описана окружность. Найти расстояние между центрами этих окружностей, если $BC = 3$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{5}{2}$.

4. Фигура M на плоскости (x, y) ограничена графиками функций $y = 9e^{-ax}$ и $y = 15 - 4e^{ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y = -18x + 9$. Найти a и площадь фигуры M.

5. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AB, A_1C_1, BB_1. Построить сечение призмы, найти площадь сечения и вычислить угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 2, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

6. Найти все пары целых чисел x, y, при которых является верным равенство $x^3 - xy - 7x + 2y + 23 = 0$.

Вариант 2 (1998 г.)

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2\left(x^2y + \dfrac{xy^2}{2}\right) - \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y}\right) = 3, \\ \log_{\frac{1}{5}}\left|\dfrac{xy}{6}\right| = 0. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{7-\cos 4x}{2}} > -2\sin x.$$

3. Сторона ромба $ABCD$ равна 4. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ACD и ABD, равно 3. Найти радиусы этих окружностей.

4. Найти все значения a, при которых уравнение $\sin x = (2a-2)^2$ имеет корни, а числа $\dfrac{16(1-2a)}{27a^4}$ являются целыми.

5. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию, расстояние от вершины S до прямой AB равно $4\sqrt{2}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD = BC$), описанная около окружности и такая, что $CD = 2$, $\angle ADC = \dfrac{2\pi}{3}$.

Найти расстояние от точки C до плоскости SAB.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD, а вершина принадлежит грани SAB. Найти объем конуса.

6. График функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, $c > 0$, пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M, проходит через точку A. Найти a, b, c, если площадь треугольника AMN равна 1.

Вариант 3 (1999 г.)

1. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 3y - 1 = 0, \\ y^2 + 2x + 9y + 14 = 0. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x + \sin 3x}{\cos 3x + \sin x} = 1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_4 \frac{x^2 + |x+1| - 13}{x+4} > 0.$$

4. Окружность с центром на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ касается прямой AB и проходит через точки C и D. Найти стороны параллелограмма, если его площадь $S = 4$, а $\angle BAC = \arccos\dfrac{4}{5}$.

5. Найти все пары целых чисел x, y, для которых верны неравенства $3y - 2x < 45$, $x + y > 24$, $3x - y < 3$.

6. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 2 : 1$, точка F — центр грани ABC. Найти угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящий через точки A, B, E и F.

Вариант 4 (1999 г.)

1. Найти решения (x, y) системы уравнений

$$\begin{cases} \log_3(10y - x - 2) - \log_9(x - 2y)^2 = 1, \\ \log_3\left(1 - \dfrac{1}{y} - 4x\right) - \log_9 x^2 = 1, \end{cases}$$

которые удовлетворяют неравенству $x - 2y < 0$.

2. Решить уравнение
$2+\sqrt{3}\sin x+|\cos x|=4\cos^2 x.$

3. Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{3x^3-27x^2+60x}}{x-5}\geqslant 3x-12.$$

4. Медиана AE и биссектриса CD равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) пересекаются в точке M. Прямая, проходящая через M параллельно AC, пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Найти EQ и радиус окружности, описанной около треугольника PQB, если $AB=4$, а $\angle CAB=\arccos\frac{1}{8}$.

5. Дана система неравенств
$$\begin{cases} |x|+|y|\leqslant 4,\\ x^2+y^2\geqslant -8(x+y+2),\\ (7y-x-4)(3y-5x+12)\leqslant 0. \end{cases}$$
Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;
б) первым двум неравенствам системы;
в) всем трем неравенствам системы.

6. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, длина бокового ребра равна $\sqrt{10}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $SE=5\cdot AE$, $DF=2\cdot SF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная CD. Найти: 1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α; 2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α; 3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

Вариант 5 (2000 г.)

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{3y}{4x}=2,\\[2mm] \dfrac{8y}{x^2}-\dfrac{6x}{y}=5. \end{cases}$$

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}=8\cos 4x+\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}.$$

3. Решить неравенство
$$\frac{1}{|\log_{27}x^3|-2}\leqslant\frac{1}{|\log_3(x/3)|-1}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найти радиус окружности, если $\angle ABC=2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}/4)$, $CD=8$.

5. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\log_{x-1}(x-a)=\frac{1}{2}$$
имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, высота пирамиды $DO = \sqrt{33}$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

Вариант 6 (2000 г.)

1. Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{-x^2-2x+3}}{|x^2+2x-3|-|x^2+6x+5|} \leqslant 0.$$

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin x}{\cos 4x\cos 5x} + \frac{\sin x}{\cos 5x\cos 6x} = \sin 6x - \operatorname{tg} 4x.$$

3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2\log_2^2(x+y) = \log_{\frac{1}{2}}(x+y)\log_{\frac{1}{2}}(x-2y) + \log_2^2(x-2y), \\ x^2 - xy - 2y^2 = 9. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке E, а другая касается C_1 и C_2 и пересекает l в точке F. Найти радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AE = 1$, $EF = 3/\sqrt{2}$.

5. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$ имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 4, угол между плоскостью основания и боковой гранью равен $\arccos\left(\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\right)$. Точки K, M, N — середины отрезков AB, DK, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $5ME = CE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку CM. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$.

Вариант 7 (2001 г.)

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{x+y+1} + 7\cdot 2^{y-5} = 4, \\ \sqrt{2x+y^2} = x+y. \end{cases}$$

2. Решить уравнение
$$\frac{\cos^3 x\sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x\cos 3x}{\cos 2x} = 3\sin 2x\cos x.$$

3. Решить неравенство
$$\frac{1}{2-\sqrt{x^2-3x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}.$$

4. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что точка C лежит на отрезке AD. Найти AC, BC и радиус окружности, если $BD = 5$, $\angle BAC = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\angle BDC = \arccos\sqrt{\dfrac{5}{21}}$.

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $2AB = BS$ и точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO = 6$. Точки A_1, B_1, C_2 — середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найти:

1) угол между прямыми BA_1 и AC_1;
2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;
3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и прямых AC_1, BA_1 и CB_1.

Вариант 8 (2001 г.)

1. Решить уравнение
$\sqrt{2x^2 - 8x + 49} - \sqrt{x^2 - 4x + 21} = 4.$

2. Решить уравнение
$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$

3. Решить неравенство
$\log_{\left(\frac{13}{2} - x\right)} \left(\frac{99}{4} - x - x^2\right) + \log_{\sqrt{(99/4) - x - x^2}} \left(\frac{13}{2} - x\right) \leqslant 3.$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 6$ и $AC = 2$, проведены биссектриса AA_1, высота BB_1 и высота CC_1. Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых: 1) AB, AA_1 и BB_1; 2) AA_1, BB_1 и CC_1.

5. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 3 \leqslant 0, \\ y^2 + 6y + 18x \leqslant 0. \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R. При каком соотношении между r и R это возможно? Найти радиус наибольшего из шаров, касающихся трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом.

Вариант 9 (2001 г.)

1. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}.$

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin 4x - \sin 3x - \sin 2x + \sin x}{\cos 4x - \cos 3x + \cos 2x - \cos x} = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2} \sin x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{3}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = 2\sqrt{13}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2. Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_2 и B_2 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2. Через точку B_2 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2. Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 — в точке B. Найти A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_2.

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковая грань образует с основанием угол, равный $\operatorname{arctg} 2$. Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} = \frac{CK}{KS} = 2$. Найти: 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK; 2) расстояние от точки D до плоскости EFK; 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK.

5. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_4(x + \sqrt{4-a}) + \log_{1/4}(a + 2 - x) = \log_{16} 9$$

имеет решение.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6x - 5y + 9z - 2y^2 = 0, \\ x - 2y + 4z - 2xy = 0, \\ 4x - y + z - 2yz = 0. \end{cases}$$

Вариант 10 (2002 г.)

1. Решить уравнение

$$\frac{3 - 4\cos 2x - 8\sin^4 x}{\sin 2x + \cos 2x} = \frac{1}{\sin 2x}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{(x+1)^5}\left(\frac{x-6}{x^2+2x-3}\right) + \frac{1}{5} \leqslant 0.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-3y} - \sqrt{5x-y} = 2, \\ 15\sqrt{5x-y} + 22x + 4y = 15. \end{cases}$$

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) окружность касается основания AD, боковых сторон AB и CD и проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD. Найти радиус окружности, если $AD : BC = 5 : 3$, а площадь трапеции $S = 9$.

5. Дано число $a = 2^{2002} + 7^{2002}$. Найти последнюю цифру числа a и остаток от деления числа a на 11.

6. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SC и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность радиуса $\sqrt{35}/7$. Найти: 1) в каком отношении плоскость α делит ребра пирамиды; 2) отношение объемов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду; 3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α.

Вариант 11 (2002 г.)

1. Решить уравнение

$$\operatorname{arcctg}\frac{1-x}{2x} + \arccos 2x = \frac{\pi}{2}.$$

2. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} y + \dfrac{x^3}{y^3} = \dfrac{y^3}{x} + \dfrac{x^2}{y}, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{y^3}{x^3} + \dfrac{10}{x^2} = 0. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{500 + 30x - 2x^2}{2x + 5}} > 10 - |x|.$$

4. Один из углов треугольника равен $\pi/4$, радиус вписанной в него окружности равен $2(2 - \sqrt{2})$, а радиус описанной вокруг него окружности равен 3. Найти площадь этого треугольника.

5. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \log_3(2 - x - y) + 2 = \log_3(17 - 8x - 10y), \\ (x - a^2) + x = y + a + 6 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. Расстояние от центра O шара радиуса $6\sqrt{2}$, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, до боковой грани равно 3. Найти: 1) высоту пирамиды; 2) расстояние от точки O до бокового ребра пирамиды; 3) радиус вписанного в пирамиду шара.

Вариант 12 (2002 г.)

1. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 - \frac{\cos 3x}{\cos 2x}.$$

2. Решить неравенство

$$2\log_{2x-8}(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) < 1.$$

3. Окружность с центром на стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) проходит через точку A, пересекает отрезок AC в точке F, касается отрезка BC в точке G и пересекает отрезок AB в точке E, причем $GC/BG = \sqrt{3} - 1$, $FC = a$. Найти радиус окружности.

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равен $4\sqrt{2}$, угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$. Точка M — середина ребра SD, точка K — середина ребра AD. Найти: 1) объем пирамиды $CMSK$; 2) угол между прямыми CM и SK; 3) расстояние между прямыми CM и SK.

5. Найти все значения a, при которых уравнение

$$(a - 6 + |x - 1|)(a - x^2 + 2x) = 0$$

имеет: 1) ровно три корня, 2) ровно два корня.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 - y^3 - 2z^3 + xyz + 5 = 0, \\ y^3 + 2z^3 - x^3 - 2xyz - 2 = 0, \\ x^3 - y^3 - z^3 + xyz + 4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 13 (2003 г.)

1. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ ($BC \| CD$) проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $BE = 26$, $DE = 9\sqrt{13}$.
2. Решить уравнение $\cos x + |\sin x| + \cos 2x = \sin 4x$.
3. Решить неравенство $\sqrt{3\ln^2(x-2)^2 + \ln^2 x} > \ln(x-2)^2 + \ln x$.
4. Дана система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4|y|, \\ |x| + |y| \geqslant 2, \\ y^2 - x^2 + 16 - 8y \geqslant 0. \end{cases}$$
Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют
а) первому неравенству системы;
б) первым двум неравенствам системы;
в) всем трем неравенствам системы.
5. Найти все действительные решения системы уравнений
$$\begin{cases} 3x - 1 = y/x + 2\sqrt{x+y}, \\ \sqrt{y + \sqrt{x+y}} = y - 3x - 6. \end{cases}$$
6. Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра DA, DB и DC, а ее центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 2, двугранный угол между гранями ABC и ABD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, ребро $AB = 20$. Найти объем пирамиды $ABCD$ и радиус описанной вокруг $ABCD$ сферы.

Вариант 14 (2003 г.)

1. Решить уравнение $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} \cdot (2\cos^2 x - \sin^2 x \cos 2x - 1) = 1$.
2. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8} - 4} < \dfrac{1}{2|x-5| = 5}$.
3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{\log 3(2 - 3x - 4y) - 1}{\log_3(x - 2y - 4)} = \dfrac{\log_5(2x - y - 5)}{\log_5(1 - 2x - 3y)}, \\ 2y^2 + xy + 2x = x^2 + y + 1. \end{cases}$$
4. В трапеции $ABCD$ с большим основанием BC и площадью, равной $12\sqrt{3}$, прямые BC и AD касаются окружности диаметра $2\sqrt{3}$ в точках B и D соответственно. Боковые стороны трапеции AB и CD пересекают окружность в точках M и N соответственно. Длина MN равна 3. Найти величину угла MDN и длину основания BC.
5. Найти все значения a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} 2|x| + 3|y| + |3x + 2y| = 11, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$
имеет ровно два действительных решения.
6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся
а) ребер CB, CC_1, CD и плоскости B_1AD_1;
б) ребер CB, CC_1, CD прямой AD_1.

Вариант 15 (2003 г.)

1. Решить уравнение $\dfrac{\cos 3x \sin 5x + |\cos 5x \sin 3x|}{\cos 2x} = 2\sin 2x$.

2. Решить неравенство $\sqrt{9 - 2\sqrt{19 + 81x^3}} < 3 + 3x$.

3. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = 6$, а радиус вписанной окружности равен $3/2$. На медиане CD выбрана точка E так, что $CE : CD = 1 : 5$. Через точку E проведена прямая l, параллельная BC. Найти расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до прямой l.

4. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, $AC = 6$. Высота призмы равна $\sqrt{6}$. На сторонах AC, AB и A_1C_1 выбраны соответственно точки D, E и D_1 так, что $AD : AC = 1 : 4$, $AE = BE$, $C_1D_1 = 1 : 3$, и через эти точки проведена плоскость Π.
Найти:
1) площадь сечения призмы плоскостью Π;
2) угол между плоскостью Π и плоскостью ABC;
3) расстояние от точек A_1 и A до плоскости Π.

5. Найти все значения a, при которых уравнение $ax^2 + (2a - 5)x + a - 6 = 0$ имеет на отрезке $[0, 2]$ единственный корень.

6. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 8zx^2 - 2xy^2 + 4yz^2 = 6xyz, \\ 4yx^2 + 2zy^2 - 8xz^2 = 6xyz, \\ 2xy + 4xz - 2yz = 3. \end{cases}$$

Вариант 16 (2004 г.)

1. Найти все действительные решения системы уравнений
$$\begin{cases} y^7 + y^6 - 6x^2 = 0, \\ y^5 + \dfrac{x^3}{y^3} = x^2 + xy^2. \end{cases}$$

2. Решить уравнение $\cos 3x + \cos 2x = 3|\cos x| - \cos 4x$.

3. Решить неравенство
$$\frac{\log_{x^2} 4}{\sqrt{\dfrac{1}{6} + \log_{x^6}(1 - x) - \sqrt{\dfrac{1}{2}}}} \geqslant \frac{\sqrt{6}}{\log_2(1 - x) - \log_4 x^4}.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ прямые l_1 и l_2 являются биссектрисами углов A и C соответственно, а прямые m_1 и m_2 — биссектрисы углов B и D соответственно. Расстояние между l_1 и l_2 в $\sqrt{3}$ раз больше расстояния между m_1 и m_2. Найти угол BAD и радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AC = 4$, $BD = \sqrt{22}$.

5. Найти все пары целых чисел, при которых является верным равенство $-3xy - 10x + 13y + 35 = 0$.

6. В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна $8/3$, точка E — середина AB, а F — точка пересечения медиан грани BCD, причем $EF = 6$. Сфера радиуса 5 касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найти угол между гранями ABD и BCD, площадь грани BCD и объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 17 (2004 г.)

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases}(x-4)(x+1)=y(y+5),\\ \log_{x-2}(2+y)=\dfrac{x-2}{y^2}.\end{cases}$$

2. Решить уравнение $\cos x\sqrt{1+\sin x-2\cos x}=\cos x-\sin x$.

3. Какая наименьшая площадь может быть у прямоугольного треугольника ABC, в котором окружность радиуса R с центром на катете AB касается гипотенузы AC и проходит через точку B?

4. Решить неравенство $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{5}{6-3\sqrt{4+3x-x^2}}>\dfrac{1}{1+|x-2|}$.

5. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств
$$\begin{cases}x^2-x+a\leqslant 0,\\ x^2+2x-6a\leqslant 0\end{cases}$$
имеет единственное решение.

6. Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ попарно пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причем $SK=3$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Вариант 18 (2004 г.)

1. Решить неравенство $\log_5\log_{1/2}\dfrac{x^2-4|x|}{|x|-7}\leqslant 0$.

2. Решить уравнение $\dfrac{\sin 6x}{|\sin 4x|}=\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

3. Четырехугольник, один из углов которого равен $\arcsin\dfrac{4}{5}$, вписан в окружность радиуса $\sqrt{15}$ и описан около окружности радиуса 2. Найти площадь четырехугольника и угол между его диагоналями.

4. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:
а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину C, середину ребра A_1B_1 и параллельной прямой BD;
б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину C и параллельной прямой BD, у которой площадь проекции сечения на плоскость BDB_1 максимальна.

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_5(25^x-\log_5 a)=x$ имеет единственное решение.

6. Решить систему уравнений
$$\begin{cases}(3y-x)^2=2+z^2,\\ (3y+z)^2=3+x^2,\\ (z-x)^2=4+9y^2.\end{cases}$$

Вариант 19 (2005 г.)

1. Найти все действительные решения системы уравнений
$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{\sqrt{x-2y}}=\dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{\sqrt{x-2y}}{xy}, \\ xy\sqrt{\dfrac{xy}{x-2y}}=2-\sqrt{x-2y}. \end{cases}$$

2. Решить неравенство
$$\sqrt{\log_{\left(\frac{2}{3}-x\right)}\left(x^2+\frac{3}{4}\right)}<\log_{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}-x^3\right).$$

3. Решить уравнение
$(8\sin x+15\cos x)(53+32\sin x+17\cos 2x)=1318.$

4. Через центр O окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведена прямая, параллельная BC и пересекающая стороны AB и AC в точках B_1 и BC_1 соответственно. Окружность ω проходит через точки B_1, C_1 и касается Ω в точке K. Найти угол между прямыми AL и BC. Найти площадь треугольника ABC и радиус окружности Ω, если $B_1C_1=6$, $AK=6$, а расстояние между прямыми BC и B_1C_1 равно 1.

5. При каких значениях параметра a уравнение $3x-|x^5|+a=0$ имеет единственное решение? Решить это уравнение для всех найденных значений a.

6. Прямой круговой конус с вершиной O имеет высоту 2 и образующую длины $\sqrt{13}$. Пирамида $ABCD$ вписана в конус так, что A и C принадлежат окружности основания, B и D принадлежат боковой поверхности, причем B принадлежит образующей OA. Точки B и D равноудалены от плоскости основания конуса, $OB=\sqrt{13}/3$, $AC=4\sqrt{2}$, $BD=4\sqrt{2}/3$. Найти объем пирамиды $ABCD$, двугранный угол при ребре AB и радиус сферы, описанной около $ABCD$.

Вариант 20 (2005 г.)

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 8x^2y-3x^4=4, \\ 8y^3-3x^2y^2=2. \end{cases}$$

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin x\sin 2x}{\cos x\cos 3x}-\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}}{\cos 3x\cos 2x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{\cos x\cos 2x}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2\cos 2x}.$$

3. Решить неравенство $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}-\frac{3}{4}}{x-\frac{55}{64}}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{4}}.$

4. Найти стороны параллелограмма $ABCD$, в котором радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, равны 13 и $\sqrt{29}$ соответственно, а расстояние между центрами этих окружностей равно 10.

5. Найти все пары действительных чисел (x,y), для которых справедливо равенство $\log_{4\sqrt{x+4y}}\left(4^{\sqrt{x+4y}}+\sqrt{\dfrac{y\sqrt{x}}{2}+1}\right)=3^{-\sqrt{x-4y-4\sqrt{x}}}.$

6. Сфера касается боковых граней четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на ребрах AB, BC, CD, DA. Известно, что высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$, $AB=9$, $SA=6$, $SB=9$, $SC=2\sqrt{33}$. Найти длины ребер BC и CD, радиус сферы и двугранный угол при ребре SD.

Вариант 21 (2005 г.)

1. Решить неравенство
$$\frac{|x^2-5x+6|+|9-2x|-5}{\sqrt{19x^2-4x^3-4x+19}} \leqslant 0.$$

2. Решить уравнение
$$\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\sqrt{8}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\sqrt{8}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1+2\cos^4 2x}{3\sin 2x}.$$

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AE и CD. Найти длины отрезков AD, CE, радиус окружности, описанной около треугольника BCD, и расстояние между центрами окружностей, вписанной в треугольник ABC и описанной около треугольника ABC, если $AC=2$,$BC=4$, $\angle ACB = 2\arccos\frac{3\sqrt{6}}{8}$.

4. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 3, двугранный угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$. Точки A_1 и C_1 — середины ребер AD и CD соответственно, AB_1 — высота в треугольнике ABD. Найти:
1) угол между прямыми AC И A_1B_1;
2) площадь треугольника $A_1B_1C_1$;
3) расстояние от точки A до плоскости $A_1B_1C_1$;
4) радиус вписанного в пирамиду $A_1B_1C_1D$ шара.

5. Найти все значения параметра a, при которых множество решений системы неравенств
$$\begin{cases}(x-a)^2+x+y^2 \leqslant 3,\\ x-a+y^2 \leqslant 0\end{cases}$$
содержит отрезок с концами в точках $(1,0)$ и $(1,1)$.

6. Решить систему уравнений
$$\begin{cases}\dfrac{xy}{49}+\dfrac{xz}{4}-\dfrac{yz}{9}=1+2\ln\dfrac{3x}{14},\\ \dfrac{xy}{49}+\dfrac{yz}{9}-\dfrac{xz}{4}=1+2\ln\dfrac{2y}{21},\\ \dfrac{yz}{9}+\dfrac{xz}{4}-\dfrac{xy}{49}=1+2\ln\dfrac{7z}{6}.\end{cases}$$

Вариант 22 (2006 г.)

1. Решить уравнение $5\sin 3x+16\cos x+5\sin x=12\cos^3 x$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{4x^3-12x+8}}{x+1} \leqslant \sqrt{4x+7}$.

3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases}\dfrac{y^2(2+x)}{x^2}=4y-3x,\\ 2y^2-3xy=4y-x^2.\end{cases}$$

4. Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности. Известно, что $AB=BC$, $AE=DE$, $CD=7$, $AC=8$, $AD=9$. Найти радиус окружности, вписанной в пятиугольник, и угол EAB.

5. При каких значениях параметра t система

$$\begin{cases}(x+1-2t)^2+(y-1+5t)^2=4t^2,\\(x+2)^2+(y-6)^2=1\end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD\|BC$). Сфера радиуса 2 с центром в плоскости AA_1D_1D касается плоскостей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и прямых AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Известно, что $AD=7$, $BC=3$. Найти:

1) угол между прямыми AA_1 и B_1C_1;

2) двугранный угол между гранями AA_1B_1B и AA_1D_1D;

3) объем призмы.

Вариант 23 (2006 г.)

1. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases}5\sqrt[3]{x^5y^2}=4(x^2+y^2),\\3\sqrt[3]{xy^4}=x^2-y^2.\end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\cos 3x\sqrt{-\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right).$$

3. Решить неравенство $\dfrac{2}{\log_{(1-2x)}(6-8x-8x^2)}\leqslant\dfrac{1}{2-\log_{(6+4x)}(1-2x)}$.

4. Треугольник ABC вписан в окружность O радиуса R, точки K и M — середины отрезков AB и AC соответственно, отрезок BC равен $\dfrac{3R}{4}$. Окружности O_1 и O_2 проведены через точки K и M соответственно, касаются окружности O и каждая имеет с треугольником ABC единственную общую точку. Найти радиус окружности O_2, если радиус окружности O_1 равен $\dfrac{R}{3}$.

5. Для каждого значения параметра $a\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ найти максимальное значение $g(a)$ функции $f(x,y)=x(x-1)+y(y+2)$ на множестве точек (x,y) таких, что $x^2+y^2\leqslant x\cos a+y\sin a$.Найти значение параметра $a\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, при которых $g(a)$ принимает наименьшее значение.

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ сфера касается граней ACD и BCD в точках B_1 и A_1, являющихся основаниями высот пирамиды, и пересекает ребро AB в точках K и L. Известно, что $AB=\sqrt{14}$, $KL=\sqrt{7}$, $BC=\sqrt{\dfrac{63}{2}}$, $AD=\sqrt{42}$. Найти расстояние между ребрами AB и CD, радиус окружности, высекаемой на сфере плоскостью ABC, объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 24 (2006 г.)

1. Решить уравнение $\dfrac{\operatorname{tg}4x\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}4x}=\dfrac{\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x}$.

2. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2xy + \dfrac{3}{z} + 3 = 0, \\ xz + \dfrac{4}{y} - 2 = 0, \\ yz + \dfrac{2}{x} + 2 = 0. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_{\frac{5|x|-3x}{4}}(5x^2+2) + \frac{1}{4|x|^3}} \leqslant \log_{\frac{5|x|-3x}{4}}(5x^2+2).$$

4. В треугольнике ABC угол ACB прямой, $AB = 36$. Биссектриса угла BAC и медиана BP пересекаются в точке O. Окружность радиуса 4 с центром O пересекает сторону AB в точках K и L (K лежит между A и L), пересекает сторону AC в точках M и N (M лежит между A и N) и касается стороны BC в точке T. Найти AC, угол MOL, CM.

5. Найти все значения параметра b, при которых для любого значения параметра a существует тройка действительных чисел (x, y, z), удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} ax + 9y = z - b, \\ x + ay = z^2. \end{cases}$$

6. В пирамиде $SABC$ каждый из углов ASB и ASC равен $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{17}}$, угол BSC — прямой, ребро SB равно a. Центр сферы, вписанной в пирамиду $SABC$, лежит на высоте SD. Найти SA, SD и радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

Вариант 25 (2006 г.)

1. Решить неравенство $\sqrt{\sqrt{12 + \dfrac{169}{4}} + \dfrac{13}{2}} \geqslant x$.

2. Решить уравнение $(\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x)^2 = 5 + \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 16y^2\log_x y + (x^2 - 7y^2)\log_y x = 8y^2, \\ 8y^2\log_x y + (x^2 - 4y^2)\log_y x = 2x^2 + 16y^2. \end{cases}$$

4. Угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла треугольника, равен α, а длина медианы равна m. Найти острые углы и расстояние от вершины прямого угла до центра окружности, вписанной в треугольник.

5. Среди первых восьмидесяти элементов арифметической прогрессии с положительной разностью есть числа $\dfrac{11}{2}$, $\dfrac{213}{14}$ и $\dfrac{541}{14}$. Найти разность этой прогрессии. Найти наименьшее из возможных значений первого элемента этой прогрессии.

6. Внутри конуса с вершиной T и высотой 8 расположены сфера S_1 с центром O_1 радиуса 1 и сфера S_2 с центром O_2 радиуса $\dfrac{1}{4}$, причем $O_1O_2 = \dfrac{3}{2}$. Сфера S_1 касается плоскости основания конуса в его центре O. Обе сферы S_1 и S_2 касаются образующей конуса TA в точках K_1 и K_2 соответственно. Прямые O_1O_2 и TA пересекаются в точке L. Плоскость П касается обеих сфер и пересекает отрезок K_1K_2 в его середине M. Найти длины отрезков TK_2 и O_2L, а также расстояния от точек L и A до плоскости П.

Вариант 26 (2007 г.)

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2xy + 4x + 3y = 2, \\ 4x^2y + 3xy^2 + 12x + 9y = 8. \end{cases}$$

2. Решить неравенство $\log_{(x-3)^4}(6-x)^2 + \log_{(3-x)^2}(x-1) \leqslant 1$.

3. Решить уравнение $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{2\pi\cos^2 x + \pi}{4\cos^6 x + 1}\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4\cos^6 x + 1} - \dfrac{\pi}{12}\right) = 0$.

4. Окружность касается стороны AD четырехугольника $ABCD$ в точке D, а стороны BC — в ее середине M. Диагональ AC пересекает окружность в точках K и L ($AK < AL$). Известно, что $AK = 5$, $KL = 3$, $LC = 2$. Лучи AD и BC пересекаются в точке S, причем $\angle ASB = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$. Найти радиус окружности и площадь $ABCD$.

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$$4(\cos x)^{\frac{4}{3}} + (\sin x)^{\frac{4}{3}} = a$$
имеет единственное решение на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

6. В пирамиде $ABCD$ грани ABC и ADC являются равнобедренными треугольниками с общим основанием AC. Сфера радиуса R с центром в точке O, лежащей на грани ABC, касается всех ребер пирамиды $ABCD$. Найти длины отрезков, на которые точки касания сферы делят ребра пирамиды, и объем пирамиды $ABCD$, если угол OBD равен α. Найти значение угла OBD, при котором объем пирамиды $ABCD$ будет наименьшим. Найти это наименьшее значение объема пирамиды $ABCD$.

Вариант 27 (2007 г.)

1. Решить уравнение $2\log_5(x^2-4) + 4\sqrt{\log_5(x-2)^2} - \log_5(x+2)^2 = 5$.

2. Решить уравнение $\dfrac{\sin 9x + 4\sin^2 3x - 3}{1 - \sin 3x} = |\sin 3x|$.

3. Решить неравенство $\dfrac{(\sqrt{3-x} - x - 3)(\sqrt{5-4x} - x - 4)}{\sqrt{x^3 - x^2 - 4x + 4}} \leqslant 0$.

4. Окружность ω с центром в точке O на стороне Ac треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $AD = 4CE$, а угол DOE равен $\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{5}$. Найти углы треугольника ABC и отношение его площади к площади круга, ограниченного окружностью ω.

5. Найти все значения параметра а, при которых существует ровно две пары действительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} (x - y^2 + 4)(y + \sqrt{3}|x|) = 0, \\ 2ay - x = 4 + a^2. \end{cases}$$

6. Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены два шара ω_1 и ω_2, касающиеся друг друга внешним образом; кроме того, шар ω_1 касается граней $ABCD$, CDD_1C_1, BCC_1B_1, а шар ω_2 касается граней $A_1B_1C_1D_1$, ADD_1A_1, ABB_1A_1. Известно, что $C_1D_1 = 20 - \sqrt{11}$, $AD = 20$, $BB_1 = 20 + \sqrt{11}$. Найти расстояние между центрами шаров ω_1 и ω_2. Найти наибольший и наименьший суммарный объем шаров.

Вариант 28 (2007 г.)

1. Решить уравнение

$$\sqrt{25+|16x^2-25|}=4+4|1-x|.$$

2. Решить уравнение

$$11+\cos 10x=-10\frac{\sin 5x}{\cos 6x}-12\operatorname{tg}^2 6x.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{9}{\log_{\sqrt[3]{1-x}}(1-x)+6}\geqslant \log_{\sqrt{1-x}}\frac{\sqrt{1-x}}{1+x}.$$

4. В треугольнике ABC площадью 200 и с периметром 80 сторона AC равна 36. Внутри треугольника ABC взята точка D, удаленная на расстояние 3 от прямой AB и на расстояние 4 от прямой BC. Найти угол ABC и расстояние от D до центра вписанной окружности треугольника ABC.

5. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=8,\\ x^2+y^2+4x-2y+4=0.\end{cases}$$

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребро основания $ABCD$ равно 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg} 2$. На ребре SD выбрана точка K так, что $SK=\frac{1}{4}SD$. Сфера ω с центром на отрезке BK проходит через точки S и A. Найти, в каком отношении центр сферы ω делит отрезок BK, радиус сферы ω и длину отрезка, который ω отсекает от прямой AB.

Вариант 29 (2008 г.)

1. Решить неравенство

$$\log_{\left(\frac{x+5}{x+1}\right)}(x+25)\leqslant 2.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^3\cos 3x-\cos^3 x\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 6x}{|\cos x|}=\frac{3}{4}.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y+\sqrt{\dfrac{y}{y-x}}=\dfrac{42}{y-x},\\ xy-4y=9.\end{cases}$$

4. В треугольнике ABC медиана $BM=5$, угол ABM равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, угол CBM равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Найти стороны AB, BC и биссектрису BE треугольника ABC.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2-4x^4+y=e^y,\\ 2\arcsin x+\arccos y=0.\end{cases}$$

6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{15}{4}$ с центром O касается ребер AS, BS, AD, BC пирамиды $SABCD$ соответственно в точках K, L, M, N, пересекает ребро AB в точках P и Q и касается грани CDS. Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает ее в точке H, $\dfrac{PQ}{AB} = \sqrt{\dfrac{31}{56}}$, $\dfrac{BS}{KS} = \dfrac{3}{2}$. Найти $\angle SBA$, $\angle ASH$, высоту пирамиды и ее объем.

Вариант 30 (2007 г.)

1. Решить уравнение
$\log_{7-x^2}(2\cdot 3^{x+2} - 10 + 3^{-x}) = \log_{x+1}(2\cdot 3^{x+2} - 10 + 3^{-x})$.

2. Решить уравнение
$\sin 2x = 2\sin^3 x + \sin|2x|\cos x$.

3. Решить неравенство
$\sqrt{\dfrac{3-4x}{5+4x}} + \dfrac{\sqrt{5+4x}}{2\sqrt{3-4x}-2} \geqslant 0$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 лежат внутри треугольника ABC, в котором $AB = BC = l$, $AC = 3$, а радиус ω_1 в три раза больше радиуса ω_2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом, причем ω_1 касается сторон AB и AC, а ω_2 — сторон BC и AC треугольника ABC. Найти радиус окружности ω_2, если $l = 9$. Найти все значения l, при которых существуют указанные окружности.

5. Найти все значения параметра a, при которых наименьшее значение величины $y - x^2$ на множестве пар действительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам $y + \sqrt{4-x^2} \geqslant 0$ и $y + 2 \geqslant |x - a|$, будет минимально возможным. Найти это минимально возможное значение.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ четыре числа — длины ребер и диагонали AC_1 — образуют арифметическую прогрессию с положительной разностью d, причем $AB < AA_1 < AD$. Две внешне касающиеся друг друга сферы одинакового неизвестного радиуса R расположены так, что их центры лежат внутри параллелепипеда, причем первая сфера касается граней ABB_1A_1, ADD_1A_1, $ABCD$, а вторая — граней BCC_1B_1, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$.
Найти: а) длины ребер параллелепипеда, б) угол между прямыми CD_1 и AC_1, в) радиус R.

Вариант 31 (2008 г.)

1. Решить неравенство
$\sqrt{\dfrac{1}{y^2-6x+5}} \geqslant \dfrac{1}{2+x}$.

2. Решить уравнение
$\dfrac{4\sin^2 2x\sin 4x - \sin 6x + 3\sin 2x}{\sin 2x} = 0$.

3. Найти действительные решения системы уравнений
$\begin{cases} 3x^2 = y^4 + y, \\ 5x = \dfrac{2y}{x} + y^2. \end{cases}$

4. Параллелограмм $ABCD$ имеет площадь 6. Окружность с центром в точке O, расположенной на отрезке AD, касается отрезков AB, BC и прямой CD в точках M, N и K соответственно. Найти радиус этой окружности и стороны параллелограмма $ABCD$, если $\dfrac{CK}{BN} = 5$.

5. Найти все пары вещественных чисел (x, y), удовлетворяющие неравенству
$\log_{|\cos x|+|\sin x|}\left(4 - 2\cos y - \sin\dfrac{9x}{2}\right) \leqslant \log_{(4^y+3^{-y})}\left(\left|\sin\dfrac{3y}{4}\cos 6x\right|\right)$.

6. На основании $ABCD$ четырехугольной пирамиды $SABCD$ расположена точка O. Сфера с центром в точке O касается прямых SA, SB, SC, SD в точках A, B, K, L соответственно. Известно, что $AB = KL = 5\sqrt{2}$, $AL = 6$, $BK = 8$, а отрезок SO составляет с плоскостью $ABCD$ угол $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. Найти длины отрезков AK, OS и SD.

Вариант 32 (2008 г.)

1. Решить уравнение
$\log_{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(x^3 - \dfrac{1}{2}\right)\log_{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^3 = 4.$

2. Решить неравенство
$\sqrt{\dfrac{2 - \frac{13}{9}x}{2 - x}} \leqslant x - 1.$

3. Решить уравнение
$\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\sin 3x}$.

4. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны a и b соответственно. Окружность, проходящая через точки B, C и D, касается прямой AB. Найти диагональ трапеции BD.

5. Решить систему уравнений
$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 12x + 36} + \sqrt{x^2 + y^2 - 16y + 64} = 10, \\ 5y^2 - 8x^2 = 8. \end{cases}$

6. Грани ABC и ABD пирамиды $ABCD$ ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием AB. Известно, что $AB = 3$, $CD = 2$. Найти угол между прямыми AC и BD, расстояние между прямыми AC и BD и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.

Вариант 33 (2009 г.)

1. Решите систему уравнений
$\begin{cases} \log_{2y+3}(4y^2 - x^2 + 16y + 6x + 13) = 2, \\ \log_{x-4}(x^2 - 6x - y + 13) = 2. \end{cases}$

2. Решите неравенство
$\left|2^{\sqrt{x-2}-2} - 2\right| + \dfrac{10}{3} \leqslant \dfrac{2\sqrt{x-2} + 2}{3} - 4^{\sqrt{x-2}-2}.$

3. Найдите решения уравнения
$\dfrac{\cos x}{\cos 3x} - \dfrac{\cos 5x}{\cos 3x} + 8\sin x \sin 3x = 0,$
удовлетворяющие неравенству $\sin x \geqslant 0$.

4. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, а их длины равны соответственно 30, 24 и 18. Найдите площадь треугольников ABC и AOC_1, а также радиус окружности, описанной около треугольника AOC_1.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} x^2+y^2+17 \leqslant 6(|x|+|y|), \\ x^2+y^2+2x=a^2-1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2-y^2=-2x-4y-3z, \\ y^2-z^2=-x+3y+4z, \\ z^2-x^2=3x-y-5z. \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB=BC=CD=2$, $AD=4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что
$$\frac{A_1K}{KB}=\frac{B_1L}{LC}=\frac{C_1M}{MD}=\frac{5}{3}.$$
Сфера радиуса $R=2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объем призмы.

Вариант 34 (2009 г.)

1. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 17, угол ABC равен $\arccos\left(-\frac{161}{289}\right)$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, и расстояние от точки пересечения медиан до точки пересечения высот треугольника ABC.

2. Решите уравнение
$$\operatorname{tg} 6x+\frac{1}{\cos 6x}=\operatorname{tg} 2x+\frac{1}{\cos 2x}-\frac{\sin 8x}{\cos 2x \cos 6x}.$$

3. Решите неравенство
$$\left|\log_{x+2} 3+\log_3 \frac{x+2}{9}\right|+\left|\log_3(9x+18)+\log_{x+2} 3\right|<\frac{17}{2}.$$

4. На ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$ выбрана точка X такая, что $AX:XB=4$. Точки K и L — проекции точки X на плоскости ACD и BCD соответственно. Известно, что $KC=3$, $KD=9$, $KA=12$, $LC=7$, $LB=2$. Найдите длину отрезка LD, высоту пирамиды, опущенную из вершины A, и угол между ребром AB и плоскостью BCD.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$x\sqrt{x+a}-2(x+a)\sqrt{x+1}=0$$
имеет единственное решение.

6. Найдите все действительные решения системы уравнений
$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=-15, \\ (y-z)(y^2+z^2)=13, \\ (x-z)(x^2+z^2)=20. \end{cases}$$

Вариант 35 (2010 г.)

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

2. Решите уравнение
$$\frac{\sin 5x\cos 3x-\sin 7x\cos x}{\cos 2x+\sin 2x}=0.$$
3. Решите неравенство
$$\sqrt{\frac{x+4}{2-x}}>x.$$
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\log_{2y-1}\sqrt{x+2}=\log_{2y+1}x,\\ \log_x\left(\dfrac{x^3}{2y+1}\right)=\log_{2y-1}(x+2).\end{cases}$$
5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases}|x|+|x-2|-2y=0,\\ x^2-2x+y^2-2ay=-2a\end{cases}$$
имеет ровно три различных решения.

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 5. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 12. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается ребер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC и радиус сферы.

Вариант 36 (2010 г.)

1. Решите неравенство
$$\log_{(x+4)}(\sqrt{x+5}+1)\leqslant 1.$$
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{25-y^2}+\sqrt{25-x^2}=7,\\ \sqrt{25-y^2}-\sqrt{25-x^2}=\dfrac{1}{7}(x^2-2y^2+2y+3).\end{cases}$$
3. Решите уравнение
$$3|\cos x|+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0.$$
4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно $\sqrt{5}$, угол между боковым ребром и ребром основания равен $\operatorname{arctg} 3$. Точка K лежит на высоте SO, причем $KS : SO = 1 : 4$. Через точку K проведена плоскость П, перпендикулярная прямой SD. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью П, расстояние от точки C до плоскости П и угол между плоскостью П и прямой SC.

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x-\sqrt{3}\sin y=\dfrac{5}{2}\,,\\ \cos y-\sqrt{2}\sin x=-\dfrac{3}{2}\,.\end{cases}$$
6. В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины ее боковых сторон BC и AD равны соответственно 12 и 20, а длина основания CD меньше длины AB. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найдите длины оснований трапеции и радиус вписанной в нее окружности.

Вариант 37 (2011 г.)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 2x} = 3x - y, \\ \dfrac{81}{4}x^2 + y^3 = 2y + 1. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{tg} x - 2) + \log_{(\operatorname{tg} x - 2)} \sqrt{\operatorname{ctg} x} = \frac{3}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{8 - 2|x|}{|x^2 + 7x + 3| - 3} \leqslant 1.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $\dfrac{1}{2}$ с центром на отрезке AB проходит через точку B и касается отрезка AD в точке E такой, что угол BED равен $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$. Найдите высоту параллелограмма BF и длину отрезка AB. Найдите площадь параллелограмма, если $CD = DE$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α, такое, что уравнение

$$x^2 + (\cos\alpha - 4\sin\alpha)x + b = 0$$

имеет действительное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 1, боковое ребро равно 3. Сфера с центром O на прямой SA касается ребер SB, SC и BC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей BSC и ABC, а также радиус сферы.

Вариант 38 (2011 г.)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 + \dfrac{x}{2y}} = -x - y, \\ 4x^2 + \dfrac{1}{2y^2} = 4y^2 + 1. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{\left(x + \frac{5}{8}\right)}\left(\dfrac{1}{2} - x\right)} \leqslant 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2\operatorname{tg} x - 12\operatorname{ctg} x} = \sqrt{5}(\cos x - \sin x).$$

4. В треугольнике ABC окружность радиуса $\dfrac{13}{3\sqrt{3}}$ с центром на отрезке AC проходит через точку A и касается отрезка BC в точке D такой, что угол ADB равен $\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{3}}$. Найдите высоту AF треугольника ABC и длину отрезка CD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AB и CD равны.

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений
$$\begin{cases} x = -|b - y^2|, \\ y = a(x + b^2) \end{cases}$$
имеет решение при любом значении параметра a.

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 1, боковое ребро равно 4. Сфера с центром O на плоскости BCS касается ребер SA, SD и AD. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и CDS, а также радиус сферы.

Вариант 39 (2012 г.)

1. Решите неравенство
$$\log_{1/5}\left(\frac{x+3}{x-5}\right) + 2\cdot\log_{25}\left(\frac{x^2}{2} - 6x + 19\right) \leqslant \log_5(x^2 - 9x + 20).$$

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{6x}{y} + \dfrac{2y}{x} - 5 = 4xy, \\ \dfrac{7x}{y} + \dfrac{4y}{x} - 10 = 3xy. \end{cases}$$

3. Рассматриваются всевозможные правильные четырехугольные пирамиды, боковые ребра которых равны a.
а) Найдите наибольший возможный объем рассматриваемых пирамид.
б) Для пирамиды наибольшего объема найдите угол между соседними боковыми гранями.

4. Найдите наибольший корень уравнения
$$\operatorname{ctg} 12x + \operatorname{tg} 5x = \frac{1}{\cos 5x},$$
принадлежащий отрезку $\left[-\frac{47\pi}{19}\quad -\frac{9\pi}{19}\right]$.

5. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона CD равна 10. Биссектриса угла ADC пересекает сторону AB в точке M, а прямую BC — в точке N, причем $DN \perp AM$, $MN = 3$. Найдите длины отрезков DN и AD, а также площадь трапеции.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y^2 + (4a+2)y + 4a^2 + 4a - 3 = 0, \\ \sqrt{(x+2a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2a)^2 + (y-4)^2} = 4 \end{cases}$$
имеет ровно одно решение.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, $456789 \to 945678$), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[639619;\ 639647]$ могли получиться в результате сложения?

8. На клетчатой доске размера 34×27 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 3 и 11 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 40 (2012 г.)

1. Решите уравнение
$\cos^2 2x + \cos^2 x = 1 + \operatorname{ctg} 3x$.

2. Решите неравенство
$\dfrac{x\sqrt{5}+1}{1-\sqrt{x^2-2x+2}} \leqslant 1$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств
$\begin{cases} x^2+y^2-a^2 \leqslant 4y-2x-5, \\ x^2+y^2-4a^2 \leqslant 10x-12y+12a-52 \end{cases}$
имеет ровно одно решение.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные PS и QT. Их точки касания с меньшей окружностью — S и T, с большей окружностью — P и Q. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $PQ = \dfrac{12\sqrt{6}}{5}$, $QT = 2\sqrt{6}$.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, $123\,456 \to 612\,345$), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[382\,340;\ 382\,371]$ могли получиться в результате вычитания?

6. На ребре CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка S так, что центр сферы, описанной около пирамиды SAA_1B_1B, лежит в грани AA_1B_1B. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$, равен $\sqrt{2}$, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите:
а) отношение объема пирамиды SAA_1B_1B к объему призмы;
б) длину отрезка SC;
в) площадь полной поверхности призмы.

7. Решите систему уравнений
$\begin{cases} 2x^2-19xy+45y^2-12x+60y=0, \\ \sqrt{y(2x-9y-12)+36}+\sqrt{y^2-5y+11}=6. \end{cases}$

8. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 840$, $1 \leqslant b \leqslant 840$, сумма $a+b$ делится на 6, а произведение ab делится на 7. (При $a \neq b$ пары $(a;b)$ и $(b;a)$ считаются различными.)

Вариант 41 (2013 г.)

1. Решите уравнение
$\log_{(5^x)}(x^2+9x+15)+\log_{(125^x)}(x^3) = \dfrac{2}{x}$.

2. Решите неравенство
$\dfrac{1}{\sqrt{|x-3|-1}} \leqslant \dfrac{1}{6-x}$.

3. Решите уравнение
$\sqrt{1+7\sin^2 x} = 2\cos x - \sqrt{3}\sin x$.

4. Число 84605 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 84605846058460584605846058460584605. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$. Окружность Ω, проходящая через точки B, C и D, пересекает стороны AB и AD в точках T и E соответственно, причем $BT = 10$, $AE = 7$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}(x^2 - xy + 3y^2)(y^2 - 25) \geqslant 0,\\ |x + 2 + y| + |y + 2 - x| \leqslant a?\end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 4$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трех ее боковых ребер в их серединах. Пусть Ω — сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\operatorname{arctg} 2$. Найдите объем пирамиды $SABC$.

8. Дан правильный 24-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Вариант 42 (2013 г.)

1. Решите уравнение

$$\log_{(4^{x+4})}(x^4) + \log_{(2^{x+4})}\left((x+5)^2\right) = \frac{4}{x+4}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{38}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{37 - \sin 3x}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{-x+\sqrt{x^2-1}} > 1.$$

4. Число 52168 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5216852168521685216852168521685216852168. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причем $BC < AD$, $\angle ABC = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка AB. Известно, что окружность радиуса 4 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке M, а $\cos\angle MDC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков $CD0$ и AB, а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}(3x^2 + 3xy + 2y^2)(|x + y| - 8) \geqslant 0,\\ |x(x-4) + y(y-2) = a?\end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α

имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает ребра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK : KA_1$ и $BN : NB_1$, если $CP : PC_1 = 3 : 25$.

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество четверок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырехугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четверки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответы к вариантам

Вариант 1.

1. $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}$.

2. $x < \dfrac{34 - 30\sqrt{2}}{23},\ \ x \geqslant 3$.

3. $\dfrac{85}{48}$.

4. $a = 2,\ \ S = 15\ln 2 - 9$.

5. $S = \dfrac{13}{12},\ \ \alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

6. $(3; 29),\ (1; -17),\ (13; 397),\ (-15; 191)$.

Вариант 2.

1. $(1; -6),\ (-3; 2)$.

2. $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}$.

3. $2\sqrt{5},\ \ \sqrt{2}$.

4. $\dfrac{1}{2},\ \ \dfrac{2}{3}$.

5. $\dfrac{\sqrt{30}}{4},\ \ \dfrac{\pi\sqrt{30}}{28}$.

6. $a = 4,\ \ b = 5,\ \ c = 2$.

Вариант 3.

1. $(2; -3)$.

2. $x = \pi n,\ \ x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi n,\ \ x = (-1)^n\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2},\ \ n \in \mathbf{Z}$.

3. $\dfrac{5 - \sqrt{145}}{2} < x < 1 - \sqrt{19},\ \ 4 < x < 7$.

4. $2,\ \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

5. $x = 7,\ \ y = 19$.

6. $\arccos\dfrac{5}{2\sqrt{19}},\ \ \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{51}},\ \ \dfrac{a\sqrt{19}}{4\sqrt{2}}$.

Вариант 4.

1. $\left(1 - \sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ x = \dfrac{\pi}{9} + 2\pi n,\ \ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ \ x = \dfrac{8\pi}{9} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}$.

3. $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{10}{3},\ \ x = 4,\ 5 < x \leqslant 6$.

4. $\frac{4}{3}$, $\frac{40\sqrt{7}}{63}$.

5. а) 32; б) $4(10-\pi)$; в) $4(6-\pi)$.

6. 1) $\frac{77}{36}$; 2) $\frac{4\sqrt{2}}{33}$; 3) $\arccos\frac{7}{11}$.

Вариант 5.

1. $(2;\,4)$, $\left(\frac{256}{375};\,-\frac{2048}{3825}\right)$.

2. $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\neq 3k$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. $\frac{1}{9}<x<1$; $x\geqslant 3$, $x\neq 9$.

4. $\frac{27\sqrt{2}}{4}$.

5. $a=-\frac{3}{4}$, $a>1$.

6. $\frac{6\sqrt{11}}{7}$, $\frac{80\sqrt{3}}{21}$.

Вариант 6.

1. $-3\leqslant x<-2$, $-2+\sqrt{3}<x\leqslant 1$.

2. $x=\frac{\pi n}{6}$, $n\neq 3+6k$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. $(3;\,0)$, $\left(\frac{731}{27};\,-\frac{728}{27}\right)$.

4. $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. $0\leqslant a\leqslant\frac{2}{5}$, $a=-\frac{1}{10}$.

6. $\frac{A_1D}{AD}=\frac{B_1D}{BD}=\frac{13}{18}$, $\frac{C_1D}{CD}=\frac{13}{33}$; $\left(\frac{26}{9}\right)^2\frac{\sqrt{23}}{11}$; $\frac{25}{12}$.

Вариант 7.

1. $\left(0;\log_2\frac{128}{71}\right)$, $(2\log_2 7-6;\,4-\log_2 7)$.

2. $x=\frac{\pi n}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3. $x<-1$, $x=0$, $x>4$.

4. $AC=32\sqrt{\frac{3}{35}}$, $BC=4\sqrt{\frac{6}{5}}$, $R=3\sqrt{\frac{7}{10}}$

5. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P\in BC$, $BP=\frac{2}{5}BC$.

6. 1) $\arccos\frac{47}{121}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{259}}$; 3) $\frac{8}{3}$.

Вариант 8.

1. $x_1=-6$, $x_2=10$.

2. $x=-\frac{3\pi}{14}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{14}+\pi n$, $x=\frac{5\pi}{14}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3. $-\frac{11}{2}<x<-\frac{1}{2}-2\sqrt{6}$, $-\frac{\sqrt{73}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{73}}{2}$, $-\frac{1}{2}+2\sqrt{6}<x<\frac{9}{2}$.

4. $\frac{3\sqrt{35}}{7}$, $\frac{4\sqrt{35}}{105}$.

5. $\left(-1+\sqrt{2}; -3\sqrt{2}\right), \ \left(-1-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right)$.

6. $R \geqslant r\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \ \dfrac{R\left(R-r+\sqrt{R^2-2Rr-\frac{r^2}{3}}\right)}{r+R+\sqrt{R^2-2Rr-\frac{r^2}{3}}}$.

Вариант 9.

1. $\frac{1-\sqrt{17}}{8} < x \leqslant 1, \ x \geqslant 3$.

2. $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$.

3. $A_1A_2 = 7, \ B_1B_2 = 5, \ BB_2 = \frac{24\sqrt{3}}{11}, \ AB = \frac{78}{11}, \ AB_2 = 6$.

4. 1) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

5. $-5 < a \leqslant 4$.

6. $(0;0;0), \ \left(-\frac{4}{3}; -2; \frac{2}{3}\right), \ \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Вариант 10.

1. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbf{Z}$.

2. $-\frac{3}{7} \leqslant x < 0, \ x > 6$.

3. $x = \frac{1}{7}, \ y = -\frac{58}{7}$.

4. $\frac{15}{16}\sqrt[4]{3}$.

5. 3 и 9.

6. 1) $\frac{5}{7}$ и $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{38}{305}$; 3) $\frac{107\sqrt{34}}{119\sqrt{35}}$.

Вариант 11.

1. $x = \frac{2}{5}$.

2. $x = 4, \ y = -2$.

3. $x < -10, \ -\frac{5}{2} < x < 0, \ \frac{5}{2} < x \leqslant 25$.

4. $20(\sqrt{2}-1)$.

5. $-5 < a < 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

6. 1) $\frac{28\sqrt{2}}{3}$; 2) 4; 3) $\frac{4}{3}(4-\sqrt{2})$.

Вариант 12.

1. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \ x = 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}$.

2. $4 < x < \frac{9}{2}, \ 5 < x < 6$.

3. $\frac{a(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$.

4. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\arccos\frac{23}{27}$; 3) $\frac{8}{5\sqrt{2}}$.

5. 1) $a = 6$, $a = -1$; 2) $a < -1$, $a > 6$, $a = \frac{13-\sqrt{29}}{2}$.

6. $(-\sqrt[3]{9}; -\sqrt[3]{9}; -2)$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}; -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}; -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

Вариант 13.

1. $S = 663$.

2. $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $x \in (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$.

4. а) 8π; б) 6π; в) $4\pi + 4$.

5. $\left(\frac{2-\sqrt{85}}{9}, \frac{29-\sqrt{85}}{3}\right)$, $(6, 30)$.

6. $V = \frac{110\sqrt{2}}{3}$, $R = \frac{5\sqrt{129}}{4\sqrt{2}}$.

Вариант 14.

1. $x = \pi n$.

2. $x \in (-4, -2] \cup \left(\frac{17-\sqrt{22}}{3}, 6\right) \cup \left(\frac{15}{2}, 7+\sqrt{6}\right)$.

3. $x = 2 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $y = -1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

4. $\angle MDN = \frac{2\pi}{3}$ $BC = 2\sqrt{21}$.

5. $a = \frac{121}{13}$, $a = \frac{121}{50}$.

6. а) $\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}$; б) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

Вариант 15.

1. $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $\pi \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{12}}\right]$.

3. $\frac{279}{200}$.

4. 1) $\frac{329}{30}$; 2) $\arccos\frac{5}{7}$; 3) $\frac{8\sqrt{6}}{7}$ и $\frac{3\sqrt{6}}{7}$.

5. $\left[\frac{16}{9}, 6\right]$.

6. $\left(\pm1, \pm1, \pm\frac{1}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{1}{2} \mp 1, \pm1\right)$, $\left(\pm\frac{1}{2} \pm 2, \mp\frac{1}{2}\right)$.

Вариант 16.

1. $(125, 5)$, $(\pm4\sqrt{2}, 2)$.

2. $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $x \in \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1\right) \cup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4. $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

5. $(6, -5)$, $(4, 5)$, $(-4, -3)$.

6. $\pi - \arcsin\dfrac{24}{25}$, 15, 36.

Вариант 17.

1. $(6, 2)$.

2. $x = (-1)^n \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $\dfrac{R^2 3\sqrt{3}}{2}$.

4. $[-1, 0) \cup \left(2, \dfrac{11}{5}\right) \cup (3, 4]$.

5. $\dfrac{1}{4}$, 0.

6. 7, 32, $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$.

Вариант 18.

1. $\left[-\dfrac{7}{2}, -1\right] \cup \left[1, \dfrac{7}{2}\right]$.

2. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $x = \dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $\dfrac{98}{5}$, $\arcsin\dfrac{49}{50}$.

4. а) $\dfrac{7\sqrt{17}}{24}$, б) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

5. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$, $[1, +\infty)$.

6. $\left(\mp 1, \mp\dfrac{5}{18}, \pm\dfrac{7}{6}\right)$.

Вариант 19.

1. $(-1, -1)$, $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

2. $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{2}\right]$.

3. $x = \arcsin\dfrac{8}{17} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. $AK \perp BC$, $S = 16$, $R = \sqrt{17}$.

5. $a = -\dfrac{12\sqrt[4]{3}}{5\sqrt[4]{5}}$, $x = \sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}$.

6. $V = \dfrac{256\sqrt{2}}{243}$, $\alpha = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{13}{45}}$, $R = \dfrac{\sqrt{130}}{3}$.

Вариант 20.

1. $(\pm\sqrt{2}, 1)$.

2. $x = \pm\arccos\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $\left(\dfrac{1}{16}, \dfrac{9}{16}\right] \cup \left[1, \dfrac{51 + 5\sqrt{77}}{32}\right]$.

4. $AB = 10$, $AD = 7\sqrt{2}$.

5. $\left(\frac{8}{3-\sqrt{5}}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

6. $R = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$, $BC = 17$, $CD = \frac{90}{7}$, $\varphi = 2\arcsin\sqrt{\frac{123}{138}}$.

Вариант 21.

1. $x \in \left[2, \frac{3+\sqrt{41}}{2}\right]$.
2. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.
3. $AD = 1$, $CE = \frac{8}{5}$, $R = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $\rho = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.
4. 1) $\arccos\frac{3}{5}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{21\sqrt{39}}{200}$; 4) $\frac{7\sqrt{39}}{208}$.
5. $a = 2$.
6. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Вариант 22.

1. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
2. $x \in \left[-\frac{7}{4}, -1\right) \cup \left[\frac{4}{\sqrt{15}} - 1, +\infty\right)$.
3. $\left(-\frac{8}{16}, \frac{16}{15}\right)$, $(6, 9)$.
4. $r = \frac{7}{\sqrt{5}}$, $\angle EAB = \pi - 2\arccos\frac{2}{3} = \arccos\frac{1}{9}$.
5. $t = -1$, $t = \frac{-29 \pm 6\sqrt{6}}{25}$.
6. 1) $\arcsin\frac{4}{7}$;

   2) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{2}}$;

   3) $\frac{80\sqrt{10}}{7}$.

Вариант 23.

1. $(0,0)$, $(4, \pm 2)$.
2. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
3. $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{65}-25}{16}, -\frac{5}{6}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{7}{8}} - \frac{1}{2}\right)$.
4. $\frac{9+\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{18}R$.
5. $g(a) = \left(\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\cos\alpha}{2} + \sin\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$, $-\operatorname{arctg} 2$.
6. $\rho = \frac{7}{\sqrt{2}}$, $r = \frac{\sqrt{35}}{4}$, $V = \frac{49}{2\sqrt{2}}$.

Вариант 24.

1. $x = \frac{\pi n}{7}$, $n \neq 7k$, $n, k \in \mathbf{Z}$.
2. $(2, -1, 3)$.

3. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$.

4. $AC = 9$, $\angle MOL = \pi - \arccos\frac{1}{4}$, $CM = 5$.

5. $b \in \left[-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right]$.

6. $SA = \frac{a\sqrt{17}}{5}$, $SD = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$, $R = \frac{a\sqrt{15}}{13+\sqrt{39}}$.

Вариант 25.

1. $\left[-\frac{169}{48}, 4\right]$.

2. $\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $(4, \sqrt{2})$, $(16, 8)$.

4. $\frac{\pi}{4} \pm \alpha$, $m\sqrt{2}(\sqrt{2}\cos\alpha - 1)$.

5. $d = \frac{4}{7}$, $\min(a_1) = -\frac{13}{2}$.

6. $TK_2 = \frac{13\sqrt{3}}{4}$, $O_2L = \frac{1}{2}$, $\rho(L, \Pi) = \frac{2}{3}$, $\rho(A, \Pi) = \frac{10}{9}$.

Вариант 26.

1. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$, $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.

2. $1 < x \leqslant \frac{3}{2}$, $2 < x < 3$, $3 < x < 4$, $5 \leqslant x < 6$, $x > 6$.

3. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. $R = \frac{2\sqrt{35} - \sqrt{10}}{4}$, $S = 8\sqrt{14}$.

5. $1 \leqslant a < 4$, $a = (1 + 2^6)^{\frac{1}{3}}$.

6. $a = R\operatorname{ctg}\alpha$, $b = \frac{R\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$, $c = \frac{R\cos\alpha}{2 - \sin\alpha}$, $v = \frac{2R^3}{3}\,\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(2-\sin\alpha)\sin\alpha}$; $\frac{\pi}{6}$, $v_{\min} = 2R^3$.

Вариант 27.

1. $x = 2 + \sqrt{5}$.

2. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $x = -1$.

4. $\angle ABC = \pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$, $\angle BAC = \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$; $\frac{2\sqrt{34}+19}{10\pi}$.

5. $a = -\sqrt{3}$, $a = -\frac{4}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{2\sqrt{3}} \leqslant a < \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

6. $d = 13$, $v_{\max} = \left(\frac{4537}{3} - 182\sqrt{11}\right)\pi$, $v_{\min} = \frac{2197}{3}\pi$.

Вариант 28.

1. $x = \frac{1}{4}$, $x \geqslant \frac{5}{4}$.

2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 0$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant x < 1$.

4. $\angle ABC = 2\operatorname{arctg}\frac{5}{4}$, $\frac{13\sqrt{41}}{40}$.

5. $(-2; 0)$, $(-2; 2)$.

6. $\dfrac{KO}{BO} = 2$, $R = \dfrac{\sqrt{211}}{3\sqrt{2}}$, $l = \dfrac{19}{3}$.

Вариант 29.

1. $-13 - 8\sqrt{2} \leqslant x < -5$, $-1 < x < 0$.

2. $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $(5; 9)$, $\left(\dfrac{214 - 9\sqrt{62}}{58}; 2 - \sqrt{62}\right)$.

4. $AB = 2\sqrt{10}$, $BC = \sqrt{20}$, $BE = 2\sqrt{10}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

5. $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

6. $\angle SBA = \arccos\dfrac{2\sqrt{14}}{15}$, $\angle ASH = \arcsin\dfrac{3}{5}$, $h = 6$, $v = 28\sqrt{14}$.

Вариант 30.

1. $x_1 = -\log_3 2$, $x_2 = 2$.

2. $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \leqslant -1$; $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \leqslant 0$.

3. $-\dfrac{5}{4} < x < \dfrac{1}{2}$.

4. $R_2 = \dfrac{15}{4\sqrt{35} + 10\sqrt{3}}$, $l \geqslant 3$.

5. $\dfrac{\sqrt{15} - 3}{2} \leqslant |a| \leqslant \dfrac{\sqrt{15}+3}{2}$, $-\dfrac{17}{4}$.

Вариант 31.

1. $x < -2$, $\dfrac{1}{10} \leqslant x < 1$, $x > 5$.

2. $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $\left(2^{-2/3}; 2^{-1/3}\right)$, $\left(-2\cdot 11^{-2/3}; 11^{-1/3}\right)$.

4. $R = \sqrt[4]{5}$, $AB = 3\cdot 5^{-1/4}$, $BC = 6\cdot 5^{-1/4}$.

5. $\left(\dfrac{7\pi}{3} + 4\pi m; 2\pi + 4\pi k\right)$, $\left(\dfrac{11\pi}{3} + 4\pi m; 2\pi + 4\pi k\right)$, $m \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

6. $AK = 7\sqrt{2}$, $OS = 11\sqrt{\dfrac{5}{2}}$, $SD = \dfrac{1375\sqrt{11}}{233}$.

Вариант 32.

1. $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

2. $\dfrac{4}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{18}{13}$, $x \geqslant \dfrac{8}{3}$.

3. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; $\dfrac{2\pi n}{5}$, $n \neq 5m$, $n \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$.

4. $BD = \sqrt{ab}$.

5. $(-3; 4)$.

6. 1) $\arccos\dfrac{9}{17}$; 2) $\dfrac{6}{\sqrt{13}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{145}}{8}$.

Вариант 33.

1. $(13; 23)$.

2. $2 \leqslant x \leqslant 18$.

3. $\pi k,\ \alpha + 2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2} \pm \alpha + 2\pi k,\ \pi - \alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z},\ \alpha = \dfrac{1}{4}\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$.

4. $288,\ 48,\ \dfrac{45}{4}$.

5. $\sqrt{13} - 1 \leqslant |a| \leqslant 6$.

6. $(0;0;0),\ (-1;2;-1),\ \left(\dfrac{\sqrt{37}-17}{6}; \dfrac{1+\sqrt{37}}{3}, -\dfrac{1+\sqrt{37}}{6}\right),$
$\left(-\dfrac{\sqrt{37}+17}{3}; \dfrac{1-\sqrt{37}}{3}; \dfrac{\sqrt{37}-1}{6}\right)$.

7. $\dfrac{2\sqrt{13}}{3},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Вариант 34.

1. $\dfrac{289}{16},\ \dfrac{611}{24}$.

2. $\dfrac{\pi n}{2},\ (-1)^{n+1}\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{13}-1}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

3. $-\dfrac{161}{81} < x < \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} - 2,\ \sqrt[4]{3} - 2 < x < 79$.

4. $11,\ 10\sqrt{2},\ \arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

5. $0 \leqslant a \leqslant 1$.

6. $(-1; -2; -3)$.

Вариант 35.

1. $\dfrac{2}{\sqrt{10}},\ \dfrac{\sqrt{85}}{18}$.

2. $\dfrac{\pi n}{2},\ \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

3. $(-4; 2)$.

4. $\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{7+\sqrt{17}}{4}\right),\ \left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$.

5. $2 + \sqrt{2}$.

6. $\dfrac{15}{4},\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{5\sqrt{7}}{4}$.

Вариант 36.

1. $-4 < x < -3;\ x \geqslant -1$.

2. $(4;3),\ (-4;3),\ \left(2\sqrt{7\sqrt{6}-12}; -1\right),\ \left(-2\sqrt{7\sqrt{6}-12}; -1\right)$.

3. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \pm\arccos\dfrac{\sqrt{13}-1}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

4. $\dfrac{1}{3\sqrt{5}},\ \dfrac{3}{\sqrt{5}},\ \arcsin\dfrac{4}{5}$.

5. $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k; -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n\right),\ k \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z}$.

6. $4,\ 28,\ \dfrac{4\sqrt{14}}{3}$.

Вариант 37.

1. $(0;-1)$, $\left(0;\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\sqrt{113}-29}{9};\dfrac{\sqrt{113}-9}{2}\right)$.

2. $\operatorname{arctg}(\sqrt2+1)+\pi k$, $\operatorname{arctg}\dfrac{3+\sqrt5}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. $(-\infty;-7)\cup(-6;-2]\cup(-1;0)\cup\left[\dfrac{\sqrt{113}-9}{2};+\infty\right)$.

4. $BF=\dfrac{9}{13}$, $AB=\dfrac{9}{5}$, $S=\dfrac{27}{13}$.

5. $b\leqslant\dfrac{17}{4}$.

6. $\rho(O,BSC)=\dfrac{3}{17}\sqrt{\dfrac{139}{7}}$, $\rho(O,ABC)=\dfrac{2}{17}\sqrt{\dfrac{26}{3}}$, $R=\dfrac{5\sqrt{35}}{34}$.

Вариант 38.

1. $\left(0;-\dfrac12\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt2};\dfrac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt2};-\dfrac{1}{\sqrt2}\right)$.

2. $\left(-\dfrac58;-\dfrac12\right)\cup\left[-\dfrac98+\sqrt{\dfrac{11}{8}};\dfrac38\right]\cup\left(\dfrac38;\dfrac12\right)$.

3. $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, $\operatorname{arctg}3+\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

4. $AF=2\sqrt3$, $CD=\dfrac{52}{5\sqrt3}$, $S=\dfrac25(36+\sqrt{451})$.

5. $b\in(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$.

6. $\rho(O,ABC)=\dfrac{5}{61}\sqrt{\dfrac{31}{2}}$, $\rho(O,CDS)=\dfrac{4\sqrt{434}}{183}$, $R=\dfrac{7\sqrt{311}}{122}$.

Вариант 39.

1. $x\in(-\infty;-5-\sqrt{87}]\cup(5;+\infty)$.

2. $(2;1)$, $(-2;-1)$, $\left(\dfrac12;1\right)$, $\left(-\dfrac12;-1\right)$.

3. $V=\dfrac{4a^3}{9\sqrt3}$, $\gamma=120^\circ$.

4. $x=-\dfrac{23\pi}{38}$.

5. $DN=12$, $AD=15$, $S=96$.

6. $a\in\left[-\dfrac72;-\dfrac32\right)\cup\left(-\dfrac32;\dfrac12\right]$.

7. 639 628, 639 639.

8. 4192.

Вариант 40.

1. $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

2. $x\in(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

3. $a=-\dfrac{13}{3}$, $a=\dfrac73$.

4. $r=2$, $R=3$.

5. 382 347, 382 356, 382 365.

6. а) $V_{SAA_1B_1B}:V=2:3$, б) $SC=2$, в) $S=\dfrac{39\sqrt3}{4}$.

7. $(35;7)$, $\left(11;\dfrac{11}{5}\right)$.

8. 31 200.

Вариант 41.

1. $x = 1$.

2. $x \in [5; 6)$.

3. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. 216.

5. $S = 28\sqrt{15}$, $R = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{5}}$.

6. $4 \leqslant a < 6$.

7. а) 0; б) 1 : 2; в) 4.

8. 384.

Вариант 42.

1. $x = -1$, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$.

2. $x = \frac{5\pi}{2} + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3. $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

4. 219.

5. $CD = 8$; $AB = \frac{32\sqrt{2}}{9}$; $S = \frac{128\sqrt{2}}{9}$.

6. $a = 0$; $a = 7{,}5$.

7. $AK : KA_1 = 27 : 1$, $BN : NB_1 = 3 : 4$ или $AK : KA_1 = 3 : 4$, $BN : NB_1 = 27 : 1$.

8. 540.

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Шабунин Михаил Иванович — доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики МФТИ, автор свыше двухсот научных и учебно-методических работ, один из авторов учебников алгебры для 7–11 классов средней школы, учебников и сборников задач по математическому анализу и теории функций комплексного переменного для студентов вузов, автор многих пособий для абитуриентов.

Заслуженный работник высшей школы РФ, лауреат премии Правительства Российской Федерации в области образования за 2002 год, член Научно-методического Совета по математике Министерства образования и науки РФ, заслуженный профессор МФТИ.

В пособии представлены:

- Теория
- Примеры с решениями
- Задачи с ответами и указаниями
- Варианты вступительных экзаменов