Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике,

Москва, декабрь 2020 года

В 7–8 классах продолжительность олимпиады — 90 минут. Для каждого номера задания составители подготовили несколько версий задач. Под каждым номером участнику случайным образом выдавалась одна из версий. Таким образом, у каждого школьника был свой вариант олимпиады. Далее для каждого номера, кроме 7.6 и 7.8, приведена одна версия задачи с решением.

7 класс

7.1. Нарисуйте ряд из 11 кружочков, каждый из которых либо красный, либо синий, либо зелёный. Причём из любых трёх идущих подряд кружочков должен быть хотя бы один красный, из любых четырёх идущих подряд кружочков должен быть хотя бы один синий, а зелёных должно быть больше половины. Сколько красных кружочков у Вас получилось?

Ответ: 3 красных кружочка.

Указание. Кружочки расположены только так: ЗЗКСЗКЗСКЗЗ.

Решение. (1) Можно выделить три непересекающиеся тройки кружочков, в каждой из них хотя бы один красный кружочек. Значит, красных кружочков не меньше трёх. (2) Можно выделить две непересекающиеся четвёрки кружочков, в каждой из них хотя бы один синий кружочек. Значит, синих кружочков не меньше двух. (3) Из условия следует, что зелёных кружочков не меньше шести. (4) Так как $3 + 2 + 6 = 11$, то все сделанные ограничения должны обращаться в равенства. В частности, красных кружочков 3 штуки.

7.2. Представьте число 32 как произведение трёх целых множителей, сумма которых равна 3. Чему равен меньший из множителей?

Ответ: -4.

Пример: $32 = (-4) \cdot (-1) \cdot 8$.

Решение. Указанное разложение единственное. Это можно доказать.

Если все три сомножителя положительны, то наибольший из них не меньше 4, а сумма больше 3, что противоречит условию. Значит, два из множителей отрицательны, а третий положителен.

Число 32 имеет только один нечётный множитель, а сумма трёх множителей нечётна. Значит, один из них равен $+1$ или -1. Из предыдущего замечания следует, что это множитель -1. Далее несложно перебрать: $32 = (-1) \cdot (-2) \cdot 16 = (-1) \cdot (-4) \cdot 8 = (-1) \cdot (-16) \cdot 2 = (-1) \cdot (-8) \cdot 4$. Подходит только второй вариант.

7.3. В шляпе лежат три карточки: синяя, зелёная, красная. Пете, Васе и Толе дали по одной из них и попросили назвать цвета. Петя сказал «синяя», Вася — «синяя», Толя — «зелёная». После этого карточки опять скинули в шляпу и раздали заново. Теперь Петя сказал «синяя», Вася — «зелёная», Толя — «зелёная». Оказалось, что каждому мальчику доставались карточки разных цветов, и каждый раз ровно один ребёнок обманывал. Определите, какую карточку не видел Петя, какую — Вася и какую — Толя.

Ответ: Петя — зелёную, Вася — красную, Толя — синюю.

Петя	Вася	Толя
синяя	синяя	зеленая
синяя	зеленая	зеленая

Решение. И Петя, и Толя оба раза называли один и тот же цвет, а доставались им разные карточки. Значит, именно они обманывали по одному разу. Следовательно, Вася говорил правду: у него была сначала синяя карточка, потом зелёная. Значит, первый раз соврал Петя, ему досталась красная карточка; второй раз соврал Толя, ему досталась красная карточка.

У Пети были красная и синяя карточки, не было зелёной.
У Васи были синяя и зелёная карточки, не было красной.
У Толи были зелёная и красная карточки, не было синей.

Комментарий. Другие вариации задачи отличаются только названиями цветов и именами персонажей.

7.4. В таблицу, содержащую A столбцов и 100 строк, вписали по строкам натуральные числа от 1 до $100 \cdot A$ в порядке возрастания, начиная с первой строки. Число 31 стоит в пятой строке. В какой строке число 100?

Ответ: в 15-й строке.

Решение. Из условия следует, что $A \leq 7$, так как при $A \geq 8$ число 31 находилось бы раньше пятой строки. Аналогично получаем, что $A \geq 7$, иначе число 31 стояло бы позже пятой строки. Следовательно, $A = 7$. Так как $100 = 7 \cdot 14 + 2$, то число 100 находится в 15-й строке.

7.5. В деревне Матитика вдоль прямой дороги живут (в указанном порядке) пять подружек: Аля, Белла, Валя, Галя и Диля. Каждая из них нашла сумму расстояний (в метрах) от её дома до домов остальных. Белла назвала число 700, Валя — 600, Галя — 650. Сколько метров между домами Беллы и Гали?

Ответ: 150 метров.

Решение. Обозначим дома подружек соответственно буквами А, Б, В, Г, Д.

Легко увидеть, что суммарное расстояние от Б до остальных домов равно АБ + 3БВ + 2ВГ + ГД, а от В до остальных домов — АБ + 2БВ + 2ВГ + ГД. Эти величины отличаются на БВ, поэтому расстояние между домами Б и В равно 700 – 600 = 100 метров.

Аналогично расстояние между домами В и Г равно 650 − 600 = 50 метров.

Следовательно, расстояние между домами Б и Г равно 100 + 50 = 150 метров.

Комментарий. Аналогично рассуждая, можно получить следующий результат: если Белла назвала число x, Валя — y, Галя — z, то расстояние между домами Беллы и Гали равно $x + z - 2y$ метров.

7.6. А) На поле игры «Сапёр» в некоторых клетках стоит по одной мине. В остальных клетках расставлены числа, равные количеству мин в соседних (по стороне или углу) клетках. На поле 9 × 6 известны некоторые числа, как показано на рисунке.

	1			2			1	
1		1	1		1	1		1
1	1		1	1	1		1	1

Сколько мин на этом поле? Найдите все варианты.

Ответ: 7 мин.

Решение. Обозначим горизонтали и вертикали поля, как показано на рисунке. В клетки, где есть мина, будем ставить знак «+», а где её точно быть не может — знак «−».

Рассмотрим мину, которой соответствует единица в e1. Предположим, что она находится не в e2, а, например, в d2. Тогда на клетках e2 и f2 мин быть не может, поэтому мина, соответствующая единице в f1, стоит либо в g1, либо в g2. Но в одной из клеток h2 или i2 тоже есть мина, соответствующая единице в i1. Таким образом, рядом с клеткой h1 находятся две мины, а должна быть одна. Из полученного противоречия следует, что мина находится в e2. Рядом с ней написано несколько единиц, отметим минусами все клетки, которые соседствуют с этими единицами (см. рисунок).

6									
5		1			2			1	
4			–	–	–	–	–		
3	1		1	1	–	1	1		1
2			–	–	+	–	–		
1	1	1	–	1	1	1	–	1	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

Рассмотрим мины, которые соответствуют единицам в a1 и c3. Они находятся также рядом с a3, а так как там написана единица, то это на самом деле одна и та же мина, которая может стоять только в b2. Аналогично мина стоит в h2. Теперь мы можем отметить ещё несколько клеток минусами (см. рисунок).

6									
5		1			2			1	
4	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	1	–	1	1	–	1	1	–	1
2	–	+	–	–	+	–	–	+	–
1	1	1	–	1	1	1	–	1	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

Осталось заметить, что в каждом из следующих наборов (a5, a6, b6, c6, c5) и (g5, g6, h6, i6, i5) ровно одна клетка должна содержать мину, а в наборе (d5, d6, e6, f6, f5) — две клетки, поэтому общее количество мин на поле равно семи.

Б) На поле игры «Сапёр» в некоторых клетках стоит по одной мине. В остальных клетках расставлены числа, равные количеству мин в соседних (по стороне или углу) клетках. На поле 9 × 6 известны некоторые числа, как показано на рисунке. Сколько мин на этом поле? Найдите все варианты.

	2			1			2	
2		1		1		1		2
	1	1	1		1	1	1	

Ответ: 8 мин.

Указание. Расположение мин показано на рисунке. Ещё по одной мине в наборах (a5, a6, b6, c6, c5) и (g5, g6, h6, i6, i5), а также две мины в наборе (e1, e2, e4, d5, d6, e6, f6, f5).

6									
5		2			1			2	
4	+	–	–	–		–	–	–	+
3	2	–	1	–	1	–	1	–	2
2	–	+	–	–		–	–	+	–
1	–	1	1	1		1	1	1	–
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

В) На поле игры «Сапёр» в некоторых клетках стоит по одной мине. В остальных клетках расставлены числа, равные количеству мин в соседних (по стороне или углу) клетках. На поле 9 × 6 известны некоторые числа, как показано на рисунке. Сколько мин на этом поле? Найдите все варианты.

	2		1	1	1		2	
	1	2	1		1	2	1	
1	1		1		1		1	1

Ответ: 9 мин.

Указание. Расположение мин показано на рисунке. Ещё по две мины в наборах (a5, a6, b6, c6, c5) и (g5, g6, h6, i6, i5), а также одна мина в наборе (d6, e6, f6).

6									
5		2		1	1	1		2	
4	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	–	1	2	1	–	1	2	1	–
2	–	+	–	+	–	+	–	+	–
1	1	1	–	1	–	1	–	1	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

Г) На поле игры «Сапёр» в некоторых клетках стоит по одной мине. В остальных клетках расставлены числа, равные количеству мин в соседних (по стороне или углу) клетках. На поле 9 × 6 известны некоторые числа, как показано на рисунке. Сколько мин на этом поле? Найдите все варианты.

1	2			2			2	1
	1		1	1	1		1	
1	1	2		2		2	1	1

Ответ: 10 мин.

Указание. Расположение мин показано на рисунке. Ещё по две мины в наборах (a6, b6, c6, c5) и (g5, g6, h6, i6), а также одна мина в наборе (e1, e2, e4, d5, d6, e6, f6, f5).

6									
5	1	2			2			2	1
4	–	–	–	–	+	–	–	–	–
3	–	1	–	1	1	1	–	1	–
2	–	+	–	–	–	–	–	+	–
1	1	1	2	+	2	+	2	1	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

7.7. Петя рассказал Мише, что в его классе ровно две трети всех девочек — блондинки, ровно седьмая часть мальчиков — блондины, а всего со светлыми волосами треть класса. Миша сказал: «Ты как-то рассказывал, что у вас в классе не более 40 человек. О! Я знаю, сколько у вас в классе девочек!» Сколько?

Ответ: 12 девочек.

Решение. Пусть в классе x девочек и y мальчиков. Из условия задачи следует соотношение

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{7}y = \frac{1}{3}(x + y),$$

которое после его преобразования принимает вид $7x = 4y$.

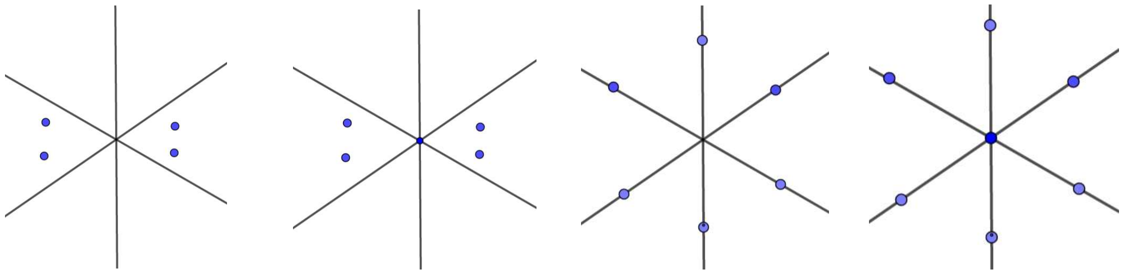
Из условия и полученного соотношения следует, что число x делится на 3 и на 4, поэтому делится на 12. Пусть $x = 12n$, где n — натуральное число. Из полученного равенства следует, что $y = 21n$.

Значит, в классе $x + y = 12n + 21n = 33n$ учеников. По условию это число не больше 40, значит, $n = 1$. В классе $x = 12n = 12$ девочек.

7.8. А) На плоскости изображены три прямые и n точек так, что по обе стороны от каждой прямой находится ровно по две точки (точки, лежащие на самой прямой, не относятся ни к одной из сторон). При каких значениях n такое возможно?

Ответ: при n, равном 4, 5, 6 или 7.

Решение. Подсчитаем, сколько точек лежит на указанных прямых. Так как для каждой прямой четыре точки не лежат на ней, то на прямой должно быть $n - 4$ точки. При этом либо все три прямые пересекаются в одной точке, и если это одна из отмеченных точек, то мы учли её трижды, либо прямые пересекаются не более чем в трёх точках, и если какие-нибудь из них отмечены, то такие точки мы учли дважды. Следовательно, всего на прямых лежит не менее $3(n - 4) - 3 = 3n - 15$ точек. С другой стороны, их не больше чем n, поэтому $3n - 15 \leq n$, откуда следует, что $n \leq 7$. Также понятно, что точек не меньше четырёх. По одному примеру для каждого значения n от 4 до 7 приведено на рисунке.

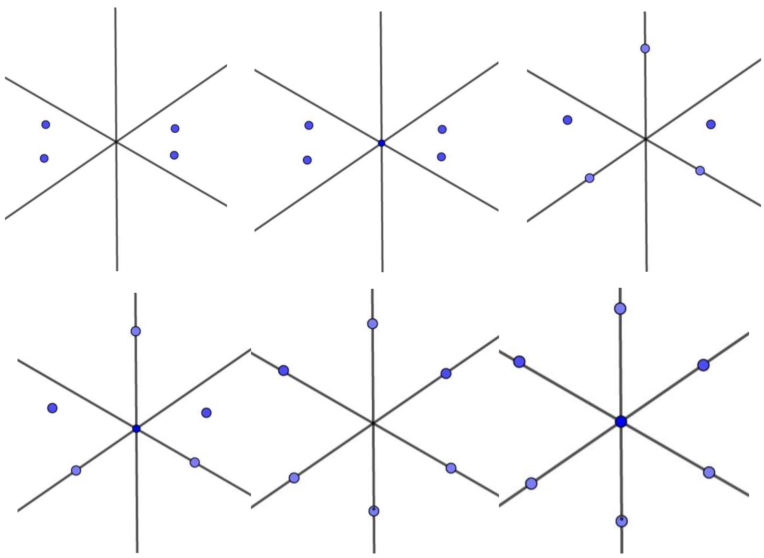


Б) На плоскости изображены три прямые, пересекающиеся в одной точке, и несколько точек так, что по обе стороны от каждой прямой находится ровно по две точки (точки, лежащие на самой прямой, не относятся ни к одной из сторон). При этом на прямых суммарно лежит n точек. При каких значениях n такое возможно?

Ответ: при n, равном 0, 1, 3, 4, 6 или 7.

Решение. Пусть отмечено m точек, из которых n штук лежат на прямых. Для каждой прямой 4 точки не лежат на ней и $m - 4$ точки лежат на прямой. Если точка пересечения прямых не отмечена, то $n = 3(m - 4)$, а если отмечена, то мы учли её трижды и $n = 3(m - 4) - 2$. Таким образом, число n либо делится на 3, либо при делении на 3 даёт остаток 1. Также $n = 3(m - 4) - 2 \leq m$, а значит $m \leq 7$. Следовательно, и $n \leq 7$, то есть на прямых суммарно может лежать 0, 1, 3, 4, 6 или 7 точек. По одному примеру для каждого из этих значений приведено на рисунке.

Примечание. То, что общее количество точек не больше семи, можно доказать и по-другому. Если отмечено не менее 8 точек, то на каждой прямой лежит не менее 4 из них. Рассмотрим любую прямую из трёх. Вне её на второй прямой лежат по крайней мере 3 точки и на третьей лежат по крайней мере 3 точки, всего не менее 6 точек. Такое невозможно.



8 класс

8.1. Представьте число 36 как произведение трёх целых множителей, сумма которых равна 4. Чему равен меньший из множителей?

Ответ: −4.

Пример: $36 = (-4) \cdot (-1) \cdot 9$.

Решение. Указанное разложение единственное. Это можно доказать.

Если все три сомножителя положительны, то наибольший из них не меньше 4 (так как $3^3 < 36$), а сумма больше 4, что противоречит условию. Значит, два из множителей отрицательны, а третий положителен.

Тогда положительный сомножитель равен 9. Действительно, если он не больше 6, то сумма модулей двух других больше 2; если он не меньше 12, то сумма модулей двух других меньше 8. Тогда два отрицательных сомножителя равны либо −4 и −1, либо −2 и −2. Условию удовлетворяет только первый вариант.

8.2. Вася заменил в двух числах одинаковые цифры одинаковыми буквами, разные — разными. Получилось, что число ЗАРАЗА делится на 4, а АЛМАЗ делится на 28. Найдите две последние цифры суммы ЗАРАЗА + АЛМАЗ.

Ответ: 32.

Решение. Из условия следует, что числа ЗАРАЗА и АЛМАЗ делятся на 4. По свойству делимости на 4 числа ЗА и АЗ тоже кратны 4. В частности, из этого следует, что обе цифры З и А чётны. Но число, делящееся на 4, в котором предпоследняя цифра чётна, должно оканчиваться на цифру, кратную 4. Значит, обе цифры З и А кратны 4. Так как они ненулевые (на них начинаются числа ЗАРАЗА и АЛМАЗ), то одна из них равна 4, а вторая — 8.

Указанная сумма оканчивается на те же 2 цифры, что и ЗА + АЗ = 48 + 84 = 132, то есть на 32.

8.3. Дан параллелограмм $ABCD$, $\angle D = 100°$, $BC = 12$. На стороне AD есть такая точка L, что $\angle ABL = 50°$, $LD = 4$. Найдите длину CD.

Ответ: 8.

Решение**.** По свойству параллелограмма $\angle ABC = \angle D = 100°$, $AD = BC = 12$ и $CD = AB$. Значит, $\angle CBL = \angle ABC - \angle ABL = 100° - 50° = 50°$ и $AL = AD - LD = 12 - 4 = 8$. Так как $\angle ALB = \angle CBL$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BL) и $\angle CBL = \angle ABL = 50°$, получаем, что $\angle ALB = \angle ABL$, поэтому треугольник ABL равнобедренный и $AB = AL = 8$. Следовательно, $CD = AB = 8$.

8.4. В лес за грибами ходили четыре мальчика и три девочки. Каждый нашёл несколько грибов, всего они собрали 70 штук. Никакие две девочки не собрали поровну, а любые трое мальчиков принесли вместе не менее 43 грибов. У любых двоих детей число собранных грибов отличалось не более чем в 5 раз. Маша собрала больше всех из девочек. Сколько она принесла грибов?

Ответ: 5 грибов.

Решение**.** Любые трое мальчиков принесли вместе не менее 43 грибов, поэтому есть мальчик, собравший не менее 15 грибов (так как $14 \cdot 3 < 43$). Значит, этот мальчик и остальные трое собрали не менее $15 + 43 = 58$ штук.

Если есть мальчик, собравший не менее 15 штук, то любая девочка собрала не менее $15 : 5 = 3$ грибов. Значит, девочки собрали разное число грибов, то есть вместе не менее $3 + 4 + 5 = 12$ штук.

Так как $58 + 12 = 70$ — все собранные грибы, значит девочки собрали 3, 4 и 5 грибов, Маша принесла 5 штук.

8.5. Два графика линейных функций пересекаются при $x = 2$. При $x = 8$ значения отличаются на 8. При $x = 20$ значение одной из функций равно 100. Чему может быть равно значение другой функции?

Ответ: 76 или 124.

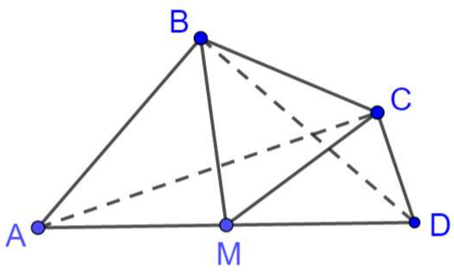
Решение 1. Пусть значение первой функции при увеличении аргумента на $8 - 2 = 6$ изменилось на d, тогда второй — на $d \pm 8$. От 2 до 20 аргумент возрастает на 18, что больше 6 в 3 раза. Значит, значение первой функции изменилось на $3d$, второй — на $3(d \pm 8) = 3d \pm 24$, они отличаются на $3d - 3d \pm 24 = \pm 24$. Значит, искомое значение второй функции равно 100 ± 24, то есть 76 или 124.

Решение 2. Пусть $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ — данные функции. По условию $2k_1 + b_1 = 2k_2 + b_2$, $(8k_1 + b_1) - (8k_2 + b_2) = \pm 8$, $20k_1 + b_1 = 100$. Нужно найти значение $20k_2 + b_2$.

Два первых соотношения перепишем как $2(k_1 - k_2) + (b_1 - b_2) = 0$ и $8(k_1 - k_2) + (b_1 - b_2) = \pm 8$, откуда $6(k_1 - k_2) = \pm 8$.
Тогда $20k_2 + b_2 = -20(k_1 - k_2) - (b_1 - b_2) + (20k_1 + b_1) =$
$= -\big(2(k_1 - k_2) + (b_1 - b_2)\big) - 3 \cdot 6(k_1 - k_2) + (20k_1 + b_1) =$
$= -0 - 3 \cdot (\pm 8) + 100 = 100 \pm 24.$

8.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ сторона BC вдвое меньше, чем AD. Диагональ AC перпендикулярна стороне CD, а диагональ BD перпендикулярна стороне AB. Найдите больший острый угол этого четырёхугольника, если меньший равен 36°.

Ответ: 84°.



Решение**.** Пусть точка M — середина стороны AD. Так как углы ABD и ACD прямые, то углы B и C четырёхугольника $ABCD$ тупые, углы A и D острые, как углы прямоугольных треугольников ABD и ACD. Пусть $\angle A = \alpha$ — данный угол, $\angle D = \beta$ — искомый угол.

Треугольники ABD и ACD — прямоугольные, то есть их медианы, проведённые к AD, равны половине гипотенузы, тогда $AM = BM = CM = DM = BC$. Отсюда следует, что (1) $\angle ABM = \alpha$ (так как ΔAMB равнобедренный), (2) $\angle DCM = \beta$ (так как ΔCMD равнобедренный), (3) $\angle CBM = \angle BCM = 60°$ (так как ΔBMC равносторонний).

Сумма углов четырёхугольника $ABCD$ равна 360°, значит, выполнено равенство $\alpha + (\alpha + 60°) + (\beta + 60°) + \beta = 360°$, откуда следует, что $\alpha + \beta = 120°$ или $\beta = 120° - \alpha$.

В данном случае если $\alpha = 36°$, то $\beta = 120° - \alpha = 120° - 36° = 84°$.

8.7. В городе Буквинске люди знакомы, только если в их именах есть одинаковые буквы, а иначе — нет. У нескольких жителей Буквинска спросили, сколько у них знакомых в городе. Мартин сказал, что 20, Клим — 15, Инна — 12, Тамара — 12. Что ответила Камилла?

Ответ: 15 знакомых.

Решение. Заметим, что все пять перечисленных в условии учеников знакомы друг с другом. Значит, у Мартина за пределами этой группы 16 знакомых, а у Инны и Тамары — по 8. Но все знакомые Инны знакомы с Мартином, и все знакомые Тамары тоже, при этом никаких других знакомых у Мартина нет. А так как 16 = 8 + 8, то за пределами нашей группы у Инны и Тамары нет общих знакомых. Их общими знакомыми могут быть только люди с буквой А в имени, следовательно, за пределами рассматриваемой группы таких людей нет. В таком случае Камилла знакома ровно с теми же людьми, с которыми знаком Клим (а также они знакомы друг с другом), то есть у неё 15 знакомых.

8.8. В клетках доски 8×8 расставлены натуральные числа от 1 до 64 (каждое по разу) так, что числа, отличающиеся на 1, стоят в соседних по стороне клетках. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на диагонали из левого нижнего в правый верхний угол?

Ответ: 88.

Решение. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Пусть рассматриваемая диагональ чёрная. Будем перемещаться по клеткам согласно расставленным числам. Рассмотрим момент, когда мы заняли последнюю клетку на диагонали. До этого мы должны были побывать на всех клетках с одной стороны от неё, поэтому посетили не менее 19 чёрных клеток (7 на диагонали и 12 с этой стороны). Так как при обходе доски белые и чёрные клетки чередуются, то мы посетили также не менее 19 белых клеток, то есть номер текущей клетки не меньше $2 \cdot 19 + 1 = 39$. Поскольку все клетки на диагонали имеют номера одной чётности, в остальных клетках номера не меньше 1, 3, …, 13. Таким образом, сумма чисел на диагонали не меньше $1 + 3 + \ldots + 13 + 39 = 88$. На рисунке показано, что данное значение достигается.

58	57	48	47	42	41	40	39
59	56	49	46	43	12	13	38
60	55	50	45	44	11	14	37
61	54	51	8	9	10	15	36
62	53	52	7	18	17	16	35
63	4	5	6	19	20	21	34
64	3	26	25	24	23	22	33
1	2	27	28	29	30	31	32