**Всероссийская олимпиада школьников по математике**
**Муниципальный этап 2020–2021 уч. г.**
**7 класс**

**7.1.** Средний рост 11 футболистов команды равен 182 см. Во время матча судья удалил с поля одного футболиста, и средний рост оставшихся стал 181 см. Каков рост удаленного футболиста?

**7.2.** Петя выписал на доске подряд все натуральные числа от 1 до $n$ и подсчитал количество всех написанных цифр. Оно оказалось равным 777. Чему равно $n$?

**7.3.** В мешочке для игры лото 90 бочонков с числами от 1 до 90. Какое наименьшее количество бочонков нужно вынуть наугад из мешочка, чтобы гарантированно получить бочонок с числом, делящимся на 3 или на 5 (или на 3 и 5 одновременно)?

**7.4.** Сколько существует шестизначных натуральных чисел, у каждого из которых соседние цифры имеют разную чётность?

**7.5.** Коля начертил $n$ отрезков и отметил красным цветом все точки их пересечения. Могло ли оказаться так, что на любом отрезке ровно три красных точки, если **а)** $n=11$; **б)** $n=100$?

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**
**Муниципальный этап 2020–2021 уч. г.**
**8 класс**

**8.1.** Петя выписал на доске подряд все натуральные числа от 1 до $n$ и подсчитал количество всех написанных цифр. Оно оказалось равным 777. Чему равно $n$?

**8.2.** В мешочке для игры лото 90 бочонков с числами от 1 до 90. Какое наименьшее количество бочонков нужно вынуть наугад из мешочка, чтобы гарантированно получить бочонок с числом, делящимся на 3 или на 5 (или на 3 и 5 одновременно)?

**8.3.** Числа $a, b, c$ удовлетворяют соотношению $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Найдите $(a+b)(b+c)(a+c)$.

**8.4.** В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ диагонали пересекаются в точке $M$. Оказалось, что $AB=DM$ и $\angle ABD=\angle CBD$. Докажите, что **а)** $\angle BAD > 60^\circ$; **б)** $AB>BC$.

**8.5.** Коля начертил 10 отрезков и отметил красным цветом все точки их пересечения. Подсчитав красные точки, он заметил такое свойство: на каждом отрезке красных точек равно три. **а)** Приведите пример расположения 10 отрезков с данным свойством**.** **б)** Каким может быть наибольшее количество красных точек для 10 отрезков с данным свойством?

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**
**Муниципальный этап 2020–2021 уч. г.**
**9 класс**

**9.1**. Существуют ли такие три положительных числа $a$, $b$, $c$, что каждый из трех квадратных трехчленов $ax^2+bx+c$, $bx^2+cx+a$, $cx^2+ax+b$ имеет хотя бы один корень?

**9.2.** Числа $a, b, c$ удовлетворяют соотношению $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Найдите $(a+b)(b+c)(a+c)$.

**9.3**. Из натуральных чисел 1, 2, …, 101 выбирают группу чисел так, чтобы наибольший общий делитель любых двух чисел из группы был больше двух. Каким может быть наибольшее количество чисел в такой группе?

**9.4**. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ диагонали пересекаются в точке $M$. Оказалось, что $AB=DM$ и $\angle ABD=\angle CBD$. Докажите, что **а)** $\angle BAD > 60^\circ$; **б)** $AB>BC$.

**9.5.** На плоскости расположено 99 отрезков и отмечены все точки их пересечения. Могло ли оказаться так, что **а)** на любом отрезке ровно три отмеченных точки? **б)** каждый отрезок пересекается ровно с тремя другими отрезками?

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**
**Муниципальный этап 2020–2021 уч. г.**
**10 класс**

**10.1**. Существуют ли такие три положительных числа $a$, $b$, $c$, что каждый из трех квадратных трехчленов $ax^2+bx+c$, $bx^2+cx+a$, $cx^2+ax+b$ имеет хотя бы один корень?

**10.2**. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $4x^2y^2=4xy+3$.

**10.3**. Из натуральных чисел 1, 2, …, 1001 выбирают группу чисел так, чтобы наибольший общий делитель любых двух чисел из группы был больше двух. Каким может быть наибольшее количество чисел в такой группе?

**10.4.** Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой квадрат натурального числа.

**10.5.** Дан треугольник $ABC$, у которого $\angle A = 40°$, $\angle C = 20°$. Докажите, что длина биссектрисы, проведенной из вершины $B$, равна $AC - BC$.

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**
**Муниципальный этап 2020–2021 уч. г.**
**11 класс**

**11.1.** Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $4x^2y^2=4xy+3$.

**11.2**. Решите уравнение $\sqrt{-x^2+x+2}\cdot(\sin 2x-\pi\cos x)=0$.

**11.3.** Сколько на параболе $y=x^2$ точек (отличных от начала координат), таких, что касательная в них пересекает обе координатные оси в точках с целочисленными координатами, не превосходящими по абсолютной величине 2020?

**11.4.** Дан тетраэдр $SABC$ со взаимно перпендикулярными рёбрами $SA$, $SB$, $SC$. Пусть $O$ – центр сферы, описанной около тетраэдра. Докажите, что точки $S$ и $O$ лежат по разные стороны от плоскости $ABC$.

**11.5.** Найдите множество значений функции $y=\sqrt{x}-\sqrt{2-x}+2\sin x$.