Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап 2020–2021 уч. г. Решения задач.

7 класс

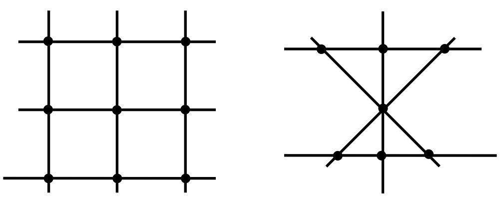
7.1. Средний рост 11 футболистов команды равен 182 см. Во время матча судья удалил с поля одного футболиста, и средний рост оставшихся стал 181 см. Каков рост удаленного футболиста?
Ответ: l92 см. **Решение**. Пусть S – сумма, которая получится, если сложить для 10 оставшихся футболистов их рост. Тогда $\frac{S}{10}=181$ и $\frac{S+x}{11}=182$, где x – рост удаленного футболиста. Отсюда $S=1810$ и $x=182\cdot 11-S=2002-1810=192$.

7.2. Петя выписал на доске подряд все натуральные числа от 1 до n и подсчитал количество всех написанных цифр. Оно оказалось равным 777. Чему равно n?
Ответ. 295. **Решение**. Поскольку выписано всего 777 цифр, то n должно быть трехзначным числом: действительно, в случае двузначного n было бы выписано не более $9 + 2\cdot 90 = 189$ цифр, а в случае четырехзначного (или более) – было бы выписано более $9 + 2\cdot 90 + 3\cdot 900 = 2889$ цифр. Пусть k – количество выписанных трехзначных чисел ($k = n - 99$). Тогда общее количество выписанных цифр равно $9 + 2\cdot 90 + 3\cdot k = 777$. Отсюда $k = 196$, а $n = k + 99 = 295$.

7.3. В мешочке для игры лото 90 бочонков с числами от 1 до 90. Какое наименьшее количество бочонков нужно вынуть наугад из мешочка, чтобы гарантированно получить бочонок с числом, делящимся на 3 или на 5 (или на 3 и 5 одновременно)?
Ответ: 49. **Решение**. Будем называть *желательными* числа, делящиеся на 3 или на 5. Количество чисел от 1 до 90, делящихся на 3, равно 30 (=90:3), а делящихся на 5 – равно 18 (=90:5). Если сложить 30+18=48, то при этом будут учтены по одному разу все числа, делящиеся только на 3 и только на 5, и дважды будут учтены числа, делящиеся одновременно на 3 и на 5, т.е. делящиеся на 15. Количество таких (дважды учтенных чисел) равно 6=90:15. Поэтому, вычитая 48 – 6, получим 42 желательных числа. Остальные 48 нежелательных чисел (=90 – 42) могли оказаться на вынутых сначала бочонках, но тогда 49-й вынутый бочонок гарантированно будет желательным.

7.4. Сколько существует шестизначных натуральных чисел, у каждого из которых соседние цифры имеют разную чётность?
Ответ: 28125. **Решение.** Если первая (старшая) цифра чётная, то её можно выбрать одним из четырёх способов (2, 4, 6, 8), а все последующие – одним из пяти (возможные кандидаты для второй, четвёртой и шестой цифры – это 1, 3, 5, 7, 9, а для третей и пятой – 0, 2, 4, 6, 8). В итоге по правилу произведения будем иметь всего $4\cdot 5^5 = 12500$ чисел с первой четной цифрой. Аналогично, в случае нечётной первой цифры получим $5\cdot 5^5 = 15625$ чисел. Итак, общее количество искомых чисел равно 28125. ***Замечание.*** Можно получить тот же результат, если сразу воспользоваться правилом произведения. Первую цифру можно выбрать девятью способами (взяв любую цифру, кроме 0), после этого вторую цифру можно выбрать пятью способами (взяв любую цифру, у которой четность отлична от четности первой цифры), и так далее: следующие цифры можно выбирать пятью способами (причем количество способов не зависит от предыдущих цифр). Поэтому по правилу произведения получаем результат: $9\cdot 5^5$.

7.5. Коля начертил n отрезков и отметил красным цветом все точки их пересечения. Могло ли оказаться так, что на любом отрезке ровно три красных точки, если **а)** $n = 11$; **б)** $n = 100$?
Ответ: а) могло; **б)** могло. **Решение. а)** См. пример на рисунке. Набор отрезков в этом примере состоит из двух частей: в левой части 6 отрезков, в правой – 5. **б)** Если расположить 20 копий правой части примера из пункта **а),** получим искомое расположение 100 отрезков.



8 класс

8.1. Петя выписал на доске подряд все натуральные числа от 1 до n и подсчитал количество всех написанных цифр. Оно оказалось равным 777. Чему равно n?
Ответ. 295. **Решение**. См. задачу 7.2.

8.2. В мешочке для игры лото 90 бочонков с числами от 1 до 90. Какое наименьшее количество бочонков нужно вынуть наугад из мешочка, чтобы гарантированно получить бочонок с числом, делящимся на 3 или на 5 (или на 3 и 5 одновременно)?

Ответ: 49. **Решение.** См. задачу 7.3.

8.3. Числа *a, b, c* удовлетворяют соотношению $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Найдите $(a+b)(b+c)(a+c)$.

Ответ. 0. **Решение**. Перенесем $\frac{1}{a}$ в правую часть, получим $\frac{b+c}{bc}=\frac{-(b+c)}{a(a+b+c)}$. Если $b+c\neq 0$, то будем иметь (домножив на знаменатель)

$$a^2+ab+ac+bc=0 \Leftrightarrow a(a+b)+c(a+b)=0 \Leftrightarrow (a+b)(a+c)=0.$$

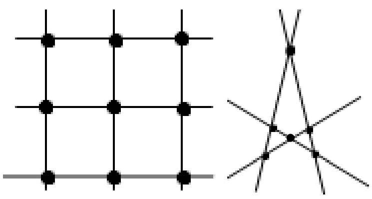
Итак, в любом случае $(a+b)(b+c)(a+c)=0$.

8.4. В трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* диагонали пересекаются в точке *M*. Оказалось, что *AB*=*DM* и $\angle ABD=\angle CBD$. Докажите, что **а)** $\angle BAD>60^\circ$; **б)** *AB*>*BC*.

Решение. **а**). Из условий задачи следует, что *AB* = *AD*, поскольку $\angle DBA=\angle DBC=\angle BDA$ (т.к. $AD \parallel BC$) и значит, ΔABD равнобедренный. Обозначим $\beta=\angle ABD=\angle BDA=\angle DBC$, $\alpha=\angle BAD$. Тогда $\alpha>\beta$, т.к. в треугольнике *ABD* против угла α лежит сторона *BD* > *MD* = *AB*. Поэтому $180^\circ=\alpha+2\beta<3\alpha$ и значит, $\alpha>60^\circ$. **б**) Далее, заметим, что угол *AMB* тупой: действительно, проекция A_1 точки *A* на диагональ *DB* лежит между точками *D* и *M*, т.к. в противном случае длина *MD* не превосходила бы $A_1D<AD$, что противоречит равенству *AD*=*AB*=*MD*. По свойству внешнего угла *AMB* для треугольника *MBC* и внешнего угла *CMB* для треугольника *AMB* неравенство $\angle AMB>\angle BMC$ запишется в виде $\beta+\angle BCM>\beta+\angle BAM$. Таким образом, $\angle BCA>\angle BAC$ и поэтому *AB* > *BC*.

8.5. Коля начертил 10 отрезков и отметил красным цветом все точки их пересечения. Подсчитав красные точки, он заметил такое свойство: на каждом отрезке красных точек равно три. **а)** Приведите пример расположения 10 отрезков с данным свойством**. б)** Каким может быть наибольшее количество красных точек для 10 отрезков с данным свойством?

Ответ: б) 15. **Решение. а)** См. пример на рисунке. В качестве другого примера можно взять две копии правой части рисунка из задачи 7.5. **б)** Приведенный на рисунке пример показывает, что можно получить 15 красных точек. Докажем, что это – максимально возможное число. Занумеруем все 10 отрезков и около каждой красной точки запишем номера отрезков, которым она принадлежит. Поскольку красная точка принадлежит как минимум двум отрезкам, то суммарное количество записанных номеров не менее 2*N*, где *N* –число красных точек (номера записаны не по одному разу). Но по условию каждый номер отрезка записан у трех красных точек, т.е. всего записано ровно 30 номеров (каждый из 10 номеров отрезков записан трижды). Значит, $2N\le 30$, т.е. $N\le 15$. *Замечание.* Из доказательства следует, что максимум *N* = 15 достигается только в том случае, когда каждая красная точка принадлежит ровно двум отрезкам (во втором примере из п. а), где есть точки пересечения трех отрезков, *N* = 14).



9 класс

9.1. Существуют ли такие три положительных числа *a, b, c*, что каждый из трех квадратных трехчленов ax^2+bx+c, bx^2+cx+a, cx^2+ax+b имеет хотя бы один корень?

Ответ: не существуют. **Решение**. Предположим, от противного, что такие *a, b, c* существуют. Тогда, рассматривая дискриминанты трехчленов, получим $b^2\ge 4ac$, $c^2\ge 4ab$, $a^2\ge 4bc$. Перемножив эти три неравенства (с положительными частями) и сократив на $a^2b^2c^2$, будем иметь $1\ge 64$. Противоречие доказывает наше утверждение. *Другой способ решения* – следующий. Пусть, для определённости, $a\le b\le c$, тогда для квадратного трехчлена cx^2+ax+b получим противоречивое двойное неравенство $a^2\ge 4bc\ge 4a^2$.

9.2. Числа *a, b, c* удовлетворяют соотношению $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Найдите $(a+b)(b+c)(a+c)$.

Ответ. 0. **Решение**. См. задачу 8.3.

9.3. Из натуральных чисел 1, 2, …, 101 выбирают группу чисел так, чтобы наибольший общий делитель любых двух чисел из группы был больше двух. Каким может быть наибольшее количество чисел в такой группе?

Ответ. 33. **Решение**. *Оценка.* Разобьем числа 1,2,…,101 на 34 множества: $A_0=\{1,2\}, A_1=\{3,4,5\}$, $A_2=\{6,7,8\},\ldots,A_{33}=\{99,100,101\}$ (т.е. A_k при $k\ge1$ состоит из трех чисел $3k, 3k+1, 3k+2$). В искомой группе чисел не может быть числа из A_0 (иначе НОД двух чисел из группы, одно из которых принадлежит A_0, был бы ≤ 2), а из каждого A_k при $k\ge1$ в группу может попасть не более одного числа, т.к. в противном случае, если в группу попадут соседние числа, то их НОД $=1$, а если попадут числа $3k$ и $3k+2$, то их НОД ≤ 2 (поскольку их разность равна 2). Значит, всего чисел в искомой группе не большее 33 (не более, чем по одному из каждого A_k для $k\ge1$). *Пример.* Рассмотрим группу чисел $\{3,6,9,\ldots,99\}$: в этой группе 33 числа и все они делятся на 3.

9.4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке M. Оказалось, что $AB=DM$ и $\angle ABD=\angle CBD$. Докажите, что **а)** $\angle BAD>60^\circ$; **б)** $AB>BC$.

Решение. См. задачу 8.4.

9.5. На плоскости расположено 99 отрезков и отмечены все точки их пересечения. Могло ли оказаться так, что **а)** на любом отрезке ровно три отмеченных точки? **б)** каждый отрезок пересекается ровно с тремя другими отрезками?

Ответ: а) могло**; б)** не могло. **Решение**. **а)** Пример расположения можно привести, например, такой: сделаем 19 копий пяти отрезков правой части в рисунке задачи 7.5 и добавим четыре отрезка правой части в рисунке задачи 8.5. **б)** Предположим, от противного, что такое расположение существует. Рассмотрим граф (схему) пересечений данных 99 отрезков: вершины графа соответствуют отрезкам, а ребра (связи) между вершинами проводятся, когда соответствующие отрезки пересекаются. По условию задачи, каждая из 99 вершин графа соединена ребрами ровно с тремя другими. Каждое ребро графа соединяет две вершины, поэтому общее количество ребер равно $\frac{99\cdot 3}{2}$ (т. к. при подсчете в виде $99\cdot3$ каждое ребро учтено дважды). Получили нецелое число ребер, и значит, такого расположения не существует.

10 класс

10.1. Существуют ли такие три положительных числа a, b, c, что каждый из трех квадратных трехчленов ax^2+bx+c, bx^2+cx+a, cx^2+ax+b имеет хотя бы один корень?

Ответ: не существуют. **Решение**. См. задачу 9.1.

10.2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $4x^2y^2=4xy+3$.

Решение. Данное уравнение приведем к эквивалентному: $(2xy-1)^2=4 \Leftrightarrow 2xy=1\pm2$. Таким образом, искомое множество точек состоит из двух гипербол $y=\frac{3/2}{x}$ и $y=\frac{-1/2}{x}$ (в каждом квадранте будет по одной ветви соответствующей гиперболы).

10.3. Из натуральных чисел 1, 2, …, 1001 выбирают группу чисел так, чтобы наибольший общий делитель любых двух чисел из группы был больше двух. Каким может быть наибольшее количество чисел в такой группе?

Ответ. 333. **Решение**. См. аналогичную задачу 9.3.

10.4. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой квадрат натурального числа.

Ответ. 986431. **Решение.** Очевидно, среди этих цифр нуля нет. Далее, имеем $1\cdot2\cdot\ldots\cdot9=2^7\cdot3^4\cdot5^1\cdot7^1$. Поэтому надо убрать цифры 5, 7, а также нужно нечетную степень двойки сделать четной. Значит, надо убрать цифру 2: очевидно, не следует убирать цифры 6 и 8, т.к. нам нужен максимальный результат. Ясно, что оставшиеся цифры нужно расположить в порядке убывания: 986431. В результате получим произведение этих цифр, равное $5184=(72)^2$.

10.5. Дан треугольник ABC, у которого $\angle A=40°$, $\angle C=20°$. Докажите, что длина биссектрисы, проведенной из вершины B, равна $AC-BC$.

Решение. Пусть BM – биссектриса угла B. Достроим ΔABC до равнобедренного треугольника ADC, продолжив отрезок CB за точку B так, что $CD=CA$ (очевидно, $CB<CA$, т.к. угол B больше угла A). Имеем:

$\angle DBA == 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$ по свойству внешнего угла. Значит, $\angle ABM = \angle MBC = 60^\circ = \angle DBA$. Далее, $\angle DAC = \dfrac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$, $\angle DAB = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$. Значит, треугольники *ABM* и *ABD* равны (по общей стороне *AB* и равным прилежащим углам). Тогда $DB = BM$ и поэтому $BM = CD - BC = AC - BC$.

11 класс

11.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $4x^2y^2 = 4xy + 3$.

Решение. См. задачу 10.2

11.2. Решите уравнение $\sqrt{-x^2 + x + 2} \cdot (\sin 2x - \pi \cos x) = 0$.

Ответ. $x_1 = -1;\ x_2 = 2;\ x_3 = \dfrac{\pi}{2}$. **Решение.** Подкоренное выражение $-x^2 + x + 2$ даёт два корня $x_1 = -1;\ x_2 = 2$ и определяет ОДЗ: $-1 \le x \le 2$. Приравнивая к нулю скобку $\sin 2x - \pi \cos x = \cos x(2\sin x - \pi)$, получаем совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$. Первое уравнение совокупности с учетом ОДЗ дает $x = \dfrac{\pi}{2}$, а второе решений не имеет, т.к. $\dfrac{\pi}{2} > 1$.

11.3. Сколько на параболе $y = x^2$ точек (отличных от начала координат), таких, что касательная в них пересекает обе координатные оси в точках с целочисленными координатами, не превосходящими по абсолютной величине 2020?

Ответ: 44. **Решение.** Уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке (x_0, y_0), где $y_0 = x_0^2$, есть $y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$. Отсюда находим координаты точек пересечения касательной с осями, а именно $x_1 = \dfrac{x_0}{2}$, $y_1 = -x_0^2$. Таким образом, x_0 должно быть четным числом, не превосходящим по модулю $\sqrt{2020}$. Поскольку $44 < \sqrt{2020} < 45$, то имеется 22 положительных значения x_0, а с учетом симметричных отрицательных их будет вдвое больше.

11.4. Дан тетраэдр *SABC* со взаимно перпендикулярными рёбрами *SA, SB, SC*. Пусть *O* – центр сферы, описанной около тетраэдра. Докажите, что точки *S* и *O* лежат по разные стороны от плоскости *ABC*.

Решение. Пусть $SA = a$, $SB=b$, $SC=c$. Рассмотрим декартову систему координат в пространстве с началом координат в точке *S* и осями *x, y, z* вдоль *SA, SB* и *SC* соответственно. Тогда плоскость *ABC* будет иметь уравнение $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ (это уравнение плоскости в отрезках; можно непосредственно проверить, что точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ и $C(0,0,c)$ удовлетворяют этому уравнению). Центр сферы имеет координаты $O\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}, \dfrac{c}{2}\right)$: проще всего это показать, если рассмотреть прямоугольный параллелепипед с ребрами *SA*, *SB* и *SC*. Его центр – точка *O*: она равноудалена от всех восьми вершин параллелепипеда и, в частности, от *S*, *A*, *B* и *C*. Подставляя в выражение $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} - 1$ координаты точки *S* и *O*, получим, соответственно, –1 и 1/2. Поскольку это числа разных знаков, точки *S* и *O* лежат по разные стороны от плоскости *ABC*.

11.5. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{x} - \sqrt{2 - x} + 2\sin x$.

Ответ: $[-\sqrt{2}; \sqrt{2} + 2\sin 2]$. **Решение.** Область определения функции $y = f(x)$ – это отрезок [0,2]. Докажем, что на интервале (0;2) производная $f'(x)$ положительна и значит, функция $f(x)$, непрерывная на [0,2], монотонно возрастает. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{2 - x}} + 2\cos x.$$

Очевидно, $f'(x)>0$ для $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, т.к. все слагаемые положительны. Проверим, что и на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{2};\,2\right)$ будет $f'(x)>0$. Для этого в следующих оценках мы используем очевидные неравенства $\sqrt{2}<1{,}5$ и $\pi>3$, а также монотонное убывание функции $\cos x$ во второй четверти. При всех $x\in\left[\frac{\pi}{2};\,2\right)$ будем иметь

$\frac{1}{2\sqrt{x}}>\frac{1}{2\sqrt{2}}>\frac{1}{2\cdot 1{,}5}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\geq\frac{1}{2\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{1{,}5}=\frac{2}{3}$ и $\cos x>\cos 2>\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$. Таким образом, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}+2\cos x>\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ при всех $x\in\left[\frac{\pi}{2};\,2\right)$. Значит, непрерывная функция $f(x)$ монотонно возрастает на [0;2], откуда следует ответ.