ЕГЭ 2021

И. В. Ященко
С. А. Шестаков

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

380 задач

20 диагностических работ

19 тематических тренингов

20 типовых вариантов ЕГЭ

методические рекомендации с разбором задач

МАТЕМАТИКА

И. В. Ященко, С. А. Шестаков

Подготовка к ЕГЭ по математике в 2021 году. Профильный уровень

Издание соответствует
Федеральному государственному
образовательному стандарту (ФГОС)

Ященко И. В., Шестаков С. А.
Подготовка к ЕГЭ по математике в 2021 году. Профильный уровень. — М.: МЦНМО, 2021. — 240 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для подготовки к Единому государственному экзамену по математике на профильном уровне, для организации и проведения итогового повторения, диагностики и коррекции проблемных зон в знаниях старшеклассников.

Пособие написано в соответствии с утверждённой демоверсией и спецификацией ЕГЭ по математике 2021 года. Оно содержит подробный разбор задач экзамена, аналогичных заданиям ЕГЭ 2020 года, подготовительные и зачётные задачи к каждому заданию ЕГЭ, тренировочные варианты в формате ЕГЭ.

Материалы пособия использовались в сотнях школ различных регионов России при организации подготовки к Единому государственному экзамену. Пособие позволяет проверить навыки решения задач, качество усвоения материала, выстроить индивидуальные траектории повторения и эффективно подготовиться к сдаче ЕГЭ.

Пособие адресовано учащимся старших классов и их родителям, учителям математики и методистам.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

Предисловие

При сдаче Единого государственного экзамена по математике каждый выпускник может выбрать один из двух вариантов: экзамен *базового уровня* (для тех, кто не собирается получать высшее образование, и тех, кто собирается делать это в вузах гуманитарного направления) или экзамен *профильного уровня* (для тех, кто собирается продолжать образование в вузах с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов — естественно-научных, технических, финансовых и др.).

Структура экзамена профильного уровня остаётся той же, что и в минувшем учебном году: вариант ЕГЭ по математике (профильный уровень) 2021 года состоит из двух частей и содержит 19 заданий. Часть 1 состоит из 8 заданий базового уровня сложности. Часть 2 содержит 11 заданий повышенного и высокого уровней сложности, проверяющих уровень профильной математической подготовки. Правильное решение каждого из заданий 1–12 (задания с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби) оценивается 1 баллом. Задания 13–19 — это задачи, требующие развёрнутого решения. Правильное решение каждого из заданий 13, 14 и 15 оценивается 2 баллами; заданий 16 и 17 — 3 баллами; 18 и 19 — 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 32 балла. Продолжительность экзамена составляет 3 часа 55 минут.

Настоящее пособие предназначено для организации итогового повторения (в том числе с начала учебного года) и завершающего этапа подготовки к экзамену и включает как задания, которые несколько проще возможных задач ЕГЭ, так и задания, которые несколько сложнее этих задач. Все задания сгруппированы в 20 диагностических работ, 20 тренировочных работ и 19 тематических тренингов (по одному тренингу на каждую задачу профильного варианта экзамена).

Тренинги состоят из 20 заданий каждый: 10 подготовительных и 10 зачётных заданий. Уровень сложности подготовительных задач увеличивается от задачи к задаче, пока в последних заданиях не достигает уровня сложности реальных заданий экзамена; уровень сложности зачётных заданий в целом соответствует уровню сложности реальных заданий ЕГЭ.

Первые две диагностические работы предназначены для завершающего этапа традиционного осеннего повторения материала 10 класса. Они составлены по образцу демоверсии и состоят из 19 задач каждая. При этом одна из работ не содержит задач с логарифмами, другая — задач с производной, что позволяет выбрать работу в соответствии с используемым учебником.

Следующие 4 диагностические работы содержат по 8 задач, аналогичных заданиям части 1 ЕГЭ (т. е. заданиям 1—8); за ними следуют 4 диагностические работы, содержащие по 4 задачи, аналогичные заданиям 9—12 второй части ЕГЭ, и 6 диагностических работ, содержащих весь спектр заданий с кратким ответом (задания 1—12). Далее идут 4 диагностические работы, содержащие по 7 заданий части 2 ЕГЭ; завершают пособие 20 тренировочных работ, составленные в соответствии со спецификацией и демоверсией профильного ЕГЭ по математике 2021 года (тренировочные варианты). При подготовке к решению заданий с кратким ответом следует вначале решить первые диагностические работы соответствующего раздела для выявления проблемных зон в знаниях и навыках решения задач, затем повторить вызвавший затруднения материал по учебнику, решить последовательно соответствующие тренинги (подготовительные и зачётные) и перейти к следующим диагностическим работам для оценки успешности повторения и закрепления навыков решения задач части с кратким ответом. Аналогичный алгоритм можно рекомендовать и для подготовки к решению задач с развёрнутым решением, но при этом необходимо наряду с данным пособием использовать учебники для специализированных классов, учебники профильного уровня и проверенные временем пособия для поступающих в вузы.

Авторы глубоко признательны и благодарны О. А. Васильевой за вдумчивое и внимательное чтение рукописи, замечания и предложения, существенно способствовавшие её улучшению.

ЕГЭ-2021 по математике и как к нему готовиться (методические рекомендации с разбором задач)

Задания с кратким ответом

Общие рекомендации

Ответом к заданиям 1—12 является число или конечная десятичная дробь. При решении этих задач и проверке решений важно помнить следующее.

- Проверка ответов осуществляется компьютером после сканирования бланка ответов и сопоставления результатов сканирования с правильными ответами. Поэтому цифры в бланке ответов следует писать разборчиво и строго в соответствии с инструкцией по заполнению бланка (с тем чтобы, например, 1 и 7 или 8 и В распознавались корректно). К сожалению, ошибки сканирования полностью исключить нельзя, поэтому если выпускник уверен в задаче, за которую получил минус, то ему нужно идти на апелляцию.
- Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ, зафиксированный в иной форме, будет распознан как неправильный. Поэтому если результатом решения задачи явилась обыкновенная дробь, например $\frac{1}{8}$, то перед записью ответа в бланк её нужно обратить в десятичную, т. е. в ответе написать 0,125.
- Единицы измерения (в каких именно единицах должен быть дан ответ, указывается в условии задачи) в бланке ответов писать не нужно, в противном случае сканер распознает ответ как неправильный.

Часть 1

Задание 1

Тип задания по кодификатору требований

Задание на использование приобретённых знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных и информации статистического характера; осуществление практических расчётов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчётах.

Характеристика задания Несложная арифметическая текстовая задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий Для решения задачи достаточно уметь выполнять арифметические действия с целыми числами и дробями, делать прикидку и оценку.

Пример задания 1 киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 80 копеек. Счётчик электроэнергии 1 мая показывал 12 345 киловатт-часов, а 1 июня — 12 543 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за май?

РЕШЕНИЕ. Подобные задачи часто вызывают непреодолимые арифметические трудности из-за нерационального решения, когда учащийся находит стоимость электроэнергии (или воды, если речь идёт о расходе воды) за каждый месяц, получая огромные числа, а затем вычитает одно из другого. Решение таких житейских задач предполагает, конечно же, вычисление разности показателей счётчика за два соседних месяца, а уже только после этого умножение найденного числа на стоимость единицы электроэнергии (или воды). В данном случае число киловатт-часов, которые необходимо оплатить, равно $12\,543 - 12\,345 = 198$. Значит, заплатить за израсходованную в июле электроэнергию придётся $198 \cdot 3{,}8 = 752{,}4$ рубля.

ОТВЕТ. 752,4.

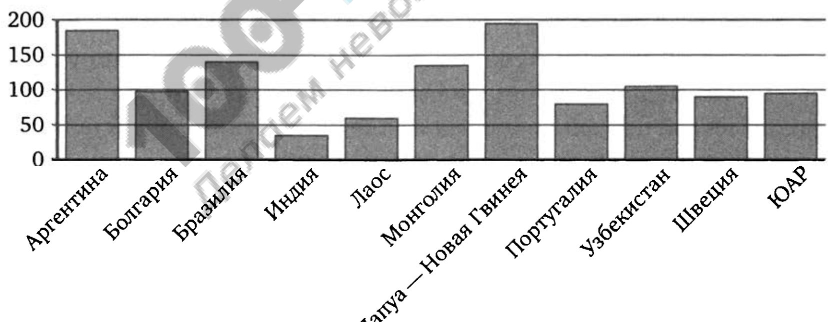
Задание 2

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретённых знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; определение значения функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описание поведения и свойств функции по её графику, нахождение по графику функции наибольшего и наименьшего значений; построение графиков изученных функций.

Характеристика задания Задание на чтение графика функции (диаграммы), моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию. График (диаграмма) характеризует изменение в зависимости от времени некоторой величины (температуры, стоимости акций и т. д.). Как правило, в задании требуется найти наибольшее (наименьшее) значение этой величины, разность между наибольшим и наименьшим значениями (возможно, за определённый период времени), время, когда величина достигает данного значения, вычислить среднее значение величины.

Комментарий Простейшее задание на считывание информации, представленной в виде диаграммы или графика, возможно, требующее незначительных вычислений, например нахождения среднего значения некоторой величины.

Пример задания На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа—Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Португалия?



РЕШЕНИЕ. Для ответа на вопрос задачи можно «посчитать столбики», которые выше столбика, соответствующего показателю Португалии. Но проще посчитать столбики, которые ниже: таких столбиков всего 2 (Индия и Лаос). Следовательно, Португалия занимает 9-е место.

ОТВЕТ. 9.

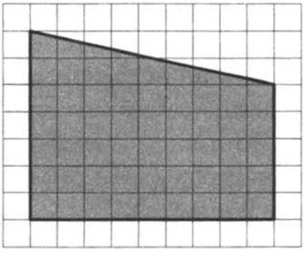
Задание 3

Тип задания по кодификатору требований Задание по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей), связанное с проверкой умений вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования, проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих тригонометрические функции.

Характеристика задания Задание на вычисление площади треугольника, четырёхугольника, круга и его частей, в том числе по данным рисунка, представляющего собой изображение фигуры, площадь которой требуется найти, на координатной плоскости или клетчатой бумаге (сетке) со стороной клетки 1×1, либо вычисление углов или длин по данным рисунка.

Комментарий Площадь искомой фигуры может быть найдена по известной формуле. Например, для треугольника или параллелограмма во многих случаях достаточно мысленно провести высоту к одной из сторон. Выбирать в качестве стороны и высоты нужно те, длины которых выражаются целым числом делений сетки, либо те, которые параллельны осям координат. В некоторых случаях для вычисления недостающих элементов можно использовать теорему Пифагора. Ряд задач можно решить, разбив фигуру на части, вычисление площадей которых не представляет труда, или заметив, что фигура сама является частью другой фигуры, а площадь последней можно найти почти сразу.

Пример задания На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



РЕШЕНИЕ. Основания трапеции расположены на вертикальных линиях сетки и равны 7 и 5, а высота расположена на горизонтальной линии сетки и равна 9. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2}(7+5)\cdot 9 = 54$.

ОТВЕТ. 54.

Задание 4

Тип задания по кодификатору требований Задание на построение и исследование простейших математических моделей: моделирование реальных ситуаций на языке теории вероятностей и статистики; вычисление в простейших случаях вероятности событий.

Характеристика задания Несложная задача по теории вероятностей или статистике.

Комментарий Для решения задачи достаточно уметь находить отношение числа благоприятных для наступления некоторого события исходов к числу всех равновозможных исходов.

Пример задания В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 4 из Аргентины, 7 из Бразилии, 5 из Парагвая и 4 из Уругвая. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Бразилии.

РЕШЕНИЕ. Поскольку искомая вероятность P равна отношению числа $n = 7$ благоприятных для данного события исходов к числу $N = 4 + 7 + 5 + 4 = 20$ всех равновозможных исходов, находим $P = \frac{7}{20} = 0{,}35$.

ОТВЕТ. 0,35.

Задание 5

Тип задания по кодификатору требований Задание на решение уравнения или системы уравнений, проверяющее умение решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

Характеристика задания Несложное рациональное, показательное, логарифмическое, тригонометрическое или иррациональное уравнение.

Комментарий Уравнение сводится в одно действие к линейному или квадратному (в последнем случае в зависимости от условия в ответе нужно указать только один из корней — меньший или больший).

Пример задания Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+2}=3$.

РЕШЕНИЕ. Для решения уравнения достаточно знания того, что $3^3=27$. Тогда $x+2=27$, откуда $x=25$.

ОТВЕТ. 25.

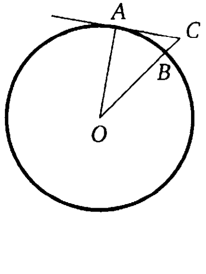
Задание 6

Тип задания по кодификатору требований Задание по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей), моделирование реальных ситуаций на языке геометрии, исследование построенных моделей с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры либо практическая задача, связанная с нахождением геометрических величин.

Характеристика задания Несложная планиметрическая задача, в том числе по готовому чертежу.

Комментарий Для решения задачи достаточно знать основные формулы и теоремы планиметрии.

Пример задания Угол ACO равен $58°$. Его сторона CA касается окружности с центром в точке O. Отрезок CO пересекает окружность в точке B (см. рисунок). Найдите градусную меру дуги AB окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.



РЕШЕНИЕ. Градусная мера дуги окружности равна градусной мере опирающегося на неё вписанного угла, то есть в данном случае — угла AOB, равного углу AOC. Поскольку AC — касательная, а OC — радиус окружности, проведённый в точку касания, угол OAC прямой. Значит, $\angle AOC = 90° - \angle ACO = 90° - 58° = 32°$.

ОТВЕТ. 32.

Задание 7

Тип задания по кодификатору требований

Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

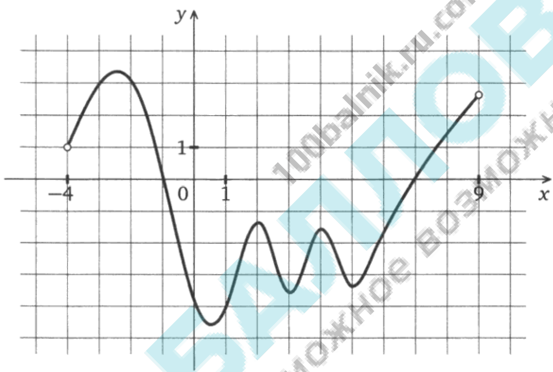
Характеристика задания

Ставшая традиционной для ЕГЭ по математике задача на чтение графика функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств производной этой функции либо на чтение графика производной функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств самой функции или задача, связанная с геометрическим смыслом производной.

Комментарий

Для решения задачи на чтение графиков достаточно знать, что в каждой точке интервала возрастания дифференцируемой на этом интервале функции её производная неотрицательна; в каждой точке интервала убывания дифференцируемой на этом интервале функции её производная неположительна; в каждой точке экстремума производная либо равна нулю, либо не существует («угол» на графике функции). Обратно, если дан график производной функции, то на тех интервалах, где он расположен выше оси абсцисс (т. е. производная положительна), функция возрастает; на тех интервалах, где он расположен ниже оси абсцисс (т. е. производная отрицательна), функция убывает; общие точки графика производной и оси абсцисс (т. е. точки, в которых производная равна нулю) либо являются точками максимума, если график производной пересекает ось абсцисс «сверху вниз» (т. е. производная меняет знак с плюса на минус: возрастание функции сменяется убыванием), либо являются точками минимума, если график производной пересекает ось абсцисс «снизу вверх» (т. е. производная меняет знак с минуса на плюс: убывание функции сменяется возрастанием), либо не являются точками экстремума (график производной не пересекает ось абсцисс, а лишь касается её: в этом случае не происходит смены знака производной и характер монотонности функции не меняется).

Пример задания На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. В какой точке отрезка $[1; 8]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?



РЕШЕНИЕ. При $x > 0$ график производной функции пересекает ось абсцисс в точке 7, принадлежащей отрезку [1; 8], причём в этой точке производная меняет знак с минуса на плюс, т. е. точка 7 является точкой минимума функции и единственной точкой экстремума на этом отрезке: функция убывает на отрезке [1; 7] и возрастает на отрезке [7; 8]. Значит, своего наименьшего значения на отрезке [1; 8] функция достигает в точке 7.

ОТВЕТ. 7.

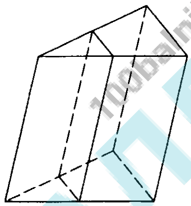
Задание 8

Тип задания по кодификатору требований Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов).

Характеристика задания Несложное задание по стереометрии на применение основных формул, связанных с вычислением площадей поверхностей или объёмов многогранников (пирамид и призм) или тел вращения (цилиндров, конусов, шаров), в том числе вписанных или описанных около других многогранников или тел вращения.

Комментарий Для решения задачи достаточно знать формулы площадей поверхности и объёмов пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара.

Пример задания Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсечённой треугольной призмы равен 17.



РЕШЕНИЕ. Высота данной призмы равна высоте отсечённой треугольной призмы, а площадь основания данной призмы в 4 раза больше площади основания отсечённой призмы (поскольку площадь треугольника, отсекаемого средней линией от данного, равна четверти площади данного). Поскольку объём призмы равен произведению площади основания на высоту призмы, объём данной призмы вчетверо больше объёма отсечённой треугольной призмы и равен $17 \cdot 4 = 68$

ОТВЕТ. 68.

Часть 2

Задание 9

Тип задания по кодификатору требований Задание на выполнение вычислений и преобразований.

Характеристика задания Задача на вычисление значения числового или буквенного выражения.

Комментарий Для решения задачи достаточно уметь выполнять действия с числами, знать определение и простейшие свойства степеней, корней, логарифмов, синуса, косинуса, тангенса.

Пример задания Найдите значение выражения $(2^{15})^6 : 2^{84}$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку $(2^{15})^6 = 2^{15\cdot 6} = 2^{90}$, получаем, что

$$(2^{15})^6 : 2^{84} = 2^{90} : 2^{84} = 2^{90-84} = 2^6 = 64.$$

ОТВЕТ. 64.

Задание 10

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретённых знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; решение прикладных задач, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Характеристика задания Текстовое задание на анализ практической ситуации, моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию (например, экономические, физические, химические и др. процессы).

Комментарий По условию задачи требуется составить уравнение или неравенство, сводимое к линейному или квадратному, решением которого (для неравенств — наибольшим или наименьшим решением либо их разностью) и является искомая величина.

Пример задания В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где H — высота столба воды в метрах, $H_0 = 8$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{72}$ м/мин^2 и $b = -\frac{2}{3}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. Сколько минут вода будет вытекать из бака?

РЕШЕНИЕ. Вода из бака перестанет вытекать, в тот момент времени, когда $H(t)$ станет равной нулю, т.е. при выполнении условия $at^2 + bt + H_0 = 0$, откуда

$$\frac{1}{72}t^2 - \frac{2}{3}t + 8 = 0.$$

Умножив обе части последнего уравнения на 72, получим $t^2 - 2\cdot 24t + 8\cdot 72 = 0$, или $t^2 - 2\cdot 24t + 24\cdot 24 = 0$, т. е. $t^2 - 2\cdot 24t + 24^2 = 0$. Левая часть последнего уравнения является полным квадратом: $(t-24)^2 = 0$, и, значит, $t = 24$.

ОТВЕТ. 24.

Задание 11

Тип задания по кодификатору требований Построение и исследование простейших математических моделей: моделирование реальной ситуации на языке алгебры, составление уравнения или неравенства по условию задачи; исследование построенной модели с использованием аппарата алгебры.

Характеристика задания Традиционная текстовая задача (на движение, работу и т. п.), сводящаяся к составлению и решению уравнения.

Комментарий В качестве неизвестной, как правило, лучше выбирать искомую величину. Составленное уравнение является рациональным и сводится в большинстве случаев к квадратному или линейному.

Пример задания Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объёмом 240 литров она заполняет на 50 минут дольше, чем вторая труба?

РЕШЕНИЕ. Пусть первая труба пропускает x литров воды в минуту, $x > 0$. Тогда вторая труба пропускает $x + 5$ литров воды в минуту. Составим по условию задачи уравнение $\frac{240}{x} = \frac{240}{x+5} + 50$, откуда, сократив на 10, получим $\frac{24}{x} = \frac{24}{x+5} + 5$, и, следовательно, $\frac{24}{x} - \frac{24}{x+5} = 5$. Приведём дроби в левой части последнего уравнения к общему знаменателю: $\dfrac{24(x+5)-24x}{x(x+5)}=5$, откуда $x(x+5)=24$ и $x^2+5x-24=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа -8 и 3, из которых только последнее удовлетворяет условию $x>0$.

ОТВЕТ. 3.

Задание 12

Тип задания по кодификатору требований Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

Характеристика задания Задание на вычисление с помощью производной точек экстремума данной функции или наибольшего (наименьшего) значения данной функции на данном отрезке.

Комментарий Решение задания связано с нахождением при помощи производной точек минимума (максимума) заданной функции или её наименьшего (наибольшего) значения на отрезке. При нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке можно использовать стандартный алгоритм.

Пример задания Найдите наименьшее значение функции

$$y=13x-\ln(13x)+13 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{26};\ \frac{7}{26}\right].$$

РЕШЕНИЕ. Задачу можно решить, даже не зная правила вычисления производной сложной функции или производной функции вида $y=f(ax+b)$ по известной производной функции $y=f(x)$. Для этого нужно представить $\ln(13x)$ в виде суммы $\ln x+\ln 13$ и воспользоваться тем, что производная константы равна нулю: $(\ln 13)'=0$. Тогда $y=13x-\ln x-\ln 13+13$ и производная данной функции имеет вид $y'=13-\dfrac{1}{x}$, или $y'=\dfrac{13x-1}{x}$. В данном случае можно даже не рисовать схему распределения знаков производной по интервалам, поскольку $x>0$. Поэтому $y'>0$

при $x \in \left(\frac{1}{13}; \infty\right)$ и $y' < 0$ при $x \in \left(0; \frac{1}{13}\right)$. Таким образом, непрерывная при $x > 0$ функция $y = 13x - \ln(13x) + 13$ убывает на отрезке $\left[\frac{1}{26}; \frac{1}{13}\right]$ и возрастает на отрезке $\left[\frac{1}{13}; \frac{7}{26}\right]$. Значит, $\min\limits_{\left[\frac{1}{26}; \frac{7}{26}\right]} y(x) = y\left(\frac{1}{13}\right)$. Найдём наименьшее значение:

$y\left(\frac{1}{13}\right) = 13 \cdot \frac{1}{13} - \ln\left(13 \cdot \frac{1}{13}\right) + 13 = 1 - \ln 1 + 13 = 14.$

ОТВЕТ. 14.

Задания с развёрнутым решением

Общие рекомендации

- Каждое из заданий 13—19 оценивается 2, 3 или 4 баллами. Максимальный балл выставляется за полное обоснованное решение. При этом можно использовать любые утверждения и факты из школьных учебников без дополнительных обоснований или пояснений. Нужно постараться оформить решение так, чтобы оно было понятно не только его автору, но и любому другому компетентному человеку, в частности проверяющему.
- Даже если полностью решить задачу не удаётся, нужно постараться продвинуться в её решении, сделать хотя бы часть задачи: вполне вероятно, что потраченные усилия окажутся оценёнными — разумеется, не максимальным числом баллов, но на Едином экзамене и один балл за задачу будет далеко не лишним.

Задание 13

Тип задания по кодификатору требований Уравнение или система уравнений.

Характеристика задания Относительно несложное уравнение или система уравнений с отбором корней. Может содержать тригонометрические функции, логарифмы, степени, корни.

Комментарий Как правило, решение задачи требует замены переменной, позволяющей свести уравнение к квадратному, и отбора корней, связанного с условием задачи или с ограниченностью новой переменной, наличием выражений с переменной в знаменателях алгебраических дробей, под знаками корней чётной степени и логарифмов.

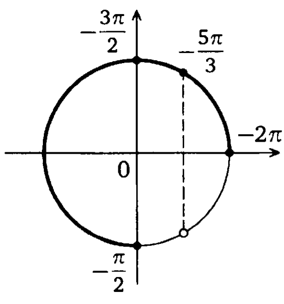
Пример задания а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos 2x=\sin x+\sqrt{3}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\,-\frac{\pi}{2}\right]$.

РЕШЕНИЕ. а) Воспользовавшись формулами синуса суммы и косинуса двойного угла, перейдём к уравнению $\sin x+\sqrt{3}\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}=\sin x+\sqrt{3}$, откуда $\sqrt{3}\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x=0$. После деления обеих частей последнего уравнения на $-\sqrt{3}$ и вынесения общего множителя получим $\cos x(2\cos x-1)=0$. Значит, $\cos x=0$ или $\cos x=\frac{1}{2}$. Таким образом, корнями данного уравнения являются $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, $x=\frac{\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\,-\frac{\pi}{2}\right]$. Для этого на единичной окружности отметим дугу, отвечающую данному отрезку (напомним, что направление «от меньшего к большему» — это направление против часовой стрелки), и точки, соответствующие найденным в предыдущем пункте корням уравнения.



Таким образом, корнями уравнения, принадлежащими отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, являются $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$.

ОТВЕТ. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$.

Задание 14

Тип задания по кодификатору требований Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов).

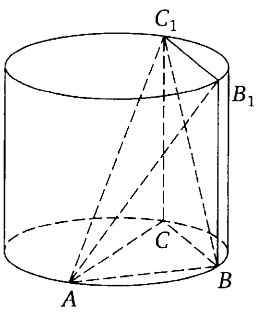
Характеристика задания Задание на вычисление отрезков, площадей, углов, связанных с многогранниками и телами вращения.

Комментарий Традиционная задача по стереометрии на доказательство (пункт *а*) и вычисление (пункт *б*) длин, площадей (в том числе площадей сечений многогранников и тел вращения), углов (между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями), связанных с призмой, пирамидой, цилиндром, конусом или шаром.

Пример задания В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45°$, $AB = 2$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен $60°$.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1.



РЕШЕНИЕ. а) Пусть BB_1 — образующая цилиндра. Тогда BB_1C_1C — прямоугольник, поэтому $BC \parallel B_1C_1$ и угол между прямыми AC_1 и BC равен углу между прямыми AC_1 и B_1C_1, т. е. углу AC_1B_1.

Угол ABC опирается на диаметр основания цилиндра, поэтому он прямой. Значит, прямая B_1C_1, параллельная прямой BC, перпендикулярна прямым AB и BB_1. Таким образом, прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости ABB_1, а значит, угол AB_1C_1 прямой.

В прямоугольном треугольнике AB_1C_1 имеем

$$B_1C_1 = BC = AB = 2, \quad AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{AB^2 + CC_1^2} = 2\sqrt{3}.$$

Значит, $\operatorname{tg}(\angle AC_1B_1) = \dfrac{AB_1}{B_1C_1} = \sqrt{3}$ и $\angle AC_1B_1 = 60°$.

б) Прямая AB перпендикулярна прямым BC и BB_1. Таким образом, прямая AB перпендикулярна плоскости BB_1C. Следовательно, треугольник ABC_1 прямоугольный, поэтому искомое расстояние равно его высоте h, проведённой к гипотенузе. Получаем

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = 2\sqrt{3}; \quad AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC_1^2} = 4;$$

$$h = \frac{AB \cdot BC_1}{AC_1} = \sqrt{3}.$$

ОТВЕТ. б) $\sqrt{3}$.

Задание 15

Тип задания по кодификатору требований — Неравенство или система неравенств.

Характеристика задания — Неравенство или система неравенств, содержащие степени, дроби, корни, логарифмы (в том числе с переменным основанием).

Комментарий — Обратим внимание на преобразования, с которыми связана значительная часть ошибочных решений задания 15. При решении неравенств, содержащих сумму двух и более логарифмов, следует помнить о том, что равенство $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$ выполняется не при любых значениях переменной, поскольку области определения его левой и правой частей различны. Левая часть определена при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ (каждое из выражений положительно). Правая часть определена при $f(x) \cdot g(x) > 0$ (каждое из выражений положительно либо каждое из выражений отрицательно). Таким образом, область определения правой части равенства $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$ шире области определения его левой части. Поэтому переход от суммы логарифмов к логарифму произведения может привести к приобретению посторонних решений. Чтобы этого не случилось, нужно в самом начале решения выписать необходимые ограничения (как иногда говорят, найти ОДЗ неравенства). Преобразование же логарифма произведения в сумму логарифмов (т. е. переход от $\log_a (f(x)g(x))$ к $\log_a f(x) + \log_a g(x)$) таит ещё больше опасностей: в этом случае область допустимых значений переменной сужается и можно просто потерять решения неравенства. Поэтому, если такое преобразование всё-таки необходимо, приходится рассматривать два случая:

а) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$
(в этом случае $\log_a (f(x)g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x)$);

б) $f(x) < 0$, $g(x) < 0$
(при этом $\log_a (f(x)g(x)) = \log_a (-f(x)) + \log_a (-g(x))$).

Преобразуя разность логарифмов в логарифм частного и наоборот, поступают аналогично. Если есть выбор, лучше преобразовывать сумму (разность) логарифмов в логарифм произведения (частного), выписав необходимые ограничения (это позволит исключить посторонние решения), а не наоборот (при таком преобразовании решения будут потеряны). Так, при упрощении левой части неравенства

$$\log_a (f(x) \cdot g(x)) + \log_a \frac{f(x)}{g(x)} < p(x)$$

переход к логарифму произведения с последующим сокращением алгебраической дроби с учётом необходимых ограничений, т. е. переход к системе

$$\begin{cases} \log_a f^2(x) < p(x), \\ f(x)\cdot g(x) > 0, \end{cases}$$

будет равносильным, а упрощение путём преобразования логарифмов произведения и частного в сумму и разность логарифмов соответственно может привести к потере решений.

При решении неравенств, содержащих выражения вида $\log_a f^{2n}(x)$, следует использовать формулу

$$\log_a f^{2n} = 2n\cdot\log_a |f(x)|.$$

Если не поставить знак модуля, то получится равенство, в котором левая часть определена при всех x, для которых $f(x)\neq 0$, а правая часть — при всех x, для которых $f(x)>0$. Тогда область определения левой части окажется шире, что может привести к потере решений соответствующего неравенства. Так, например, при решении неравенства $\log_5 f^2(x)>2$ переход к неравенству $2\log_5 f(x)>2$ будет означать потерю решений; правильным в этом случае будет переход к неравенству $2\log_5|f(x)|>2$ или сразу к неравенству $f^2(x)>5^2$.

Особое внимание следует также уделить применению метода интервалов и методов решения логарифмических неравенств. Логарифмические неравенства с переменным основанием можно решать «традиционным» способом, рассматривая два случая (основание больше 1, основание положительно и меньше 1). Второй способ — применение метода интервалов. Третий способ основан на следующих простых утверждениях.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если числа p и q одного знака (т. е. $pq>0$), то и числа pr и qr $(r\neq 0)$ одного знака; обратно, если числа pr и qr одного знака, то и числа p и q одного знака.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $a>0$, $b>1$, то числа $\log_b a$ и $a-1$ одного знака.

Утверждение 1 означает, что если числа p и q одного знака, то неравенства $pr>0$ и $qr>0$ равносильны. Вместе с утверждением 2 это позволяет при решении логарифмических неравенств вида $r(x)\log_{c(x)} a(x)>0$ переходить (разумеется, записав необходимые ограничения) сначала к неравенству

$r(x)\dfrac{\log_b a(x)}{\log_b c(x)} > 0$ (где b — любое число, большее 1), а затем к неравенству $r(x)\dfrac{a(x)-1}{c(x)-1} > 0$. Таким образом, неравенство $r(x)\log_{c(x)} a(x) > 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} r(x)\dfrac{a(x)-1}{c(x)-1} > 0, \\ a(x) > 0, \quad c(x) > 0. \end{cases}$$

При необходимости такой переход можно сделать несколько раз. Описанный алгоритм справедлив и для неравенств противоположного знака, и для нестрогих неравенств. Кроме того, при решении логарифмических неравенств часто оказывается полезным и следующее утверждение.

Утверждение 3. Если $a > 0$, $b > 0$, $c > 1$, то числа $\log_c a - \log_c b$ и $a - b$ одного знака.

Сформулированные утверждения применимы к неравенствам, правая часть которых равна нулю, а левая представляет собой произведение или частное нескольких алгебраических множителей. В некоторых случаях такие множители можно заменить более простыми, имеющими те же знаки (точнее, те же промежутки знакопостоянства), что и заменяемые (поэтому такой метод решения неравенств будем называть методом знакотождественных множителей). Кроме указанных выше, к таким парам можно отнести следующие:

$|a| - |b|$ и $a^2 - b^2$,

$\sqrt[2n]{a} - \sqrt[2n]{b}$ и $a - b$ (при условиях $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$),

$\sqrt[2n+1]{a} - \sqrt[2n+1]{b}$ и $a - b$,

$\sqrt[2n+1]{a} + \sqrt[2n+1]{b}$ и $a + b$,

$l^a - l^b$ и $a - b$ (при условии $l > 1$).

Пример задания Решите неравенство

$$\log_5\left(20 - \frac{3}{x}\right) + \log_{0,2}\left(4 - \frac{3x}{5}\right) \geqslant 1.$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку $0{,}2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, неравенство приводится к виду

$$\log_5\left(20 - \frac{3}{x}\right) - \log_5\left(4 - \frac{3x}{5}\right) \geqslant 1.$$

Переход к логарифму частного приведёт к громоздкому неравенству. Вообще, когда есть выбор, лучше использовать переход к логарифму произведения, перенеся логарифм, перед которым стоит знак «минус», в другую часть неравенства. В данном случае получим

$$\log_5\left(20 - \frac{3}{x}\right) \geqslant 1 + \log_5\left(4 - \frac{3}{5}\right),$$

и, далее, $\log_5\left(20 - \frac{3}{x}\right) \geqslant \log_5 5 + \log_5\left(4 - \frac{3x}{5}\right)$, откуда

$$\log_5\left(20 - \frac{3}{x}\right) \geqslant \log_5\left(5\left(4 - \frac{3x}{5}\right)\right),$$

т. е.

$$\log_5\left(20 - \frac{3}{x}\right) \geqslant \log_5(20 - 3x).$$

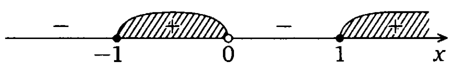
Последнее неравенство сводится к системе неравенств

$$\begin{cases} 20 - \frac{3}{x} \geqslant 20 - 3x, \\ 20 - 3x > 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x - \frac{1}{x} \geqslant 0, \\ x < \frac{20}{3}, \end{cases}$$

а значит,

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x} \geqslant 0, \\ x < 6\frac{2}{3}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geqslant 0, \\ x < 6\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство последней системы методом интервалов:



Множеством его решений является $[-1;\, 0) \cup [1;\, +\infty)$, а множеством решений системы — $[-1;\, 0) \cup \left[1;\, 6\frac{2}{3}\right)$.

ОТВЕТ. $[-1;\, 0) \cup \left[1;\, 6\frac{2}{3}\right)$.

Задание 16

Тип задания по кодификатору требований — Планиметрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).

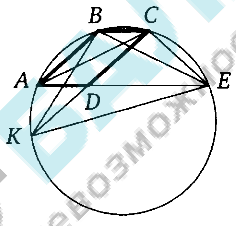
Характеристика задания — Задача на вычисление длин, площадей, углов, связанных с плоскими фигурами.

Комментарий — Довольно сложная задача с двумя вопросами, один из которых — на доказательство, а второй — на вычисление.

Пример задания — Окружность проходит через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$, пересекает продолжение стороны AD за точку D в точке E и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке K.

а) Докажите, что $BK = BE$.

б) Найдите отношение $KE : AC$, если $\angle BAD = 30°$.



РЕШЕНИЕ. а) Заметим, что

$$\angle BAE = \angle BAD = \angle BCD = \angle BCK.$$

Значит, хорды окружности BK и BE стягивают равные дуги. Поэтому эти хорды равны.

б) Далее,

$$\angle AEC = 180° - \angle ABC = \angle BAD = 30°,$$
$$\angle CDE = 180° - \angle ADC = \angle BAD = 30°;$$
$$\angle DCE = 180° - \angle CDE - \angle CED = 120°.$$

По теореме синусов для треугольников KCE и AEC получаем

$$\frac{KE}{\sin\angle KCE} = \frac{AC}{\sin\angle AEC}; \quad \frac{KE}{AC} = \frac{\sin\angle KCE}{\sin\angle AEC} = \sqrt{3}.$$

ОТВЕТ. б) $\sqrt{3}$.

Задание 17

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретённых знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных и информации статистического характера; осуществление практических расчётов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчётах.

Характеристика задания Текстовая задача на использование приобретённых знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, обычно с экономическим содержанием.

Комментарий Относительно сложная текстовая задача, связанная с банковскими кредитами, оптимизацией производства или затрат на него.

Пример задания В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

РЕШЕНИЕ. Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно, т. е. на $\frac{1}{n}$ часть, поэтому суммы долга за каждый месяц (до начисления процентов) составят (в порядке убывания)

$$16; \quad 16-\frac{16}{n}; \quad \ldots, \quad \frac{16\cdot 2}{n}; \quad \frac{16}{n}.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 25 %, поэтому последовательность размеров платежей по процентам будет следующей:

$$16\cdot 0{,}25 = 4;\quad \frac{16(n-1)}{n}\cdot 0{,}25 = \frac{4(n-1)}{n};\quad \ldots;$$
$$\frac{16\cdot 2}{n}\cdot 0{,}25 = \frac{4\cdot 2}{n};\quad \frac{16}{n}\cdot 0{,}25 = \frac{4}{n}.$$

Ежегодный платеж состоит из фиксированной суммы $\frac{16}{n}$ и суммы платежа по процентам, поэтому ежегодные платежи составят соответственно

$$\frac{16}{n}+4;\quad \frac{16}{n}+\frac{4(n-1)}{n};\quad \ldots;\quad \frac{16}{n}+\frac{4\cdot 2}{n};\quad \frac{16}{n}+\frac{4}{n}.$$

Общая сумма S всех выплат составит

$$S = 16+4+\frac{4(n-1)}{n}+\ldots+\frac{4}{n}.$$

Вынесем за скобки общий множитель всех слагаемых правой части последнего равенства начиная со второго:

$$S = 16+\frac{4}{n}(n+(n-1)+\ldots+1).$$

Сумму в скобках находим как сумму арифметической прогрессии:

$$S = 16+\frac{4}{n}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n = 16+2(n+1) = 2n+18.$$

По условию $S=38$, следовательно, $2n+18=38$ и $n=10$.

ОТВЕТ. 10.

Задание 18

Тип задания по кодификатору требований Уравнение, неравенство или система уравнений или неравенств.

Характеристика задания Задача с параметром, требующая уверенного владения материалом и применения нескольких свойств и теорем.

Комментарий Это задание, как и следующее за ним, является одним из самых сложных заданий Единого государственного экзамена по математике. Если вы претендуете на высокий балл, то нужно постараться решить эту задачу или хотя бы продвинуться в её решении как можно дальше. Для успешного решения задачи важно свободно оперировать с изученными определениями, свойствами, теоремами, применять их в различных ситуациях, анализировать условие и находить возможные пути решения. Особое внимание следует уделить задачам с параметром, решение которых основывается на таких свойствах функций, как ограниченность, монотонность, чётность и нечётность, требует умения находить область определения, множество значений и строить графики основных элементарных функций.

Пример задания Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 + 2ax + (a+2)y + 1 = 0, \\ xy + 1 = x + y \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

РЕШЕНИЕ. Второе уравнение системы приводится к виду $xy - x - y + 1 = 0$, следовательно, $x(y-1) - (y-1) = 0$ и $(x-1)(y-1) = 0$. Таким образом, $x = 1$ или $y = 1$.

Если $a = 0$, то из первого уравнения данной системы находим, что $y = -0{,}5$, и, значит, данная система имеет единственное решение $(1; -0{,}5)$.

Пусть $a \neq 0$. Тогда при подстановке в первое уравнение данной системы значений $x = 1$ или $y = 1$ получаются квадратные уравнения. Значит, данная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда каждое из этих уравнений имеет ровно два корня и пара чисел $(1; 1)$ не является решением данной системы.

При $x = 1$ первое уравнение данной системы принимает вид

$$ay^2 + (a+2)y + 3a + 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет ровно два корня, если его дискриминант положителен, т. е. если

$$(a+2)^2 - 12a^2 - 4a > 0$$

и, значит, $11a^2 < 4$, откуда, учитывая условие $a \neq 0$, получаем, что $a \in \left(-\frac{2\sqrt{11}}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{2\sqrt{11}}{11}\right)$.

При $y=1$ первое уравнение данной системы принимает вид $ax^2+2ax+2a+3=0$.

Это квадратное уравнение имеет ровно два корня, если его дискриминант положителен, т. е. если

$$4a^2-8a^2-12a>0,$$

откуда $a^2+3a<0$. Множеством решений последнего неполного квадратного неравенства является промежуток $(-3;\,0)$.

Пара чисел $(1;\,1)$ является решением данной системы уравнений, если $5a+3=0$, то есть $a=-\frac{3}{5}$.

Таким образом, данная система уравнений имеет ровно четыре решения при $a\in\left(-\frac{2\sqrt{11}}{11};\,-\frac{3}{5}\right)\cup\left(-\frac{3}{5};\,0\right)$.

ОТВЕТ. $a\in\left(-\frac{2\sqrt{11}}{11};\,-\frac{3}{5}\right)\cup\left(-\frac{3}{5};\,0\right)$.

Задание 19

Тип задания по кодификатору требований Задание на построение и исследование простейших математических моделей.

Характеристика задания Задача, связанная со свойствами делимости целых чисел, логическим перебором.

Комментарий Задание олимпиадного типа, рассчитанное на сильных учащихся. Для того чтобы продвинуться в его решении, не требуется никаких специальных знаний, выходящих за рамки стандарта математического образования, однако необходимо проявить определённый уровень математической культуры, логического мышления, который формируется при решении задач профильного уровня на протяжении всего обучения в школе. Ответ на первый вопрос задачи по силам большинству успевающих учеников, главное здесь — не испугаться условия, дочитать его до конца и немного подумать.

Пример задания На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 3?

б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 11?

в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

РЕШЕНИЕ. а) Если наименьшее число равно 3, то сумма шести наименьших чисел не меньше $3+4+5+6+7+8=33$, а их среднее арифметическое больше 5.

б) Пусть сумма четырёх наименьших чисел равна A, сумма пятого и шестого по величине чисел равна B, а сумма четырёх наибольших чисел равна C. Предположим, что среднее арифметическое всех десяти чисел равно 11. Тогда получаем

$$A+B=30, \quad B+C=90, \quad A+B+C=110,$$

откуда $A=20$, $B=10$. Это невозможно, поскольку должно выполняться неравенство $A<2B$.

в) По условию $A+B=30$, $B+C=90$. Среднее арифметическое будет наибольшим, когда будет наибольшей сумма всех чисел:

$$A+B+C=(A+B)+(B+C)-B=120-B.$$

Значит, нужно найти наименьшее возможное значение B.

Пусть числа, написанные на доске, равны a_1, a_2, ..., a_{10}, причём $a_1<a_2<\ldots<a_{10}$.

Тогда $a_1+4\leqslant a_5$, $a_2+4\leqslant a_6$, $a_3+2\leqslant a_5$, $a_4+2\leqslant a_6$, откуда $a_1+a_2+a_3+a_4+12\leqslant 2a_5+2a_6$, т. е. $A+12\leqslant 2B$.

Значит, $3B\geqslant A+B+12=42$; $B\geqslant 14$.

Если $B=14$, то $a_5\leqslant 6$, $a_4\leqslant 5$, ..., $a_1\leqslant 2$, откуда $A\leqslant 14$. Получаем противоречие, поскольку $A+B\leqslant 28<30$. Следовательно, $B\geqslant 15$.

Покажем, что число B может равняться 15. Например, если на доске написаны числа 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 45, то условия задачи выполнены и $B=15$. В этом случае наибольшее значение среднего арифметического равно

$$\frac{120-B}{10}=\frac{120-15}{10}=10{,}5.$$

ОТВЕТ. а) Нет; б) нет; в) 10,5.

Диагностические работы за курс 10 класса

Ответом к заданиям с кратким ответом 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

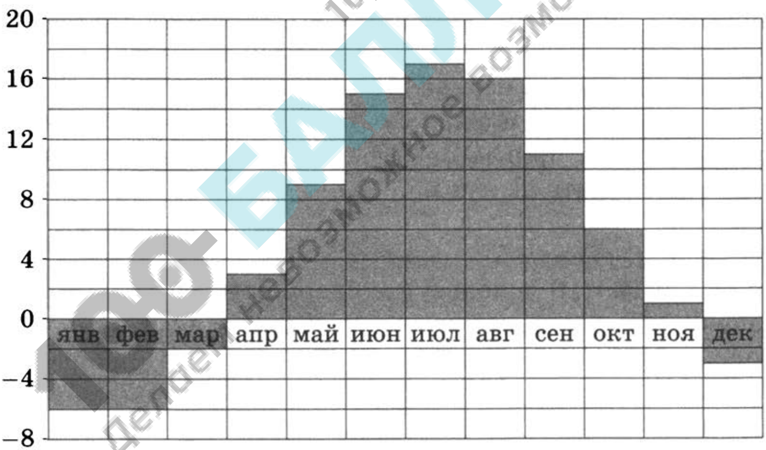
Для записи решений и ответов к заданиям с развёрнутым решением 13—19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

Диагностическая работа № 1

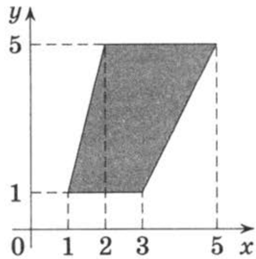
Часть 1

1 Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы. При утверждении плана застройки ширину участка уменьшили на 20 %, а длину увеличили на 20 %. На сколько процентов уменьшилась площадь участка после утверждения плана застройки?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3 Найдите площадь трапеции, вершинами которой являются точки с координатами (1; 1), (2; 5), (5; 5), (3; 1).

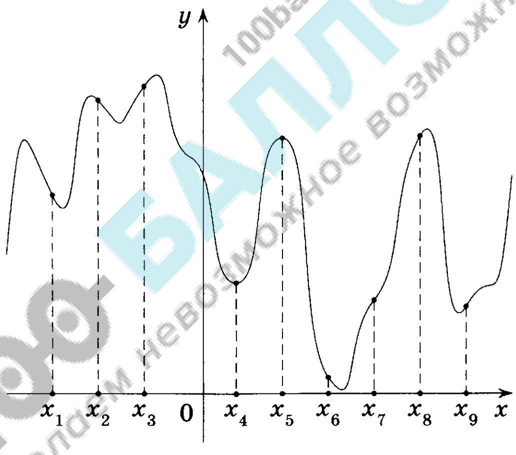


4 На тарелке 30 пирожков: 3 с мясом, 18 с капустой и 9 с вишней. Саша наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

5 Найдите корень уравнения $\frac{x-24}{x-3}=-2$.

6 Даны два смежных угла. Биссектриса первого из них образует угол 43° с общей стороной этих углов. Найдите величину второго из данных смежных углов. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и отмечены девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_9. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



8 Площадь поверхности куба равна 50. Найдите его диагональ.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(-1\frac{8}{9}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 8{,}64$.

10 Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p=500$ рублей за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v=300$ рублей, постоянные расходы предприятия $f=$ $=700\,000$ рублей в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле

$\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 500 000 рублей.

11 Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 440 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба?

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 28 \operatorname{tg} x - 28x - 7\pi + 7 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

13 а) Решите уравнение $4\sin^2 x + 12\sin x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14 В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все рёбра равны 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A_1, B_1 и C.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой A_1B_1.

15 Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{x - 4}{3 - x}\right)\sqrt{6x - x^2} \leqslant 0.$$

16 Из вершины C тупого угла треугольника ABC проведена высота CH. Точку H соединили с серединами M и N сторон AC и BC.

а) Докажите, что в четырёхугольник $CMHN$ можно вписать окружность.

б) Найдите её радиус, если сумма сторон AC и BC равна 20, а площадь треугольника ABC равна 24.

17 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем Андрей переводит в банк 3 460 600 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

19 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -5, -2, 1, 3, 4, 6, 9. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

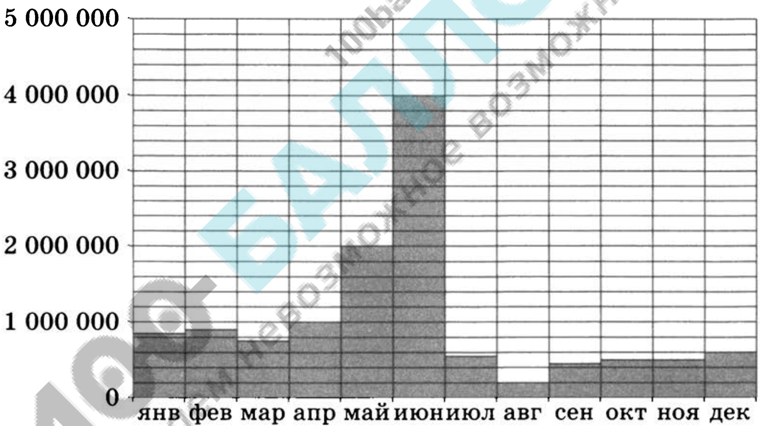
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Диагностическая работа № 2

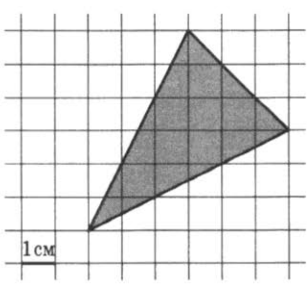
Часть 1

1 Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 56 км/ч? (Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.)

2 На диаграмме показано число запросов со словом ЕГЭ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по декабрь 2009 г. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько в 2009 г. было месяцев, когда число запросов со словом ЕГЭ превышало 800 000.



3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

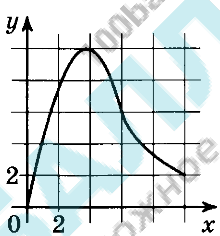


4 В каждой партии из 1000 лампочек в среднем 20 бракованных. Найдите вероятность того, что наугад взятая лампочка из партии будет исправной.

5 Найдите корень уравнения $\log_3(x+5)=\log_3(2x-17)$.

6 В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 34, вписана окружность. Найдите среднюю линию трапеции.

7 Материальная точка движется вдоль прямой от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



8 Высота правильной четырёхугольной пирамиды в два раза меньше диагонали основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $44\log_2\frac{\sqrt{4}}{2}$.

10 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P=\sigma ST^4$, где $\sigma=5{,}7\cdot10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности

$$S=\frac{1}{432}\cdot10^{21}\text{ м}^2,$$

а излучаемая ею мощность P не менее $1{,}71 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

11 На изготовление 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

12 Найдите наименьшее значение функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1-x^2}$.

13 а) Решите уравнение $8\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость BDD_1 перпендикулярна отрезку AC.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

15 Решите неравенство $7\log_9(x^2 - x - 6) \leqslant 8 + \log_9 \frac{(x+2)^7}{x-3}$.

16 В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как $1:2$. Пусть K — середина диагонали AC. Прямая DK пересекает сторону AB в точке L.

а) Докажите, что $AL = 2BL$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BCKL$, если известно, что площадь трапеции $ABCD$ равна 9.

17 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 1 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leqslant |x + 3|$ образуют отрезок длины 1.

19 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

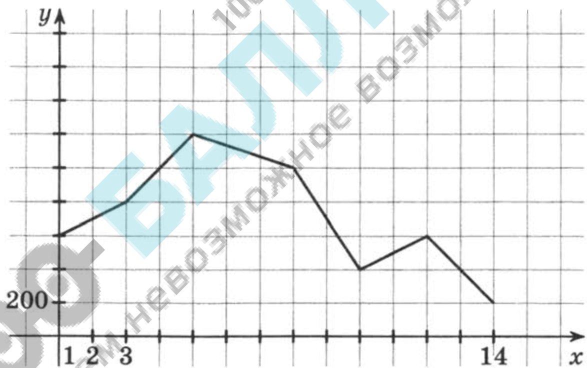
Подготовка к части 1 ЕГЭ по математике. Задачи 1–8

Ответом к заданиям части 1 (1—8) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

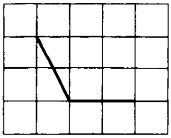
Диагностическая работа № 3

1 Шесть килограммов огурцов стоят столько же, сколько пять килограммов помидоров. На сколько процентов один килограмм помидоров дороже одного килограмма огурцов?

2 На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций металлургической компании в первые две недели октября (по горизонтальной оси откладываются числа октября, по вертикальной — стоимость одной акции в рублях). 3 октября бизнесмен приобрёл 30 акций этой компании. 18 из них он продал 10 октября, а 12 октября продал остальные 12. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



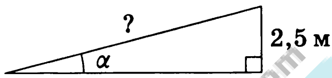
3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его тангенс.



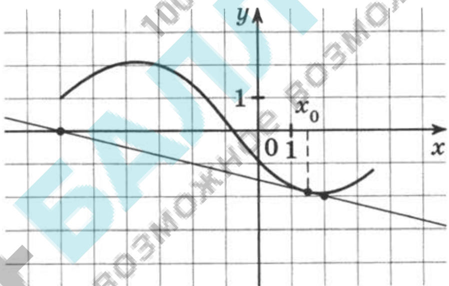
4 Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет чёрными, то он выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

5 Найдите корень уравнения $\log_2(3 - x) = -1$.

6 При проектировании торгового центра запланирована постройка эскалатора для подъёма на высоту 2,5 м под углом α к горизонту. Найдите длину эскалатора (в метрах), если $\sin \alpha = 0{,}2$.



7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0.

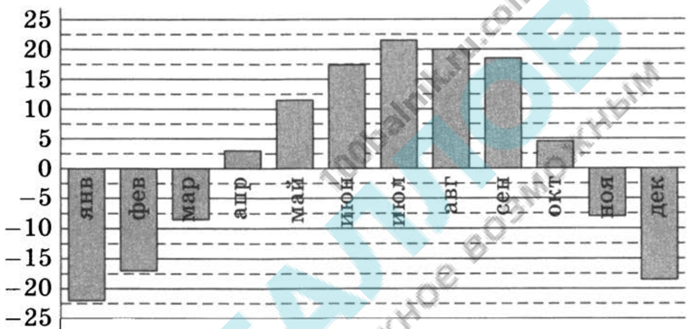


8 Бильярдный шарик весит 360 г. Сколько граммов будет весить шар вдвое меньшего радиуса, сделанный из того же материала?

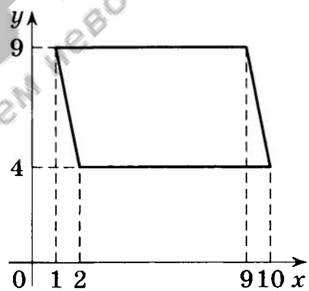
Диагностическая работа № 4

1 Сырок стоит 6 рублей 70 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 50 рублей?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Хабаровске по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда среднемесячная температура в Хабаровске положительна.



3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



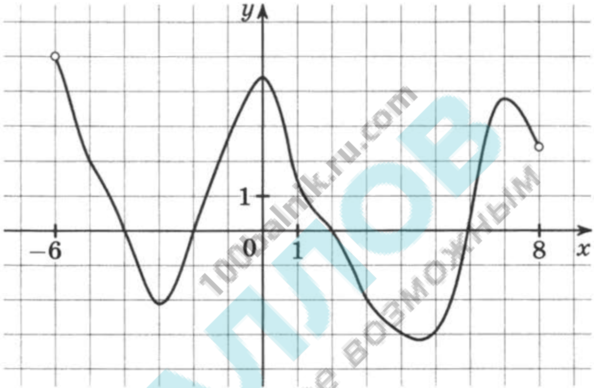
4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости (2 кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}=9$.

6 Человек, рост которого равен 1 м 70 см, стоит рядом с деревом. Найдите высоту дерева (в метрах), если длина

тени человека равна 1 м 19 см, а длина тени дерева равна 2 м 80 см.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой и дифференцируемой на интервале $(-6; 8)$. В скольких целых точках производная функции положительна?



8 Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно 20, а диагональ основания равна 24. Найдите высоту пирамиды.

Задача 1

Подготовительные задания

1 Для ремонта квартиры требуется 68 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

2 Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 3 %. Книга стоит 600 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

3 Билет в зоопарк стоит 120 рублей. Сколько рублей сдачи нужно получить с 3000 рублей, заплаченных за проход 23 человек?

4 Килограмм апельсинов дороже килограмма яблок на 60 %. На сколько процентов килограмм яблок дешевле килограмма апельсинов?

5 Платье стоит 4000 рублей, а блузка — 1600 рублей. На сколько процентов блузка дешевле платья?

6 Шоколадка стоит 28 рублей 70 копеек. Какое наибольшее число шоколадок можно купить на 250 рублей?

7 В сентябре 1 кг винограда стоил 100 рублей, в октябре виноград подорожал на 15 %, а в ноябре ещё на 20 %. Сколько рублей стоил 1 кг винограда после подорожания в ноябре?

8 95 кг крупы требуется пересыпать в коробки вместимостью 3 кг, 5 кг и 11 кг так, чтобы в коробках не оставалось пустого места. Какое наименьшее число коробок потребуется для этого?

9 Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы. При утверждении плана застройки его длину и ширину увеличили на 30 %. На сколько процентов увеличилась площадь участка после утверждения плана застройки?

10 Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 0,25 г 4 раза в день в течение 7 дней. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

Зачётные задания

1 Студентами технических вузов собираются стать 44 выпускника школы. Они составляют 40 % от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

2 Большой корабль не может подойти к берегу, поэтому пассажиров отвозят с корабля на шлюпке, вмещающей 7 пассажиров. Какой наименьшее число раз шлюпке достаточно пристать к берегу, если на берег нужно отвезти 38 пассажиров?

3 В школе 1250 учеников, из них 30 % — ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 40 % изучают французский язык. Сколько учеников в школе изучают французский язык, если в начальной школе французский язык не изучается?

4 Летом килограмм клубники стоит 80 рублей. Маша купила 2 кг 100 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна была получить с 200 рублей?

5 Футболка стоила 360 рублей. После повышения цены она стала стоить 414 рублей. На сколько процентов была повышена цена на футболку?

6 Тетрадь стоит 25 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 60 тетрадей, если при покупке больше 50 тетрадей магазин делает скидку 5 % от стоимости всей покупки?

7 Одного рулона обоев хватает для оклейки полосы от пола до потолка шириной 2,7 м. Сколько рулонов обоев нужно купить для оклейки прямоугольной комнаты размерами 2,6 м на 2,9 м?

8 Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы. При утверждении плана застройки ширину участка увеличили на 30 %, а длину уменьшили на 20 %. На сколько процентов увеличилась площадь участка после утверждения плана застройки?

9 В среднем за день во время конференции расходуется 70 пакетиков чая. Конференция длится 9 дней. В пачке чая 50 пакетиков. Какого наименьшего количества пачек чая хватит на все дни конференции?

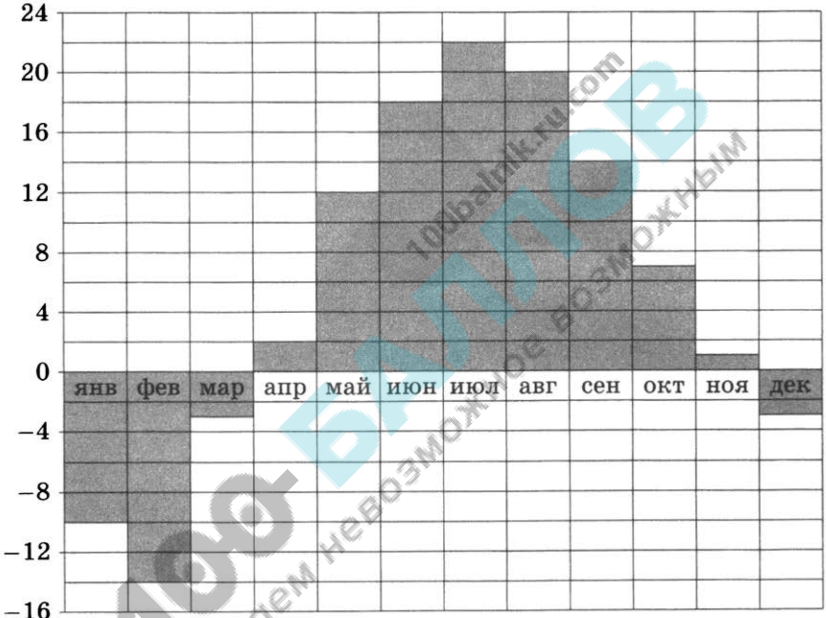
10 Одна таблетка лекарства весит 40 мг и содержит 9 % ак-

тивного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,44 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 5 кг в течение суток?

Задача 2

Подготовительные задания

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Москве за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия.



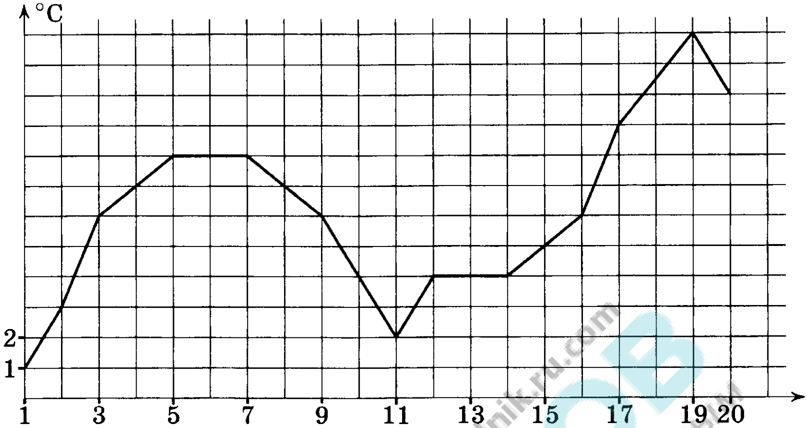
1 Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

2 Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

3 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году с отрицательной среднемесячной температурой.

4 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура превышала 10 °C.

На рисунке изображён график колебания температуры в течение первых 20 дней апреля. По горизонтальной оси отложены дни, а по вертикальной — среднесуточная температура воздуха.



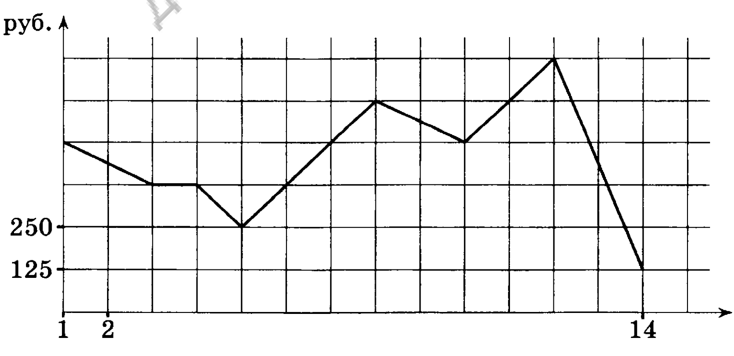
5 Какой была среднесуточная температура воздуха 6 апреля? Ответ дайте в градусах Цельсия.

6 Какого числа среднесуточная температура воздуха в первый раз достигла 7 °C?

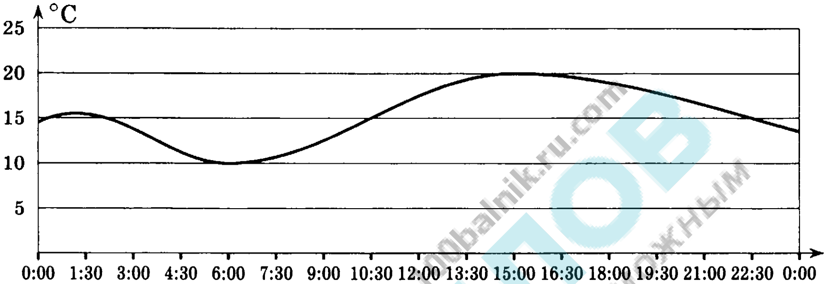
7 Какого числа среднесуточная температура воздуха была максимальной?

8 Какого числа среднесуточная температура воздуха была минимальной?

9 На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первые две недели февраля. В первую неделю февраля бизнесмен купил 12 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль (в рублях) он мог получить?

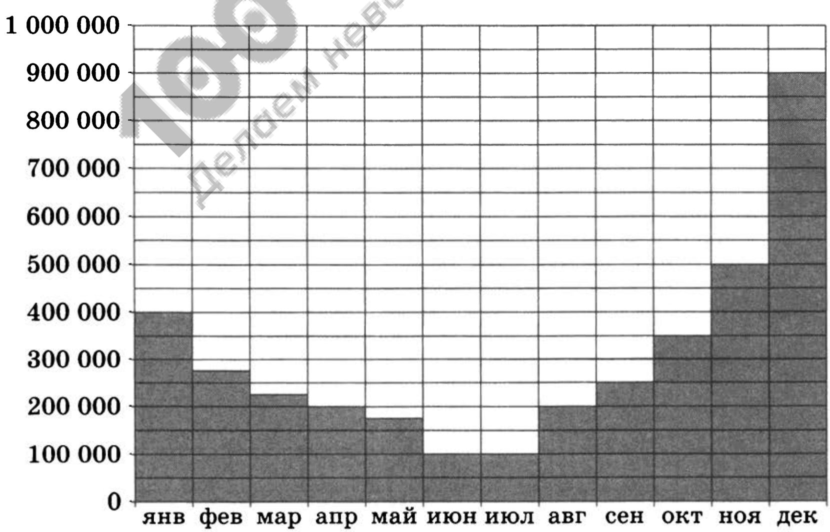


10 На графике изображено изменение температуры воздуха в пункте A на протяжении суток 17 августа. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику разность между максимальным и минимальным значениями температуры в течение этих суток (в градусах Цельсия).



Зачётные задания

На диаграмме показано число запросов со словом СНЕГ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по декабрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц.



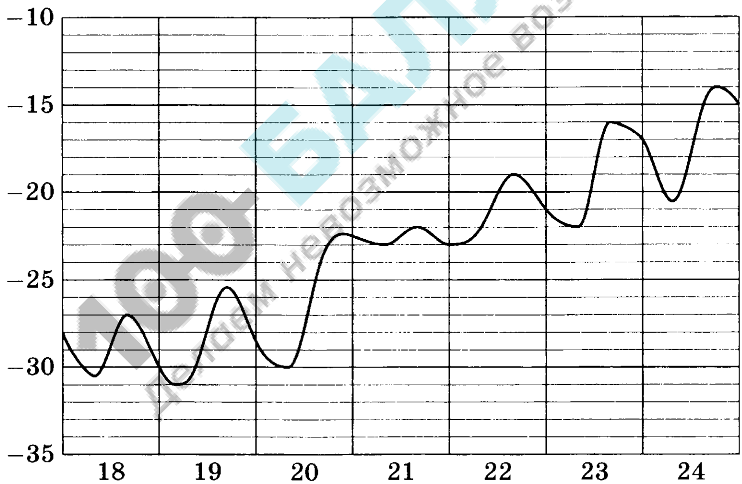
1 Определите по диаграмме максимальное месячное число запросов со словом СНЕГ в период с января по октябрь 2009 года.

2 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда число запросов со словом СНЕГ было равно 200 000.

3 Определите по диаграмме, во сколько раз максимальное месячное число запросов превышало минимальное месячное число запросов со словом СНЕГ в 2009 году.

4 Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда число запросов со словом СНЕГ не превосходило 300 000.

На рисунке показано изменение температуры воздуха в Москве с 18 по 24 января 2006 г. По горизонтали указываются числа января, по вертикали — температура в градусах Цельсия.

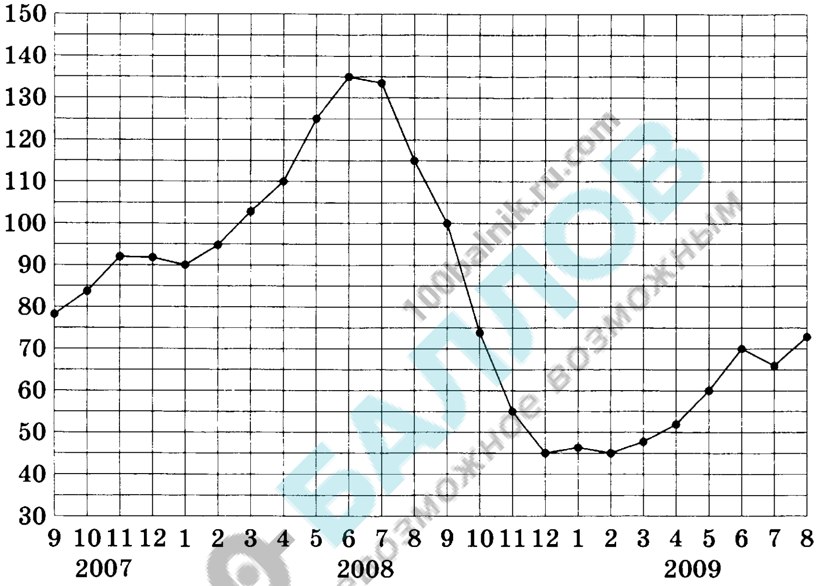


5 Определите по рисунку, какова была наименьшая температура воздуха за указанный период (в градусах Цельсия).

6 Определите по рисунку, какова была наибольшая температура воздуха 22 января (в градусах Цельсия).

7 Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры за указанный период (в градусах Цельсия).

На рисунке жирными точками показана среднемесячная цена нефти с сентября 2007 по август 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией.



8 Определите по рисунку, какой была среднемесячная цена нефти в мае 2009 года (в долларах за баррель).

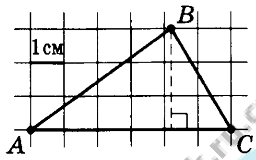
9 Определите по рисунку, во сколько раз наибольшая среднемесячная цена нефти за указанный период превосходила её наименьшую среднемесячную цену.

10 Определите по рисунку наименьшую среднемесячную цену нефти в период с ноября 2007 по сентябрь 2008 года (в долларах за баррель).

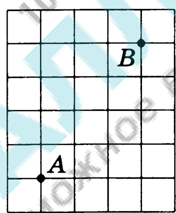
Задача 3

Подготовительные задания

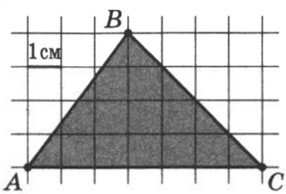
1 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник ABC (см. рисунок). Найдите длину высоты h, проведённой из вершины B, в сантиметрах.



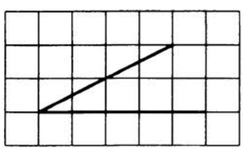
2 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 отмечены точки A и B. Найдите длину отрезка AB.



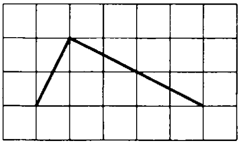
3 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



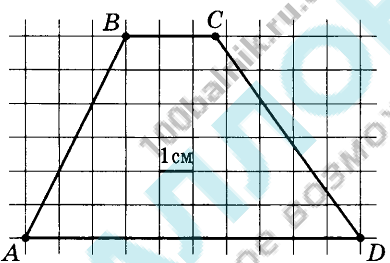
4 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён угол. Найдите его тангенс.



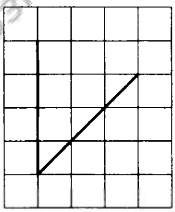
5 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его градусную величину.



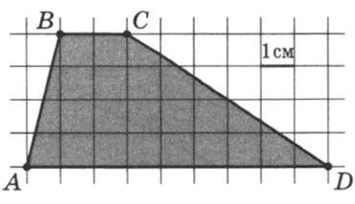
6 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите её высоту в сантиметрах.



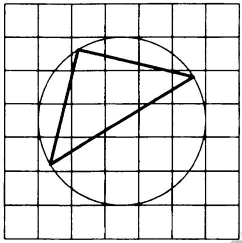
7 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его градусную величину.



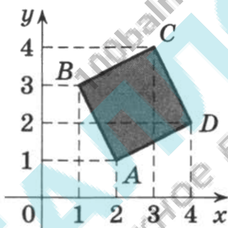
8 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.



9 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.

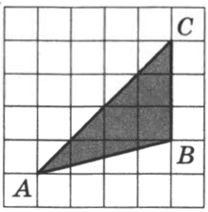


10 Найдите площадь квадрата, вершины которого имеют координаты (2; 1), (1; 3), (3; 4), (4; 2).

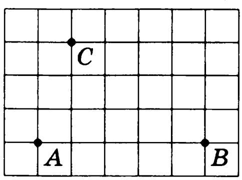


Зачётные задания

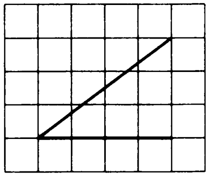
1 Найдите площадь треугольника ABC, считая стороны квадратных клеток равными 1.



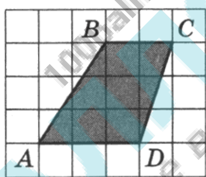
2 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки C до прямой AB.



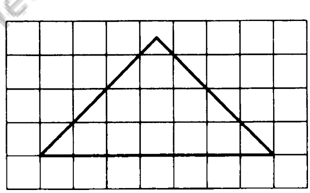
3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его синус.



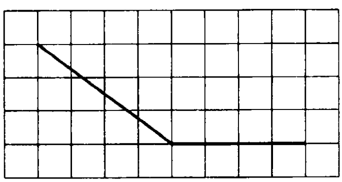
4 Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



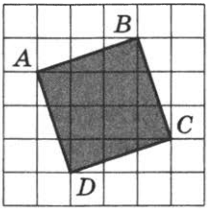
5 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его биссектрисы, проведённой к гипотенузе.



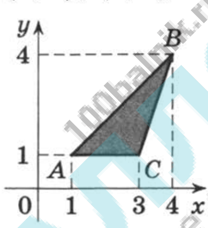
6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его косинус.



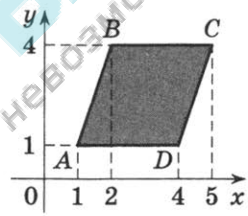
7 Найдите площадь квадрата $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



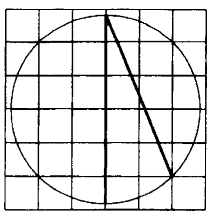
8 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 1), (4; 4), (3; 1).



9 Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (1; 1), (2; 4), (5; 4), (4; 1).



10 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его градусную величину.



Задача 4

Подготовительные задания

1 Найдите вероятность того, что при броске монеты выпадет решка.

2 В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

3 Фабрика выпускает сумки. В среднем на 147 качественных сумок приходится 13 сумок, имеющих скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что выбранная в магазине сумка окажется с дефектами. Результат округлите до сотых.

4 В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 9 из них встречается вопрос по геометрии. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос по геометрии.

5 На конференцию приехали 5 учёных из Бельгии, 3 из Финляндии и 7 из Испании. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двенадцатым окажется доклад учёного из Финляндии.

6 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,95. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,48. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

7 Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 12 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

8 Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,04. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

9 Аня и Маша играют в кости. Они бросают кубик по одному разу, выигрывает та девочка, у которой больше очков. Ничья, если очков поровну. Первой бросила Аня, у неё выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Маша проиграет. Ответ округлите до сотых.

10 За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не будут сидеть рядом.

Зачётные задания

1 Найдите вероятность того, что при броске кубика выпадет нечётное число очков.

2 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5 или 6.

3 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 21 шахматист, среди которых 3 участника из России, в том числе Андрей Меньшов. Найдите вероятность того, что в первом туре Андрей Меньшов будет играть с каким-либо шахматистом из России.

4 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

5 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 55 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получают 75 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

6 Вероятность того, что на тестировании по истории учащийся Д. верно решит больше 11 задач, равна 0,64. Вероятность того, что Д. верно решит больше 10 задач, равна 0,7. Найдите вероятность того, что Д. верно решит ровно 11 задач.

7 При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем — 0,7. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

8 На фабрике керамической посуды 30 % произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 90 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

9 Ваня и Саша играют в кости. Они бросают кубик по одному разу, выигрывает тот, у кого больше очков. Ничья, если очков поровну. Первым бросил Ваня, у него выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Саша не проиграет. Ответ округлите до сотых.

10 В параллели 51 учащийся, среди них два друга — Андрей и Михаил. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Михаил окажутся в одной группе.

Задача 5

Подготовительные задания

1 Найдите корень уравнения $36-12x=0$.
2 Найдите корень уравнения $\sqrt{x-1}=6$.
3 Найдите корень уравнения $\log_3(9x)=4$.
4 Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.
5 Найдите корень уравнения $5^{x-1}=125$.
6 Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+5}=7$.
7 Найдите корень уравнения $\frac{1}{4x+1}=\frac{1}{9}$.
8 Решите уравнение $x^2-16x+63=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
9 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-9}=64$.
10 Найдите корень уравнения $\log_2(11-x)=\log_2 3$.

Зачётные задания

1 Найдите корень уравнения $\frac{x-12}{x-4}=-1$.
2 Найдите корень уравнения $x^2+3=(x-3)^2$.
3 Найдите корень уравнения $3^{5+2x}=27^{2x}$.
4 Найдите корень уравнения $(x+4)^3=27$.
5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2x+57}{3}}=7$.
6 Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{6}}(4-2x)=-2$.
7 Решите уравнение $\sqrt{10-3x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
8 Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(x-1)}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.
9 Найдите корень уравнения $2^{1+2x}=0{,}04\cdot10^{1+2x}$.
10 Найдите корень уравнения $2\log_9(5x+7)=\log_3(5x+3)+2$.

Задача 6

Подготовительные задания

1 Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC, если $BK:KA=6:5$, $KM=18$.

2 В прямоугольном треугольнике, один из острых углов которого равен $60°$, гипотенуза равна 19. Найдите меньший катет этого треугольника.

3 В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке O. Найдите AO, если $CO=27$, $DC=30$, $AB=20$.

4 Один из углов параллелограмма на $56°$ меньше другого угла. Найдите величину тупого угла параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

5 Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите BC, если $AB=13$.

6 Концы отрезка AB лежат по одну сторону от прямой l. Расстояние от точки A до прямой l равно 23, а расстояние от точки B до прямой l равно 45. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

7 Один из углов выпуклого двенадцатиугольника равен $13°$. Найдите сумму остальных его углов. Ответ дайте в градусах.

8 Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как $7:8$. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг. Ответ дайте в градусах.

9 Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 12.

10 Около параллелограмма, одна из диагоналей которого равна 11, описана окружность. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

Зачётные задания

1 Даны два смежных угла, один из которых равен $34°$. Найдите угол между биссектрисой второго из данных углов и их общей стороной. Ответ дайте в градусах.

2 Найдите угол B треугольника ABC, если $AB = BC$, а внешний угол при вершине C равен $123°$. Ответ дайте в градусах.

3 Одно из оснований трапеции в 6 раз меньше её средней линии. Во сколько раз оно меньше другого основания трапеции?

4 Диагональ прямоугольника образует с одной из его сторон угол $11°$. Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

5 Угол между двумя высотами ромба, проведёнными из вершины тупого угла, равен $67°$. Найдите острый угол ромба. Ответ дайте в градусах.

6 Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Найдите угол BAC, если угол BOC равен $127°$. Ответ дайте в градусах.

7 Отрезки AB и BC являются соответственно диаметром и хордой окружности с центром O. Найдите угол AOC, если угол ABC равен $67°$. Ответ дайте в градусах.

8 В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Найдите угол ACD, если углы BAD и ADB равны соответственно $56°$ и $78°$. Ответ дайте в градусах.

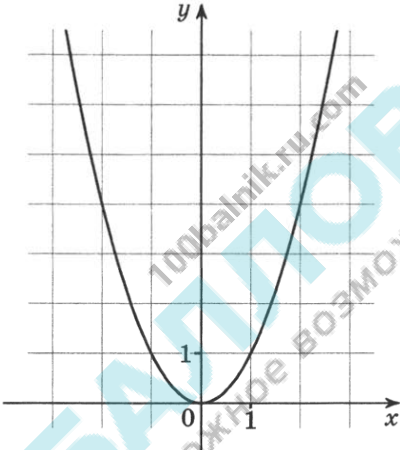
9 В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 7.

10 Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, если один из углов треугольника равен $60°$, а расстояние от центра окружности до вершины этого угла равно 10.

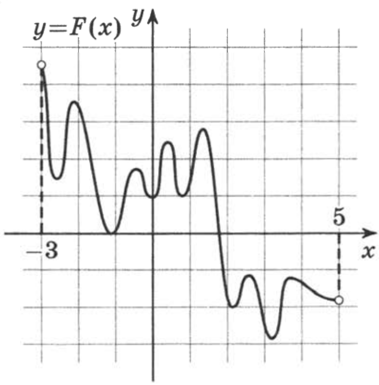
Задача 7

Подготовительные задания

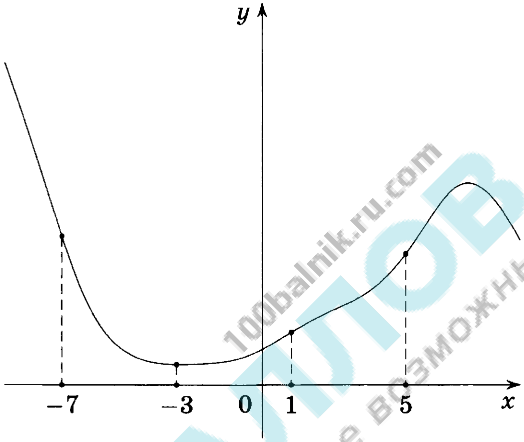
1 На рисунке изображён график функции $y = x^2$. Нарисуйте касательную к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = 2$. (Используйте уравнение касательной.)



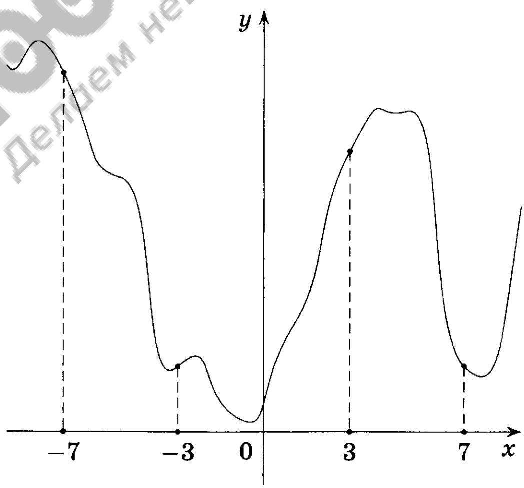
2 На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Пользуясь рисунком, определите число корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



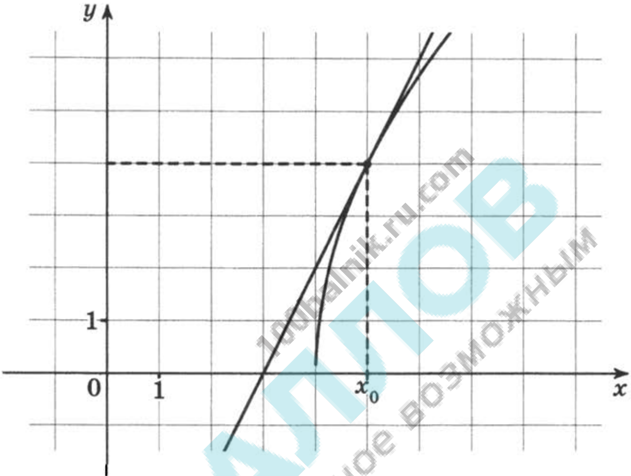
3 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 1, 5. В какой из этих точек значение производной этой функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.



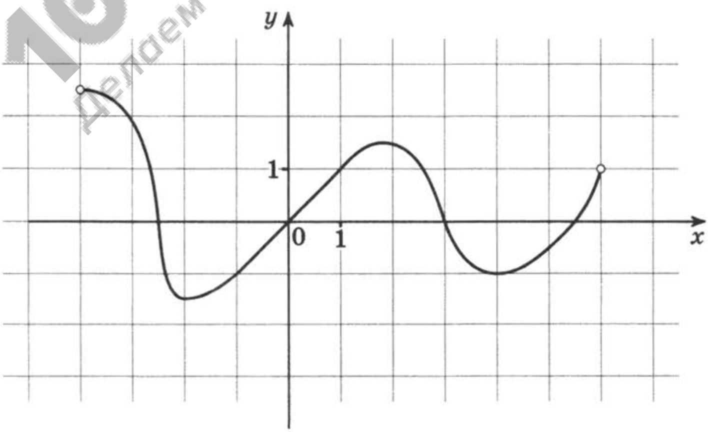
4 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной этой функции наименьшее? В ответе укажите эту точку.



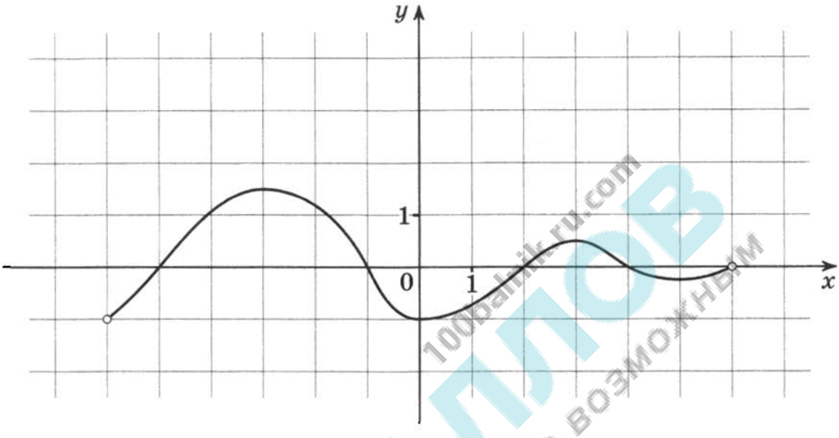
5 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



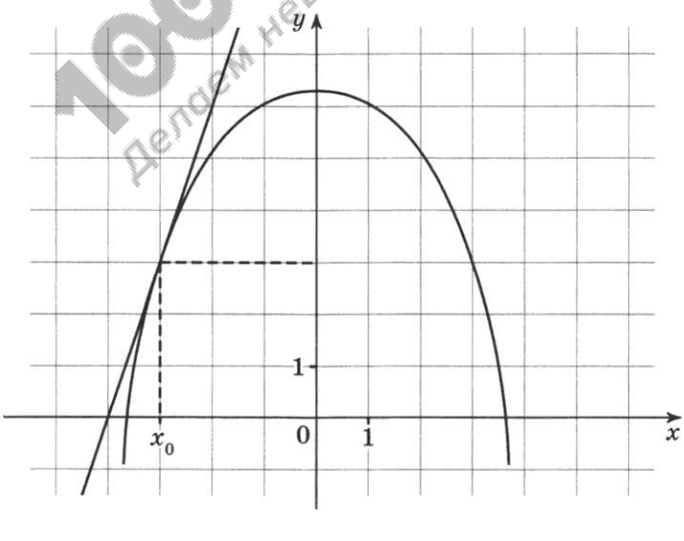
6 Функция $f(x)$ определена на интервале $(-4; 6)$. На рисунке изображён её график. В скольких целых точках её производная положительна?



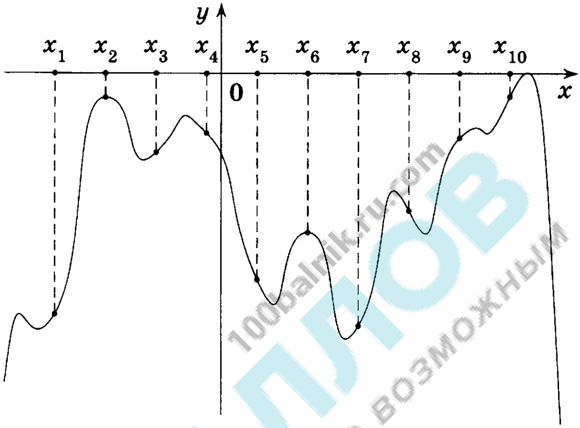
7 Функция $f(x)$ определена на интервале $(-6; 6)$. На рисунке изображён график её производной $y = f'(x)$. Найдите наибольшую длину промежутка возрастания функции $f(x)$.



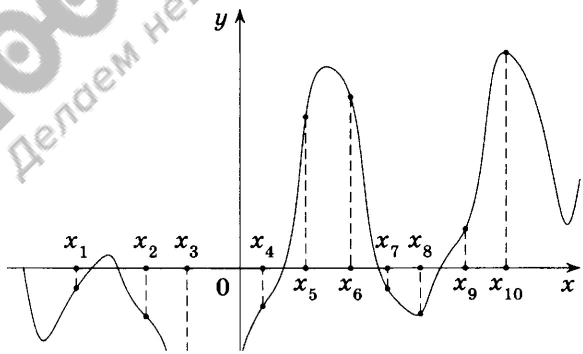
8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



9 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

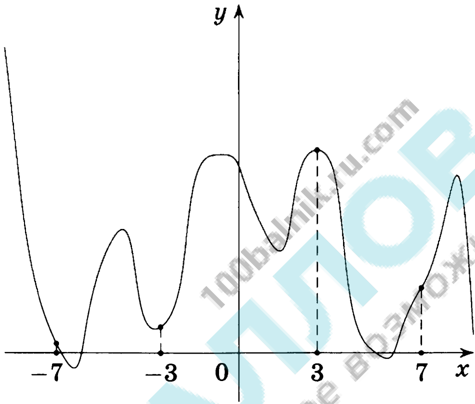


10 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и отмечены десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$?

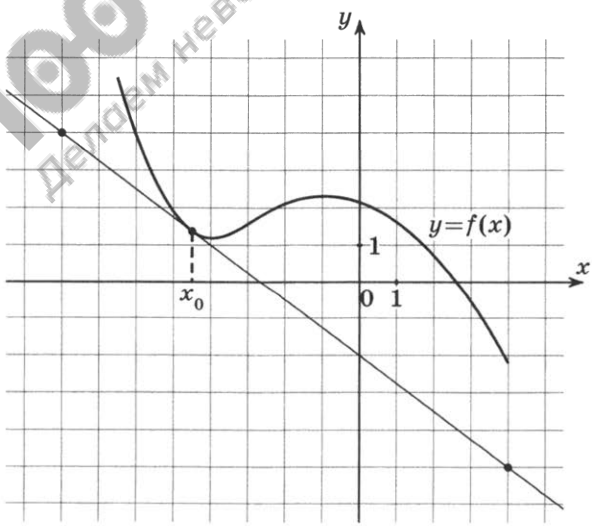


Зачётные задания

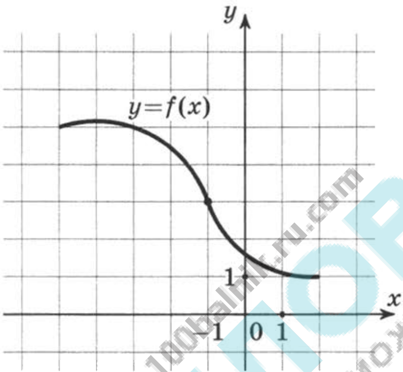
1 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной этой функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.



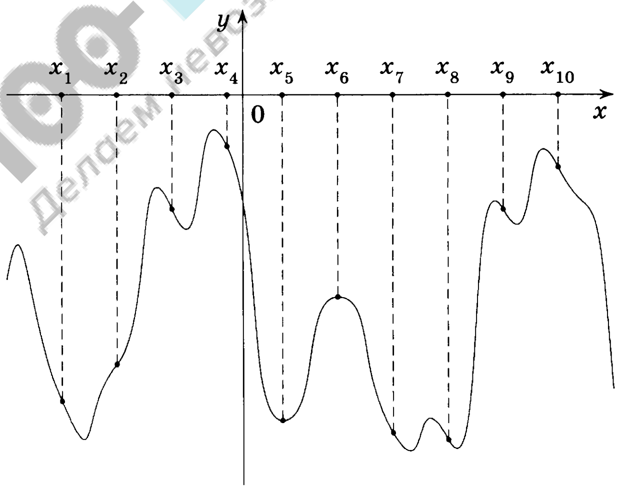
2 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



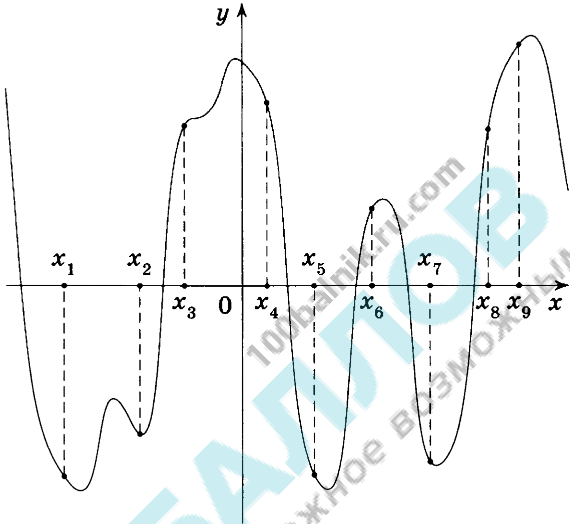
3 На рисунке изображён график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой -1, проходит через начало координат. Найдите $f'(-1)$.



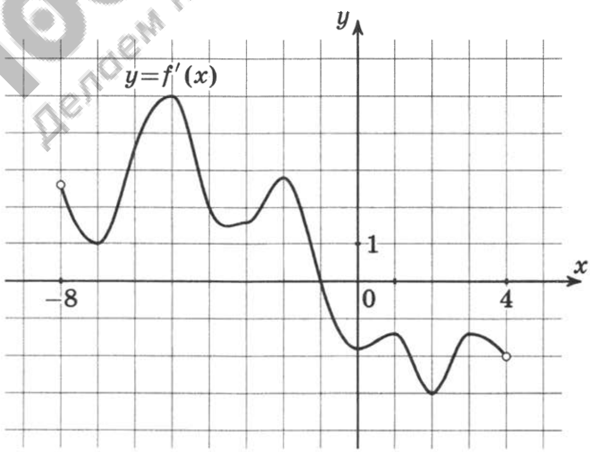
4 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



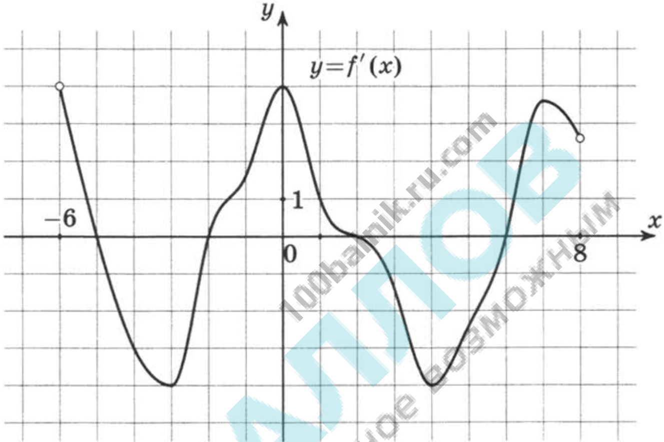
5 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и отмечены девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_9. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции $f(x)$?



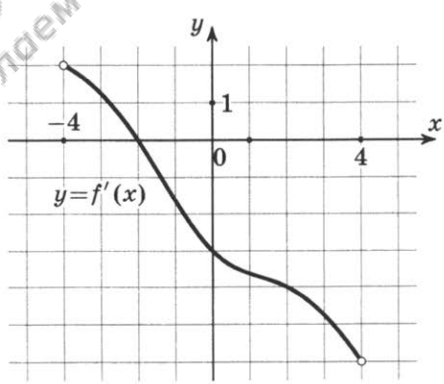
6 На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



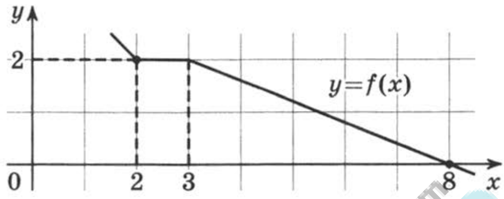
7 На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = 2x - 5$ или совпадает с ней.



8 На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 4)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 11$ или совпадает с ней.



9 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



10 Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = t^3 - 9t^2 + 2t + 30$$

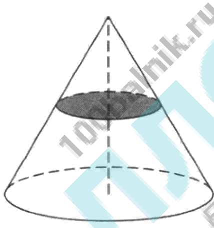
(где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени её скорость была равна 50 м/с?

Задача 8

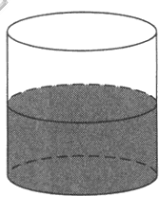
Подготовительные задания

1 Объём прямоугольного параллелепипеда равен 24. Одно из его рёбер равно 3. Найдите площадь грани параллелепипеда, перпендикулярной этому ребру.

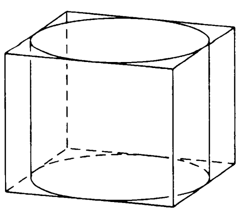
2 Объём конуса равен 120. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.



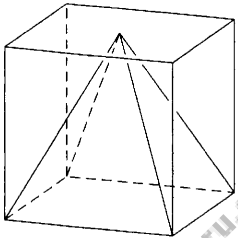
3 В цилиндрический сосуд налили 1800 $см^3$ воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 2 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в $см^3$.



4 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Высота параллелепипеда равна 3. Найдите длину образующей цилиндра.



5 Основание правильной четырёхугольной пирамиды совпадает с одной из граней куба, а вершина этой пирамиды лежит в центре противоположной грани. Найдите объём этой пирамиды, если объём куба равен 24.



6 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 13, а одна из высот основания равна 7,5. Найдите высоту пирамиды.

7 Тангенс угла между плоскостью боковой грани правильной треугольной пирамиды и плоскостью её основания равен 5. Найдите тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

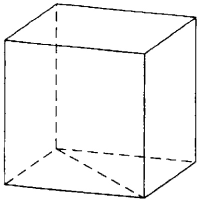
8 Высота основания правильной треугольной пирамиды в полтора раза больше высоты пирамиды. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

9 Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны $8\sqrt{2}$. Найдите высоту пирамиды.

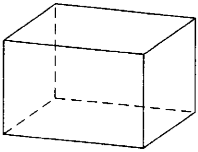
10 Высота боковой грани правильной четырёхугольной пирамиды, проведённая к стороне основания, равна 10, а высота пирамиды равна 8. Найдите сторону основания пирамиды.

Зачётные задания

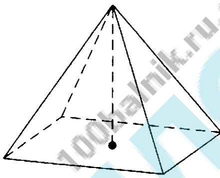
1 Диагональ грани куба равна $\sqrt{8}$. Найдите его объём.



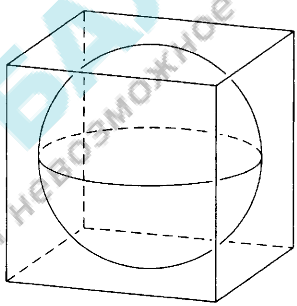
2 Объём прямоугольного параллелепипеда равен 60. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.



3 В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 12, объём равен 200. Найдите боковое ребро пирамиды.



4 Объём прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.



5 Высота боковой грани правильной треугольной пирамиды, проведённая к ребру основания, равна 10, а высота основания пирамиды равна 18. Найдите высоту пирамиды.

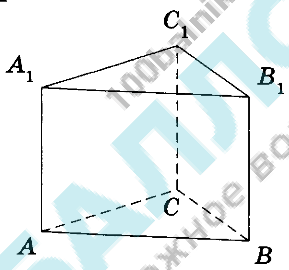
6 Боковая грань правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, синус которого равен $0{,}2\sqrt{3}$, а сторона основания пирамиды равна 10. Найдите расстояние от вершины основания пирамиды до плоскости боковой грани.

7 Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до плоскости боковой грани, не содержащей эту вершину, равно 4, а синус угла между боковой гранью и основанием пирамиды равен 0,4. Найдите высоту основания пирамиды.

8 Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равна $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины D до плоскости PAC.

9 Дана правильная четырёхугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P и стороной основания, равной $5\sqrt{2}$. Найдите расстояние от середины ребра PA до плоскости BPD.

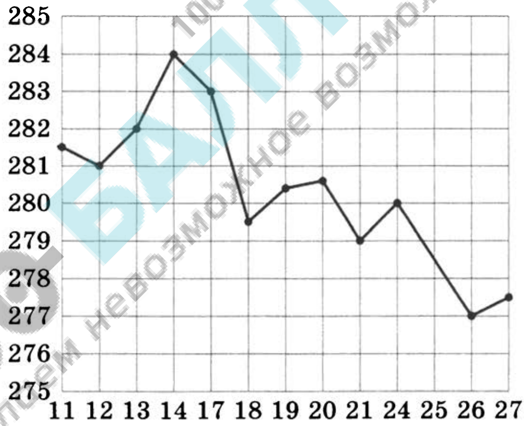
10 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



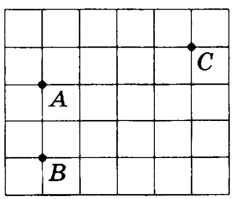
Диагностическая работа № 5

1 Молодая семья состоит из двух человек: мужа и жены. Доход семьи складывается из их зарплат. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, доход семьи вырос бы на 108 %. Сколько процентов дохода семьи составляет зарплата жены?

2 На рисунке жирными точками показана цена унции золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 11 по 27 июля 2000 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку, какого числа цена унции золота на момент закрытия торгов была наибольшей за указанный период.



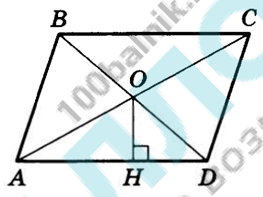
3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки C до прямой AB.



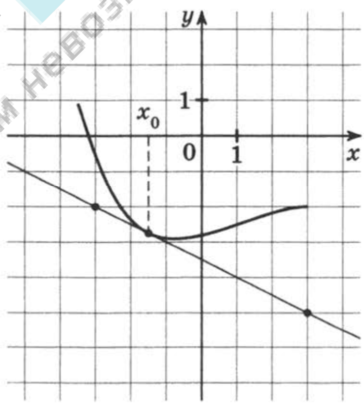
4 По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{7-6x}=7$.

6 Сторона параллелограмма равна 9 см, а расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой стороны равно 3 см. Найдите площадь параллелограмма. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и отмечены касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ функции $y=f(x)$ в точке x_0.



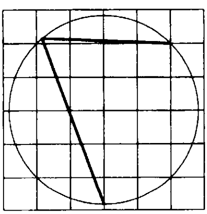
8 Кубик весит 10 г. Сколько граммов будет весить кубик, ребро которого в 3 раза больше, чем ребро первого кубика, если оба кубика изготовлены из одинакового материала?

Диагностическая работа № 6

1 Шоколадка стоит 31 рубль. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 170 рублей в воскресенье?

2 На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтеперерабатывающей компании в первой половине сентября. 3 сентября бизнесмен купил пакет акций компании, а 11 сентября продал его. В результате этих операций убыток бизнесмена составил 23 400 рублей. Сколько акций было в пакете?

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его градусную величину.

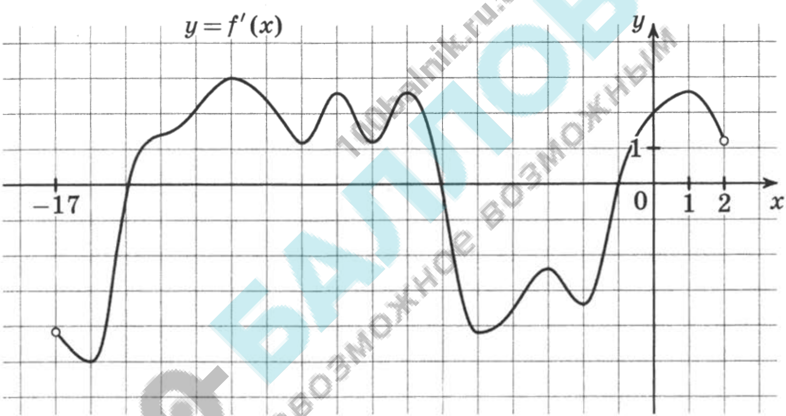


4 На фабрике керамической посуды 10 % произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5 Решите уравнение $\log_{x-7} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

6 Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Найдите угол BAC, если угол BOC равен $123°$. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-17; 2)$. Найдите число точек минимума функции $y = f(x)$.



8 Высота основания правильной треугольной пирамиды на 25 % меньше её бокового ребра. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Подготовка к части 2 ЕГЭ по математике. Задачи 9—12

Ответом к заданиям 9—12 части 2 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

Диагностическая работа № 7

1 (*задача* 9) Найдите $\operatorname{tg}\beta$, если $\sin\beta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ и $\beta \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

2 (*задача* 10) Масса радиоактивного вещества уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$. В лаборатории получили газ, содержащий в начальный момент времени $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого равен $T = 10$ мин. В течение скольких минут содержание изотопа азота-13 в газе будет не меньше 5 мг?

3 (*задача* 11) Пристани A и B расположены на реке. Катер проходит от A до B за 4 часа, а обратно — за 3 часа. Сколько часов будет плыть от B до A плот?

4 (*задача* 12) Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$.

Диагностическая работа № 8

1 (*задача* 9) Найдите значение выражения $\dfrac{42^2-(0{,}42)^2}{42{,}42}$.

2 (*задача* 10) Для получения увеличенного изображения на экране в демонстрационной лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f=40$ см. Экран может быть помещён на расстоянии от 200 до 240 см от линзы, а лампочка — на расстоянии от 30 до 60 см от неё. Зная, что расстояние от линзы до предмета d_1 и расстояние от линзы до изображения d_2 связаны соотношением $\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}=\dfrac{1}{f}$, укажите, на каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким.

3 (*задача* 11) Первая труба пропускает на 12 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объёмом 160 литров она заполняет на 12 минут позже, чем вторая труба?

4 (*задача* 12) Найдите наибольшее значение функции $y=x+\dfrac{9}{x}$ на отрезке $[-4;\,-1]$.

Задача 9

Подготовительные задания

1 Найдите значение выражения $(\sqrt{6}-\sqrt{18})(\sqrt{6}+\sqrt{18})$.
2 Найдите значение выражения $\log_2 64$.
3 Найдите значение выражения $-27\sqrt{2}\cos 135^\circ$.
4 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{2{,}4}\cdot\sqrt{1{,}8}}{\sqrt{0{,}48}}$.
5 Найдите значение выражения $\dfrac{32\sin 7^\circ\cdot\cos 7^\circ}{\sin 14^\circ}$.
6 Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{14})^2}{10+\sqrt{84}}$.
7 Найдите значение выражения $42\sqrt{6}\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{5\pi}{6}$.
8 Найдите значение выражения $(5^{19})^2:5^{39}$.
9 Найдите значение выражения $\dfrac{x^{-13}\cdot x^5}{x^{-10}}$ при $x=8$.
10 Найдите $\log_a\dfrac{a^4}{b^5}$, если $\log_a b=15$.

Зачётные задания

1 Найдите значение выражения $\sqrt{146^2-96^2}$.
2 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[20]{2}\cdot\sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{2}}$.
3 Найдите значение выражения $\left(-\dfrac{3}{8}-2\dfrac{1}{3}\right)\cdot 0{,}48$.
4 Найдите значение выражения $\dfrac{18(\sin^2 24^\circ-\cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ}$.
5 Найдите значение выражения $\dfrac{27}{\cos^2 116^\circ+\cos^2 206^\circ}$.
6 Найдите значение выражения $\dfrac{35\operatorname{tg} 127^\circ}{\operatorname{tg} 53^\circ}$.
7 Найдите значение выражения $2^{\frac{4}{7}}\cdot 4^{\frac{3}{14}}$.
8 Найдите значение выражения $\log_9 5\cdot\log_5 81$.
9 Найдите значение выражения $3^{3+\log_3 12}$.
10 Найдите значение выражения $\dfrac{5(m^6)^5+13(m^{10})^3}{(2m^{15})^2}$.

Задача 10

Подготовительные задания

1 Теорему синусов можно записать в виде $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, где a и b — две стороны треугольника, а α и β — углы треугольника, лежащие против них соответственно. Пользуясь этой формулой, найдите a, если $b = 10$, $\sin\alpha = 0{,}28$ и $\sin\beta = 0{,}25$.

2 Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 2 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

3 Начальная скорость V_0 движущегося с постоянным ускорением тела равна 12 м/с. Ускорение тела a равно 11 м/с^2. С какой скоростью (в м/с) будет двигаться тело в момент времени $t = 7$ с, если скорость движения тела при равноускоренном движении вычисляется по формуле $V = V_0 + a \cdot t$?

4 Расстояние от линзы до предмета d_1 и расстояние от линзы до изображения d_2 связаны соотношением

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f},$$

где f — главное фокусное расстояние линзы. Найдите f, если известно, что при расстоянии от линзы до предмета, равном 30 см, расстояние от линзы до изображения этого предмета равно 20 см. Ответ дайте в сантиметрах.

5 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности Tr публикаций, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель — целое число от 1 до 5.

Составители рейтинга считают, что объективность ценится впятеро, а информативность публикаций — вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула имеет вид

$$R = \frac{4In + Op + 5Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

6 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\,\%$, где T_1 — температура нагревателя (в кельвинах), T_2 — температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет равен $10\,\%$, если температура холодильника $T_2 = 333$ К? Ответ дайте в кельвинах.

7 Груз массой 0,32 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $v_0 = 1{,}5$ м/с. Кинетическая энергия груза E (в джоулях) вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 7 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

8 Водолазный колокол, содержащий $\upsilon = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}6$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 6{,}2\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 11 160 Дж.

9 Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4}=p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 128 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало равно 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

10 Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l=\sqrt{\dfrac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 32 километра? Ответ выразите в метрах.

Зачётные задания

1 При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0=14$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t°)=l_0(1+\alpha\cdot t°)$, где $\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}(°\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 4,2 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

2 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q=100-10p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p)=q\cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 210 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

3 Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P=m\left(\frac{v^2}{L}-g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g=10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 48,4 см? Ответ выразите в м/с.

4 Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y=ax^2+bx$, где $a=-\frac{1}{40}$ м$^{-1}$, $b=\frac{7}{4}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 14 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

5 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=1{,}8+10t-5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 6 метров?

6 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P=\sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma=5{,}7\cdot10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{128}\cdot10^{21}$ м^2, а мощность её излучения равна $1{,}14\cdot10^{26}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

7 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R=r_{\text{пок}}-\frac{r_{\text{пок}}-r_{\text{экс}}}{(K+1)^m}$, где $m=\frac{0{,}02K}{r_{\text{пок}}+0{,}1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 7, их средняя оценка равна 0,32, а оценка экспертов равна 0,26.

8 Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 206$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \dfrac{f_0}{1 - \dfrac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 4 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ выразите в м/с.

9 Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ выразите в секундах.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа равна 52 мг. Период его полураспада составляет 9 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 13 мг.

Задача 11

Подготовительные задания

1 Труба наполняет бассейн за 5 часов. Сколько литров воды за час пропускает труба, если объём бассейна 800 литров?

2 На изготовление заказа у рабочего уходит 28 часов. Сколько деталей входит в заказ, если за час рабочий делает 20 деталей?

3 С какой средней скоростью нужно ехать гонщику, если он хочет проехать 560 километров за 3,5 часа? Ответ дайте в километрах в час.

4 Первая труба наполняет бассейн за 15 часов. За сколько часов заполнит бассейн вторая труба, если известно, что она пропускает в два с половиной раза больше воды, чем первая?

5 Скорость товарного поезда равна 54 км/ч. Выразите скорость поезда в метрах в секунду.

6 В сосуд, содержащий 6 литров 10-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 4 литра воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

7 Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 68 килограммов изюма, если виноград содержит 90 % воды, а изюм содержит 5 % воды?

8 Пять одинаковых рубашек дешевле куртки на 10 %. На сколько процентов семь таких же рубашек дороже куртки?

9 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 17 км/ч, прошёл по течению реки и после стоянки вернулся в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длилась 7 часов, а в исходный пункт теплоход вернулся через 41 час после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

10 Клиент А. сделал вклад в банке в размере 9100 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады

и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 1001 рубль больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Зачётные задания

1 Расстояние между городами А и В равно 470 км. Из города А в город В со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 85 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

2 Два велосипедиста одновременно отправились в 126-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 5 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 5 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

3 Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 19 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 15 км/ч больше скорости другого?

4 Расстояние между пристанями А и В равно 72 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 3 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 39 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

5 Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 55 км/ч, следующий час — со скоростью 50 км/ч, а затем два часа — со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

6 Один мастер может выполнить заказ за 45 часов, а другой — за 36 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

7 Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 4 дня. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту

работу первый рабочий, если он за 2 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 1 день?

8 В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 25 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

9 Имеется два сплава. Первый содержит 10 % никеля, второй — 30 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 25 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

10 Рабочие прокладывают тоннель длиной 77 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 8 метров туннеля. Определите, сколько метров туннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 7 дней.

Задача 12

Подготовительные задания

1 Найдите значение производной функции $g(x) = x^5 + 4x - 7$ в точке -3.

2 Найдите значение производной функции $g(x) = e^{3x} - 11$ в точке 0.

3 Найдите значение производной функции $g(x) = 4\cos x - 3$ в точке $-\frac{\pi}{2}$.

4 Найдите значение производной функции $g(x) = 8\ln x$ в точке 2.

5 Найдите точку максимума функции $f(x) = 4\ln x - x + 9$.

6 Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x) = \frac{3x+1}{4}$, если $F(3) = 6$. В ответе укажите значение $F(1)$.

7 Найдите точку минимума функции $f(x) = x^2 - 11x + 35$.

8 Найдите наибольшее значение функции $y = 2x + \frac{2}{x} + 14$ на отрезке $[-7; -0{,}5]$.

9 Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 15\operatorname{tg} x + 31$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

10 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+3)^{10} - 10x$ на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

Зачётные задания

1 Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[-12; -1]$.

2 Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 12x + 15$.

3 Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = x^2 + 2x - 15$ на отрезке $[0; 6]$ равно -45. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

4 Найдите наибольшее значение функции $y = (9 - x)\sqrt{x+3}$ на отрезке $[-3; 5]$.

5 Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 27x + 33$.

6 Найдите наибольшее значение функции $y = 4\operatorname{tg} x - 4x + \pi - 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

7 Один из двух нулей первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = 2x - 3$ равен -2. Найдите второй нуль.

8 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{11 + 10x - x^2}$.

9 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 2) - 2x + 12$.

10 Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + \ln x - 13$ на отрезке $[0{,}75;\ 1{,}25]$.

Диагностическая работа № 9

1 (*задача* 9) Найдите значение выражения $6\log_7\sqrt[3]{7}$.

2 (*задача* 10) Расстояние (в километрах) до линии горизонта от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h над землёй, выраженной в километрах, вычисляется по формуле $l=\sqrt{2Rh}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы расстояние от него до горизонта было не меньше восьми километров? Ответ дайте в метрах.

3 (*задача* 11) Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, он через два года был продан за 15 842 рубля.

4 (*задача* 12) Найдите наименьшее значение функции $y=x^{\frac{3}{2}}-3x+1$ на отрезке $[1; 9]$.

Диагностическая работа № 10

1 (*задача* 9) Найдите значение выражения $\left(2\frac{6}{7} - 1\frac{1}{3}\right) \cdot 5\frac{1}{4}$.

2 (*задача* 10) По закону Ома для полной цепи сила тока равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где $\varepsilon = 12$ В — ЭДС источника, $r = 1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи. При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 10 % силы тока короткого замыкания $I_{\text{КЗ}} = \frac{\varepsilon}{r}$? Ответ дайте в омах.

3 (*задача* 11) Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

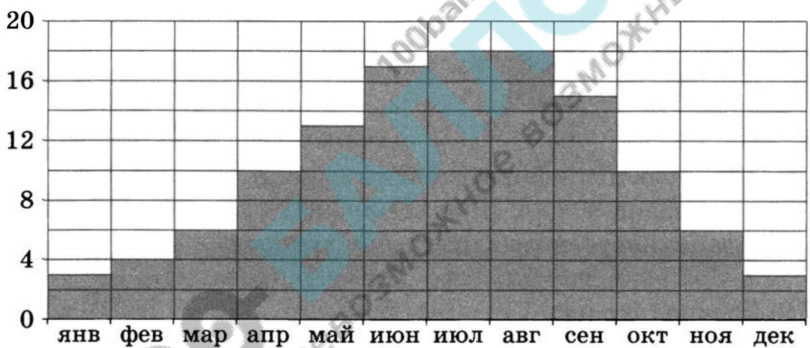
4 (*задача* 12) Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 4x^2 + 4x$ на отрезке $[-3; -1]$.

Задания с кратким ответом (задачи 1—12). Диагностические работы

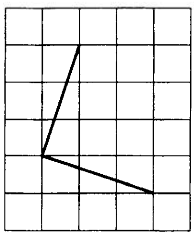
Диагностическая работа № 11

1 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 40 копеек. Счётчик электроэнергии 1 марта показывал 770 киловатт-часов, а 1 апреля показывал 1135 киловатт-часов. Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию за март? Ответ дайте в рублях.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Париже за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была равна 10 градусам Цельсия.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его градусную величину.

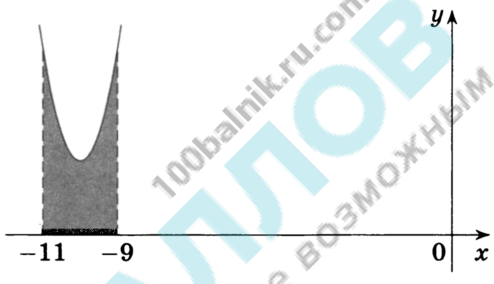


4 В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в 12 из них встречается вопрос по круглым червям. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику попадётся вопрос по круглым червям.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{7-x}=4$.

6 Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=7$, $CK=8$.

7 На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8 Площадь полной поверхности данного правильного тетраэдра равна 80 см^2. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра, ребро которого в 4 раза меньше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см^2.

9 Вычислите $\log_5 135 - \log_5 5{,}4$.

10 Высоту над землёй подброшенного вверх камня можно вычислять по формуле $h(t)=1{,}6+13t-5t^2$, где t — время с момента броска в секундах, h — высота в метрах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 6 метров?

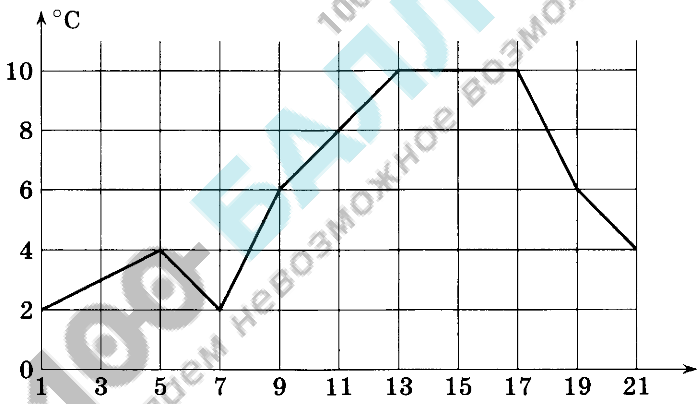
11 Товарный поезд, идущий со скоростью 30 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 секунд. Определите длину поезда (в метрах).

12 Найдите наибольшее значение функции $y=11x+\cos x+10$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

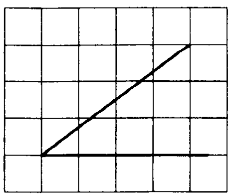
Диагностическая работа № 12

1 На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина — 45 рублей 20 копеек за литр. Сдачи клиент получил 5 рублей 60 копеек. Сколько литров бензина было залито в бак?

2 Первый посев семян петрушки рекомендуется проводить в апреле при дневной температуре воздуха не менее $+6°C$. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха на первые три недели апреля. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев петрушки.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его косинус.

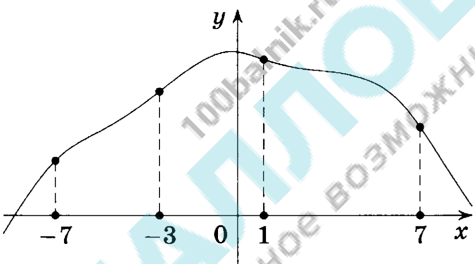


4 Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

5 Найдите корень уравнения $3^{x-3}=27$.

6 В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 45° и 67°. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины C. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 1, 7. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



8 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10 и образует с плоскостью основания угол, синус которого равен 0,8. Найдите высоту основания пирамиды.

9 Найдите значение выражения $\log_4 104 - \log_4 6{,}5$.

10 Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}\cdot 100\,\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 (в градусах Кельвина) КПД этого двигателя будет не меньше 80 %, если температура холодильника $T_2=200$ К?

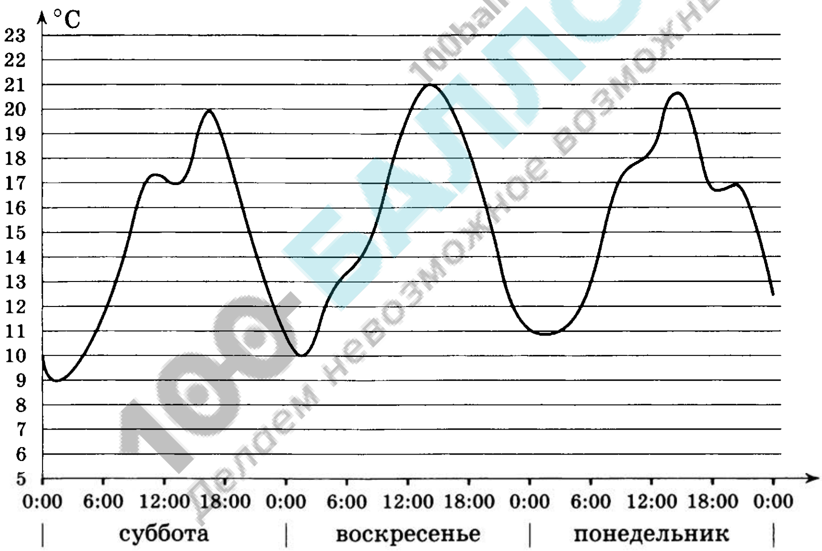
11 Брюки дороже рубашки на 30 % и дешевле пиджака на 22 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

12 Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=4x+2$, если множеством значений первообразной является луч $[-4;+\infty)$. В ответе укажите значение $F(-2)$.

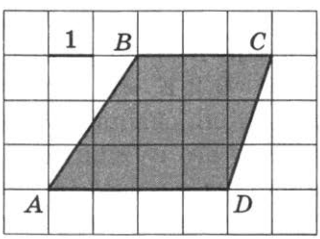
Диагностическая работа № 13

1 Билет на автобус стоит 110 рублей. Ожидается повышение цены на 10 %. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 1000 рублей?

2 На графике показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток начиная с 0 часов субботы. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с субботы на воскресенье. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3 Найдите площадь трапеции $ABCD$.



4 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45 % этих стёкол, из которых 3 % имеют дефекты, вторая — 55 %, из которых 1 % имеют дефекты. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

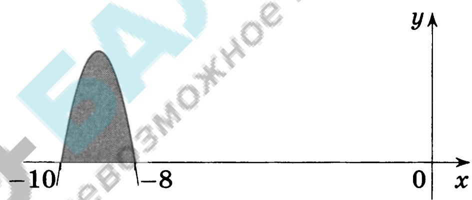
5 Найдите корень уравнения $\log_2 x = 5$.

6 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, K и P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $AP = 5$, $BM = 6$, $CK = 7$.

7 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция

$$F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$$

— одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8 Площадь боковой поверхности конуса равна 10 см^2. Радиус основания конуса увеличили в 6 раз, а образующую уменьшили в 4 раза. Найдите площадь боковой поверхности получившегося конуса. Ответ дайте в см^2.

9 Вычислите $\log_6 144 - \log_6 4$.

10 Температуру нагревательного элемента (в градусах Кельвина) в зависимости от времени (в минутах) можно вычислять по формуле $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 760$ К, $a = 34$ К/мин, $b = -0{,}2$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

11 Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12 Найдите наименьшее значение функции

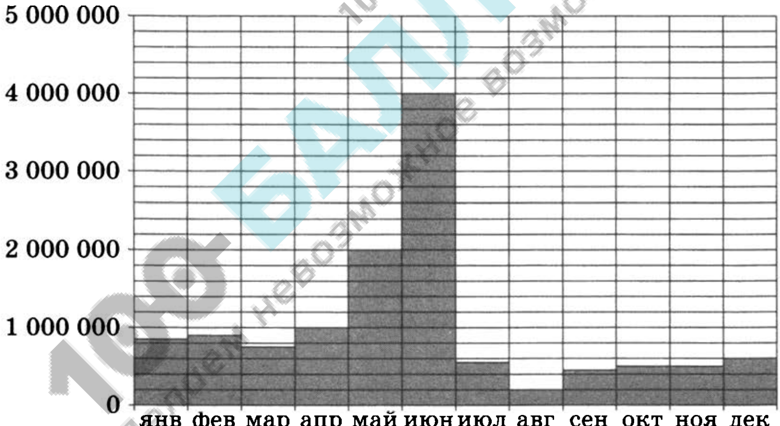
$$y = 13 - 7\sin x - 9x$$

на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

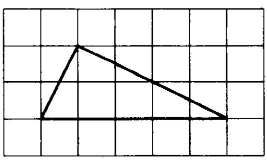
Диагностическая работа № 14

1 Больному прописан курс лекарства, которое нужно принимать по 250 мг два раза в день в течение 7 дней. В одной упаковке лекарства содержится 10 таблеток по 125 мг. Какое наименьшее количество упаковок понадобится на весь курс лечения?

2 На диаграмме показано число запросов со словом ЕГЭ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по декабрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, во сколько раз максимальное месячное число запросов со словом ЕГЭ в 2009 году превышало минимальное месячное число запросов.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольный треугольник. Найдите длину его медианы, проведённой к гипотенузе.

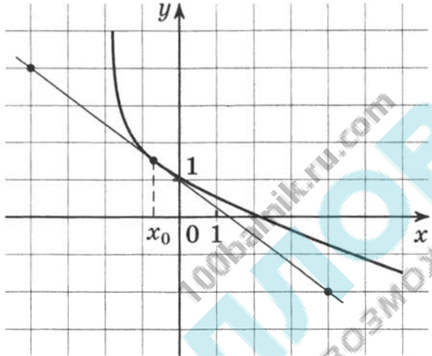


4 Найдите вероятность того, что при бросании двух кубиков на каждом выпадет менее 4 очков.

5 Найдите корень уравнения $5^{x+5} = 0{,}04$.

6 Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Найдите MA, если $MB = 12$, $MC = 16$, $MD = 6$.

7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



8 Тангенс угла между боковым ребром правильной четырёхугольной пирамиды и плоскостью её основания равен $\sqrt{2}$. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.

9 Найдите значение выражения $\dfrac{28}{2^{\log_2 7}}$.

10 Время полёта мяча, брошенного под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли, можно посчитать по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ (с). При каком наименьшем значении угла (в градусах) время в полёте будет не меньше 2,5 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с? Ускорение свободного падения g считайте равным 10 м/с^2.

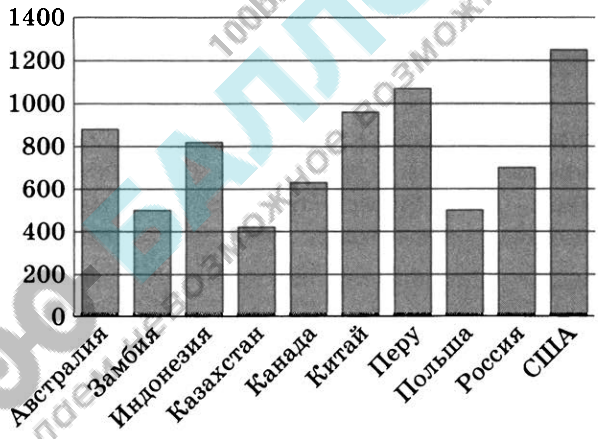
11 Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 90 км/ч, а вторую — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12 В какой точке отрезка [0; 8] первообразная $F(x)$ для функции $f(x) = x^2 - 3x - 4$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

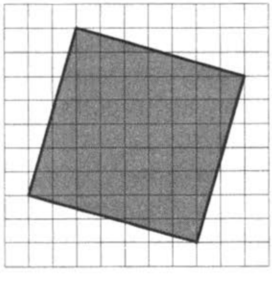
Диагностическая работа № 15

1 Шкатулка и её крышка имеют форму прямоугольного параллелепипеда. Длина, ширина и глубина шкатулки равны соответственно 20 см, 15 см и 10 см. Высота крышки равна 2 см. Для обивки изнутри шкатулки и её крышки приобрели кусок атласа. Найдите площадь этого куска (в квадратных сантиметрах), если он был куплен с запасом в 10 % от обиваемой площади.

2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Россия?



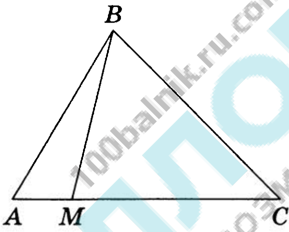
3 Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



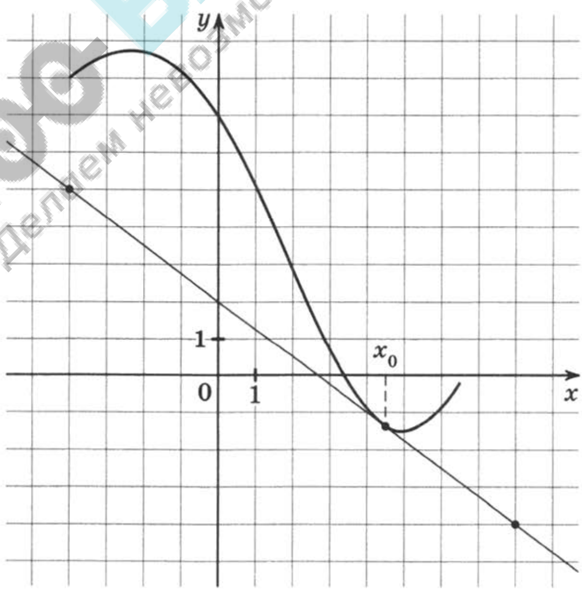
4 Фабрика выпускает сумки. В среднем на 118 качественных сумок приходится семь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной.

5 Найдите корень уравнения $9 \cdot 2^x = 6^x$.

6 На стороне AC треугольника ABC взята точка M, причём $AM : MC = 2 : 7$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABM равна 4 см^2. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0.



8 Объём конуса равен 6 см^3. Чему равен объём цилиндра, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный конус? Ответ дайте в см^3.

9 Найдите значение выражения $3^{-15} : 48^{-17} \cdot 16^{-16}$.

10 При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 6 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса и его длина будет меняться по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре (в градусах Цельсия) между рельсами исчезнет зазор?

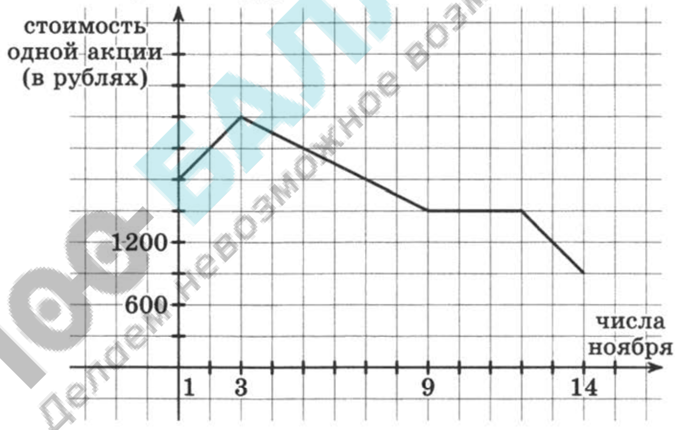
11 Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различных концентраций. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

12 Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2 - 6x + 36}{x}$ на отрезке [3; 9].

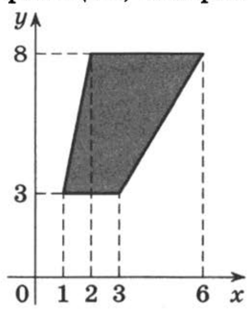
Диагностическая работа № 16

1 В квартире, где проживает Валерий, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 марта счётчик показывал расход 182 куб. м воды, а 1 апреля — 192 куб. м. Какую сумму должен заплатить Валерий за холодную воду за март, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 23 руб. 10 коп.? Ответ дайте в рублях.

2 На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. Два друга — Сергей и Владимир — приобрели по 16 акций компании каждый: Сергей — 2 ноября, а Владимир — 3 ноября. Сергей продал свои акции 9 ноября, а Владимир продал свои 13 ноября. На сколько рублей убыток одного из друзей больше, чем убыток другого?



3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



4 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 70 % этих стёкол, из которых 5 % имеют дефекты, вторая фабрика выпускает 30 % стёкол, из которых 4 % имеют дефекты. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется с дефектами.

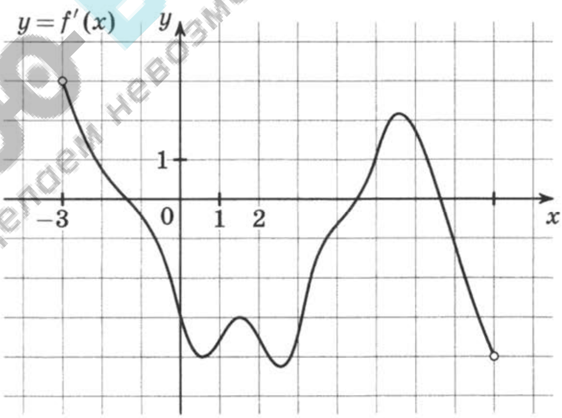
5 Решите уравнение

$$\sqrt{7-6x} = -x.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

6 Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как $9:11$. Найдите величину вписанного угла, опирающегося на меньшую из дуг. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;\ 8)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, принадлежащих этим промежуткам.



8 Дана правильная четырёхугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P и стороной основания, равной $15\sqrt{2}$. Найдите расстояние от середины ребра PB до плоскости APC.

9 Найдите $26\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

10 Расстояние (в километрах) до линии горизонта от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h км над землёй, вычисляется по формуле $l=\sqrt{2Rh}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. Человек стоит на пляже на уровне моря. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 24 см. На какое минимальное количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы расстояние от него до горизонта было не меньше восьми километров?

11 Пристани A и B расположены на реке. Катер проходит от A до B и обратно без остановок со средней скоростью 24 км/ч. Найдите скорость течения, если собственная скорость катера равна 25 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 4x^2 - 3x - 11$$

на отрезке [0; 6].

Подготовка к части 2 ЕГЭ по математике. Задачи 13—19

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

Диагностическая работа № 17

1 (*задача* 13) а) Решите уравнение $3\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

2 (*задача* 14) Точка P является серединой ребра BB_1 куба $A\ldots D_1$. Длина ребра куба равна 4. Плоскость α проходит через точку D_1 параллельно прямой C_1P так, что из трёх следующих утверждений два истинны, а одно ложно:
1) $\alpha \parallel AB_1$; 2) $\alpha \parallel AC$;
3) площадь сечения куба плоскостью α меньше 8.
а) Постройте сечение этого куба плоскостью α.
б) Найдите площадь этого сечения.

3 (*задача* 15) Решите неравенство

$$|2x-6|^{x+1} + |2x-6|^{-x-1} \leqslant 2.$$

4 (*задача* 16) Отрезок, соединяющий вершину A ромба $ABCD$ с серединой стороны BC, равен стороне ромба.
а) Докажите, что высота ромба, проведённая из вершины C, делит сторону AD на отрезки, один из которых втрое больше другого.
б) Найдите диагональ AC ромба, если известно, что сторона ромба равна $\sqrt{6}$.

5 (*задача* 17) 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 51 000 рублей, а во второй — 66 600 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

6 (*задача* 18) Найдите значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} (1+3x^2)^a + (b^2-4b+5)^y = 2, \\ x^2y^2 + (b-2)xy + a^2 + 2a = 3. \end{cases}$$

7 (*задача* 19) На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Диагностическая работа № 18

1 (*задача* 13) а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$.

2 (*задача* 14) Основание прямой четырёхугольной призмы $A\ldots D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{11}$. Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 12.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1.

3 (*задача* 15) Решите неравенство

$$\log_x(x-2)\cdot\log_x(x+2) \leqslant 0.$$

4 (*задача* 16) Боковая сторона CD трапеции $ABCD$ равна основанию AD.

а) Докажите, что CA — биссектриса угла BCD.

б) Прямая, проходящая через вершину C перпендикулярно CD, пересекает боковую сторону AB в точке M. Найдите отношение $BM : AM$, если известно, что $AD = CD = 2BC$ и $\angle ADC = 60^\circ$.

5 (*задача* 17) Оля хочет взять в кредит 1 000 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 240 000 рублей?

6 (*задача* 18) Найдите все пары чисел a и b, для каждой из которых имеет не менее пяти решений $(x; y)$ система уравнений

$$\begin{cases} bx(2x-y) + (y-1)(2x-y) = bx + y - 1, \\ 4x^2 + y^2 + axy = 1. \end{cases}$$

7 (*задача* 19) Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Задача 13

Подготовительные задания

1 а) Решите уравнение $7\cos^2 x - \cos x - 8 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

2 а) Решите уравнение $8\sin^4 x + 10\sin^2 x - 3 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

3 а) Решите уравнение $\frac{4\cos x - 5}{2\cos x - 1} + \frac{1}{2\cos^2 x - \cos x} = 2$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

4 а) Решите уравнение $\frac{6}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; \pi]$.

5 а) Решите уравнение $36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

6 а) Решите уравнение $(36^{\sin x})^{-\cos x} = 6^{\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

7 а) Решите уравнение $3\cos^2 x - 4\sin x + 4 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; \pi\right]$.

8 а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot (0,2)^{-\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

9 а) Решите уравнение $\log_3(2\cos^2 x + 3\cos x + 1) = 1$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

10 а) Решите уравнение $2\cos 2x - 12\cos x + 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Зачётные задания

1 а) Решите уравнение $8\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

2 а) Решите уравнение $\log_3(\cos x + \sin 2x + 9) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

3 а) Решите уравнение $(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4 а) Решите уравнение $\frac{5}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{19}{\sin x} + 17 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

5 а) Решите уравнение $2\sin 2x + \sin x = 4\cos x + 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

6 а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

7 а) Решите уравнение $\frac{7}{\sin^2 x} - \frac{10}{\sin x} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; \pi\right]$.

8 а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

9 а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; 3\pi]$.

10 а) Решите уравнение $3\cos 2x + 5\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Задача 14

Подготовительные задания

1 Прямые, содержащие рёбра DA и BC треугольной пирамиды $DABC$, взаимно перпендикулярны, $DA = 10$, $BC = 24$.
а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BD и параллельной прямым AD и BC.
б) Найдите расстояние между серединами рёбер BD и AC.

2 В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все рёбра равны 10.
а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки E, B_1 и C_1.
б) Найдите расстояние от точки E до прямой B_1C_1.

3 В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер $AB = BC = DA = DC = 13$, $DB = 8$, $AC = 24$.
а) Постройте общий перпендикуляр к прямым DB и AC.
б) Найдите расстояние между прямыми DB и AC.

4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2.
а) Постройте общий перпендикуляр к прямым AA_1 и BC_1.
б) Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

5 Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = AC = 8$, а один из углов равен 60°. На ребре AA_1 отмечена точка P так, что $AP : PA_1 = 1 : 2$. Расстояние между прямыми AB и B_1C_1 равно $18\sqrt{3}$.
а) Докажите, что основания высот треугольников ABC и PBC, проведённых к стороне BC, совпадают.
б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP.

6 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 1$.
а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.
б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

7 Точка K удалена от каждой из вершин квадрата $ABCD$, сторона которого равна $6\sqrt{2}$, на расстояние, равное 10.
а) Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из точки K на плоскость квадрата, совпадает с центром квадрата.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости квадрата.

8 В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$ все рёбра равны 2.

а) Докажите, что плоскость BB_1F перпендикулярна прямой B_1C_1.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости FB_1C_1.

9 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2.

а) Постройте общий перпендикуляр к прямым SB и AE.

б) Найдите расстояние между прямыми SB и AE.

10 В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра BD.

а) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через прямую AE и перпендикулярной плоскости ABC.

б) Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью ABC.

Зачётные задания

1 Высота правильной треугольной пирамиды равна 20, а медиана её основания равна 6.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через её вершину и перпендикулярной ребру основания.

б) Найдите тангенс угла, который образует боковое ребро с плоскостью основания.

2 Основание пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20.

а) Докажите, что плоскость, перпендикулярная AC и проходящая через точку D, проходит через точку B.

б) Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.

3 Высота правильной треугольной пирамиды равна 16, а медиана её основания равна 8.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через её вершину и перпендикулярной ребру основания.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

4 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 6.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

б) Найдите площадь этого сечения.

5 Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 12. На ребре BB_1 отмечена точка P так, что $PB_1 = 3PB$.

а) Докажите, что основания высот треугольников ACP и ACB_1, проведённых к стороне AC, совпадают.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ACP и ACC_1.

6 Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость, пересекающая ось цилиндра, пересекает его основания по хордам длины 12 и 16.

а) Докажите, что сумма расстояний от этих хорд до оси цилиндра равна 14.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

7 В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер $AB = AC = DB = DC = 13$, $DA = 6$, $BC = 24$.

а) Постройте общий перпендикуляр к прямым DA и BC.

б) Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

8 Точка K удалена от каждой из вершин квадрата $ABCD$ на расстояние, равное 10, а от плоскости квадрата — на расстояние, равное 8.

а) Докажите, что плоскость AKC перпендикулярна отрезку BD.

б) Найдите расстояние от точки D до плоскости AKC.

9 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что основания высот треугольников A_1B_1C и $A_1B_1C_1$, проведённых к стороне A_1B_1, совпадают.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CA_1B_1.

10 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2.

а) Постройте плоскость, проходящую через точку S и перпендикулярную ребру AF.

б) Найдите синус угла между прямой BC и плоскостью SAF.

Задача 15

Подготовительные задания

1 Решите неравенство

$$(x-5)^5(x-7)^7(x-8)^8 \leqslant 0.$$

2 Решите неравенство

$$\frac{(2x-15)(4-5x)^4(x-8)^2}{x^2-64} \leqslant 0.$$

3 Решите неравенство

$$\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x+5} \geqslant \frac{2}{x+6}.$$

4 Решите неравенство

$$\frac{(2^x-0{,}25)(20^x-0{,}05)(x^2-1)}{x+2} \geqslant 0.$$

5 Решите неравенство

$$\frac{\log_5(3x^2+2x)}{\log_6(6x^2-5x)} \leqslant 0.$$

6 Решите неравенство

$$\frac{45}{(x^2+6x)^2}+\frac{14}{x^2+6x}+1 \geqslant 0.$$

7 Решите неравенство

$$4^{\frac{1}{x}-2}-4\cdot 2^{\frac{1}{x}-3}-8 \geqslant 0.$$

8 Решите неравенство

$$\log_4^2(64-x^2)-5\log_4(64-x^2)+6 \geqslant 0.$$

9 Решите неравенство

$$\log_{14x-5}(35x-2) \geqslant 1.$$

10 Решите неравенство

$$\log_{2-5x}(5x+2)\cdot\log_{5x+3}(3-5x) \leqslant 0.$$

Зачётные задания

1 Решите неравенство

$$x(x+3)^3(x+4)^4(x+5)^5 \leqslant 0.$$

2 Решите неравенство

$$\frac{(4^x-0{,}25)(5^x-0{,}04)(x^2-4)}{x+1} \geqslant 0.$$

3 Решите неравенство

$$\frac{(x+3)^2(|x-4|+5x-8)}{5x-3|x+2|+2} \leqslant 0.$$

4 Решите неравенство

$$\frac{(x-7)^2(|x-6|+|x+6|)(\log_6(x-5)-\log_6(x+5))}{\sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}} \leqslant 0.$$

5 Решите неравенство

$$3^{x+1}+10^x < 10^{x-1}+4\cdot 3^x+3^{x+2}.$$

6 Решите неравенство

$$x\log_5 x+2 > x+2\log_5 x.$$

7 Решите неравенство

$$\frac{16}{(3^{2-x^2}-1)^2}-\frac{10}{3^{2-x^2}-1}+1 \geqslant 0.$$

8 Решите неравенство

$$\log_{12x^2-5x-2}(6x^2-11x+4) \leqslant 0.$$

9 Решите неравенство

$$\frac{45}{(\log_2^2 x+6\log_2 x)^2}+\frac{14}{\log_2^2 x+6\log_2 x}+1 \geqslant 0.$$

10 Решите неравенство

$$\frac{\log_{1-x}\left((3x+1)(1-2x+x^2)\right)}{\log_{3x+1}(1-x)} \leqslant -1.$$

Задача 16

Подготовительные задания

1 В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$.

а) Докажите, что $AC \perp CD$. б) Найдите углы трапеции.

2 Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD = AM$.

а) Докажите, что $CD = AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = 10$, $AC = 12$, $AM = 5$.

3 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке P, отличной от O, и не проходят через точку O. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

а) Докажите, что прямая OP проходит через середину отрезка MN.

б) Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если известно, что $AC = BD$, а $MN = 10$.

4 Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB.

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении $1:4$.

5 В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH.

а) Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH.

б) Найдите CL, если известно, что $CM = 10$, $CH = 6$.

6 В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD, P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC.

а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB.

б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q. Найдите отношение $PM : BQ$, если известно, что $AB : AC = 1 : 3$.

7 На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D. При этом $\angle ABC = \angle ACD$.

а) Докажите, что прямая CD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если известно, что $AC = 15$, $BC = 20$.

8 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что в четырёхугольник $BPOQ$ можно вписать окружность.

б) Найдите угол ABC, если известно, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника ABC.

9 Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A. Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M.

а) Докажите, что M — середина AB.

б) Луч OM пересекает бóльшую окружность в точке P. Найдите расстояние от центра большей окружности до хорды AP, если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.

10 Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D, отличной от A.

а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC.

б) Найдите угол BAC, если известно, что $\angle ACB = 30°$, а точка D лежит на стороне BC, причём $DB : DC = 1 : 3$.

Зачётные задания

1 Сторона BC треугольника ABC равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус OA делит сторону BC на два равных отрезка.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите его боковые стороны.

2 В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медианы AM и BN. Известно, что около четырёхугольника $ABMN$ можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABMN$, если также известно, что $AB = 4\sqrt{5}$.

3 Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что её основания равны 10 и 26.

4 Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что $KT \parallel DE$.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

5 Точки D и E — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.

б) Найдите MN, если известно, что $AB = 14$, $BC = 10$, $AC = 6$.

6 На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

7 Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = \sqrt{73}$ и медианой $AM = 4$.

а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB.

б) Найдите высоту треугольника ABC, проведённую из вершины A.

8 Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M, причём $AM : MB = 2 : 1$. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD = \sqrt{6}$.

9 Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол $30°$. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

10 Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC, продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N. Точка M — середина основания BC.

а) Докажите, что $AN = OM$.

б) Найдите OM, если стороны треугольника ABC равны 10, 10 и 12.

Задача 17

Подготовительные задания

1 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 6 409 000 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг двумя равными платежами (т. е. за 2 года)?

2 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 4 382 000 рублей в кредит под 16 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 16 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

3 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Андрей переводит в банк 587 250 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (т. е. за 2 года)?

4 31 декабря 2013 г. Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 50 000 рублей, а во второй — 66 000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

5 У фермера есть два поля, каждое площадью 6 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель, морковь и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 410 ц/га и на втором тоже 410 ц/га. Уро-

жайность моркови на первом поле составляет 370 ц/га, а на втором — 430 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 320 ц/га, а на втором — 460 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 3000 руб. за центнер, морковь — по цене 3500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 4000 руб. за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

6 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 5 005 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20 %), затем Ваня переводит в банк платёж. Весь долг Ваня выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

7 Завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары — стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.

Вид тары	Себестоимость, 1 ц.	Отпускная цена, 1 ц.
стеклянная	1500 руб.	2100 руб.
жестяная	1100 руб.	1750 руб.

Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

8 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года, а если по 2 674 100, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?

9 Иннокентий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые станки, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t станков; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t станков. За каждый час работы (на каждом из заводов) Иннокентий платит рабочему 400 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 станков. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

10 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 1 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 100 000 рублей?

Зачётные задания

1 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 8 052 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года)?

2 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 18 % годовых. Схема выплаты кредита

следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 18 %), затем Андрей переводит в банк 4 107 580 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

3 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем Андрей переводит в банк 2 928 200 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года)?

4 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 59 000 рублей, а во второй — 56 100 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

5 Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 5 часов работы станка *А* и 9 часов работы станка *Б*. Для изготовления изделия второго типа требуется 8 часов работы станка *А* и 4 часа работы станка *Б* (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок *А* может работать не более 208 часов в месяц, а станок *Б* — не более 144 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 15 000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 12 000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

6 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 4 026 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следу-

ющая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20 %), затем Ваня переводит в банк платёж. Весь долг Ваня выплатил за 4 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

7 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть номера категории Б площадью 20 квадратных метров и номера категории А площадью 25 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1115 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Номер категории Б будет приносить отелю 3500 рублей в сутки, а номер категории А — 4200 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? Сколько номеров категории Б и сколько номеров категории А будет в таком отеле?

8 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 1 148 175 рублей, то выплатит долг за 4 года, а если по 2 055 375, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?

9 В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 35 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $5t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

10 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 800 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следую-

щая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 2 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 200 000 рублей?

Задача 18

Подготовительные задания

1 При каждом значении параметра a решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin x + 3}{\cos y} = a, \\ \dfrac{\cos y}{2\sin x + 3} = 2a - 1. \end{cases}$$

2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 4x + a = 3$ имеет более одного корня.

3 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $8x^6 + (a - x)^3 + 2x^2 = x - a$ имеет хотя бы один корень.

4 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ имеет ровно три различных корня.

5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 + \left(\dfrac{4}{x}\right)^3 + 16 = 2a^2$ имеет единственный корень.

6 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x + 2|x - 3| - 3|x - a - 4| = 7|x - a|$ имеет хотя бы один корень.

7 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4 = 4(x + y), \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = a^2. \end{cases}$$

8 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $7x + 3|x + a| - 2|x - 3| \geqslant 6$ выполняется для любого значения $x \in [0; 7]$.

9 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число 9 является решением неравенства

$$(x - 9)(x - 16)\sqrt{a^2 - 8a\log_8(x - 8) - 9} \geqslant 0,$$

а число 16 не является решением этого неравенства.

10 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x - 2(a+1)\cos x - 4a - 11 = 0$ имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

Зачётные задания

1 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная тройка $(x; y; z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^{\frac{4}{x}} = (a^2-4)^2 + y^2 + 8, \\ |y|\, z^4 + 2z^2 - a^2 z + a + 4 = 0. \end{cases}$$

2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $ax^2 + (1-a^2)x - a > 0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-2; 2]$.

3 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $\log_2 x^2 \leqslant \log_2(x+2)$ является и решением неравенства $49x^2 \leqslant 4a^4$.

4 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x-a} = x - 2a$ имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение.

6 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 1 > 0$ выполнено при любом значении x.

7 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений

$$\begin{cases} (x+a-6)^2 + (y-a)^2 = 18, \\ \sqrt{x^2+(y-6)^2} + \sqrt{(x-6)^2+y^2} = 6\sqrt{2}. \end{cases}$$

8 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.

9 Найдите все значения x, для каждого из которых равенство $2\log_2(4-\sqrt{7+2x})=\log_{2+a^2x^2}(4-3x)$ выполняется при любом значении параметра a.

10 Найдите все значения параметра b, для каждого из которых при любом значении параметра a имеет ровно два различных решения система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-5x+6y+4=0, \\ y+ax+ab=0. \end{cases}$$

Задача 19

Подготовительные задания

1 Докажите, что уравнение

$$9x^2+6xy+3y^2=4321$$

не имеет решений в целых числах.

2 Решите в целых числах уравнение

$$y=5+\frac{1}{x}.$$

3 Решите в целых числах уравнение

$$y=\frac{2x-3}{x}.$$

4 Решите в целых числах уравнение

$$(2x+3y+4)(3x+2y+4)=1.$$

5 Решите в целых числах уравнение

$$2x-3xy+9y=1.$$

6 Найдите все $n\in\mathbb{Z}$, при которых число A является целым, если $A=\dfrac{6n-2}{2n+3}$.

7 Найдите все $n\in\mathbb{Z}$, при которых число A является целым, если $A=\dfrac{5n-3}{3n+4}$.

8 На какое наибольшее натуральное число можно сократить дробь A, если $n\in\mathbb{Z}$ и $A=\dfrac{5n+6}{7n+8}$?

9 На какое наибольшее натуральное число можно сократить дробь $\dfrac{2n+3m}{4m-5n}$, если известно, что она сократима, а дробь $\dfrac{m}{n}$ несократима ($n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$)?

10 Сумма пяти наименьших натуральных делителей натурального числа равна 17, а сумма четырёх наибольших его делителей равна 671. Найдите это число.

Зачётные задания

1 Дана последовательность натуральных чисел, в которой каждый член начиная со второго отличается от предыдущего либо на 10, либо в 6 раз. Сумма всех членов последовательности равна 257.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

2 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять; б) четыре; в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

3 Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключённые между числами 510 и 740.

а) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

4 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности начиная со второго либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3345.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

5 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел

$$-11,\ 12,\ 13,\ -14,\ -15,\ 17,\ -18,\ 19.$$

Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел

$$-11,\ 12,\ 13,\ -14,\ -15,\ 17,\ -18,\ 19.$$

После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 117?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

6 Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.

7 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор

$$2,\ 3,\ 5,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10.$$

а) На доске выписан набор $-3, -1, 1, 2, 3, 4, 6$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

8 На листе бумаги написаны в строчку 13 единиц.

а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

б) Докажите, что если единицы, стоящие на чётных местах, заменить семёрками, то всё равно между числами полученного набора можно будет расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

в) Докажите, что между любыми 13 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

9 В течение четверти учитель ставил школьникам отметки «1», «2», «3», «4», «5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 3,5.

а) Какую наибольшую долю могли составлять четвёрки в таком наборе отметок?

б) Учитель заменил одну отметку «4» двумя отметками: одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

в) Учитель заменил каждую отметку «4» двумя отметками: одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

10 У каждого ученика в классе дома живёт кошка или собака, а у некоторых, возможно, и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Диагностическая работа № 19

1 (*задача* 13) а) Решите уравнение

$$\frac{3\sin x-4}{\sin x-1}+\frac{1}{\sin^2 x-\sin x}=1.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};\,0\right]$.

2 (*задача* 14) В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все рёбра равны 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B_1, F_1 и D.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

3 (*задача* 15) Решите неравенство $\log_{0{,}25x^2}\left(\frac{x+6}{4}\right)\leqslant 1$.

4 (*задача* 16) Дана трапеция $ABCD$. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания BC в точке K.

а) Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.

б) Найдите биссектрису BM треугольника ABK, если известно, что $AD=10$, $BC=2$, $AB=CD=5$.

5 (*задача* 17) 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 8 599 000 рублей в кредит под 14 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 14 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

6 (*задача* 18) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение $(x;\,y)$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y,\\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x.\end{cases}$$

7 (*задача* 19) а) Чему равно число способов записать число 1595 в виде $1595=a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$, где числа a_i целые, $0\leqslant a_i\leqslant 99$, $i=0;\,1;\,2;\,3$?

б) Существуют ли 10 таких различных чисел N, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами?

в) Сколько существует таких чисел N, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами?

Диагностическая работа № 20

1 (*задача* 13) а) Решите уравнение $6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

2 (*задача* 14) В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все рёбра равны 1.
а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки D, E и A_1.
б) Найдите расстояние от точки A до плоскости DEA_1.

3 (*задача* 15) Решите неравенство $\log_{x^2}(x+1)^2 \leqslant 1$.

4 (*задача* 16) На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причём M — середина AD, а $BN : NC = 1 : 3$.
а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.
б) Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых AN, AC, BD и BC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.

5 (*задача* 17) 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 200 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 2 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 100 000 рублей?

6 (*задача* 18) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{|x-1|} + \sqrt{7|y|} = 1, \\ x^2 + 49y^2 + 4a + 1 = 2x \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

7 (*задача* 19) Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например,

если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -13, -8, -6, -5, -1, 2, 7. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 7 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Тренировочные варианты ЕГЭ по математике

Ответом к заданиям с кратким ответом (1—12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

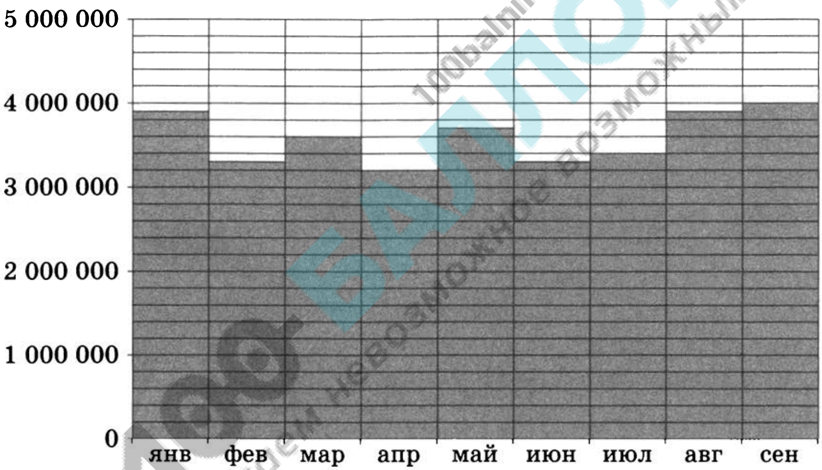
Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

Тренировочная работа №1

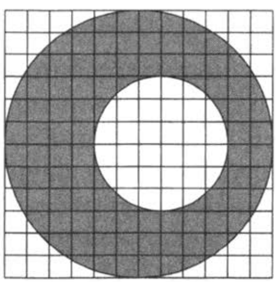
Часть 1

1 Школа закупает книги по цене 70 рублей за штуку. При покупке на сумму больше 500 рублей магазин даёт скидку 10 %. Сколько рублей будет стоить покупка 23 книг?

2 На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



3 На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 1. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

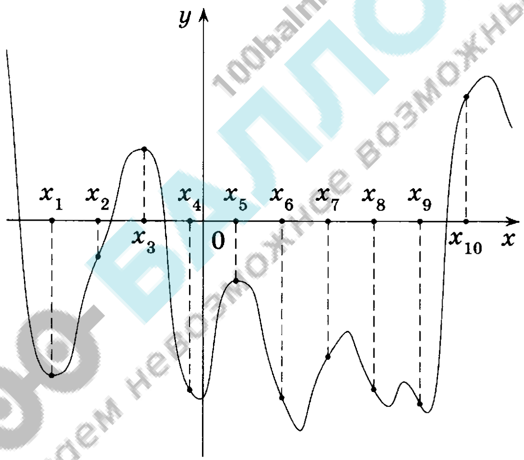


4 В классе 7 мальчиков и 14 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября, которые должны приготовить класс к занятиям. Найдите вероятность того, что будут дежурить два мальчика.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{x+4}=7$.

6 В прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 56°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и отмечены десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8 Объём цилиндра равен 24 см^3. Радиус основания цилиндра уменьшили в 2 раза, а образующую увеличили в 5 раз. Найдите объём получившегося цилиндра. Ответ дайте в см^3.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_6 126 - \log_6 3{,}5$.

10 Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q=100-10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r=q\cdot p$ составит не менее 210 тыс. руб.

11 Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

12 Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x-2)^2(x-4)+5 \quad \text{на отрезке } [1;\,3].$$

13 а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 6 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\, -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Известны длины рёбер пирамиды $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

а) Докажите, что основания высот треугольников ABC и DBC, проведённых к стороне BC, совпадают.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины рёбер AB, AC и AD.

15 Решите неравенство $\log^2_{|x|} x^2 + \log_2 x^2 \leqslant 6$.

16 Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A внешним образом. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что $O_2C \parallel O_1B$.

б) Найдите площадь треугольника BCO_2, если известно, что радиусы первой и второй окружностей равны 5 и 8 соответственно, а $\angle ABO_1 = 15^\circ$.

17 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 9 009 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20 %), затем Ваня переводит в банк платёж. Весь долг Ваня выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

19 В некотором царстве было несколько (более двух) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале. Затем всё новые и новые княжества из числа прежних и вновь образующихся объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.

а) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?

б) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после одного из делений общее число княжеств было равно 162?

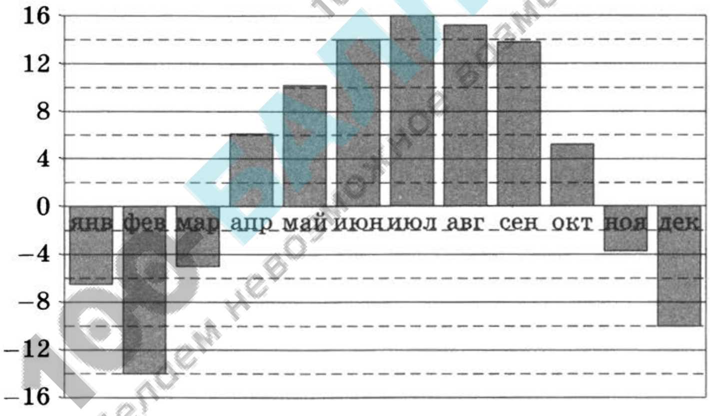
в) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

Тренировочная работа №2

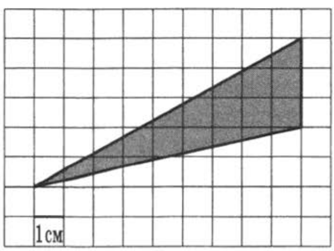
Часть 1

1 В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 июня составляли 151 куб. м воды, а 1 июля — 165 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за июнь, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 20 руб. 80 коп.? Ответ дайте в рублях.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной среднемесячной температурой.



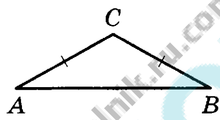
3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



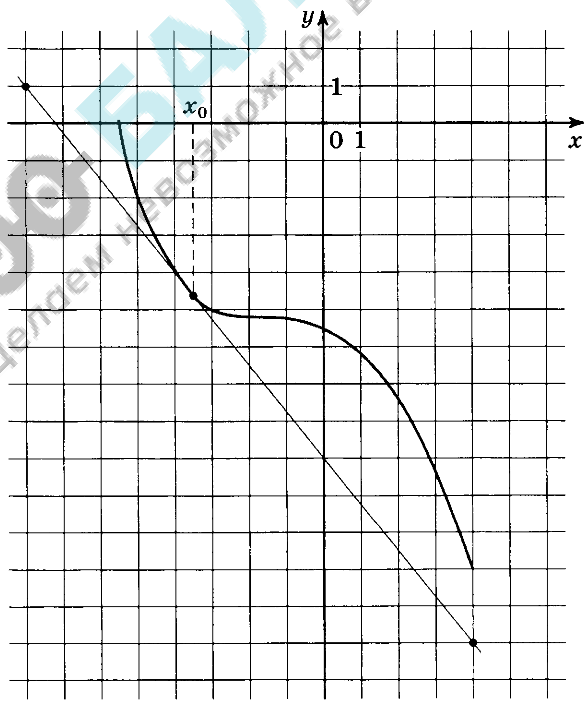
4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 9 из Великобритании, 3 из Франции, 6 из Германии и 6 из Италии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Германии.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{24-5x}=8$.

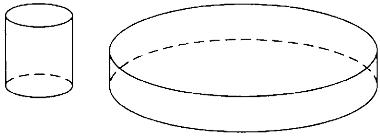
6 В треугольнике ABC угол C равен $122°$, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8 Первая цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в четыре раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $\sqrt{108}\cos^2\frac{13\pi}{12}-\sqrt{27}$.

10 Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 3. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вчетверо дороже, чем оперативность, то есть

$$R=\frac{3In+Op+4Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 20.

11 Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 312 литров она заполняет на 11 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 480 литров?

12 Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x^2+4}{x}$.

13 а) Решите уравнение $\frac{29\sin^2 x-20\sin x}{29\cos x+21}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\,-2\pi\right]$.

14 Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ со стороной основания, равной 3, высота пирамиды равна $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = AK = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNK параллельна плоскости SBC.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.

15 Решите неравенство

$$\log_{\frac{2-x}{2}} \frac{6}{2+x} \geqslant -1.$$

16 В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD, точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны, если O — точка пересечения отрезков CE и DM.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC = 5$, $AD = 7$.

17 По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 9 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» увеличивает эту сумму на 11 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

18 При каких значениях a уравнение

$$\frac{x-3a}{x+4} + \frac{x-1}{x-a} = 1$$

имеет ровно один корень? Найдите все возможные значения a.

19 Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{8}{25}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

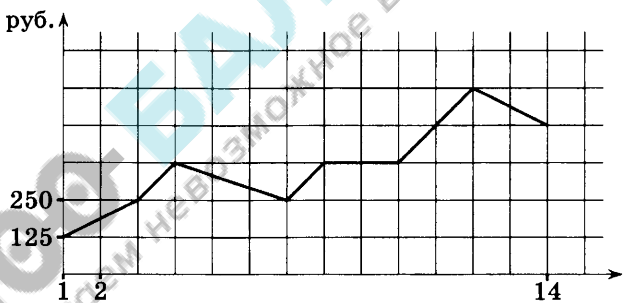
в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 5b$ и $c > 6d$?

Тренировочная работа №3

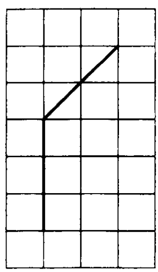
Часть 1

1 В квартире, где проживает Алексей, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 103 куб. м воды, а 1 октября — 114 куб. м. Какую сумму должен заплатить Алексей за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 19 рублей 20 копеек? Ответ дайте в рублях.

2 На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели апреля. В первую неделю апреля бизнесмен купил 14 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить? Ответ дайте в рублях.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его градусную величину.

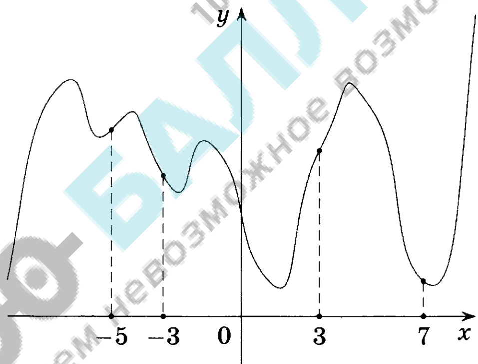


4 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

5 Найдите корень уравнения $\log_{25}(2-3x)=0{,}5$.

6 Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l. Расстояние от точки A до прямой l равно 7, а расстояние от точки B до прямой l равно 13. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и отмечены точки -5, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



8 Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $10\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 7. Найдите тангенс угла между боковым ребром и основанием пирамиды.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{60}{6^{\log_6 5}}$.

10 Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P=\dfrac{4mg}{\pi D^2}$, где $m=2700$ кг — их общая масса, D (в метрах) — диаметр колонны. Считая ускорение свобод-

ного падения g равным 10 м/с^2, а π равным 3, определите наименьший возможный диаметр колонны (в метрах), если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400 000 Па.

11 Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники. На сколько процентов килограмм клубники дешевле килограмма черешни?

12 Найдите наибольшее значение функции

$$y = 12\operatorname{tg} x - 12x + 3\pi - 13 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

13 а) Решите уравнение $(25^{\sin x})^{\cos x} = 5^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 7$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $3:4$, считая от вершины B.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство $x^3 + 6x^2 + \dfrac{21x^2 + 3x - 12}{x - 4} \leqslant 3$.

16 Общие внутренние касательные к двум окружностям перпендикулярны. Одна из них касается окружностей в точках A и C, вторая — в точках B и D (точки A и B лежат на одной окружности).

а) Докажите, что отрезок AC равен сумме радиусов окружностей.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 6$, $CD = 8$.

17 Оля хочет взять в кредит 1 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 280 000 рублей?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

19 Известно, что все члены арифметической прогрессии $\{a_n\}$ являются различными натуральными числами и что её второй член в 8 раз больше первого.

а) Может ли один из членов этой прогрессии быть больше другого её члена в 567 раз?

б) Найдите наименьшее возможное отношение двух членов этой прогрессии, отличных от a_1, если известно, что это отношение является целым числом, и укажите любую пару таких её членов.

в) Найдите третий член этой прогрессии, если известно, что один из её членов равен 546.

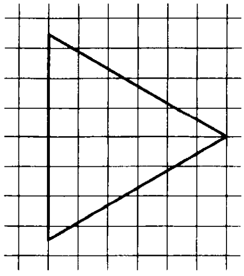
Тренировочная работа №4

Часть 1

1 Диагональ экрана телевизора равна 42 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.

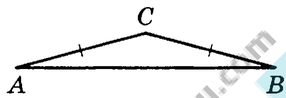
3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



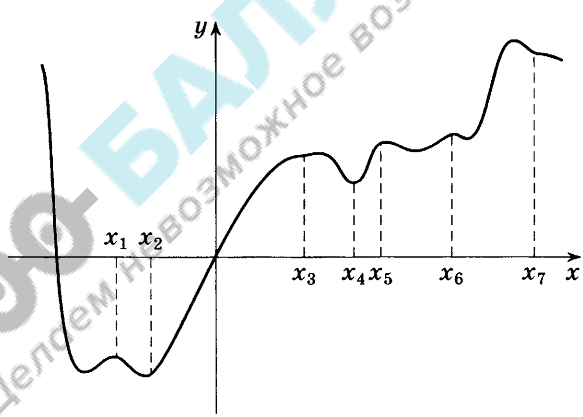
4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 1 из Великобритании, 8 из Франции, 3 из Германии и 4 из Италии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Франции.

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{16}\right)^{x-12}=2$.

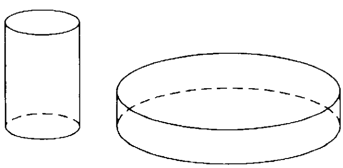
6 В треугольнике ABC угол C равен 164°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



8 Первая цилиндрическая кружка втрое выше второй, зато вторая в три раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 225}{\log_2 15}$.

10 Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 3. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вчетверо дороже, чем оперативность, то есть

$$R = \frac{3In + Op + 4Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 15.

11 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 12 минут, второй и третий — за 15 минут, а первый и третий — за 20 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12 Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x^2+81}{x}$.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{2}\cos x + 1}{\sqrt{17\sin x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14 Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ со стороной основания, равной 12, высота пирамиды равна 3. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = 3$ и $AK = \dfrac{9}{4}$.

а) Докажите, что плоскость MNK параллельна плоскости SBC.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.

15 Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(2^{|x|}-1) \geqslant \log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(-4^{|x|}+3\cdot 2^{|x|+1}-5).$$

16 В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD, точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны, если O — точка пересечения отрезков CE и DM.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC = 2$, $AD = 5$.

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на $10\,\%$ сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» увеличивает эту сумму на $14\,\%$ в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

18 При каких значениях a уравнение

$$\frac{x+2a}{x-5} + \frac{x-2}{x-a} = 1$$

имеет ровно один корень? Найдите все возможные значения a.

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 3111.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна 4.

б) Приведите пример интересного четырёхзначного числа, которое делится на 15.

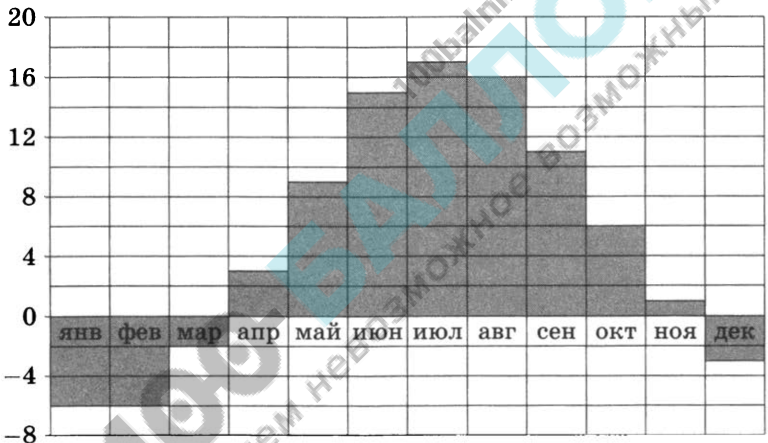
в) На какое наименьшее натуральное число могут отличаться два интересных четырёхзначных числа?

Тренировочная работа №5

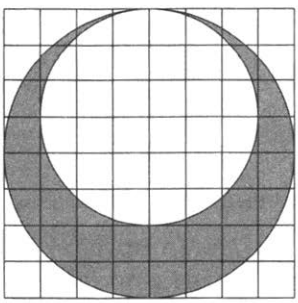
Часть 1

1 До снижения цен товар стоил 900 рублей, а после снижения цен стал стоить 828 рублей. На сколько процентов была снижена цена товара?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была отрицательной.



3 На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 9. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

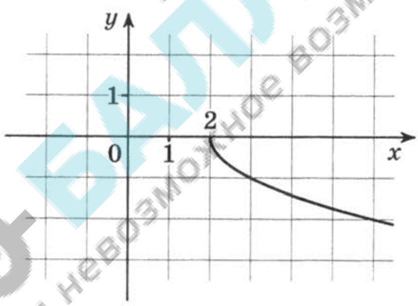


4 Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 56 шашистов, среди которых 12 участников из России, в том числе Валерий Стремянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Валерий Стремянкин будет играть с каким-либо шашистом из России.

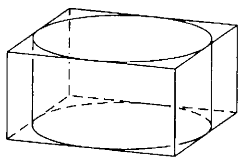
5 Найдите корень уравнения $2^{5-x}=0{,}25$.

6 Отрезок AB является хордой окружности с центром O. Найдите угол между прямой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, если угол AOB равен $56°$. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-1;\ 1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 3. Найдите $f'(3)$.



8 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 6. Найдите объём параллелепипеда.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{30}{5^{\log_5 3}}$.

10 Высоту над землёй (в метрах) подброшенного вверх камня можно вычислять по формуле $h(t)=1{,}4+14t-5t^2$, где t — время в секундах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 8 метров?

11 Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго — 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

12 Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-6; 1]$.

13 а) Решите уравнение $7\sin^2 x + 8\cos x - 8 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 3$, $AA_1 = 8$. Точка R принадлежит ребру AA_1 и делит его в отношении $3:5$, считая от вершины A.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, R и D_1.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 12x + 10}{x - 1} + \dfrac{x^2 - 5x + 5}{x - 5} \leqslant 2x - 11$.

16 Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная. Эти касательные пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный.

б) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $DO_1 = \sqrt{5}$ и $DO_2 = 2\sqrt{5}$.

17 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 60 000 рублей, а во второй — 55 000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)=z, \\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x, \\ (x+y+a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-xy)+1)=0. \end{cases}$$

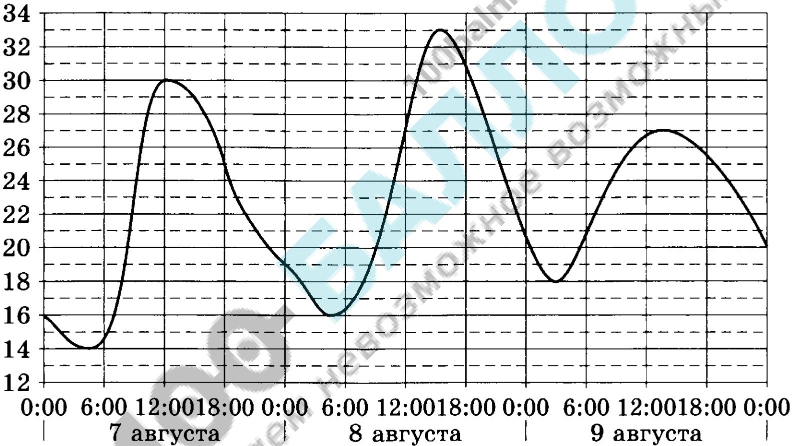
19 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и
а) пять; б) четыре; в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

Тренировочная работа №6

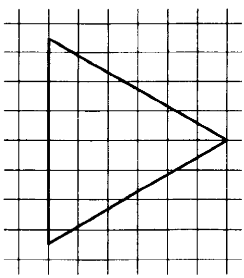
Часть 1

1 Диагональ экрана телевизора равна 87 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа.

2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 8 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия.



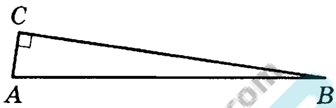
3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус вписанной в него окружности.



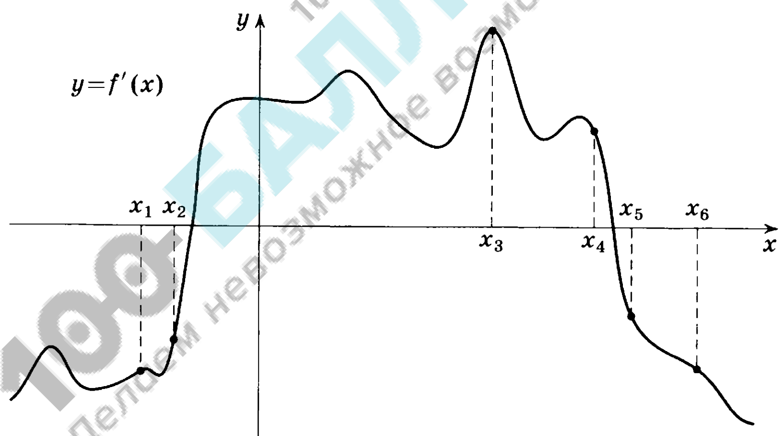
4 В среднем из 300 садовых насосов, поступивших в продажу, 6 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-10} = 3$.

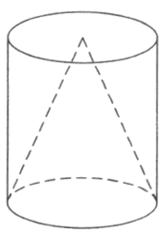
6 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 1$, $\operatorname{tg} A = 4\sqrt{3}$. Найдите сторону AB.



7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



8 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 111. Найдите объём конуса.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_6 27}{\log_6 3}$.

10 В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой составляет $R_1 = 15$ Ом. Параллельно с ней в розетку предполагается подключить электрообогреватель, сопротивление которого R_2 (Ом). При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление вычисляется по формуле $R_{\text{общ}} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 6 Ом. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 электрообогревателя. Ответ дайте в омах.

11 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 16 минут, второй и третий — за 20 минут, а первый и третий — за 48 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12 Найдите точку максимума функции $y = (x+7)^2 \cdot e^{6-x}$.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

14 Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. Её боковое ребро BS равно 9, высота SH пирамиды равна $3\sqrt{5}$. Точка M — середина ребра BC, а точка T — середина отрезка SM.

а) Докажите, что AT — высота пирамиды, проведённая к грани SBC.

б) Найдите расстояние между прямыми AT и SB.

15 Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3}-1}(9^{|x|} - 2\cdot 3^{|x|}) \leqslant \log_{\sqrt{3}-1}(2\cdot 3^{|x|} - 3).$$

16 Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается его стороны AB в точке T, а стороны AD в точке P. Отрезки CT и CP пересекают окружность в точках M и N соответственно. Сторона квадрата равна $\sqrt{10}$.

а) Докажите, что прямая TP параллельна прямой MN.
б) Найдите MP.

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 8 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» увеличивает эту сумму на 10 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

18 При каких значениях a система

$$\begin{cases} 3x\left(2x^2+y^2-\dfrac{y}{2}-1\right)=|3x|\left(y^2+\dfrac{y}{2}\right), \\ y=x+a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения? Найдите все возможные значения a.

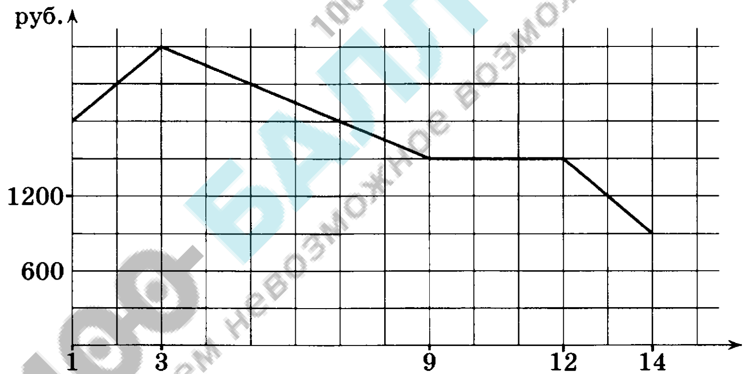
19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 3111.
а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна 15.
б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 2?
в) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, отличающиеся в 5 раз?

Тренировочная работа №7

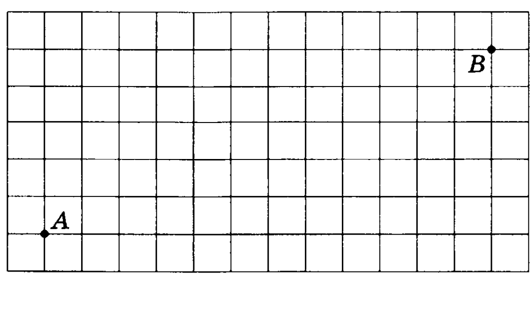
Часть 1

1 Для лакировки рекреации размером 10 метров на 10 метров понадобилось ровно 2 банки лака. Какое наименьшее число банок лака нужно купить для лакировки зала размером 15 метров на 30 метров?

2 На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрёл 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B. Найдите длину отрезка AB.



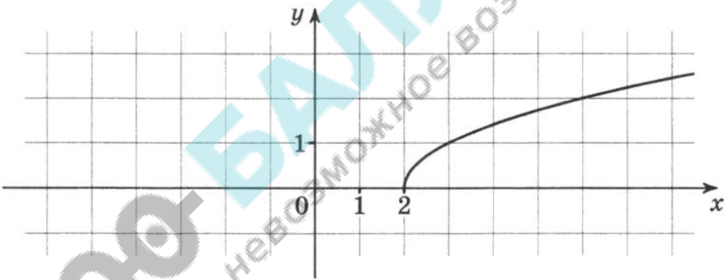
4 Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Белые» по очереди играет с командами «Красные», «Синие» и «Зелёные». Найдите вероятность того, что ровно в одном матче право первой владеть мячом получит команда «Белые».

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{x+9}=5$.

6 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке M. Найдите MC, если

$$AB = 11, \quad DC = 33, \quad AC = 28.$$

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6; -1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



8 Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды вдвое больше её высоты. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_{11} 242 - \log_{11} 2$.

10 Масса радиоактивного вещества уменьшается по закону $m(t)=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0=280$ мкг изотопа железа-59, период полураспада которого $T=45$ суток. В течение скольких суток содержание изотопа железа-59 в веществе будет превосходить 17,5 мкг?

11 Имеются два сосуда, содержащие 42 кг и 6 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 40 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

12 Найдите наибольшее значение функции $y = (21 - x)e^{x-20}$ на отрезке [19; 21].

13 а) Решите уравнение

$$2\cos 2x + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -\pi]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковые рёбра равны 8.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A, B и середину ребра A_1C_1.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство $\log_{7-x}\dfrac{1-x}{x-7} \leqslant -1$.

16 Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP:PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

17 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 671 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года)?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases}(x-2a-5)^2+(y-3a+5)^2=16,\\(x-a-2)^2+(y-2a+1)^2=81.\end{cases}$$

19 На листе бумаги написаны в строчку 14 единиц.

а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

б) Докажите, что если единицы, стоящие на чётных местах, заменить четвёрками, то всё равно между числами полученного набора можно будет расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

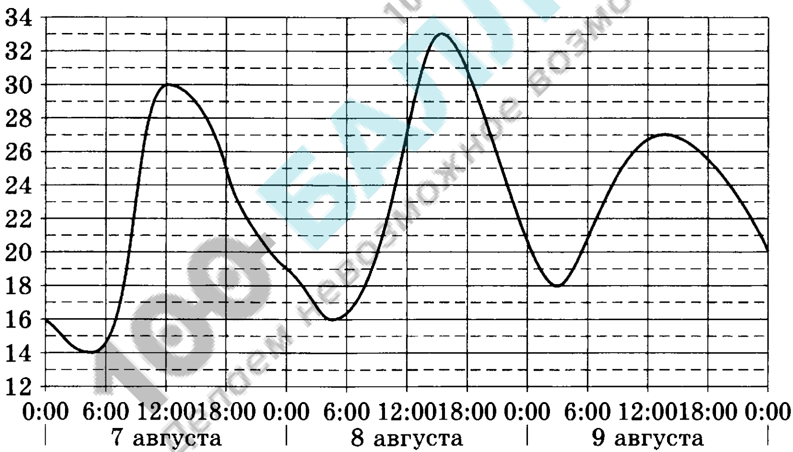
в) Докажите, что между любыми 14 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

Тренировочная работа №8

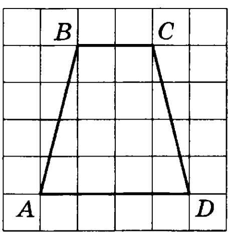
Часть 1

1 Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 370 рублей, а стоимость одного номера журнала — 22 рубля. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 7 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия.



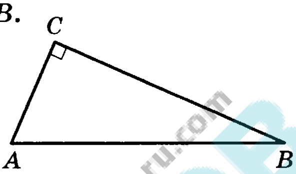
3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



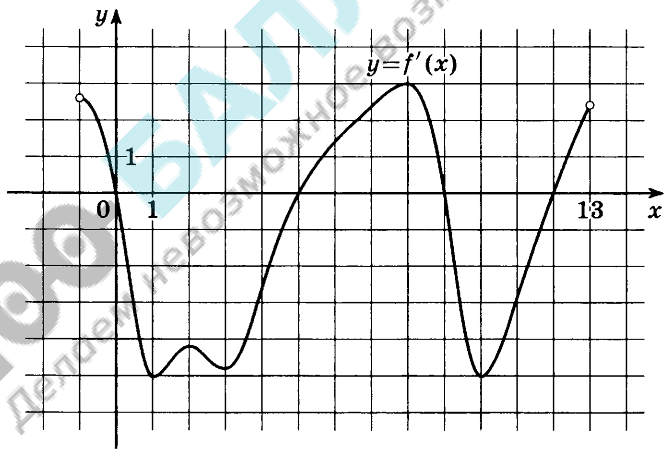
4 В среднем из 400 садовых насосов, поступивших в продажу, 12 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x-4}=\frac{1}{6x+6}$.

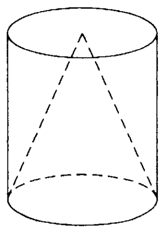
6 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC=2$, $\operatorname{tg} A=\frac{\sqrt{21}}{2}$. Найдите сторону AB.



7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1;\ 13)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



8 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 138. Найдите объём конуса.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $22\sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$.

10 В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой составляет $R_1 = 54$ Ом. Параллельно с ней в розетку предполагается подключить электрообогреватель, сопротивление которого R_2 (Ом). При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление вычисляется по формуле $R_{\text{общ}} = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 18 Ом. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 электрообогревателя. Ответ дайте в омах.

11 Имеется два сосуда. Первый содержит 50 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 10 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 13 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

12 Найдите точку максимума функции $y = (x+9)^2 \cdot e^{11-x}$.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x - \sin x - 1}{\log_2(\sin x)} = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$.

14 Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. Её боковое ребро BS равно $3\sqrt{15}$, высота SH пирамиды равна $5\sqrt{3}$. Точка M — середина ребра BC, а точка T — середина отрезка SM.

а) Докажите, что AT — высота пирамиды, проведённая к грани SBC.

б) Найдите расстояние между прямыми AT и SB.

15 Решите неравенство

$$\frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1 \geqslant 0.$$

16 Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается его стороны AB в точке T, а стороны AD в точке P. Отрезки CT и CP пересекают окружность в точках M и N соответственно. Сторона квадрата равна $\frac{1}{3}$.

а) Докажите, что прямая TP параллельна прямой MN.

б) Найдите MP.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

• в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 17,5 млн рублей?

18 При каких значениях a система

$$\begin{cases} x\left(3x^2 + \dfrac{3y^2}{2} - \dfrac{y}{2} - 3\right) = |x|\left(\dfrac{3y^2}{2} + \dfrac{y}{2}\right), \\ y = x + 2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения? Найдите все возможные значения a.

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

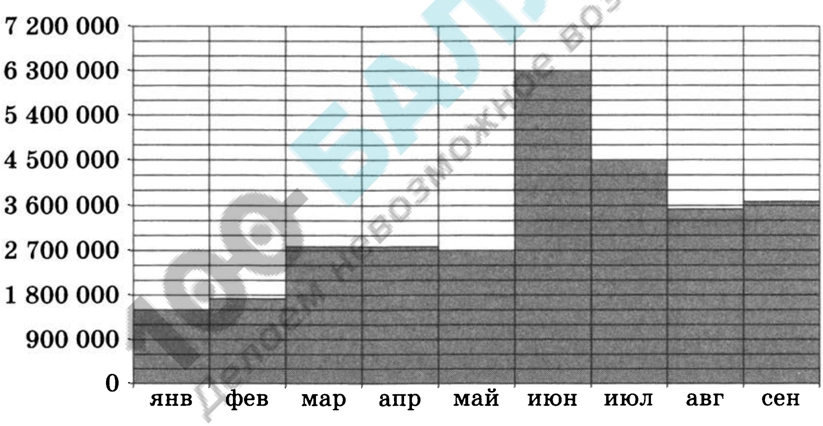
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Тренировочная работа №9

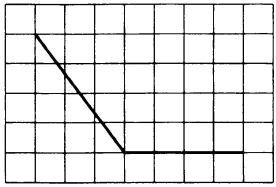
Часть 1

1 Хозяин овощной лавки купил на оптовом рынке 100 кг помидоров и заплатил 4000 рублей. За время хранения в лавке 10 % помидоров испортились, и хозяин не смог их продать. Остальные помидоры он продал по цене 70 рублей за килограмм. Какую прибыль он получил?

2 На диаграмме показано число запросов со словом ФУТБОЛ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в указанный период, когда число запросов со словом ФУТБОЛ было меньше 3 600 000.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его синус.

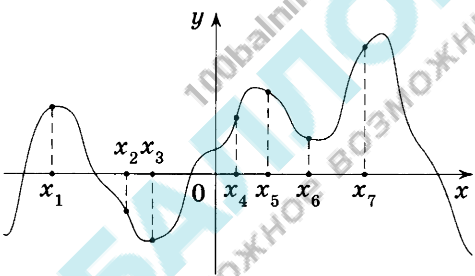


4 Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Ничья, если очков поровну. Первой кубик бросила Марина, у неё выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

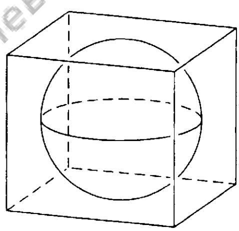
5 Найдите корень уравнения $\log_2 x = -2$.

6 Найдите число сторон правильного многоугольника, каждый из углов которого равен $140°$.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и отмечены семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_7. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции $f(x)$?



8 Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 4. Найдите его объём.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_3 13 - \log_3 117$.

10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 900$ К, $a = 31$ К/мин,

$b = -0{,}2$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

11 Смешали 14 литров 30-процентного водного раствора некоторого вещества с 10 литрами 18-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x^2 - 9x + 9)e^{x-7} \quad \text{на отрезке } [6; 8].$$

13 а) Решите уравнение $5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 Точки N, M и P являются соответственно серединами рёбер AA_1, AD и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 4. Плоскость α проходит через точку A_1 так, что из трёх следующих утверждений два истинны, а одно ложно:

1) $\alpha \perp NP$; 2) $\alpha \perp B_1M$;

3) площадь сечения куба плоскостью α меньше 10.

а) Постройте сечение этого куба плоскостью α.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство

$$\frac{2x^2 + x - 28}{6^{x-6} + 5^{x-5} - 6} \leqslant 0.$$

16 Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$ и диагональю $AC = 7$.

а) Докажите, что около него можно описать окружность.

б) Найдите диагональ BD.

17 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 2 788 425 рублей, то выплатит долг за 4 года, а если по 4 991 625, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений

$$\begin{cases} y + a = |x| + 5, \\ x^2 + (y - 2a + 5)^2 = 4. \end{cases}$$

19 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

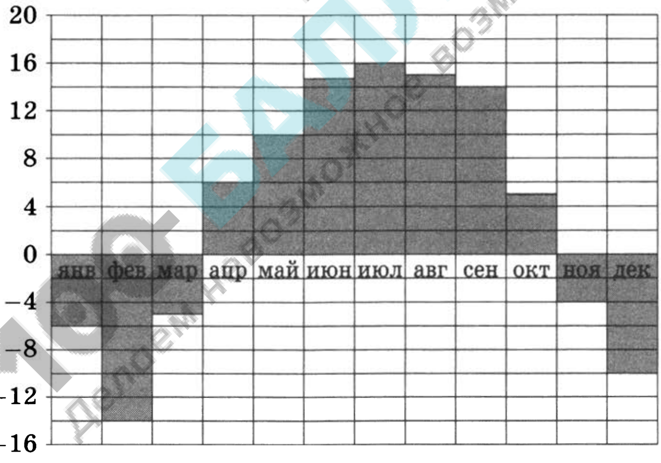
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Тренировочная работа №10

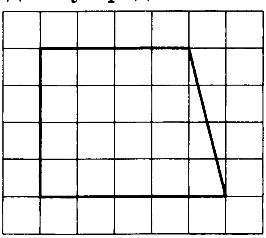
Часть 1

1 Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 590 рублей, а стоимость одного номера журнала — 26 рублей. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



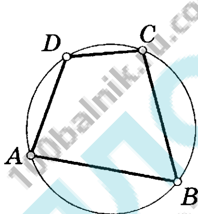
3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



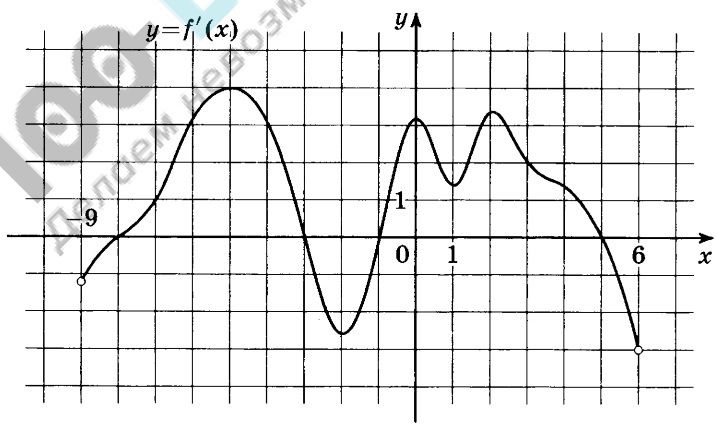
4 На конференцию приехали 2 учёных из Швейцарии, 6 из Великобритании и 2 из Чехии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что девятым окажется доклад учёного из Чехии.

5 Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{7x-15}=\dfrac{1}{4x+3}$.

6 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 12° и 55°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины D, A_1, B_1, C_1, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=5$, $AD=9$, $AA_1=8$.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $20\sin 135^\circ \cdot \cos 45^\circ$.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа равна 44 мг. Период его полураспада составляет 6 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 11 мг.

11 Имеется два сосуда. Первый содержит 90 кг, а второй — 30 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 17 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 24 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором сосуде?

12 Найдите точку минимума функции

$$y = 1{,}5x^2 - 42x + 144\ln x.$$

13 а) Решите уравнение $\dfrac{3\cos^2 x - \sin^2 x - 2}{\log_4(-\cos x)} = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой ребро основания равно 4, а высота равна 7. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

15 Решите неравенство $\dfrac{2^x}{2^x - 3} + \dfrac{2^x + 1}{2^x - 2} + \dfrac{5}{4^x - 5 \cdot 2^x + 6} \leqslant 0$.

16 Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и ML. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H. Точка Q — середина MN.

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN, если $\angle LKN = 75°$ и $LM = 5$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

• в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

18 Найдите все целочисленные значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-a)^2}=4, \\ x^2-|a+1|x-4a^2=2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо каждого числа на доске написали число, меньшее первоначального на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

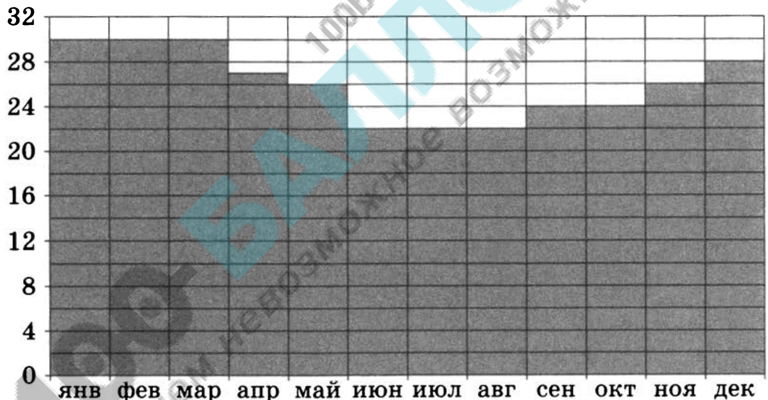
в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Тренировочная работа №11

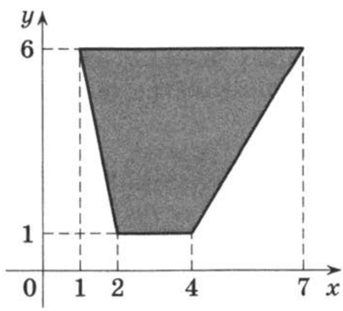
Часть 1

1 Из летнего лагеря уезжают 208 детей и 32 сопровождающих взрослых. В автобусах 44 посадочных места. Какое наименьшее количество автобусов нужно вызвать, чтобы отвезти всех домой?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 2009 г. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3 Найдите площадь трапеции, вершинами которой являются точки с координатами (1; 6), (7; 6), (4; 1), (2; 1).

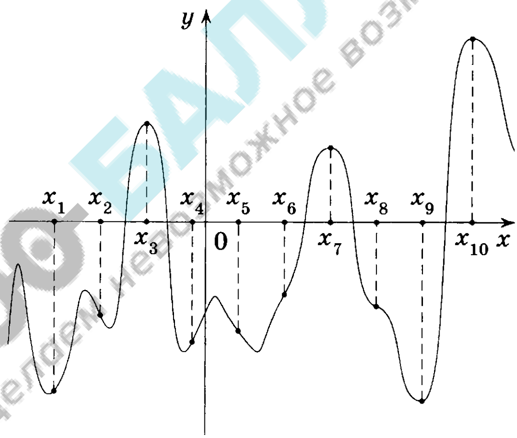


4 В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{36}\right)^{x-2}=6$.

6 Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 11, а одна из диагоналей ромба равна 44. Найдите величину тупого угла ромба. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $y=f(x)$ — и отмечены десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции?



8 Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 12, а сторона основания равна 8. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $(558^2-23^2):581$.

10 Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_п=20°C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду, температура которой равна $T_в = 88°C$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}4$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T\,(°C)$, причём

$$x = \alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_в - T_п}{T - T_п}\ (м),$$

где $c = 4200\frac{Дж}{кг\cdot°C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63\frac{Вт}{м\cdot°C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}2$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы равна 64 м?

11 В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

12 Найдите наибольшее значение функции

$$y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 19 \quad \text{на отрезке } [8;\ 21].$$

13 а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ -\pi]$.

14 Точки M и P являются соответственно серединами рёбер AA_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 4. Плоскость α проходит через точку M параллельно прямой C_1P так, что из трёх следующих утверждений два истинны, а одно ложно:

1) $\alpha \parallel DC_1$; 2) $\alpha \parallel A_1C_1$;

3) площадь сечения куба плоскостью α больше 9.

а) Постройте сечение этого куба плоскостью α.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство $\dfrac{x^2+6x+7}{x+2} + \dfrac{2-6x}{x} \leqslant x - 2$.

16 Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC. Окружность, проходящая через точки C и D, касается стороны AB и пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что $MN \parallel AB$.

б) Найдите MN, если известно, что $AD = 2$, $BD = 4$ и $AM = 1$.

17 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 300 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 3 процента на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 3 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 100 000 рублей?

18 Найдите все пары значений параметров a, b, при каждой из которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности начиная со второго либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

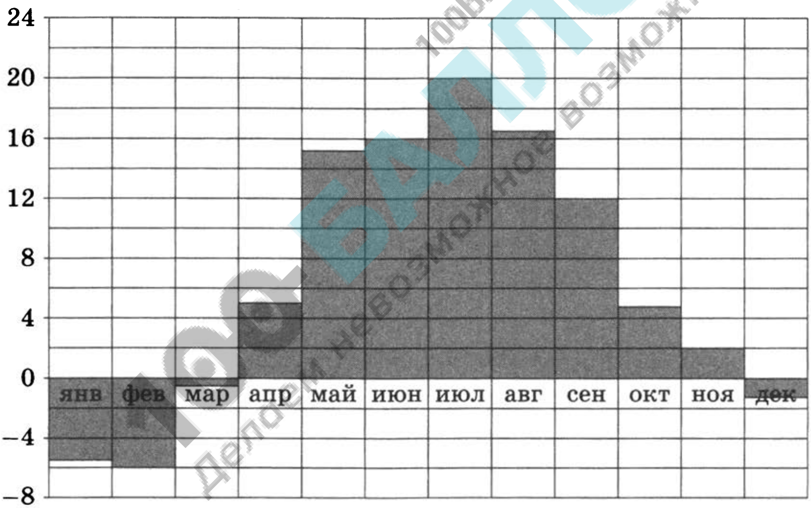
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Тренировочная работа №12

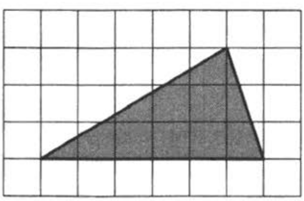
Часть 1

1 На автозаправке клиент отдал кассиру 1500 рублей и залил в бак 32 литра бензина. Цена бензина — 46 рублей за литр. Какую сдачу должен получить клиент? Ответ дайте в рублях.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 2003 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



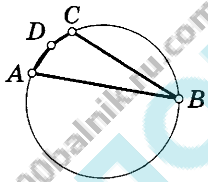
3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



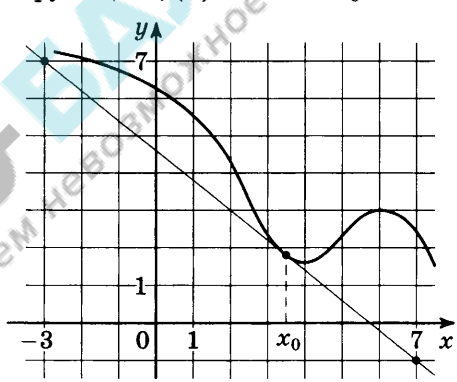
4 На конференцию приехали 3 учёных из Дании, 4 из Венгрии и 3 из Болгарии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что первым окажется доклад учёного из Болгарии.

5 Найдите корень уравнения $13^{3+x} = 169$.

6 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 22° и 65°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, B_1, C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 7$, $AD = 3$, $AA_1 = 9$.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $5\sqrt{2}\cos(-405^\circ)$.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа равна 72 мг. Период его полураспада составляет 3 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 9 мг.

11 Расстояние между городами A и B равно 410 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 45 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 275 км от города A. Ответ дайте в км/ч.

12 Найдите точку минимума функции

$$y = x^2 - 30x + 112\ln x - 7.$$

13 а) Решите уравнение $-2\cos^2 x = 3\cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой ребро основания равно 2, а высота равна 5. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

15 Решите неравенство $\frac{9^x + 5\cdot 3^x - 14}{9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 8} \leqslant \frac{3^x + 4}{3^x - 4} + \frac{2}{3^x - 3}$.

16 Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OHI, если $\angle ABC = 40^\circ$.

17 В июле 2016 года Тимур планирует взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата следующие:

• каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
• выплата должна производиться один раз в год с февраля по июнь;
• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}5S$	$0{,}2S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат Тимура будет меньше 30 млн рублей.

18 Найдите все целочисленные значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-a)^2}=3, \\ x^2-|a-1|x-a^2=3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 На доске написано 8 чисел. За каждый ход Руслан выбирает два каких-то числа из написанных на доске и стирает их, а вместо них на доске пишет их сумму, округлённую до целого числа (округление происходит по правилам). В результате 7 ходов на доске остаётся одно целое число.

а) Все числа, написанные на доске, были нецелыми. Мог ли Руслан получить в итоге число, равное сумме изначально написанных на доске чисел? Если да, то приведите пример таких чисел и ходов Руслана.

б) Все числа, написанные на доске, были нецелыми. Мог ли Руслан получить в итоге число, отличающееся от суммы изначально написанных чисел на 5?

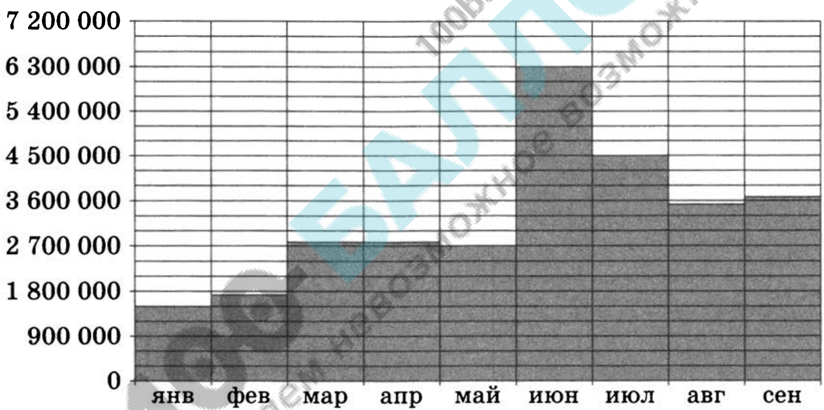
в) Друг Руслана Аркадий решил тоже складывать числа методом Руслана. Он выписал 8 чисел Руслана на другую доску и сделал 7 ходов. В результате друзья получили разные числа. Найдите наибольшую возможную разность этих чисел.

Тренировочная работа №13

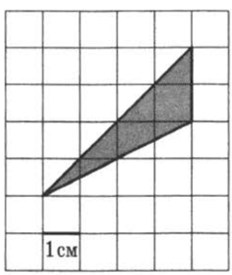
Часть 1

1 Цена на электрический чайник была повышена на 13 % и составила 2373 рубля. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

2 На диаграмме показано число запросов со словом ФУТБОЛ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наименьшее месячное число запросов со словом ФУТБОЛ в указанный период.



3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



4 Найдите вероятность того, что при броске двух кубиков сумма очков будет делиться на 4.

5 Решите уравнение $\operatorname{tg}\dfrac{\pi(4x+7)}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

6 Вершина A выпуклого черырёхугольника $ABCD$ является центром окружности, проходящей через точки B, C и D. Найдите угол BAD, если углы ABC и ADC равны соответственно 56° и 78°. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и отмечены восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_8. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$?

8 Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 15. Найдите площадь поверхности шара.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{8}+\sqrt{6})^2}{7+\sqrt{48}}$.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t)=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0=80$ мг.

Период его полураспада $T=2$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг?

11 Смешав 84-процентный и 96-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 84-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 89-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 84-процентного раствора использовали для получения смеси?

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 - 3x + \ln x + 10 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right].$$

13 а) Решите уравнение $12\cos^2 x - 11\cos x + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 2$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

15 Решите неравенство $\log_{x+1}|x-3{,}5| \geqslant 0$.

16 Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD.

а) Докажите, что диагональ BD равна одной из сторон параллелограмма.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BD = 2$ и $\angle BCD = 45°$.

17 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Андрей переводит в банк 2 551 500 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 - a(a^2+1)x + a^4 < 0$ имеет решения и множество решений неравенства содержится в интервале $(-3; 1)$.

19 За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причём каждый что-то ел и может быть так, что кто-то ел и то и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

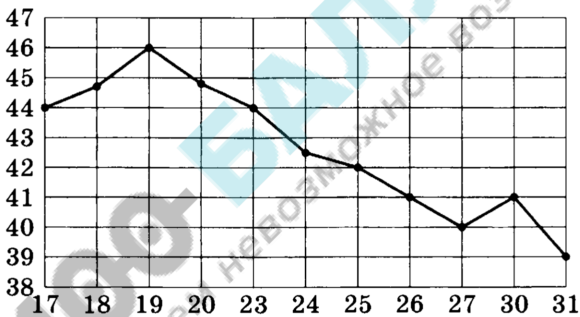
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Тренировочная работа №14

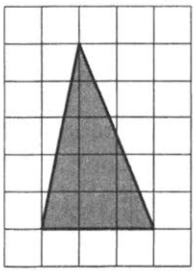
Часть 1

1 На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 19 литров бензина. Цена бензина — 45 рублей за литр. Какую сдачу должен получить клиент? Ответ дайте в рублях.

2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода цена нефти на момент закрытия торгов была от 43 до 45 долларов США за баррель.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

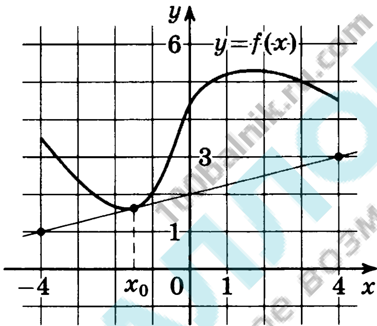


4 В классе 16 учащихся, среди них два друга — Олег и Михаил. Класс случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Олег и Михаил окажутся в одной группе.

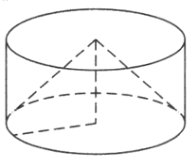
5 Найдите корень уравнения $6^{9+x} = 36$.

6 В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота AH равна 2, $BH = 6\sqrt{11}$. Найдите $\sin \angle BAC$.

7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $12\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $12\sqrt{3}\cos(-390^\circ)$.

10 Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 8\sin\frac{\pi t}{3}$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 4 см/с? Ответ выразите десятичной дробью и, если нужно, округлите до сотых.

11 Расстояние между городами А и В равно 435 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 55 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 325 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 8x + 160}.$$

13 а) Решите уравнение

$$-1 - 4\sin^2 x = 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{4}; 3\pi\right]$.

14 В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

15 Решите неравенство $\dfrac{81^x - 2\cdot 9^{x+1} + 80}{81^x - 12\cdot 9^x + 32} \leqslant \dfrac{9^x - 15}{9^x - 4} + \dfrac{2}{9^x - 7}$.

16 В треугольник ABC вписана окружность радиуса r, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM = 7r$ и $CM = \frac{4}{3}r$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $r = 3$.

17 В июле 2016 года Тимур планирует взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата следующие:

• каждый январь долг увеличивается на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;

• выплата должна производиться один раз в год с февраля по июнь;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}6S$	$0{,}2S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат Тимура будет меньше 40 млн рублей.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x^2}{y^2} - 4a\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + 4a^2 + 2 = 0, \\ |x + y - 3| + |x - y| = 1 \end{cases}$$

имеет 2 решения.

19 В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3; 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

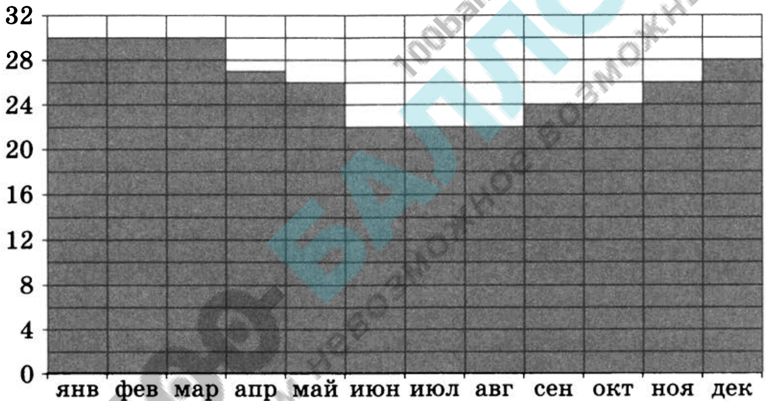
в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Тренировочная работа №15

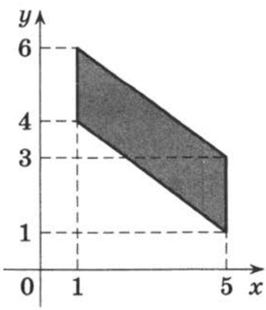
Часть 1

1 В доме, в котором живёт Толя, один подъезд. На каждом этаже по девять квартир. Толя живёт в квартире 98. На каком этаже живёт Толя?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько в 2009 году было месяцев, когда среднемесячная температура превосходила 25 °С.



3 Найдите площадь параллелограмма, вершинами которого являются точки с координатами (1; 4), (1; 6), (5; 3), (5; 1).



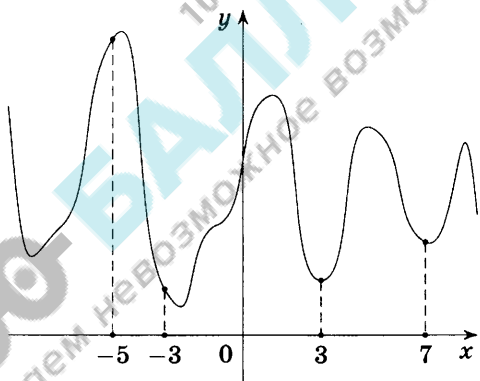
4 На турнир по шахматам прибыло 26 участников, в том числе близнецы Коля и Толя. Для проведения жеребьёвки первого тура участников случайным образом разбивают на две группы по 13 человек. Найдите вероятность того, что Коля и Толя попадут в разные группы.

5 Найдите корень уравнения

$$\log_4(18-5x) = 2\log_4 3.$$

6 Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите AC, если $CM=7$, $CN=8$, $BC=24$.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и отмечены точки -5, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



8 Высота правильной треугольной пирамиды равна 12, а высота боковой грани пирамиды, проведённая к ребру основания, равна 13. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $3\cdot\sqrt[4]{64}\cdot\sqrt[12]{64}$.

10 Два тела массой $m=9$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v=10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q=mv^2\sin^2\alpha$.

Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 450 джоулей?

11 На изготовление 468 деталей первый рабочий затрачивает на 8 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 520 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 6 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

12 Найдите наибольшее значение функции $3x^5 - 20x^3 - 54$ на отрезке $[-4; -1]$.

13 а) Решите уравнение $3\,\mathrm{tg}^2\, x - 4\,\mathrm{tg}\, x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 12, а боковое ребро равно 24. Точка G принадлежит ребру MA, причём $MG : GA = 2 : 1$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, G и параллельной прямой AC.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство

$$2\log_2 \frac{x-1}{2x+3} + \log_2 (2x+3)^2 \geqslant 2.$$

16 Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается боковой стороны AB в точке P, а основания BC — в точке M. Вторая окружность с центром O_1, касающаяся основания BC и продолжений боковых сторон, касается прямой AB в точке Q.

а) Докажите, что треугольник PMQ прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что высота треугольника, проведённая из вершины A, равна 45, а точка P делит боковую сторону AB в отношении $9 : 8$, считая от вершины A.

17 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 6 951 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем Ваня переводит в банк платёж. Весь долг Ваня выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^x - (a-1)\cdot 2^{x+1} + a^2 - 4a - 5 = 0$ имеет единственный корень.

19 По окружности расставлено 40 ненулевых целых чисел с общей суммой 16. Любые два стоящих рядом числа отличаются не более чем на 6, и никакие четыре отрицательных числа не стоят подряд.

а) Среди этих 40 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.

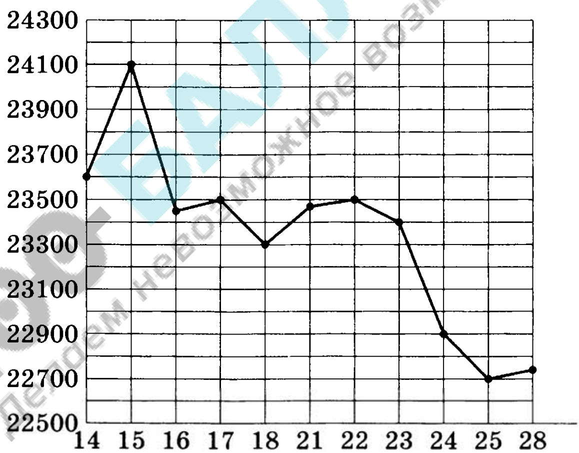
б) Среди этих 40 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

Тренировочная работа №16

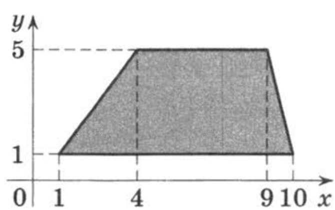
Часть 1

1 Шариковая ручка стоит 30 рублей. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 500 рублей после повышения цены на $10\,\%$?

2 На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода цена олова на момент закрытия торгов была от 23 000 до 24 000 долларов США за тонну.



3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



4 Из водоплавающих животных в заповеднике обитают только бобры, ондатры и выдры. Найдите вероятность того, что случайно встреченное в заповеднике водоплавающее животное окажется ондатрой, если из трёх следующих утверждений два истинны, а одно ложно:

1) бобры составляют 29 % водоплавающих животных заповедника;

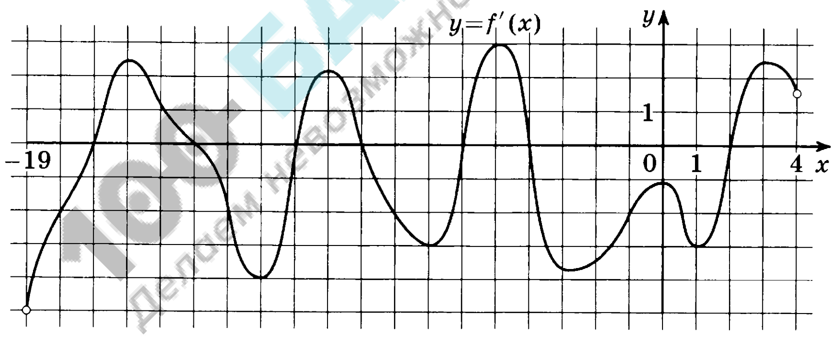
2) ондатры составляют 72 % водоплавающих животных заповедника;

3) выдры составляют 30 % водоплавающих животных заповедника.

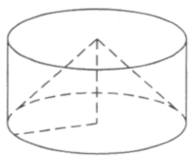
5 Найдите корень уравнения $\log_7(2x-5)=\log_7(x+4)$.

6 В треугольнике ABC известно, что $AC=BC$, высота AH равна 9, $BH=\sqrt{19}$. Найдите $\sin\angle BAC$.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-19;\ 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8;\ 1]$.



8 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $36\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{(6\sqrt{3})^2}{54}$.

10 Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 9\sin\dfrac{\pi t}{5}$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 4,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

11 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 504 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 21 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 55 часов. Ответ дайте в км/ч.

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 45}.$$

13 а) Решите уравнение $2\sin^2 x = 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{6}; \pi\right]$.

14 В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 9 и радиусом основания 2 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

15 Решите неравенство $(x-7)\cdot\log_{x+3}(x+1)\cdot\log_3(x+3)^3 \leqslant 0$.

16 В треугольник ABC вписана окружность радиуса r, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM = 4r$ и $CM = \dfrac{5}{3}r$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $r = 3$.

17 В июле 2016 года Инга планирует взять кредит на шесть лет в размере 4,2 млн рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

• выплата должна производиться один раз в год с февраля по июнь;

• в июле 2017, 2018, 2019 и 2020 годов долг остаётся равным 4,2 млн рублей;

• выплаты в 2021 и 2022 годах равны;

• к июлю 2022 года долг будет выплачен полностью.

На сколько миллионов рублей последняя выплата будет больше первой?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x^2}{y^2} - 2a\left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}\right) + a^2 - 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2a(x + y) = 0 \end{cases}$$

не имеет решений.

19 Последовательность натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ состоит из более чем двух членов. Каждый член последовательности (кроме первого и последнего) меньше среднего арифметического соседних членов.

а) Может ли такая последовательность состоять из 5 членов, сумма которых равна 32? Если да, то приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?

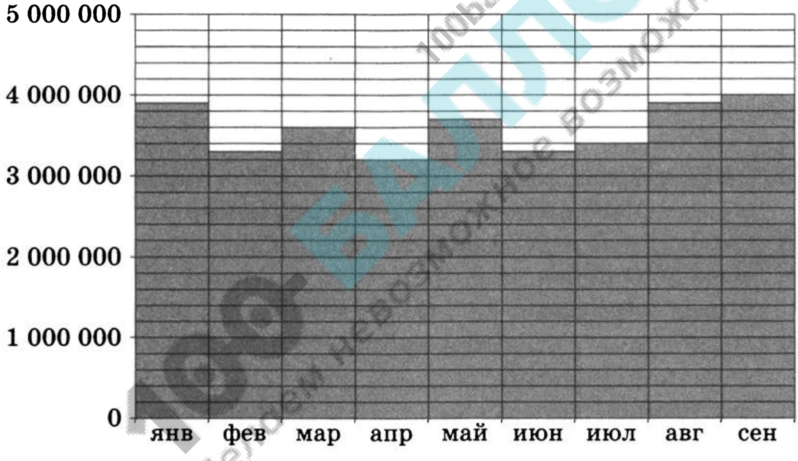
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности, если в ней 9 членов?

Тренировочная работа №17

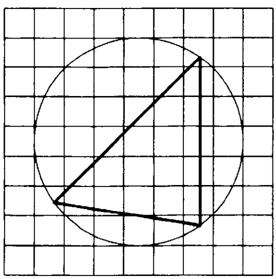
Часть 1

1 В сентябре 1 кг винограда стоил 100 рублей, в октябре виноград подорожал на 25%, а в ноябре ещё на 20%. Сколько рублей стоил 1 кг винограда после подорожания в ноябре?

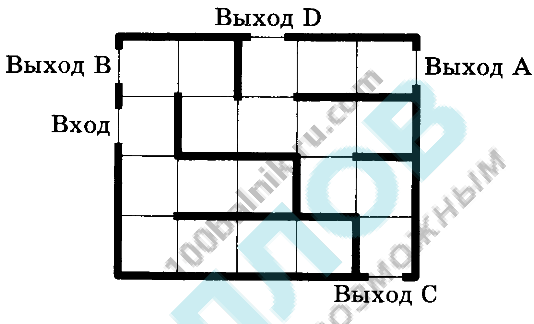
2 На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в указанный период, когда месячное число запросов со словом КИНО не превосходило 3 500 000.



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



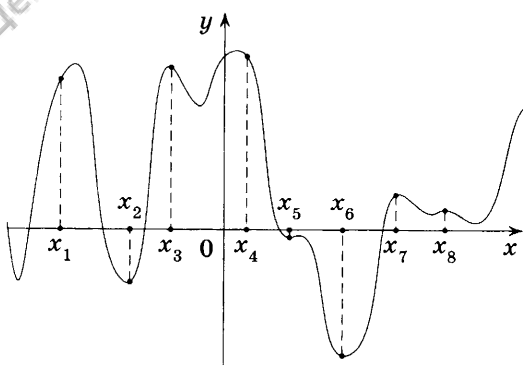
4 На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D.



5 Решите уравнение $x^2 + 3x - 10 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

6 Отрезки AB и BC являются хордами окружности с центром O. Найдите угол ACB, если известно, что он острый и угол ABO равен $23°$. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и отмечены восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_8. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции $f(x)$?



8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 7.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\sqrt{18}-\sqrt{72}\sin^2\frac{5\pi}{8}$.

10 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h м над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 64 километров? Ответ выразите в метрах.

11 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 567 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 54 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y=(21-x)e^{22-x} \quad \text{на отрезке } [16;\,25].$$

13 а) Решите уравнение $4\cos^2 x-12\cos x+5=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\,\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра основания равны $10\sqrt{3}$, а боковые рёбра равны 8.

а) Постройте плоскость, проходящую через точку B_1 и перпендикулярную ребру A_1C_1.

б) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости BA_1C_1.

15 Решите неравенство

$$2\log_9(4x^2+1)\leqslant\log_3(3x^2+4x+1).$$

16 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, H — точка пересечения высот.

а) Докажите, что точки B, D, H и E лежат на одной окружности.

б) Известно, что радиус этой окружности равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $AC = 2$. Найдите угол между высотой CE и стороной BC.

17 Оля хочет взять в кредит 1 200 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 000 рублей?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 16, \\ \sqrt{x^2 + (y-12)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 144}. \end{cases}$$

19 На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

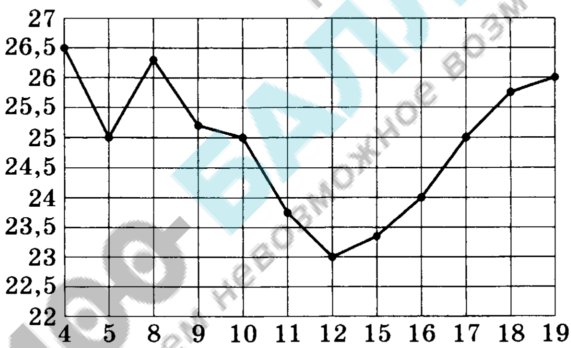
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Тренировочная работа №18

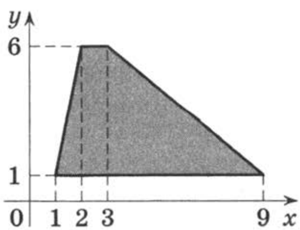
Часть 1

1 Шариковая ручка стоит 10 рублей. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 300 рублей после повышения цены на 60 %?

2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку, какого числа цена нефти на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



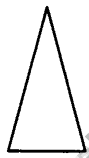
3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



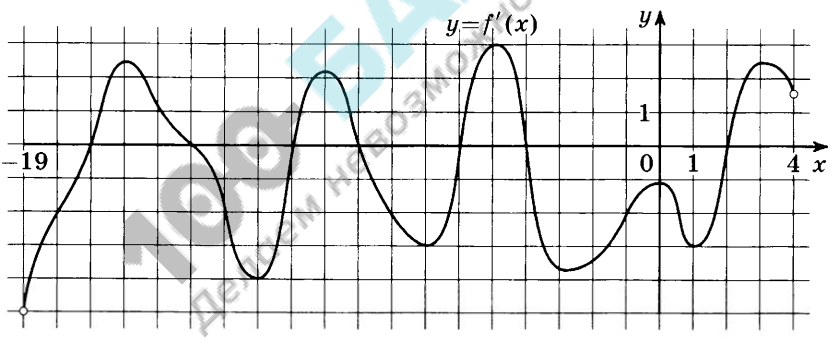
4 На борту самолёта 23 кресла расположены рядом с запасными выходами и 25 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир З. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру З. достанется удобное место, если всего в самолёте 100 мест.

5 Найдите корень уравнения $\log_{11}(3x-5)=\log_{11}(x+15)$.

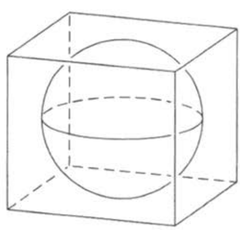
6 Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Боковая сторона треугольника равна 38. Найдите площадь этого треугольника.



7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-19;\,4)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-16;\,1]$.



8 Куб описан около сферы радиуса 10. Найдите объём куба.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $\frac{(8\sqrt{3})^2}{48}$.

10 Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 16$ кг и радиусом $R = 7$ см и двух боковых массами $M = 6$ кг и радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в кг·см^2, даётся формулой $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения 1568 кг·см^2? Ответ выразите в сантиметрах.

11 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 420 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 24 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 44 часа. Ответ дайте в км/ч.

12 Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{-102 - 22x - x^2}$.

13 а) Решите уравнение $4\sin^2 x = -4\sin(-x) - 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство $(x-9)\cdot\log_{x+5}(x+2)\cdot\sqrt{\log_9(x+5)} \leqslant 0$.

16 В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них

касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

17 В июле 2016 года Олег планирует взять кредит на четыре года в размере 5,4 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;
- выплата должна производиться один раз в год с февраля по июнь;
- в июле 2017 и 2018 годов долг остаётся равным 5,4 млн рублей;
- выплаты в 2019 и 2020n годах равны;
- к июлю 2020 года долг будет выплачен полностью.

На сколько миллионов рублей последняя выплата будет больше первой?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ y = a(x - 1) \end{cases}$ имеет более двух решений.

19 Последовательность натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ состоит из более чем двух членов. Каждый член последовательности (кроме первого и последнего) меньше среднего арифметического соседних членов.

а) Может ли такая последовательность состоять из 6 членов, сумма которых равна 29? Если да, то приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из семи членов и содержать два одинаковых числа?

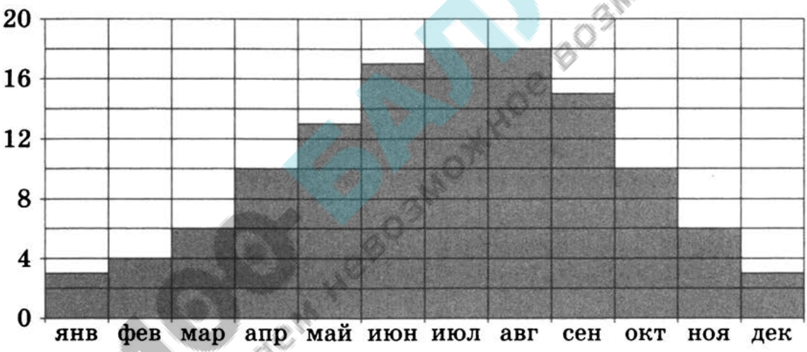
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности, если в ней 12 членов?

Тренировочная работа №19

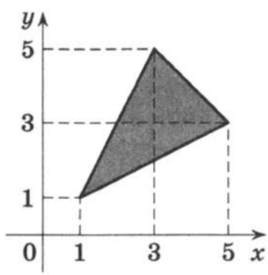
Часть 1

1 Подготовка книги к печати стоит 30 тысяч рублей. Печать одного экземпляра стоит 30 рублей. Сеть книжных магазинов покупает эту книгу у издательства по 70 рублей за экземпляр. При каком наименьшем тираже книги издательство окажется не в убытке?

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Париже за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3 Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются точки с координатами (1; 1), (3; 5), (5; 3).



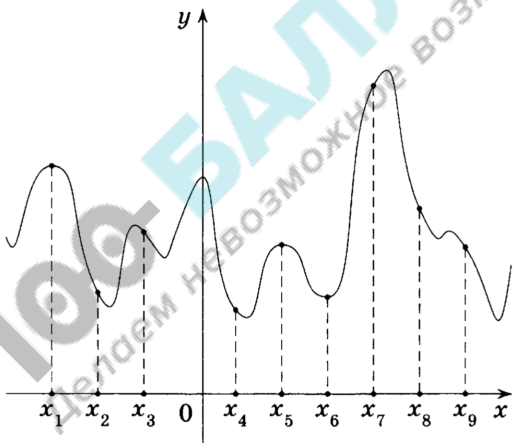
4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1.

5 Найдите корень уравнения

$$\sqrt{\frac{10}{2x-8}}=\frac{1}{5}.$$

6 Сумма трёх углов параллелограмма равна 197°. Найдите острый угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и отмечены девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_9. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ отрицательна?



8 Высота правильной треугольной пирамиды в три раза меньше высоты основания пирамиды. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 49}{\log_5 7}$.

10 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 65$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 20$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 35 км от города. Ответ выразите в минутах.

11 Игорь и Паша красят забор за 40 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 48 часов, а Володя и Игорь — за 60 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = -12 - 8{,}5\sqrt{3}\pi + 51\sqrt{3}x - 102\sin x \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

13 а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 4$, $AD = 12$, $AA_1 = 3$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, D и C_1.

б) Найдите расстояние от точки D до прямой AC_1.

15 Решите неравенство $\log_3 \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1} \leqslant 1$.

16 Около треугольника ABC описана окружность. Касательная к окружности, проходящая через точку B, пересекает прямую AC в точке M.

а) Докажите, что треугольники AMB и BMC подобны.

б) Найдите отношение $AM : MC$, если известно, что $AB : BC = 3 : 2$.

17 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого сле-

дующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 2 073 600 рублей, то выплатит долг за 4 года, а если по 3 513 600, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3. \end{cases}$$

19 В течение четверти учитель ставил школьникам отметки «1», «2», «3», «4», «5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 4,7.

а) Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика?

б) Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика, если среди этих отметок есть отметка «1»?

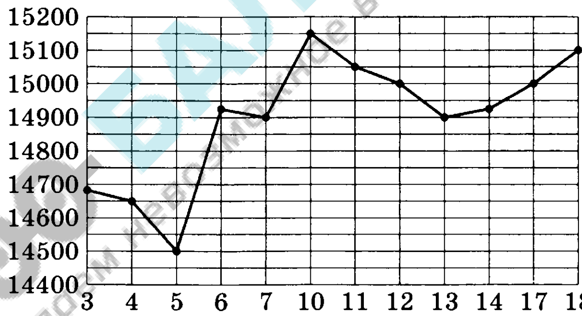
в) Учитель заменил четыре отметки «3», «3», «5», «5» двумя отметками «4». На какое наибольшее число может увеличиться среднее арифметическое отметок ученика после такой замены?

Тренировочная работа №20

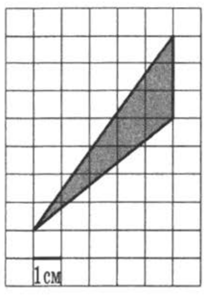
Часть 1

1 В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 апреля составляли 120 куб. м воды, а 1 мая — 135 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за апрель, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 15 руб. 30 коп.? Ответ дайте в рублях.

2 На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



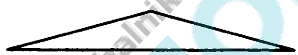
3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



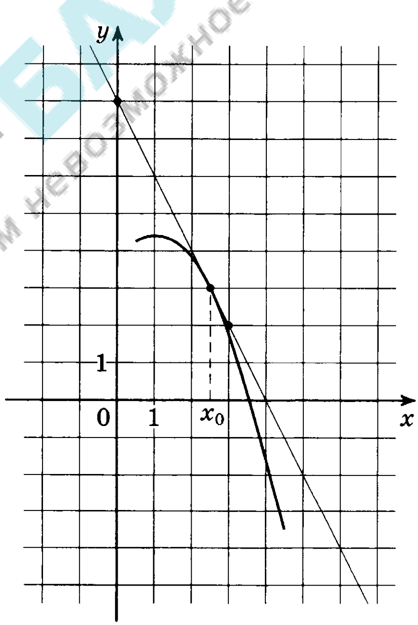
4 На борту самолёта 16 кресел расположены рядом с запасными выходами и 20 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир Л. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру Л. достанется удобное место, если всего в самолёте 450 мест.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{44-7x}=3$.

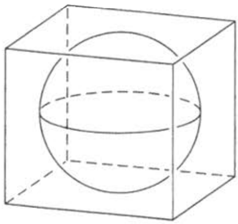
6 Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150°. Боковая сторона треугольника равна 24. Найдите площадь этого треугольника.



7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8 Куб объёмом 216 000 описан около сферы. Найдите радиус сферы.



Часть 2

9 Найдите значение выражения $\sqrt{72}\cos^2\frac{13\pi}{8}-\sqrt{18}$.

10 Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m=8$ кг и радиусом $R=5$ см и двух боковых с массами $M=2$ кг и с радиусами $R+h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в кг$\cdot$см^2, даётся формулой $I=\frac{(m+2M)R^2}{2}+M(2Rh+h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения 1900 кг$\cdot$см^2? Ответ выразите в сантиметрах.

11 Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 252 литра она заполняет на 9 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 420 литров?

12 Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2-12x+56}$.

13 а) Решите уравнение $(2\cos x-\sqrt{3})\sqrt{5\sin x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\,-\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно.

Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство

$$(20-11x)\cdot\log_{5x-9}(x^2-4x+5)\leqslant 0.$$

16 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD=120^\circ$.

17 По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 9 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» увеличивает эту сумму на 12 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+20x+y^2-20y+75=|x^2+y^2-25|,\\ x-y=a\end{cases}$$

имеет более одного решения.

19 Известно, что a, b, c и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{7}{23}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a>4b$ и $c>7d$?

ОТВЕТЫ

Диагностическая работа № 1

1. 4. **2.** –6. **3.** 10. **4.** 0,3. **5.** 10. **6.** 94. **7.** 4. **8.** 5. **9.** –43,68. **10.** 6000. **11.** 20. **12.** –21. **13.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}$. **14.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **15.** $[0;\ 3)\cup(3;\ 4)\cup[5;\ 6]$. **16.** 1,2. **17.** 8 606 000. **18.** $a\in(-11;\ -1)$. **19.** а) –5; 3; 6; б) 6; в) нет.

Диагностическая работа № 2

1. 35. **2.** 5. **3.** 13,5. **4.** 0,98. **5.** 22. **6.** 17. **7.** 1,8. **8.** 45. **9.** 0. **10.** 6000. **11.** 8. **12.** 3. **13.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}$. **14.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **15.** $[-6;\ -2)\cup(3;\ 12]$. **16.** 2. **17.** 4. **18.** $a=-2{,}5$; $a=-9{,}5$. **19.** а) Нет; б) нет; в) да.

Диагностическая работа № 3

1. 20. **2.** 9600. **3.** –2. **4.** 0,156. **5.** 2,5. **6.** 12,5. **7.** –0,25. **8.** 45.

Диагностическая работа № 4

1. 7. **2.** 7. **3.** 40. **4.** 0,17. **5.** 5. **6.** 4. **7.** 4. **8.** 16.

Задача 1. Подготовительные задания

1. 9. **2.** 582. **3.** 240. **4.** 37,5. **5.** 60. **6.** 8. **7.** 138. **8.** 11. **9.** 69. **10.** 3.

Зачётные задания

1. 110. **2.** 6. **3.** 350. **4.** 32. **5.** 15. **6.** 1425. **7.** 5. **8.** 4. **9.** 13. **10.** 2.

Задача 2. Подготовительные задания

1. 22. **2.** –14. **3.** 4. **4.** 5. **5.** 8. **6.** 4. **7.** 19. **8.** 1. **9.** 6000. **10.** 10.

Зачётные задания

1. 400 000. **2.** 2. **3.** 9. **4.** 8. **5.** –31. **6.** –19. **7.** 17. **8.** 60. **9.** 3. **10.** 90.

Задача 3. Подготовительные задания

1. 3. **2.** 5. **3.** 14. **4.** 0,5. **5.** 90. **6.** 6. **7.** 45. **8.** 22. **9.** 2,5. **10.** 5.

Зачётные задания

1. 6. **2.** 3. **3.** 0,6. **4.** 7,5. **5.** 3,5. **6.** –0,8. **7.** 10. **8.** 3. **9.** 9. **10.** 22,5.

Задача 4. Подготовительные задания

1. 0,5. **2.** 0,25. **3.** 0,08. **4.** 0,55. **5.** 0,2. **6.** 0,47. **7.** 0,4. **8.** 0,9216. **9.** 0,33. **10.** 0,75.

Зачётные задания
1. 0,5. **2.** 0,25. **3.** 0,1. **4.** 0,16. **5.** 0,5. **6.** 0,06. **7.** 4. **8.** 0,96. **9.** 0,67. **10.** 0,32.

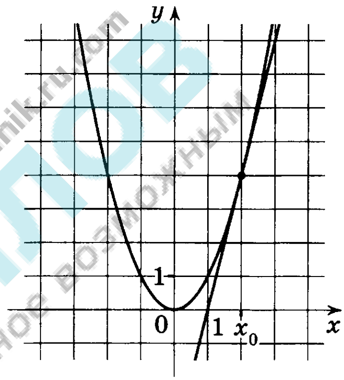
Задача 5. Подготовительные задания
1. 3. **2.** 37. **3.** 9. **4.** 1. **5.** 4. **6.** 22. **7.** 2. **8.** 7. **9.** 6. **10.** 8.

Зачётные задания
1. 8. **2.** 1. **3.** 1,25. **4.** –1. **5.** 45. **6.** –16. **7.** 2. **8.** 6. **9.** 0,5. **10.** –0,5.

Задача 6. Подготовительные задания
1. 33. **2.** 9,5. **3.** 18. **4.** 118. **5.** 26. **6.** 34. **7.** 1787. **8.** 168. **9.** 24. **10.** 11.

Зачётные задания
1. 73. **2.** 66. **3.** 11. **4.** 22. **5.** 67. **6.** 53. **7.** 134. **8.** 46. **9.** 28. **10.** 5.

Задача 7. Подготовительные задания
1. См. рисунок. **2.** 10. **3.** 5. **4.** –7. **5.** 2. **6.** 4. **7.** 4. **8.** 3. **9.** 5. **10.** 6.



Зачётные задания
1. 7. **2.** –0,75. **3.** –3. **4.** 7. **5.** 5. **6.** –2. **7.** 4. **8.** 0. **9.** 7. **10.** 8.

Задача 8. Подготовительные задания
1. 8. **2.** 15. **3.** 300. **4.** 3. **5.** 8. **6.** 12. **7.** 2,5. **8.** 45. **9.** 8. **10.** 12.

Зачётные задания
1. 8. **2.** 5. **3.** 13. **4.** 3. **5.** 8. **6.** 3. **7.** 10. **8.** 6. **9.** 2,5. **10.** 2.

Диагностическая работа № 5
1. 46. **2.** 14. **3.** 4. **4.** 0,02. **5.** –7. **6.** 54. **7.** –0,5. **8.** 270.

Диагностическая работа № 6
1. 7. **2.** 39. **3.** 67,5. **4.** 0,98. **5.** 14. **6.** 57. **7.** 2. **8.** 60.

Диагностическая работа № 7
1. –3. **2.** 30. **3.** 24. **4.** –54.

Диагностическая работа № 8
1. 41,58. **2.** 48. **3.** 8. **4.** –6.

Задача 9. Подготовительные задания
1. –12. **2.** 6. **3.** 27. **4.** 3. **5.** 16. **6.** 2. **7.** –63. **8.** 0,2. **9.** 64. **10.** –71.

Зачётные задания

1. 110. **2.** 1. **3.** –1,3. **4.** –18. **5.** 27. **6.** –35. **7.** 2. **8.** 2. **9.** 324. **10.** 4,5.

Задача 10. Подготовительные задания

1. 11,2. **2.** 110. **3.** 89. **4.** 12. **5.** 11. **6.** 370. **7.** 0,09. **8.** 12,8. **9.** 4. **10.** 80.

Зачётные задания

1. 25. **2.** 7. **3.** 2,2. **4.** 60. **5.** 0,8. **6.** 4000. **7.** 0,29. **8.** 6. **9.** 6. **10.** 18.

Задача 11. Подготовительные задания

1. 160. **2.** 560. **3.** 160. **4.** 6. **5.** 15. **6.** 6. **7.** 646. **8.** 26. **9.** 560. **10.** 10.

Зачётные задания

1. 300. **2.** 14. **3.** 38. **4.** 15. **5.** 48. **6.** 20. **7.** 12. **8.** 50. **9.** 75. **10.** 14.

Задача 12. Подготовительные задания

1. 409. **2.** 3. **3.** 4. **4.** 4. **5.** 4. **6.** 2,5. **7.** 5,5. **8.** 10. **9.** 31. **10.** 20.

Зачётные задания

1. –10. **2.** 64. **3.** 0. **4.** 16. **5.** 3. **6.** –2. **7.** 5. **8.** 6. **9.** 2,5. **10.** –15.

Диагностическая работа № 9

1. 2. **2.** 5. **3.** 11. **4.** –3.

Диагностическая работа № 10

1. 8. **2.** 9. **3.** 60. **4.** 0.

Диагностическая работа № 11

1. 511. **2.** 2. **3.** 90. **4.** 0,48. **5.** –9. **6.** 44. **7.** 6. **8.** 5. **9.** 2. **10.** 1,8. **11.** 300. **12.** 11.

Диагностическая работа № 12

1. 22. **2.** 11. **3.** 0,8. **4.** 0,08. **5.** 6. **6.** 11. **7.** 7. **8.** 9. **9.** 2. **10.** 1000. **11.** 40. **12.** 0,5.

Диагностическая работа № 13

1. 8. **2.** 10. **3.** 10,5. **4.** 0,019. **5.** 32. **6.** 36. **7.** 4. **8.** 15. **9.** 2. **10.** 30. **11.** 75. **12.** 13.

Диагностическая работа № 14

1. 3. **2.** 20. **3.** 2,5. **4.** 0,25. **5.** –7. **6.** 8. **7.** –0,75. **8.** 2. **9.** 4. **10.** 30. **11.** 72. **12.** 4.

Диагностическая работа № 15

1. 1584. **2.** 6. **3.** 53. **4.** 0,944. **5.** 2. **6.** 18. **7.** –0,75. **8.** 18. **9.** 144. **10.** 50. **11.** 18. **12.** 6.

Диагностическая работа № 16

1. 231. **2.** 9600. **3.** 15. **4.** 0,047. **5.** -7. **6.** 81. **7.** 9. **8.** 7,5. **9.** -10. **10.** 21. **11.** 5. **12.** -29.

Диагностическая работа № 17

1. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $(-1)^{m+1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $2\pi - \arcsin \frac{2}{3}$; $\pi + \arcsin \frac{2}{3}$. **2.** 6. **3.** -1; 2,5; 3,5. **4.** 3. **5.** 11. **6.** $a = -3$; $a = 1$. **7.** а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Диагностическая работа № 18

1. а) $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) -3π; $-\frac{17\pi}{6}$; -2π. **2.** 0,5. **3.** (2; 3]. **4.** 1 : 2. **5.** 6. **6.** $a = -4$, b любое; $a = 4$, $b = 2$. **7.** а) 2; 2; 2; 2; б) нет; в) 9; 10; 11; 11; 11 или 9; 10; 11; 22.

Задача 13. Подготовительные задания

1. а) $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) -3π. **2.** а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{13\pi}{6}$. **3.** а) $\pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\arccos \frac{1}{3} - 4\pi$. **4.** а) $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) -2π; 0. **5.** а) $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) -3π. **6.** а) πn, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3}$; -3π; $-\frac{8\pi}{3}$; -2π. **7.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$. **8.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$. **9.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$. **10.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$.

Зачётные задания

1. а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $(-1)^m \arcsin \frac{3}{4} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $\arcsin \frac{3}{4}$; $\pi - \arcsin \frac{3}{4}$. **2.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$. **3.** а) $-\frac{3}{2}$; 4; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$. **4.** а) $(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi - \arcsin \frac{1}{3}$. **5.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}$; $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$; $2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. **6.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{4}$. **7.** а) $\frac{\pi}{2} +$

$+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$. **8.** а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$. **9.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$. **10.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{13\pi}{6}$.

Задача 14. Подготовительные задания

1. 13. **2.** 20. **3.** 3. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** 1,5. **6.** arctg $\sqrt{10}$. **7.** 8. **8.** $\sqrt{3}$. **9.** $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. **10.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Зачётные задания

1. 5. **2.** 4. **3.** 6. **4.** 6. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 6. **9.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Задача 15. Подготовительные задания

1. $[5;\,7]\cup\{8\}$. **2.** $(-\infty;\,-8)\cup\{0{,}8\}\cup[7{,}5;\,8)$. **3.** $(-\infty;\,-6)\cup\left(-5;\,-\frac{25}{6}\right]\cup(5;\,+\infty)$. **4.** $\{-1\}\cup[1;\,+\infty)$. **5.** $\left[-1;\,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{6};\,1\right)$. **6.** $(-\infty;\,-6)\cup(-6;\,-5]\cup\{-3\}\cup[-1;\,0)\cup(0;\,+\infty)$. **7.** $\left(0;\,\frac{1}{4}\right]$. **8.** $\left(-8;\,-4\sqrt{3}\right]\cup\{0\}\cup\left[4\sqrt{3};\,8\right)$. **9.** $\left(\frac{3}{7};\,+\infty\right)$. **10.** $(-0{,}4;\,-0{,}2]\cup(0{,}2;\,0{,}4)$.

Зачётные задания

1. $(-\infty;\,-5]\cup\{-4\}\cup[-3;\,0]$. **2.** $\{-2\}\cup[2;\,+\infty)$. **3.** $\{-3\}\cup[1;\,2)$. **4.** $\{7\}$. **5.** $(-\infty;\,2)$. **6.** $(0;\,2)\cup(5;\,+\infty)$. **7.** $\left(-\infty;\,-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2};\,-1\right]\cup\{0\}\cup\left[1;\,\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\,+\infty\right)$. **8.** $\left(-\frac{1}{3};\,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{4}{3};\,\frac{3}{2}\right]$. **9.** $\left(0;\,\frac{1}{64}\right)\cup\left(\frac{1}{64};\,\frac{1}{32}\right]\cup\left\{\frac{1}{8}\right\}\cup\left[\frac{1}{2};\,1\right)\cup(1;\,+\infty)$. **10.** $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Задача 16. Подготовительные задания

1. $60°$, $60°$, $120°$, $120°$. **2.** 48. **3.** 50. **4.** 20. **5.** $3\sqrt{5}$. **6.** 1 : 1. **7.** 9 : 16. **8.** $90°$. **9.** $3\sqrt{13}$. **10.** $90°$.

Зачётные задания

1. 30. **2.** 5. **3.** 216. **4.** $60°$. **5.** 3,5. **6.** 49. **7.** 2,4. **8.** $2\sqrt{5}$. **9.** 113. **10.** $2\sqrt{41}$.

Задача 17. Подготовительные задания

1. 3 817 125. **2.** 1 951 120. **3.** 986 000. **4.** 10. **5.** 18,81. **6.** 576 000. **7.** 53 500 руб. **8.** 10. **9.** 1,8. **10.** 10.

Зачётные задания

1. 3 110 400. **2.** 8 931 000. **3.** 9 282 000. **4.** 10. **5.** 6 изделий первого типа; 22 изделия второго типа; максимальная прибыль равна 354 000 д. е. **6.** 950 400. **7.** 194 600 рублей; номеров категории А — 3, номеров категории Б — 52. **8.** 12,5. **9.** На первый объект нужно направить 6 рабочих, на второй объект — 29 рабочих, зарплата составит 1021 д. е. **10.** 5.

Задача 18. Подготовительные задания

1. Если $a=1$, то $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi k\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$; при прочих a решений нет. **2.** $a\in(-1;\,0)\cup(0;\,4)$. **3.** $a\in\left(-\infty;\ \frac{1}{8}\right]$. **4.** $a\in[-2;\,-1)\cup(-1;\,1)\cup$ $\cup(1;\,2]$. **5.** $a=0$; $a=\pm4$. **6.** $a\in(-\infty;\,-6]\cup[6;\,+\infty)$. **7.** $a=\pm(\sqrt{5}-2)$; $a=\pm(\sqrt{5}+2)$. **8.** $a\in(-\infty;\,-4]\cup[4;\,+\infty)$. **9.** $a\in[3;\,9)$. **10.** Если $a\in(-4;\,-2)$, то $x=\pm\arccos(a+3)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a=-4$, то $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; если $a=-2$, то $x=2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; при прочих a корней нет.

Зачётные задания

1. $a=-2$. **2.** $a\in[-2;\,-0{,}5]$. **3.** $a\in(-\infty;\,-\sqrt{7}]\cup[\sqrt{7};\,+\infty)$. **4.** Если $a>0$, то $x=2a+1+\sqrt{3a+1}$; если $a\in\left[-\frac{1}{3};\ 0\right]$, то $x=2a+1\pm\sqrt{3a+1}$; при прочих a корней нет. **5.** a — любое иррациональное число. **6.** $a\in[1;\,+\infty)$. **7.** $a=3$. **8.** $a=0$; $a=2\sin 1$. **9.** $x=1$. **10.** $b\in(-4;\,-1)$.

Задача 19. Подготовительные задания

2. $(-1;\,4)$; $(1;\,6)$. **3.** $(1;\,-1)$; $(3;\,1)$; $(-1;\,5)$; $(-3;\,3)$. **4.** $(-1;\,-1)$. **5.** $(8;\,1)$; $(2;\,-1)$. **6.** -7; -2; -1; 4. **7.** -11; -1. **8.** 2. **9.** 23. **10.** 330.

Зачётные задания

1. а) 3; б) 72. **2.** а) Нет; б) нет; в) да. **3.** а) Да; б) нет. **4.** а) Нет; б) да; в) 477. **5.** а) Нет; б) нет; в) 4. **6.** а) Да; г) например, 1; 126; ...; 8876. **7.** а) -3; 2; 4; б) 5; в) нет. **8.** а) Например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\times$ $\times(1+1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)$; б) например, $(1+7+1)\cdot(7+1+7)\times$ $\times(1+7+1)\cdot(7+1+7+1)$. **9.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{11}{3}$; в) $\frac{41}{11}$. **10.** а) Да; б) 11; в) $\frac{6}{13}$.

Диагностическая работа № 19

1. а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$. **2.** $\frac{2}{3}$. **3.** $(-6;\,-2)\cup$ $\cup(-2;\,0)\cup(0;\,2)\cup[3;\,+\infty)$. **4.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **5.** 3 703 860. **6.** $a=-2$. **7.** а) 160; б) да; в) 20.

Диагностическая работа № 20

1. а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6};\ -\frac{13\pi}{6}$. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $(-\infty;-1)\cup\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;1)$. **4.** 9. **5.** 3. **6.** $a=-\frac{1}{4};\ a=-\frac{1}{32}$. **7.** а) $-8,\ -5,\ 7$; б) 7; в) нет.

Тренировочная работа №1

1. 1449. **2.** 4 000 000. **3.** 3. **4.** 0,1. **5.** 45. **6.** 34. **7.** 4. **8.** 30. **9.** 2. **10.** 7. **11.** 9. **12.** 5. **13.** а) $-\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ -\operatorname{arctg}3+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi-\operatorname{arctg}2;\ -\pi-\operatorname{arctg}3$. **14.** 2. **15.** $[-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2]$. **16.** 26. **17.** 1 036 800. **18.** $a=2$. **19.** а) Нет; б) нет; в) 38.

Тренировочная работа №2

1. 291,2. **2.** 5. **3.** 13,5. **4.** 0,25. **5.** -8. **6.** 29. **7.** $-1{,}25$. **8.** 8. **9.** 4,5. **10.** 1,2. **11.** 24. **12.** 2. **13.** а) $\arcsin\frac{20}{29}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-3\pi;\ -2\pi$. **14.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **15.** $(-2;0)\cup[1;2)$. **16.** $\frac{7}{31}$. **17.** 6. **18.** $a\in\left\{-\frac{5+2\sqrt{19}}{3};\ \frac{-5+2\sqrt{19}}{3};\ -4;\ 1;\ -\frac{4}{3}\right\}$. **19.** а) Да, например, если $a=22,\ b=60,\ c=10$ и $d=40$; б) нет; в) $\frac{157}{29}$.

Тренировочная работа №3

1. 211,2. **2.** 7000. **3.** 135. **4.** 0,52. **5.** -1. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 0,7. **9.** 12. **10.** 0,3. **11.** 10. **12.** -1. **13.** а) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $3\pi;\ \frac{23\pi}{6};\ 4\pi$. **14.** $\sqrt{481}$. **15.** $(-\infty;-3]\cup\{0\}\cup[1;4)$. **16.** 49. **17.** 6. **18.** $a=\frac{4}{3}$. **19.** а) Нет; б) 8, a_2 и a_{10}; в) 8190 или 105.

Тренировочная работа №4

1. 107. **2.** 7. **3.** 4. **4.** 0,5. **5.** 11,75. **6.** 8. **7.** 5. **8.** 3. **9.** 2. **10.** 1,6. **11.** 10. **12.** 9. **13.** а) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{4}$. **14.** $\frac{9\sqrt{5}}{5}$. **15.** $[-2;0)\cup(0;2]$. **16.** $\frac{5}{19}$. **17.** 2. **18.** $a\in\left\{\frac{-1\mp\sqrt{13}}{2};\ -2{,}5;\ 2;\ 5\right\}$. **19.** а) 4112 и 4116; б) 9135; в) на 3.

Тренировочная работа №5

1. 8. **2.** 4. **3.** 7. **4.** 0,2. **5.** 7. **6.** 28. **7.** $-0{,}5$. **8.** 864. **9.** 10. **10.** 1,6. **11.** 120. **12.** 48. **13.** а) $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \pm\arccos\frac{1}{7}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$;

б) 0; $\pm\arccos\frac{1}{7}$. **14.** $7\sqrt{19}$. **15.** $(-\infty;\ 0]\cup(1;\ 5)$. **16.** 1 и 4. **17.** 10. **18.** $a=1$. **19.** а) Нет; б) нет; в) да.

Тренировочная работа №6

1. 221. **2.** 16. **3.** 2. **4.** 0,98. **5.** 9,5. **6.** 7. **7.** 2. **8.** 37. **9.** 3. **10.** 10. **11.** 15. **12.** -5. **13.** а) $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{4}$. **14.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **15.** $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$. **16.** 3. **17.** 4. **18.** $a\in\left(-\frac{9}{8};\ -1\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup$ $\cup\{1\}$. **19.** а) 5128 и 5113; б) нет; в) нет.

Тренировочная работа №7

1. 9. **2.** 4500. **3.** 13. **4.** 0,375. **5.** 16. **6.** 21. **7.** 0,25. **8.** 45. **9.** 2. **10.** 180. **11.** 15,4. **12.** 1. **13.** а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3};\ -\frac{8\pi}{3}$. **14.** $9\sqrt{91}$. **15.** $(1;\ 2]\cup(6;\ 7)$. **16.** 2. **17.** 259 200. **18.** $a\in\{-8;\ 0;\ 1;\ 9\}$. **19.** а) Например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)$; б) например, $(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot(1+1)$.

Тренировочная работа №8

1. 180. **2.** 30. **3.** 3. **4.** 0,97. **5.** 10. **6.** 5. **7.** 4. **8.** 46. **9.** $-16{,}5$. **10.** 27. **11.** 3. **12.** -7. **13.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$. **14.** $\frac{\sqrt{30}}{2}$. **15.** $(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};\ -1]\cup\{0\}\cup[1;\ \sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ +\infty)$. **16.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **17.** 14. **18.** $a\in\left(-\frac{37}{24};\ -\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **19.** а) Да; б) нет; в) 18,5.

Тренировочная работа №9

1. 2300. **2.** 6. **3.** 0,8. **4.** 0,5. **5.** 0,25. **6.** 9. **7.** 5. **8.** 512. **9.** -2. **10.** 25. **11.** 25. **12.** -5. **13.** а) $\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{2}{5}$; $-2\pi+\arccos\frac{2}{5}$. **14.** $4\sqrt{6}$. **15.** $(-\infty;\ -4]\cup\left[\frac{7}{2};\ 6\right)$. **16.** $\frac{55}{7}$. **17.** 12,5. **18.** $a=4$. **19.** а) Нет; б) нет; в) 4.

Тренировочная работа №10

1. 60. **2.** 30. **3.** 4,5. **4.** 0,2. **5.** 6. **6.** 168. **7.** 6. **8.** 120. **9.** 10. **10.** 12. **11.** 11,4. **12.** 8. **13.** а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{19\pi}{6}$. **14.** $\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$. **15.** $\{0\}\cup(1;\ \log_2 3)$. **16.** 15. **17.** 20. **18.** $a=0,\ a=\pm1,$ $a=-2$. **19.** а) Да; б) нет; в) $37\frac{1}{7}$.

Тренировочная работа №11

1. 6. **2.** 8. **3.** 20. **4.** 0,027. **5.** 1,5. **6.** 120. **7.** 3. **8.** 3. **9.** 535. **10.** 37. **11.** 30. **12.** 28. **13.** а) $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{1}{6};\ -2\pi;\ -2\pi+\arccos\frac{1}{6}$. **14.** $8\sqrt{6}$. **15.** $(-\infty;-4]\cup(-2;0)$. **16.** 4,5. **17.** 4. **18.** $a=b=-2$. **19.** а) Нет; б) да; в) 549.

Тренировочная работа №12

1. 28. **2.** 26. **3.** 9. **4.** 0,3. **5.** −1. **6.** 158. **7.** −0,8. **8.** 63. **9.** 5. **10.** 9. **11.** 55. **12.** 8. **13.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}$. **14.** $\operatorname{arctg}5$. **15.** $(-\infty;0]\cup(1;\log_3 4)$. **16.** 10°. **17.** 22. **18.** $a=0$; $a=1$. **19.** а) Да, например, четыре раза написано 0,05 и четыре раза написано 0,95 и любая последовательность ходов; б) нет; в) 4.

Тренировочная работа №13

1. 2100. **2.** 1 500 000. **3.** 4. **4.** 0,25. **5.** 1,5. **6.** 92. **7.** 2. **8.** 10. **9.** 2. **10.** 8. **11.** 20. **12.** 8. **13.** а) $\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi+\arccos\frac{1}{4};\ -2\pi+\arccos\frac{2}{3}$. **14.** 15. **15.** $(0;2{,}5]\cup[4{,}5;+\infty)$. **16.** 4. **17.** 6 076 000. **18.** $a\in[-\sqrt[3]{3};-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)$. **19.** а) Да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$.

Тренировочная работа №14

1. 145. **2.** 4. **3.** 7,5. **4.** 0,2. **5.** −7. **6.** 0,1. **7.** 0,25. **8.** 12. **9.** 18. **10.** 0,5. **11.** 65. **12.** 12. **13.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$. **14.** $64+32\sqrt{3}$. **15.** $(-\infty;\log_9 4)\cup(\log_9 7;\log_9 8)\cup(\log_9 8;1]$. **16.** $\frac{5\sqrt{13}}{2}$. **17.** 28. **18.** $a=\frac{5}{4}$; $a=1$. **19.** а) Например, 1; 2; 3; 0; 5; −2; 7; −4; ...; 233; −230; 235; б) нет; в) 23.

Тренировочная работа №15

1. 11. **2.** 7. **3.** 8. **4.** 0,52. **5.** 1,8. **6.** 21. **7.** −3. **8.** 2,4. **9.** 12. **10.** 90. **11.** 26. **12.** 10. **13.** а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \operatorname{arctg}\frac{7}{3}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}\frac{7}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$. **14.** 96. **15.** $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup[3;+\infty)$. **16.** 40. **17.** 375 100. **18.** $a\in(-1;5]$. **19.** а) 37; б) 10.

Тренировочная работа №16

1. 15. **2.** 7. **3.** 28. **4.** 0,41. **5.** 9. **6.** 0,9. **7.** 1. **8.** 36. **9.** 2. **10.** 0,17. **11.** 3. **12.** 6. **13.** а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}$. **14.** $12+6\sqrt{3}$. **15.** $[0;\ 7]$. **16.** $\frac{\sqrt{85}}{2}$. **17.** 2 млн рублей. **18.** $a=0$. **19.** а) Да, например, 1; 1; 2; 4; 24; б) да; в) 39.

Тренировочная работа №17

1. 150. **2.** 4. **3.** 3,5. **4.** 0,0625. **5.** 2. **6.** 67. **7.** 5. **8.** 14. **9.** -3. **10.** 320. **11.** 24. **12.** -1. **13.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}$. **14.** $\frac{120}{17}$. **15.** $[0;\ 4]$. **16.** 30°. **17.** 5. **18.** $a=\pm4\sqrt{3}$. **19.** а) 36; б) отрицательных; в) 16.

Тренировочная работа №18

1. 18. **2.** 12. **3.** 22,5. **4.** 0,48. **5.** 10. **6.** 361. **7.** 3. **8.** 8000. **9.** 4. **10.** 7. **11.** 4. **12.** -11. **13.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{6}$. **14.** $\frac{80\sqrt{3}}{3}$. **15.** $[-1;\ 9]$. **16.** $\frac{116}{7}$. **17.** 2,5 млн рублей. **18.** $1<a<2$. **19.** а) Да, например, 1; 1; 2; 4; 7; 14; б) да; в) 82.

Тренировочная работа №19

1. 750. **2.** 18. **3.** 6. **4.** 0,25. **5.** 129. **6.** 17. **7.** 5. **8.** 45. **9.** 2. **10.** 30. **11.** 32. **12.** -63. **13.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\arccos\frac{1}{3};\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ \arccos\frac{1}{3}$. **14.** $\frac{60}{13}$. **15.** $\left(-\frac{5}{2};\ -2\right]\cup(1;\ 2]$. **16.** $9:4$. **17.** 20. **18.** $a\in[-2;\ 1)\cup(1;\ 4]$. **19.** а) 10; б) 20; в) $\frac{7}{90}$.

Тренировочная работа №20

1. 229,5. **2.** 5. **3.** 7,5. **4.** 0,08. **5.** 5. **6.** 144. **7.** -2. **8.** 30. **9.** -3. **10.** 25. **11.** 21. **12.** 6. **13.** а) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-4\pi;\ -\frac{23\pi}{6};\ -3\pi$. **14.** $8+2\sqrt{2}$. **15.** $\left(\frac{9}{5};\ \frac{20}{11}\right]\cup(2;\ +\infty)$. **16.** $3:4$. **17.** 4. **18.** $-5\leqslant a<5\sqrt{2}-10$. **19.** а) Да, например, если $a=10$, $b=60$, $c=18$ и $d=32$; б) нет; в) $\frac{84}{17}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ