7 класс

Задача 7.1. На пробежке.

Экспериментатор Иннокентий Иванов вышел с утра на пробежку. Неспеша пробегая по дорожке в парке, он встретил движущуюся навстречу колонну из 10 бегунов. Учёный заметил, что спортсмены пробегают мимо него с интервалом в 2 с. Через некоторое время эта же самая колонна, где-то развернувшись, стала обгонять Иннокентия. В этот раз все спортсмены пробежали мимо учёного в течение 42 с.
1. Каково было расстояние между соседними бегунами в колонне?
2. С какой скоростью бегал Иннокентий по парку, если считать, что она не менялась?
Пообщавшись со спортсменами, учёный выяснил, что скорость их бега всегда равна 18 км/ч, а расстояние между ними в колонне всегда постоянно.

Ответ: 1) 14 м; 2) 2 м/с.

Решение: Пусть v — скорость Иннокентия, L — расстояние между бегунами, а $u = 18$ км/ч $= 5$ м/с — скорость бега спортсменов. Длина всей колонны, соответственно, равна $9L$. Так как при движении колонны навстречу бегуны пробегают мимо учёного с интервалом 2 с,

$$L = (v + u) \cdot 2 \text{ с}.$$

При второй встрече спортсмены пробежали мимо Иннокентия за 42 с, поэтому

$$9L = (u - v) \cdot 42 \text{ с}.$$

Поделим эти уравнения друг на друга и выразим скорость учёного:

$$9 = \frac{42}{2} \cdot \frac{u - v}{v + u} \quad \Rightarrow \quad 9(v + u) = 21(u - v) \quad \Rightarrow \quad 30v = 12u \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2u}{5} = 2 \text{ м/с}.$$

Расстояние между бегунами в колонне равно

$$L = (v + u) \cdot 2 \text{ с} = 7 \text{ м/с} \cdot 2 \text{ с} = 14 \text{ м}.$$

Критерии:

1) Записана формула $L = (v + u) \cdot 2$ с или её аналог . . . . 2 балла
2) Записана формула $9L = (u - v) \cdot 42$ с или её аналог . . . . 3 балла
3) Найдена скорость Иннокентия v . . . . 3 балла
4) Найдено расстояние между бегунами L . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Если участник записал длину колонны как $10L$ и произвёл верный расчёт v и/или L в этом случае, то за пункт 2 баллы не ставятся, а пункты 3 и 4 оцениваются независимо. Для контроля, при длине в $10L$ должно получаться $v \approx 1{,}8$ м/с и $L \approx 13{,}5$ м.

Задача 7.2. Бабушкин подарок.

Однажды бабушка прислала Карлсону три банки варенья — две больших (одинаковых между собой) и одну маленькую (вдвое меньшего объёма). Пригласив в гости Малыша, Карлсон решил съесть подарок, дав гостю маленькую банку, а себе оставив обе большие. Варенье из своей банки Малыш первую треть времени ел со скоростью 4 ложки в минуту, оставшееся время — со скоростью 2,5 ложки в минуту. С какой скоростью Карлсон поглощал содержимое второй большой банки, если первую банку он съел со скоростью 10 ложек в минуту, а начали и закончили друзья в одно и то же время? Количество варенья в каждой ложке у обоих друзей считать одинаковым.

Ответ: 15 ложек в минуту.

Решение: Пусть V — ёмкость третьей банки (банки Малыша) в ложках, а t — время, в течение которого варенье было съедено. Тогда

$$V = 4\ \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot \frac{t}{3} + 2{,}5\ \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot \frac{2t}{3} = 3\ \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot t.$$

Ёмкость обеих банок Карлсона равна $2V$. Время, за которое он съел содержимое первой, равно

$$t_1 = \frac{2V}{10\ \text{лож/мин}} = \frac{2 \cdot 3\ \text{лож/мин} \cdot t}{10\ \text{лож/мин}} = 0{,}6t.$$

Следовательно, на вторую банку ушло время, равное

$$t_2 = t - t_1 = 0{,}4t.$$

Так как время уменьшилось в 1,5 раза при том же объёме варенья, скорость поедания Карлсоном второй банки равна $1{,}5 \times 10$ лож/мин $= 15$ лож/мин.

Критерии:

1) Записано выражение для объёма, съеденного Малышом, через доли времени (или его аналог) . . . . 3 балла
2) Записано выражение для времени t_1 через V и скорость (либо аналогичное равенство) . . . . 2 балла
3) Найдено время t_1, выраженное через t (либо аналогичное равенство) . . . . 2 балла
4) Найдено время t_2 . . . . 1 балл
5) Найдена скорость поедания второй банки Карлсоном . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Все величины не обязательно могут быть выражены через общее время t (как в авторском решении), его роль в решении учащегося может играть другой параметр. В пунктах 1 и 3 критериев, в этом случае, необходимо заменить t на параметр, использованный учащимся.

Задача 7.3. Угощение для брата.

Пока семиклассника Паши не было дома, его младшая сестра Ариша решила сделать брату сюрприз и слепила из пластилина два пирожных, совершенно **одинаковых по размеру**, но с разными «начинками». В одно из них она положила два стальных, а в другое — три стеклянных шарика. Узнав об этом, Паша взвесил оба пирожных и выяснил, что их массы равны 30 г и 47 г.

1. Чему равна плотность пластилина, который использовала Ариша?
2. Каков объём одного пирожного?

Паша помнил, что размеры всех шариков одинаковы, а масса стального шарика равна 13 г. Плотность стали равна 7800 кг/м^3, плотность стекла — 2400 кг/м^3.

Ответ: 1) 1800 кг/м^3; 2) 15 см^3.

Решение: Два стальных шарика тяжелее, чем три стеклянных того же объёма, поэтому пирожное со стальной «начинкой» имеет массу 47 г, а со стеклянной — 30 г.

Два стальных шарика имеют массу 26 г, следовательно, оставшийся 21 г приходится на пластилин. Запишем выражение для объёма пирожного:

$$V = \frac{26\ \text{г}}{7{,}8\ \text{г/см}^3} + \frac{21\ \text{г}}{\rho_{\text{пл}}}.$$

Масса стеклянного шарика равна

$$m_{\text{стек}} = \frac{13\ \text{г}}{7{,}8\ \text{г/см}^3} \cdot 2{,}4\ \text{г/см}^3 = 4\ \text{г}.$$

Поэтому во втором пирожном масса пластилина составляет 30 г – 3 · 4 г = 18 г. Объём такого пирожного равен

$$V = \frac{12\ \text{г}}{2{,}4\ \text{г/см}^3} + \frac{18\ \text{г}}{\rho_{\text{пл}}}.$$

Приравнивая, получаем

$$\frac{26\ \text{г}}{7{,}8\ \text{г/см}^3} + \frac{21\ \text{г}}{\rho_{\text{пл}}} = \frac{12\ \text{г}}{2{,}4\ \text{г/см}^3} + \frac{18\ \text{г}}{\rho_{\text{пл}}} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{пл}} = 1{,}8\ \text{г/см}^3.$$

Объём пирожного, соответственно, будет равен

$$V = \frac{12\ \text{г}}{2{,}4\ \text{г/см}^3} + \frac{18\ \text{г}}{1{,}8\ \text{г/см}^3} = 15\ \text{см}^3.$$

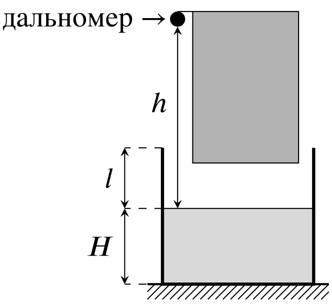
Критерии:

1) Найдена масса стеклянного шарика . . . . 1 балл
2) Найдена масса пластилина в обоих случаях . . . . 2 балла
3) Записано верное уравнение для нахожения $\rho_{\text{пл}}$ (или V) . . . . 3 балла
4) Найдено значение плотности пластилина $\rho_{\text{пл}}$ . . . . 2 балла
5) Найден значение объёма пирожного V . . . . 2 балла

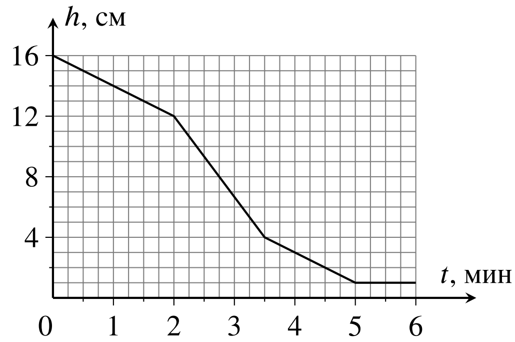
Задача 7.4. Дальномер.

На выходных учёный Лосяш решил поэкспериментировать. Для этого он взял сосуд с вертикальными стенками, налил туда воду и поместил на некотором расстоянии от её поверхности вертикальный цилиндр. На поверхности цилиндра Лосяш закрепил электронный дальномер, который определяет расстояние h до поверхности воды (схема установки изображена на рис. 7.1а). Учёный стал медленно и с постоянной скоростью опускать цилиндр до тех пор, пока тот не упёрся в дно сосуда. Снимая показания дальномера, Лосяш получил график зависимости h от времени (рис. 7.1б). Определите **по графику**:

1. высоту слоя воды H и расстояние l от её поверхности до верхнего края сосуда в начале эксперимента;
2. отношение площади дна сосуда к площади сечения поршня.



а)



б)

Рис. 7.1.

Ответ: 1) $H = 6$ см, $l = 5$ см; 2) 1,6.

Решение: Первый участок графика соответствует движению поршня до контакта с водой. Найдём скорость движения поршня: $v = (16\text{ см} - 12\text{ см})/(2\text{ мин}) = 2$ см/мин. Второй участок соответствует движению поршня в воде, когда уровень вытесняемой воды поднимается вверх. На третьем участке скорость снова равна v, значит здесь уровень воды достиг края сосуда, и вытесняемая жидкость просто выливается наружу. Четвёртый (горизонтальный) участок показывает, что в этом случае поршень дошёл до дна сосуда и остановился.

От момента касания поверхности воды до контакта с дном поршень двигался в течение $5\text{ мин} - 2\text{ мин} = 3$ мин. Поэтому начальная высота слоя воды в сосуде равна $H = v \cdot 3\text{ мин} = 2\text{ см/мин} \cdot 3\text{ мин} = 6$ см. Высота дальномера над нижним краем поршня равна значению h в момент касания воды (при $t = 2$ мин), то есть эта высота составляет 12 см. Когда поршень упёрся в дно сосуда, $h = 1$ см, а уровень воды совпадает с верхним краем сосуда. Следовательно, вся высота сосуда равна $12\text{ см} - 1\text{ см} = 11$ см. Расстояние l от начального положения поверхности жидкости до края сосуда составляет $l = 11\text{ см} - H = 11\text{ см} - 6\text{ см} = 5$ см.

Пусть S_1 — площадь сечения поршня, а S_2 — площадь дна сосуда. Поднятие воды до краёв происходит за $3{,}5\text{ мин} - 2\text{ мин} = 1{,}5$ мин. Опустившийся поршень вытесняет объём $V = S_1 \cdot v \cdot 1{,}5\text{ мин} = 3\text{ см} \cdot S_1$. Он же заполняет пространство вокруг поршня до краёв сосуда, $V = (S_2 - S_1)l = 5\text{ см} \cdot (S_2 - S_1)$. Приравнивая, получаем

$$3\text{ см} \cdot S_1 = 5\text{ см} \cdot (S_2 - S_1) \quad \Rightarrow \quad S_2/S_1 = 8/5 = 1{,}6.$$

Критерии:

1) Найдена скорость опускания поршня . . . . 2 балла
2) Найдена начальная высота воды H . . . . 2 балла
3) Найдена расстояние l . . . . 2 балла
4) Записано верное уравнение, связывающее S_1 и S_2 . . . . 3 балла
5) Найдено отношение площадей . . . . 1 балл

Указание проверяющим: 1) В пункте 4 уравнение также может быть получено, например, путём нахождения скорости сближения жидкости и датчика (по второму участку графика и теоретически). Найденное уравнение, если оно верно, оценивать полным баллом за п.4.

2) В пункте 5 допустимо нахождение учащимся обратного отношения площадей $S_1/S_2 = 5/8$. Балл за это не снимать.

3) Расчёты, основанные на измерениях, проделанных по рис. 7.1а (не по графику), не оценивать!

Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. Марафонцы.

Крош, Ёжик и Бараш соревнуются в беге на длинную дистанцию. Судья Лосяш зафиксировал, что Крош прибежал к финишу в 14:00, Бараш — в 14:20, а Ёжик — в 15:00. Во сколько стартовали Смешарики, если средняя скорость Бараша равнялась 15 км/ч, а Ёжика — 12 км/ч? Какова средняя скорость Кроша? Все герои стартовали одновременно и бежали по одной дороге.

Ответ: в 11:40, $\approx$ 17 км/ч.

Решение: Пусть L — длина дистанции. Тогда Крош её пробежит за время $t_К = L/v_К$, Бараш — за $t_Б = L/(15\text{ км/ч})$, а Ёжик — за $t_Ё = L/(12\text{ км/ч})$. Ёжик прибежал на 2/3 часа позже Бараша, поэтому

$$\frac{2}{3}\text{ ч} = \frac{L}{12\text{ км/ч}} - \frac{L}{15\text{ км/ч}} \quad \Rightarrow \quad L = 40\text{ км}.$$

Это значит, что, например, Бараш бежал в течение

$$t_Б = \frac{40\text{ км}}{15\text{ км/ч}} = \frac{8}{3}\text{ ч} = 2\text{ ч }40\text{ мин}.$$

Следовательно, забег начался в 11:40.

Крош бежал 2 ч 20 мин = 7/3 ч. Его скорость была равна

$$v_К = \frac{40\text{ км}}{7/3\text{ ч}} \approx 17\text{ км/ч}.$$

Критерии:

1) Записано уравнение для нахождения L . . . . 3 балла
2) Найдена длина дистанции L . . . . 1 балл
3) Найдено время старта . . . . 3 балла
4) Найдена скорость Кроша . . . . 3 балла

Задача 8.2. Физика на YouTube.

Пытаясь повторить опыт, увиденный в Интернете, экспериментатор Иннокентий Иванов положил в калориметр некоторое количество снега при температуре −20 ℃ и налил туда же ртуть при +25 ℃. В результате весь снег в калориметре растаял, в нём установилась температура 0 ℃, а объём содержимого калориметра стал в три раза больше, чем первоначальный объём снега. Какова была средняя плотность снега, взятого учёным? Удельная теплоёмкость льда равна 2100 Дж/(кг·℃), ртути — 140 Дж/(кг·℃), удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг, плотность воды — 1000 кг/м^3, плотность ртути — 13600 кг/м^3. В рассматриваемом диапазоне температур ртуть является жидкостью. Тепловыми потерями и теплоёмкостью калориметра пренебречь.

Примечание: Снег состоит из кристалликов льда, между которыми есть воздушные полости.

Ответ: 340 кг/м^3.

Решение: Пусть V — начальный объём снега в калориметре, а $\rho_{\text{сн}}$ — его плотность. Тогда масса снега равна $m = \rho_{\text{сн}}V$. Снег, превратившись в воду, будет иметь объём $V_{\text{в}} = m/\rho_{\text{в}} = \rho_{\text{сн}}/\rho_{\text{в}} \cdot V$, поэтому объём ртути, налитой в калориметр, будет равен

$$V_{\text{рт}} = 3V - V_{\text{в}} = \left(3 - \frac{\rho_{\text{сн}}}{\rho_{\text{в}}}\right) \cdot V.$$

Запишем уравнение теплового баланса

$$c_{\text{л}}m(0\,℃ - (-20\,℃)) + \lambda m = c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}}V_{\text{рт}}(25\,℃ - 0\,℃) \quad \Rightarrow \quad (c_{\text{л}} \cdot 20\,℃ + \lambda)\rho_{\text{сн}}V = c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}}\left(3 - \frac{\rho_{\text{сн}}}{\rho_{\text{в}}}\right) \cdot V \cdot 25\,℃ \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (c_{\text{л}} \cdot 20\,℃ + \lambda)\rho_{\text{сн}} = c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}}\left(3 - \frac{\rho_{\text{сн}}}{\rho_{\text{в}}}\right) \cdot 25\,℃$$

и выразим отсюда плотность снега

$$\rho_{\text{сн}} = \frac{3c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}} \cdot 25\,℃}{c_{\text{л}} \cdot 20\,℃ + \lambda + c_{\text{рт}} \cdot 25\,℃ \cdot \rho_{\text{рт}}/\rho_{\text{в}}} \approx 340 \text{ кг/м}^3.$$

Критерии:

1) Записано верное уравнение теплового баланса . . . . 2 балла
2) Найден объём ртути, налитой в калориметр . . . . 3 балла
3) Получено верное выражение для плотности снега через данные из условия задачи . . . . 3 балла
4) Найдено числовое значение плотности снега . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Пункт 1 оценивается полным баллом, даже если масса ртути не расписана как произведение плотности на объём.

Задача 8.3. Стержень в стене.

Однородный прямой стержень длиной 1 м вставлен на глубину 20 см в горизонтальное отверстие вертикальной стены толщиной 10 см (рис. 8.1). Если к правому концу стержня подвесить груз 2 кг, стержень будет давить на правый край отверстия (точку A) с силой 280 Н.

1. Чему равна масса стержня?
2. С какой силой стержень будет давить в точке A, если груз перевесить на левый конец стержня (с противоположной стороны стены)?

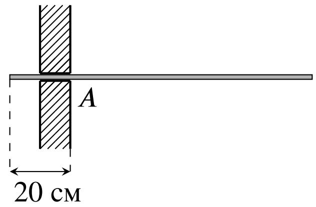


Рис. 8.1.

Отверстие считать гладким и имеющим высоту, чуть превышающую толщину стержня. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: 1) 2,5 кг; 2) 80 Н.

Решение: 1. Пусть M — масса стержня, а m — масса груза. Рассмотрим первый случай, когда груз висит на правой конце стержня. Стержень взаимодействует со стеной в двух точках: в точке A, где на него действует сила N_1, направленная вверх, и в точке B, где на него действует сила N_2, направленная вниз. Изобразим остальные силы (рис. 8.2а)— силу тяжести Mg, приложенную в центр (точку C), и вес груза (в точке D). Запишем правило моментов относительно точки B:

$$N_1 \cdot AB = Mg \cdot BC + mg \cdot BD.$$

Подставляя $AB = 10$ см, $BC = 40$ см, $BD = 90$ см и $N_1 = 280$ Н, получаем

$$N_1 \cdot 10\text{ см} = Mg \cdot 40\text{ см} + mg \cdot 90\text{ см} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{N_1}{4g} - \frac{9m}{4} = \frac{280\text{ Н}}{4 \cdot 10\text{ Н/кг}} - \frac{9 \cdot 2\text{ кг}}{4} = 2{,}5\text{ кг}.$$

2. Во втором случае груз висит на левом конце стержня (точка E), а силы взаимодействия со стенкой меняются на N_1' и N_2' соответственно (рис. 8.2б). Запишем снова правило моментов относительно точки B и найдём N_1':

$$N_1' \cdot AB + mg \cdot BE = Mg \cdot BC \quad \Rightarrow \quad N_1' = \frac{Mg \cdot BC - mg \cdot BE}{AB} = \frac{25\text{ Н} \cdot 40\text{ см} - 20\text{ Н} \cdot 10\text{ см}}{10\text{ см}} = 80\text{ Н}.$$

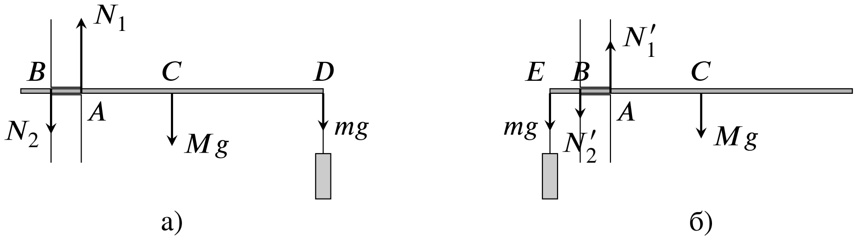


Рис. 8.2.

Критерии:

1) Корректно изображены силы, действующие на стержень в первом случае . . . . 1 балл
2) Записано правило моментов в первом случае относительно точки B . . . . 3 балла
3) Найдена масса стержня . . . . 1 балл
4) Корректно изображены силы, действующие на стержень во втором случае . . . . 1 балл
5) Записано правило моментов во втором случае относительно точки B . . . . 3 балла
6) Найдена сила N_1' . . . . 1 балл

Указание проверяющим: Если учащийся пишет правило моментов относительно какой-либо другой точки (не B), то для каждого случая (пункты 2 и 5) верно записанное правило моментов оценивается в 2 балла, а верно записанное условие равенства равнодействующей сил нулю (или второе правило моментов) — 1 баллом.

Задача 8.4. Пара ареометров.

В двух мерных сосудах находятся одинаковые объёмы различных жидкостей: воды и какой-то неизвестной жидкости X. Мальчик Паша решил измерить плотность второй жидкости с помощью ареометра. К сожалению, оказалось, что все ареометры, имевшиеся в школьной лаборатории, разного размера, и у всех них стёрта шкала. Паша не растерялся, взял два прибора, погрузил один из них в воду, второй в жидкость X (рис. 8.3а), а потом поменял их местами (рис. 8.3б). Используя рисунки, определите массы обоих ареометров и плотность жидкости X. Плотность воды равна 1000 кг/м^3. Для удобства первый и второй ареометры помечены на рисунках, соответственно, цифрами 1 и 2.

Примечание: Ареометр — прибор для измерения плотности жидкости.

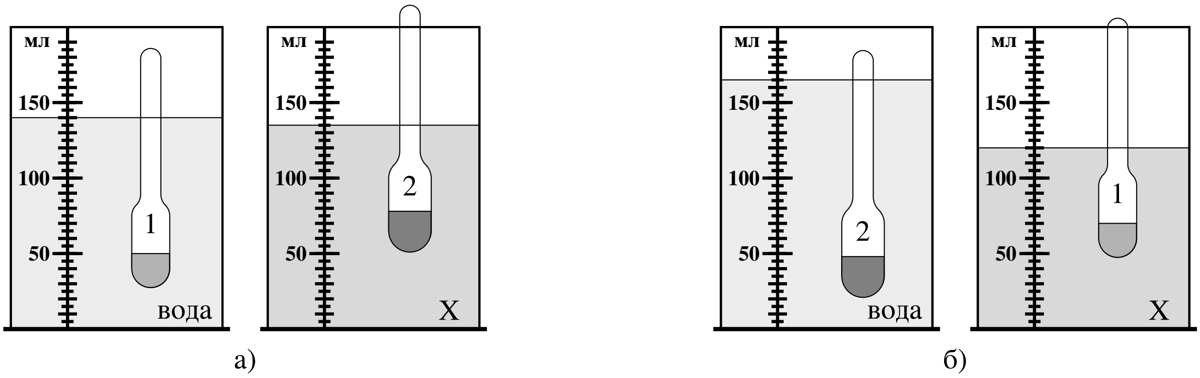


Рис. 8.3.

Ответ: $m_1 = 50$ г, $m_1 = 75$ г, $\rho_X = 1{,}67$ г/см^3.

Решение: Пусть m_1 — масса первого ареометра, m_2 — масса второго, а V_0 — начальный объём жидкостей. Из условия плавания следует, что объём погруженной в жидкость части ареометра равен отношению массы прибора к плотности жидкости. Отсюда, используя рисунки, получим, что

$$\text{(а)} \qquad 140\ \text{см}^3 = V_0 + \frac{m_1}{\rho_\text{в}}, \quad 135\ \text{см}^3 = V_0 + \frac{m_2}{\rho_X},$$

$$\text{(б)} \qquad 165\ \text{см}^3 = V_0 + \frac{m_2}{\rho_\text{в}}, \quad 120\ \text{см}^3 = V_0 + \frac{m_1}{\rho_X}. \qquad (8.4.1)$$

Вычитаем друг из друга левые и правые уравнения:

$$25\ \text{см}^3 = \frac{m_2 - m_1}{\rho_\text{в}}, \qquad 15\ \text{см}^3 = \frac{m_2 - m_1}{\rho_X}.$$

Отсюда находим, что $m_2 - m_1 = \rho_\text{в} \cdot 25\ \text{см}^3 = 25$ г и

$$\frac{\rho_X}{\rho_\text{в}} = \frac{25\ \text{см}^3}{15\ \text{см}^3} \approx 1{,}67 \quad \Rightarrow \quad \rho_X = 1{,}67\ \text{г/см}^3.$$

Вычитаем теперь друг из друга левое верхнее и правое нижнее уравнения:

$$20\ \text{см}^3 = m_1\left(\frac{1}{\rho_\text{в}} - \frac{1}{\rho_X}\right) \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{20\ \text{см}^3}{\frac{1}{1\ \text{г/см}^3} - \frac{1}{1{,}67\ \text{г/см}^3}} = 50\ \text{г}.$$

Соответственно, $m_2 = 75$ г.

Критерии:

1) Записаны соотношения (8.4.1) или их аналоги . . по 1 баллу за каждое соотношение (максимум — 4 балла)
2) Найдены массы ареометров . . . . 3 балла
3) Найдена плотность неизвестной жидкости . . . . 3 балла

Указание проверяющим: Если верно найдена масса только одного прибора, за пункт 2 ставить 1 балл из трёх.

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Челночный бег.

Школьники Паша и Миша сдавали на физкультуре норматив по челночному бегу — каждому из них нужно было как можно быстрее пробежать определённую короткую дистанцию в прямом и обратном направлении в общей сложности 10 раз (5 раз туда и 5 раз обратно). Паша умеет разгоняться с ускорением a и тормозить с ускорением $3a$ (по модулю). Миша — спортсмен, он разгоняется с ускорением $2a$ и тормозит с ускорением $5a$. За какое время Паша выполнит упражнение, если Миша его выполняет за 28 с?

Ответ: $\approx 38{,}6$ с.

Решение: Пусть L — длина одного отрезка дистанции (всего надо пробежать десять таких отрезков). Вначале Паша разгоняется с ускорением a в течение времени t_1, а затем тормозит с ускорением $3a$ в течение времени t_2. Максимальная скорость Паши равна $v = at_1$, поэтому

$$0 - v = -3at_2 \quad \Rightarrow \quad at_1 = 3at_2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3t_2.$$

С другой стороны,

$$L = \frac{at_1^2}{2} + vt_2 - \frac{3at_2^2}{2} = \frac{at_1^2}{2} + \frac{3at_2^2}{2} = 6at_2^2.$$

Отсюда получаем, что время, которое потратит Паша на выполнение всего упражнения, равно

$$T_{\text{П}} = 10(t_1 + t_2) = 40t_2 = 40\sqrt{\frac{L}{6a}}.$$

Проделаем аналогичные вычисления для случая Миши:

$$2at_1' = 5at_2' \quad \Rightarrow \quad t_1' = 2{,}5t_2'.$$

$$T_{\text{М}} = 28\text{ с} \quad \Rightarrow \quad 10(t_1' + t_2') = 35t_2' = 28\text{ с} \quad \Rightarrow \quad t_2' = 0{,}8\text{ с}.$$

$$L = \frac{2a(t_1')^2}{2} + \frac{5a(t_2')^2}{2} = \frac{35a(t_2')^2}{4} = 5{,}6\text{ с}^2 \cdot a.$$

Подставляя полученную формулу для L, находим, что

$$T_{\text{П}} = 40\sqrt{\frac{5{,}6\text{ с}^2 \cdot a}{6a}} = 40\text{ с} \cdot \sqrt{\frac{5{,}6}{6}} \approx 38{,}6\text{ с}.$$

Критерии:

1) Найдено, что $t_1 = 3t_2$, или аналогичное этому соотношение (случай Паши) . . . . 1 балл
2) Записано, что $T_{\text{П}} = 10(t_1 + t_2)$, или аналог этого . . . . 1 балл
3) Найдена связь между L, a и t_1 (или t_2, или $T_{\text{П}}$) в случае Паши . . . . 2 балла
4) Найдено, что $t_1' = 2{,}5t_2$, или аналогичное этому соотношение (случай Миши) . . . . 1 балл
5) Найдено значение t_1' и/или t_2' . . . . 1 балл
6) Найдена связь между L, a и t_1' (случай Миши) . . . . 2 балла
7) Найдено значение для $T_{\text{П}}$ . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Учащийся может сразу связать L, a и $T_{\text{М}}$ для случая Миши. Любой корректный вариант оценивается полным баллом за пункты 5 и 6.

Задача 9.2. Хитрый план.
Мальчик Паша решил измерить плотность неизвестной жидкости с помощью ареометра. Однако у мальчика этой жидкости было мало, поэтому он налил в цилиндрический сосуд воды, сверху долил слой исследуемой жидкости и поместил туда прибор. Ареометр показал значение 0,93 г/см^3 (см. рис. 9.1). Удивившись, Паша повторил опыт, заменив слой неизвестной жидкости на слой керосина той же высоты. В этом случае прибор показал 0,95 г/см^3. Помогите Паше и определите плотность неизвестной жидкости. Плотность керосина равна 800 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3. Площадь сечения измерительной части прибора считать постоянной.
Примечание: Ареометр — прибор для измерения плотности жидкости, в верхней, узкой части которого находится шкала. Плотность, показываемая прибором, определяется как отношение массы ареометра к объёму **всей** его погруженной части.

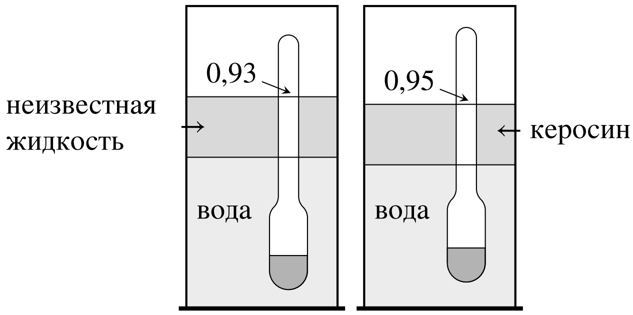


Рис. 9.1.

Ответ: 0,714 г/см^3.

Решение: Пусть m — масса ареометра, ρ_X — плотность неиззвестной жидкости, а V — объём узкой части прибора, погруженный в верхнюю жидкость. В первом случае объём всей погруженной части равен $V_1 = m/(0{,}93\ \text{г/см}^3)$, а во втором — $V_2 = m/(0{,}95\ \text{г/см}^3)$. Запишем условия плавания ареометра в каждом случае:

$$mg = \rho_X gV + \rho_\text{в} g\left(\frac{m}{0{,}93\ \text{г/см}^3} - V\right) \quad \Rightarrow \quad m\left(\frac{1}{0{,}93} - 1\right) = (1\ \text{г/см}^3 - \rho_X)V \qquad \text{(сверху неизвестная жидкость)},$$

$$mg = \rho_\text{к} gV + \rho_\text{в} g\left(\frac{m}{0{,}95\ \text{г/см}^3} - V\right) \quad \Rightarrow \quad m\left(\frac{1}{0{,}95} - 1\right) = (1\ \text{г/см}^3 - 0{,}8\ \text{г/см}^3)V \qquad \text{(сверху керосин)}.$$

Поделим эти полученные уравнения друг на друга:

$$\frac{1\ \text{г/см}^3 - \rho_X}{0{,}2\ \text{г/см}^3} = \frac{1/0{,}93 - 1}{1/0{,}95 - 1} \quad \Rightarrow \quad \rho_X = 1\ \text{г/см}^3 - \frac{7 \cdot 0{,}95}{5 \cdot 0{,}93} \cdot 0{,}2\ \text{г/см}^3 \approx 0{,}714\ \text{г/см}^3.$$

Критерии:

1) Записано выражение для объёма погружённой части в обоих случаях . . . . 2 балла
2) Записано условие плавания ареометра в первом случае . . . . 2 балла
3) Записано условие плавания ареометра во втором случае . . . . 2 балла
4) Записано уравнение для нахождения ρ_X . . . . 2 балла
5) Найдено значение плотности неизвестной жидкости . . . . 2 балла

Указания проверяющим: 1) Если оба выражения для объёма погруженной части написаны сразу внутри условия плавания, то пункт 1 оценивается полным баллом.
2) Уравнение в пункте 4 должно содержать только известные величины и/или числовые значения.

Задача 9.3. Ох уж это электричество!

Готовясь к экспериментальному туру олимпиады по физике, девочка Карина собрала цепь, состоящую из двух разных вольтметров, двух резисторов и идеального источника постоянного напряжения (рис. 9.2а). Уже списав показания приборов ($U_1 = 0{,}9$ В, $U_2 = 1{,}8$ В), девочка поняла, что допустила ошибку и пересобрала цепь (рис. 9.2б). В этом случае первый вольтметр показал $U_1' = 5$ В, а второй — $U_2' = 4$ В. Чему равно сопротивление R_2, если $R_1 = 3$ кОм?

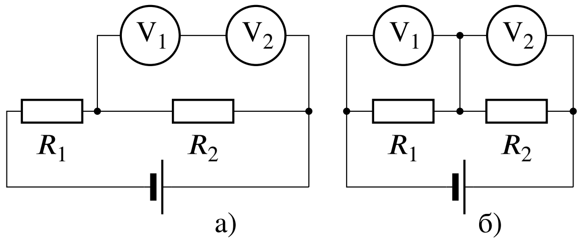


Рис. 9.2.

Ответ: 1,5 кОм.

Решение: Из показаний вольтметров в первом эксперименте следует, что сопротивление второго вдвое больше сопротивления первого: $R_{V1} = r$, $R_{V2} = 2r$. Показания приборов во втором эксперименте говорят, что напряжение на источнике равно $U_1' + U_2' = 9$ В.

Рассмотрим первую цепь. Напряжение на резисторе R_1 там равно 9 В − 2,7 В = 6,3 В. Сила тока, текущего чего него, равна суммарной силе тока, текущей через вольтметры и R_2:

$$\frac{6{,}3\text{ В}}{R_1} = 2{,}7\text{ В}\cdot\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{3r}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{7}{R_1} = \frac{3}{R_2} + \frac{1}{r}. \tag{9.3.1}$$

Теперь запишем условие равенства суммарных токов через пары вольтметр-резистор во второй цепи:

$$5\text{ В}\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r}\right) = 4\text{ В}\cdot\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{2r}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{5}{R_1} + \frac{5}{r} = \frac{4}{R_2} + \frac{2}{r} \quad\Rightarrow\quad \frac{5}{R_1} + \frac{3}{r} = \frac{4}{R_2}. \tag{9.3.2}$$

Исключая из полученных уравнений сопротивление вольтметра r, получим

$$\frac{5}{R_1} + 3\cdot\left(\frac{7}{R_1} - \frac{3}{R_2}\right) = \frac{4}{R_2} \quad\Rightarrow\quad \frac{26}{R_1} = \frac{13}{R_2} \quad\Rightarrow\quad R_2 = \frac{R_1}{2} = 1{,}5\text{ кОм}.$$

Критерии:

1) Найдено соотношение между сопротивлениями вольтметров . . . . 1 балл
2) Найдено напряжение источника . . . . 1 балл
3) Записано условие равенство токов для первой цепи (9.3.1) или его аналог . . . . 3 балла
4) Записано условие равенство токов для второй цепи (9.3.2) или его аналог . . . . 3 балла
5) Найдено значение R_2 . . . . 2 балла

Задача 9.4. Больше и меньше.

Девочка Маша взяла из морозилки кусок льда при $-30\,℃$, положила его на дно калориметра и, чтобы лёд не всплывал, накрыла сверху тонкой сеткой. Затем она налила в калориметр 120 г воды при $+15\,℃$. После установления теплового равновесия оказалось, что уровень воды понизился. Девочка повторила свой опыт, взяв такой же по массе кусок льда и налив то же самое количество воды, но уже при температуре $+5\,℃$. Когда снова установилось равновесие, Маша обнаружила, что на этот раз уровень воды повысился. Каковы стали конечные массы льда в обоих опытах, если изменение уровня воды (по величине) в них было одинаковым, а установившаяся температура оба раза была $0\,℃$. Стенки калориметра считать вертикальными, вода в эксперименте полностью покрывает лёд. Тепловыми потерями, теплоёмкостью калориметра и сетки пренебречь. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг·℃), льда — 2100 Дж/(кг·℃), удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг.

Ответ: 72,4 г и 87,6 г.

Решение: Уровень воды изменяется из-за того, часть льда превращается в воду (или, наоборот, вода превращается в лёд). Изменение объёма связано с изменение плотности и зависит от массы вещества, испытывающего переход ($\Delta V = m/\rho_л - m/\rho_в$). Поэтому, так как уровень в обоих экспериментах меняется на одну и ту же величину, масса растаявшего льда в первом случае и масса замёрзшей воды во втором равны между собой.

Пусть эта масса равна m, а начальная масса льда — M. Запишем уравнение теплового баланса для обоих случаев:

$$c_л M \cdot 30\,℃ + \lambda m = c_в \cdot 0{,}12\text{ кг} \cdot 15\,℃ \qquad \text{(первый опыт)},$$

$$c_л M \cdot 30\,℃ = c_в \cdot 0{,}12\text{ кг} \cdot 5\,℃ + \lambda m \qquad \text{(второй опыт)}.$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$2c_л M \cdot 30\,℃ = c_в \cdot 0{,}12\text{ кг} \cdot 20\,℃ \quad \Rightarrow \quad M = \frac{c_в \cdot 0{,}12\text{ кг} \cdot 20\,℃}{2c_л \cdot 30\,℃} = \frac{4200\text{ Дж/(кг·℃)} \cdot 0{,}12\text{ кг} \cdot 20\,℃}{2 \cdot 2100\text{ Дж/(кг·℃)} \cdot 30\,℃} = 0{,}08\text{ кг}.$$

Найдём теперь массу m:

$$m = \frac{c_в \cdot 0{,}12\text{ кг} \cdot 15\,℃ - c_л M \cdot 30\,℃}{\lambda} = \frac{4200\text{ Дж/(кг·℃)} \cdot 0{,}12\text{ кг} \cdot 15\,℃ - 2100\text{ Дж/(кг·℃)} \cdot 0{,}08\text{ кг} \cdot 30\,℃}{330000\text{ Дж/кг}} \approx$$

$$\approx 0{,}0076\text{ кг} = 7{,}6\text{ г}.$$

В результате, в первом опыте масса льда уменьшается на 7,6 г и становится равной 72,4 г, а во втором увеличивается до 87,6 г.

Критерии:

1) Корректно обосновано, что масса растаяшего льда в случае 1 и замёрзшей воды в случае 2 равны . . 3 балла
2) Записано первое уравнение теплового баланса . . . . 2 балла
3) Записано второе уравнение теплового баланса . . . . 2 балла
4) Найдена начальная масса льда . . . . 1 балл
5) Найдено изменение массы льда m . . . . 1 балл
6) Дан правильный ответ . . . . 1 балл

Указание проверяющим: В случае некорректного или отсутствующего объяснения равенства масс остальные пункты оцениваются независимо.

Задача 9.5. Разные механизмы.
С помощью системы, состоящей из трёх одинаковых блоков (рис. 9.3а), поднимают груз массой $M = 120$ кг, прикладывая к свободному концу верёвки силу, равную $F_1 = 440$ Н. Какую минимальную силу F_2 нужно прикладывать для подъёма того же груза в системе, состоящей из четырёх таких же блоков (рис. 9.3б)? Верёвки считать невесомыми и нерастяжимыми. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

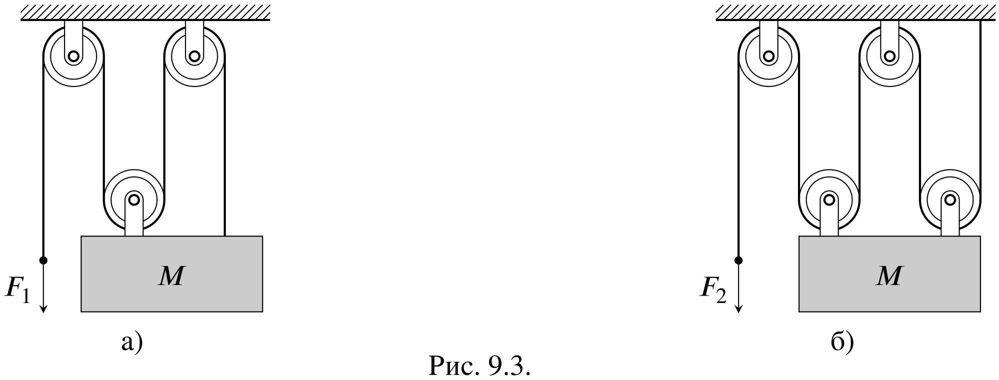


Рис. 9.3.

Ответ: 360 Н.

Решение: Так как верёвка, перекинутая через блоки, невесома, то её сила натяжения одинакова по всей длине и равна по величине силе, с которой её тянут за свободный конец (рис. 9.4). Пусть m — масса блока, тогда

$$3F_1 = mg + Mg, \qquad 4F_2 = 2mg + Mg.$$

Из первого уравнения находим массу блока: $m = 3F_1/g - M = 132\text{ кг} - 120\text{ кг} = 12$ кг. Тогда из второго уравнения получим, что $F_2 = (2mg + Mg)/4 = (240\text{ Н} + 1200\text{ Н})/4 = 360$ Н.

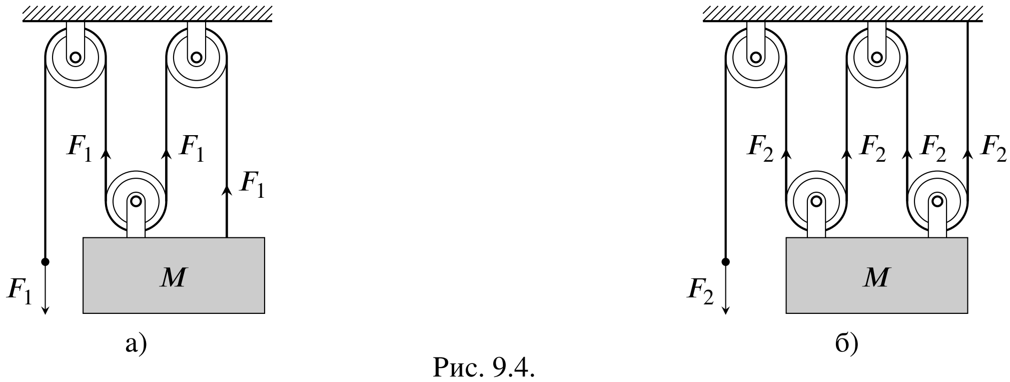


Рис. 9.4.

Критерии:

1) Найден «выигрыш в силе», который даёт механизм в первом случае . . . . 2 балла
2) Найден «выигрыш в силе», который даёт механизм во втором случае . . . . 2 балла
3) Записана формула $3F_1 = mg + Mg$ или её аналог . . . . 2 балла
4) Записана формула $4F_2 = 2mg + Mg$ или её аналог . . . . 2 балла
5) Найдено значение F_2 . . . . 2 балла

Указания проверяющим: Обоснование величины выигрыша в силе (в первом случае — в три раза, во втором — в четыре) может быть сделано просто в виде рисунка/-ов (см. рис. 9.4). В этом случае баллы за пункты 1 и/или 2 выставляются. Ученик также может использовать **альтернативный** способ обоснования — через «золотое правило механики» (метод виртуальных перемещений).

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Шайбы на столе.

На горизонтальном столе находятся две маленькие шайбы с массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, связанные между собой невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый горизонтальный блок. Блок тянут с силой F (на рис. 10.1 изображён вид сверху). Определите ускорение блока в двух случаях: 1) $F = 10$ Н и 2) $F = 16$ Н. Коэффициент трения между шайбами и столом равен $\mu = 0{,}3$. Отрезки нити, соединяющие шайбы и блок, горизонтальны, параллельны друг другу и направлению силы F. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

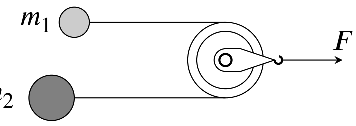


Рис. 10.1.

Ответ: 1) 1 м/с^2; 2) 3 м/с^2.

Решение: 1. Так как блок и нить невесомы, то сила натяжения нити, тянущая каждую шайбу, равна $F/2$. Максимальная сила трения между первой шайбой и столом равна $F_{\text{тр}1} = \mu m_1 g = 3$ Н, между второй шайбой и столом — $F_{\text{тр}2} = \mu m_2 g = 6$ Н.

Найдём связь между ускорениями шайб a_1 и a_2 и ускорением блока $a_{\text{бл}}$. Для этого перейдём в систему отсчёта блока. В ней шайбы должны двигаться с равными по величине, но противоположными по направлению ускорениями:

$$a_1 - a_{\text{бл}} = a_{\text{бл}} - a_2.$$

Отсюда получаем, что $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$.

2. В первом случае $F/2 = 5$ Н, что больше, чем $F_{\text{тр}1}$, но меньше, чем $F_{\text{тр}2}$. Это значит, что вторая шайба не сможет сдвинуться! Найдём ускорение первой шайбы:

$$m_1 a_1 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}1} = 2\ \text{Н} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2\ \text{м/с}^2.$$

Следовательно, в первом случаем $a_{\text{бл}} = a_1/2 = 1$ м/с^2.

3. Во втором случае $F/2 = 8$ Н, что превышает и $F_{\text{тр}1}$, и $F_{\text{тр}2}$. Найдём ускорения обоих грузов:

$$m_1 a_1 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}1} = 5\ \text{Н} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 5\ \text{м/с}^2,$$

$$m_2 a_2 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}2} = 2\ \text{Н} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1\ \text{м/с}^2.$$

Поэтому, во втором случае $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2 = 3$ м/с^2.

Критерии:

1) Указано, что сила натяжения нити равна $F/2$ . . . . 1 балл
2) Обосновано, что в первом случае шайба m_2 не движется . . . . 2 балла
3) Найдено ускорение шайбы m_1 в первом случае . . . . 1 балл
4) Найдено ускорение блока в первом случае . . . . 1 балл
5) Найдены ускорения шайб во втором случае . . . . по 1 баллу за каждое (в сумме 2 балла)
6) Обосновано, что $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$ . . . . 2 балла
7) Найдено ускорение блока во втором случае . . . . 1 балл

Указания проверяющим: 1) В пункте 1 достаточно любого указания на то, что сила натяжения равна $F/2$.
2) Если нет обоснования формулы $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$, за пункт 6 баллы не ставить, а остальные пункты оценивать независимо.
3) Обоснование может быть произведено отличным от авторского способом, например, с помощью сравнения перемещений шайб и блока.

Задача 10.2. Дерево снизу.

Длинную тонкостенную трубку радиусом $r = 0{,}5$ см, закрытую снизу однородной круглой пластиной из дерева, аккуратно погружают в воду на глубину $h = 4$ см (рис. 10.2). Толщина пластины равна $d = 1$ см, её радиус $R = 3$ см. В трубку сверху аккуратно наливают керосин. При какой минимальной высоте керосина H пластина оторвётся от трубки? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность дерева $\rho_д = 600$ кг/м^3, плотность керосина $\rho_к = 800$ кг/м^3. Вода между трубкой и пластиной не проникает, жидкости в дерево не впитываются. Центр пластины лежит на оси трубки.

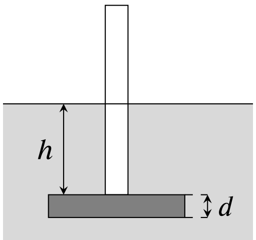


Рис. 10.2.

Ответ: 23 см.

Решение: На деревянную пластину действуют направленные вниз сила давления воды сверху, сила давления керосина и сила тяжести и направленная вверх сила давления воды снизу. Запишем условие равновесия пластины:

$$\rho_к g H \cdot \pi r^2 + \rho_в g h \cdot (\pi R^2 - \pi r^2) + mg = \rho_в g (h + d) \cdot \pi R^2.$$

Масса пластины равна $m = \rho_д d \cdot \pi R^2$. Подставляя её в условие равновесия и сокращая общие множители, получаем

$$\rho_к H r^2 + \rho_в h \cdot (R^2 - r^2) + \rho_д d R^2 = \rho_в (h + d) R^2 \quad \Rightarrow \quad \rho_к H r^2 = (\rho_в - \rho_д) d R^2 + \rho_в h r^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{(\rho_в - \rho_д) d R^2 + \rho_в h r^2}{\rho_к r^2} = \frac{0{,}4\ \text{г/см}^3 \cdot 1\ \text{см} \cdot (3\ \text{см})^2 + 1\ \text{г/см}^3 \cdot 4\ \text{см} \cdot (0{,}5\ \text{см})^2}{0{,}8\ \text{г/см}^3 \cdot (0{,}5\ \text{см})^2} = 23\ \text{см}.$$

Критерии:

1) Записана формула для массы пластины $m = \rho_д d \cdot \pi R^2$ . . . . 1 балл
2) Записана формула для силы давления воды сверху $\rho_в g h \cdot (\pi R^2 - \pi r^2)$ . . . . 2 балла
3) Записана формула для силы давления воды снизу $\rho_в g (h + d) \cdot \pi R^2$ . . . . 2 балла
4) Записана формула для силы давления керосина $\rho_к g H \cdot \pi r^2$ . . . . 2 балла
5) Записано условие равновесия пластины . . . . 1 балл
6) Найдена высота слоя керосина H . . . . 2 балла

Указания проверяющим: Формулы из пунктов 1-4 могут быть сразу записаны в условие равновесия пластины. Если формулы приведены верно, соответствующие пункты оценивать полным баллом.

Задача 10.3. Новогодние эксперименты.

Экспериментатор Иннокентий Иванов решил подготовиться к Новому году и сделать праздничную гирлянду. Он взял источник постоянного напряжения, резистор сопротивлением R и большой набор одинаковых ламп, чьи сопротивления r не зависят от протекающего через них тока. Испытания показали, что при использовании в гирлянде только одной лампы, на ней выделяется мощность, равная 60 Вт. Если же использовать две лампы, то на них (в сумме) будет выделяться 97,2 Вт.

1. Чему равно отношение R/r?

2. Сколько ламп должно быть в гирлянде, чтобы их суммарная мощность снова была равна 60 Вт?

В гирлянде источник, резистор и лампы соединяются между собой последовательно. Источник считать идеальным.

Ответ: 1) $R/r = 8$; 2) 64.

Решение: Пусть U — напряжение на источнике. Если в гирлянде использовано N ламп, ток текущий в цепи равен $I = U/(R + Nr)$. Суммарная мощность, выделяющаяся на лампах, составляет

$$P_N = I^2 \cdot Nr = \frac{U^2 Nr}{(R + Nr)^2}.$$

По условию $P_1 = 60$ Вт, $P_2 = 97{,}2$ Вт, следовательно

$$\begin{cases} U^2 r/(R + r)^2 = 60 \text{ Вт}, \\ 2U^2 r/(R + 2r)^2 = 97{,}2 \text{ Вт} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{2(R + r)^2}{(R + 2r)^2} = \frac{97{,}2}{60} \quad \Rightarrow \quad \frac{R + r}{R + 2r} = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad R = 8r.$$

Если $P_N = P_1$, то

$$\frac{U^2 Nr}{(R + Nr)^2} = \frac{U^2 r}{(R + r)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{U^2 Nr}{(8r + Nr)^2} = \frac{U^2 r}{(9r)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{(8 + N)^2} = \frac{1}{81} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 81N = (N + 8)^2 \quad \Rightarrow \quad N^2 - 65N + 64 = 0.$$

Решение этого уравнения, отличное от $N = 1$, есть $N = 64$.

Критерии:

1) Записано выражение для мощности одной лампы $U^2 r/(R + r)^2$ . . . . 1 балл
2) Записано выражение для мощности двух ламп $2U^2 r/(R + 2r)^2$ . . . . 1 балл
3) Найдено отношение R/r . . . . 3 балла
4) Записано уравнение $NU^2 r/(R + Nr)^2 = U^2 r/(R + r)^2$ . . . . 2 балла
5) Записано уравнение $N^2 - 65N + 64 = 0$ или аналог . . . . 2 балла
6) Найдено значение $N = 64$ . . . . 1 балл

Задача 10.4. В отрыв.
Тонкий однородный деревянный стержень, нижний конец которого упирается в дно сосуда, удерживается в положении, изображённом на рис. 10.3, с помощью вертикальной нити, привязанной к его верхнему концу. В сосуд медленно наливают воду. При какой толщине слоя воды h нижний конец стержня оторвётся ото дна? Точка крепления нити к стержню находится на высоте H относительно дна сосуда. Плотность дерева, из которого сделан стержень, равна 640 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3.

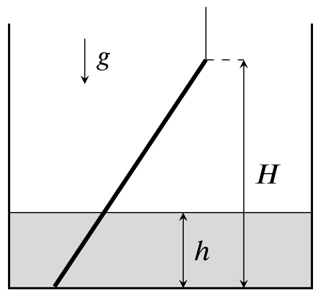


Рис. 10.3.

Ответ: $h = 2H/5$.

Решение: На стержень действуют (в общем случае) 4 силы: сила тяжести mg, где m — масса стержня, приложенная к его середине; сила Архимеда, приложенная с середине погруженной части; сила натяжения нити T и сила реакции со стороны дна N. Когда нижний конец стержня отрывается ото дна, $N = 0$. Запишем правило моментов относительно точки подвеса стержня (точки O):

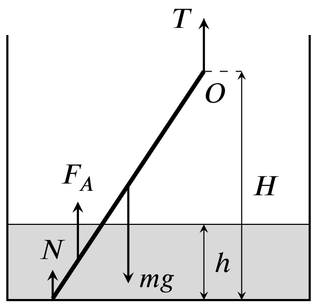


Рис. 10.4.

$$mg \cdot \frac{H}{2} \operatorname{tg}\alpha = F_A \left(H - \frac{h}{2}\right) \operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол между стержнем и вертикалью. Запишем выражения для массы стержня и силы Архимеда (S — площадь поперечного сечения):

$$m = \frac{\rho_д S H}{\cos\alpha}, \quad F_A = \frac{\rho_в g S h}{\cos\alpha}$$

и подставим их в правило моментов

$$\frac{\rho_д g S H^2}{2\cos\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho_в g S h}{\cos\alpha} \cdot \left(H - \frac{h}{2}\right) \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \rho_д H^2 = \rho_в h(2H - h) \quad \Rightarrow \quad 0{,}64H^2 = h(2H - h).$$

Решая полученное уравнение, находим h

$$h^2 - 2hH + 0{,}64H^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0{,}4H \text{ или } h = 1{,}6H.$$

Выбираем корень, который меньше H, и получаем $h = 0{,}4H$.

Критерии:
1) Корректно изображены силы, действующие на стержень . . . . 1 балл
2) Записано выражение для массы стержня . . . . 1 балл
3) Записано выражение силы Архимеда . . . . 1 балл
4) Записано правило моментов относительно точки O . . . . 3 балла
5) Записано уравнение $h^2 - 2hH + 0{,}64H^2 = 0$ или аналог . . . . 2 балла
6) Найдена высота h . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Если учащийся пишет правило моментов относительно какой-либо другой точки (не O), то для пункта 4 верно записанное правило моментов оценивается в 2 балла, а верно записанное условие равенства равнодействующей сил нулю (или второе правило моментов) — 1 баллом.

Задача 10.5. Тень от камня.

От основания вертикального фонаря высотой $H = 9{,}8$ м бросили камень со скоростью $v_0 = 12$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту (рис. 10.5). На какое максимальное расстояние от фонаря сместится тень камня во время его полёта, если других источников света в округе нет. Фонарь считать точечным источником, поверхность земли горизонтальной, а сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

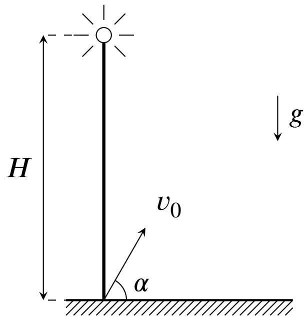


Рис. 10.5.

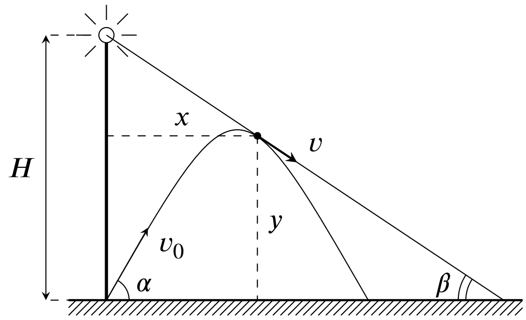


Рис. 10.6.

Ответ: 16,3 м.

Решение: Пусть L — искомое максимальное смещение тени. Тень от фонаря смещается на максимальное расстояние, когда соответствующий луч, идущий от фонаря, будет идти по касательной к траектории камня (см. рис. 10.6). Пусть t — время от момента броска, за которое камень оказался в точке касания. Тогда

$$x = v_0 t\cos\alpha, \qquad y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

$$v_x = v_0\cos\alpha, \qquad v_y = v_0\sin\alpha - gt.$$

Вектор скорости камня всегда направлен по касательной к траектории, следовательно он направлен вдоль луча, изображённого на рис. 10.6. Посчитаем тангенс угла наклона β этого луча к горизонту двумя способами:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H-y}{x} = \frac{|v_y|}{v_x} \quad\Rightarrow\quad \frac{H - v_0 t\sin\alpha + gt^2/2}{v_0 t\cos\alpha} = \frac{gt - v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad H = \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда получаем, что $t = \sqrt{2H/g} = 1{,}4$ с. Тангенс β, соответственно, равен

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{gt - v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha} \approx \frac{14 - 10{,}4}{6} \approx 0{,}6.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{L} \quad\Rightarrow\quad L = \frac{H}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{9{,}8\ \text{м}}{0{,}6} \approx 16{,}3\ \text{м}.$$

Критерии:

1) Записаны законы движения камня $x(t)$ и $y(t)$ . . . . 0,5 балла
2) Записаны законы скорости камня $v_x(t)$ и $v_y(t)$ . . . . 0,5 балла
3) Указано, что максимальное смещение тени происходит при касании луча и траектории . . . . 2 балла
4) Записано уравнение $(H-y)/x = |v_y|/v_x$ или его аналог . . . . 3 балла
5) Найдено время в точке касания . . . . 2 балла
6) Найдено максимальное смещение камня L . . . . 2 балла

Указание проверяющим: 1) В пункте 4 должно быть приведено верное соотношение, связывающее скорость камня и координаты в точке касания луча и траектории.
2) В пункте 5 достаточно привести формулу для t, нахождение числового значения не является обязательным.

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Половина на половину.

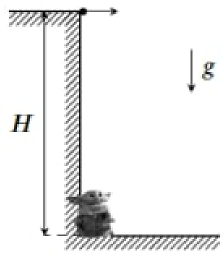


Рис. 11.1.

С вертикальной стены высотой H бросили в горизонтальном направлении камень (рис. 11.1). Наблюдатель, стоящий у подножия стены точно под точкой бросания, заметил, что камень приближался к нему в течение ровно половины времени своего полёта. Определите начальную скорость камня υ, его дальность полёта L и угол α, под которым камень упадёт на землю. Поверхность земли горизонтальна. Размерами наблюдателя и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\upsilon = \sqrt{3gH/4}$, $L = H\sqrt{3/2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{8/3} \approx 58{,}5°$.

Решение: *Способ №1.* Поместим начало координат в месте нахождения наблюдателя и запишем зависимость координат камня от времени

$$x(t) = \upsilon t, \qquad y(t) = H - gt^2/2.$$

Расстояние r от камня до наблюдателя находим с помощью теоремы Пифагора:

$$r^2 = x^2 + y^2 = \upsilon^2 t^2 + \left(H - gt^2/2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = H^2 + (\upsilon^2 - gH)t^2 + g^2t^4/4.$$

Найдём точку максимума расстояния $t_m \neq 0$:

$$(r^2)' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t_m(\upsilon^2 - gH) + g^2t_m^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_m^2 = 2(gH - \upsilon^2)/g^2.$$

С другой стороны, по условию $t_m = 1/2 \cdot t_{\text{полёта}} = 1/2 \cdot \sqrt{2H/g}$. Отсюда

$$\frac{2(gH - \upsilon^2)}{g^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2H}{g} \quad \Rightarrow \quad 4(gH - \upsilon^2) = gH \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\frac{3gH}{4}}.$$

Дальность полёта равна

$$L = \upsilon t_{\text{полёта}} = \sqrt{3gH/4} \cdot \sqrt{2H/g} = H\sqrt{3/2}.$$

Угол с горизонтом, под которым упадёт камень — угол между вектором скорости и поверхностью земли:

$$\operatorname{tg}\alpha = gt_{\text{полёта}}/\upsilon = \sqrt{8/3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 58{,}5°.$$

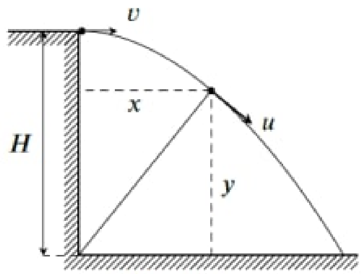


Рис. 11.2.

Способ №2. Поместим начало координат в месте нахождения наблюдателя. Вектор скорости камня u в точке максимального удаления перпендикулярен радиус-вектору этой точки (рис. 11.2). Время, за которое камень попадёт в эту точку, равно половине времени полёта $t_m = \frac{1}{2}t_{\text{полёта}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Так как вектор скорости перпендикулярен радиус-вектору, то

$$\frac{y}{x} = \frac{u_x}{|u_y|} \quad \Rightarrow \quad \frac{H - gt_m^2/2}{\upsilon t_m} = \frac{\upsilon}{gt_m} \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = g\left(H - \frac{gt_m^2}{2}\right) = \frac{3gH}{4} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\frac{3gH}{4}}.$$

Нахождение L и α аналогично Способу №1.

Критерии (для способа №1):

1) Записан закон изменения расстояния от наблюдателя $r(t)$ . . . . . 2 балла
2) Записана формула для t_m . . . . . 1 балл
3) Найдена точка максимума $r(t)$ . . . . . 2 балла
4) Найдена начальная скорость υ . . . . . 2 балла
5) Найдено выражение для L . . . . . 2 балла
6) Найдено значение α . . . . . 1 балл

Критерии (для способа №2):

1) Указано, что в точке максимального удаления радиус-вектор перпендикулярен скорости . . . . . 1 балл
2) Записана формула для t_m . . . . . 1 балл
3) Записано условие $y/x = u_x/|u_y|$ или аналог . . . . . 3 балла
4) Найдена начальная скорость υ . . . . . 2 балла
5) Найдено выражение для L . . . . . 2 балла
6) Найдено значение α . . . . . 1 балл

Указание проверяющим: В пункте 6 ответ в виде $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{8/3}$ (или аналогичный) засчитывать как верный и оценивать полным баллом.

Задача 11.2. Цепь с конденсатором.

Определите установившийся заряд конденсатора в цепи, изображённой на рис. 11.3, если $\mathscr{E}_1 = 1$ В, $\mathscr{E}_2 = 3$ В, $\mathscr{E}_3 = 8$ В, $r_1 = 6$ Ом, $r_2 = 4$ Ом, $C = 3300$ мкФ. Внутренним сопротивлением батареек пренебречь.

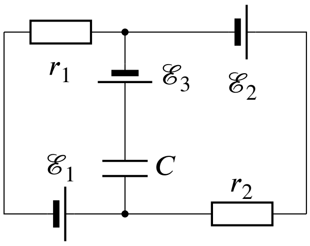


Рис. 11.3.

Ответ: 0,019 Кл.

Решение: В установившемся режиме ток в цепи конденсатора не течёт. Пусть I — ток, текущий во внешнем контуре (направление — по часовой стрелке). Тогда

$$I(r_1 + r_2) = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{r_1 + r_2} = \frac{2\ \text{В}}{10\ \text{Ом}} = 0{,}2\ \text{А}.$$

Запишем 2ое правило Кирхгофа для, например, левого контура (направление обхода — по часовой стрелке):

$$U_C + Ir_1 = \mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_1$$

и найдём напряжение на конденсаторе

$$U_C = \mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_1 - Ir_1 = 8\ \text{В} - 1\ \text{В} - 0{,}2\ \text{А} \cdot 6\ \text{Ом} = 5{,}8\ \text{В}.$$

Заряд на этом конденсаторе равен

$$q = CU_C = 3{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{Ф} \cdot 5{,}8\ \text{В} \approx 0{,}019\ \text{Кл}.$$

Критерии:

1) Найден ток во внешнем контуре . . . . 4 балла
2) Найдено напряжение на конденсаторе . . . . 4 балла
3) Вычислен заряд на конденсаторе . . . . 2 балла

Указания проверяющим: 1) Напряжение на конденсаторе (и, как следствие, заряд) могут быть приведены с противоположным знаком. На выставляемый балл это не влияет.
2) Приводить числовые значения в пунктах 1 и 2 необязательно, достаточно верных формул.

Задача 11.3. Стержень на опоре.

Тонкий однородный стержень длиной $L = 60$ см лежит на вертикальной опоре высотой $h = 30$ см, своим левым концом упираясь в горизонтальную поверхность стола (рис. 11.4). При каком наименьшем коэффициенте трения μ между стержнем и столом стержень будет находиться в равновесии, если точка его касания с поверхностью стола расположена на расстоянии $s = 40$ см от опоры? Трения между опорой и стержнем нет, толщиной опоры пренебречь.

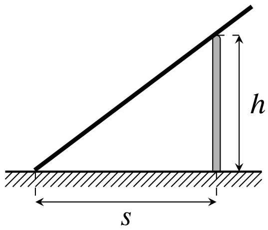


Рис. 11.4.

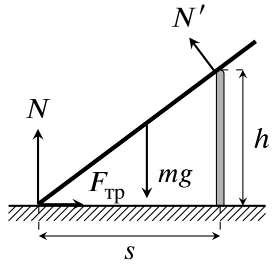


Рис. 11.5.

Ответ: $\mu = 36/77 \approx 0{,}47$.

Решение: Пусть m — масса стержня, а α — угол между стержнем и поверхностью стола. Из данных в условии задачи находим, что $\sin\alpha = 3/5$ и $\cos\alpha = 4/5$. Изобразим силы, действующие на стержень (рис. 11.5) и запишем условия равенства равнодействующей всех сил нулю:

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = N' \sin\alpha, \\ N + N' \cos\alpha = mg \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{\text{тр}} = 3N'/5, \\ N + 4N'/5 = mg \end{cases}$$

и правило моментов относительно точки упора стержня в стол

$$N' \sqrt{s^2 + h^2} = mg \cdot \frac{L\cos\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad N' \cdot 50 \text{ см} = mg \cdot 24 \text{ см} \quad \Rightarrow \quad N' = \frac{12mg}{25}.$$

Выразим силу трения и силу реакции N через mg:

$$N + \frac{4}{5} \cdot \frac{12mg}{25} = mg \quad \Rightarrow \quad N = \frac{77mg}{125},$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{12mg}{25} = \frac{36mg}{125}.$$

Если коэффициент трения минимален, то $F_{\text{тр}} = \mu N$. Отсюда находим, что

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{36}{77} \approx 0{,}47.$$

Критерии:

1) Корректно изображены силы, действующие на стержень . . . . 1 балл
2) Записана формула $F_{\text{тр}} = \mu N$ . . . . 1 балл
3) Записано условие равенства сил в проекции на 2 оси . . . . 4 балла (по 2 балла за проекцию)
4) Записано правило моментов . . . . 2 балла
5) Найдено значение μ . . . . 2 балла

Указания проверяющим: 1) Сила трения может быть сразу записана как $F_{\text{тр}} = \mu N$ в уравнениях из пунктов 3 и 4. В этом случае балл за пункт 2 выставляется.
2) Ответ зачитывать как в виде десятичной дроби, так и в виде обыкновенной.
3) Учащийся может в пункте 3 вместо одного или обоих равенств записать правило моментов относительно одной (или двух) точек, отличных от взятой в пункте 4. В этом случае каждое корректное и **независимое** уравнение оценивается 2 баллами (но не более 4 баллов за пункт).

Задача 11.4. Блок с пружинами.

В системе, изображённой на рис. 11.6, обе пружины горизонтальны, своим левым концом прикреплены к стене, а их правые концы соединены нитью, перекинутой через невесомый блок. Жёсткость одной пружины равна k, другой — $2k$, и в начальный момент они не деформированы. Какую работу A нужно совершить, чтобы медленно переместить блок вправо на расстояние x? Пружины считать невесомыми, а нить — невесомой и нерастяжимой. Трение между нитью и блоком отсутствует.

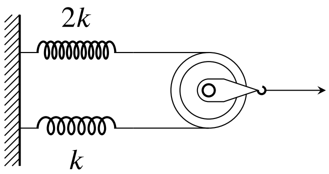


Рис. 11.6.

Ответ: $A = 4kx^2/3$.

Решение: Пусть при перемещении оси блока на x длина верхней пружины увеличивается на x_1, а нижней — на x_2. Так как пружины связаны между собой невесомой нитью, силы их натяжения равны:

$$2kx_1 = kx_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1.$$

Из-за движения блока суммарная длина пружин увеличивается на $2x$:

$$x_1 + x_2 = 2x \quad \Rightarrow \quad 3x_1 = 2x \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2x}{3},\ x_2 = \frac{4x}{3}.$$

Работа по перемещению блока на x равна изменению потенциальной энергии пружин:

$$A = \frac{2kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{4kx^2}{9} + \frac{8kx^2}{9} = \frac{4kx^2}{3}.$$

Критерии:

1) Получена связь между удлинениями пружин . . . . 2 балла
2) Записано соотношение $x_1 + x_2 = 2x$ или его аналог . . . . 3 балла
3) Найдены удлинения обеих пружин $x_1 = 2x/3$, $x_2 = 4x/3$ . . . . 2 балла
4) Записана формула для работы через x_1 и x_2 . . . . 1 балл
5) Найдено выражение для работы $A = 4kx^2/3$ . . . . 2 балла

Задача 11.5. Утечка в сосуде.

Герметичный сосуд состоит из двух горизонтальных цилиндрических частей разного сечения, перекрытых двумя поршнями, соединёнными между собой жёстким стержнем. Начальное положение поршней и размеры показаны на рис. 11.7. Между торцами сосуда и ближайшими поршнями находится азот, причём давление газа слева в 1,2 раза выше, чем справа. Снаружи сосуда и между поршнями — вакуум. В некоторый момент в левом торце сосуда появилась микротрещина, и газ стал медленно выходить наружу. Когда из левой части сосуда вышло 4/9 находившегося там азота, поршни начали смещаться. Насколько они сместятся, если оттуда выйдет ещё такое же количество газа? Длина стержня больше L. Считать, что температура азота в обеих частях сосуда одинакова и остаётся постоянной в течение всего процесса. Трение между поршнями и стенками сосуда отсутствует.

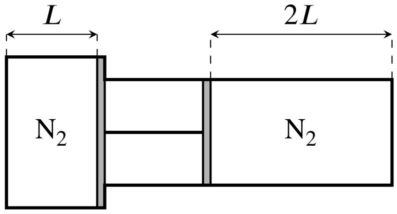


Рис. 11.7.

Ответ: $8L/11$.

Решение: Пусть p_0 — давление азота в правой части сосуда. Тогда $6p_0/5$ — давление в левой части. Когда оттуда выйдет 4/9 от первоначального количества газа ν, давление азота в левой части упадёт до

$$p_1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{6p_0}{5} = \frac{2p_0}{3}.$$

Поршни начнут смещаться тогда, когда **сила** давления газа на левый поршень сравняется с силой давления газа на правый. Если S_1 и S_2 — площади левого и правого поршней, то

$$p_1 S_1 = p_0 S_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2p_0 S_1}{3} = p_0 S_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}.$$

Когда из левой части выйдет ещё $4\nu/9$ газа, поршень сдвинется влево на расстояние x. Обозначим p_1' и p_2' новые давления в левой и правой частях сосуда. Запишем закон Менделеева-Клапейрона для обеих частей:

$$\begin{cases} p_1' S_1 (L - x) = \frac{1}{9}\nu RT, \\ \frac{6}{5} p_0 S_1 L = \nu RT \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p_1'(L - x) = \frac{2}{15} p_0 L \qquad \text{(левая часть)},$$

$$p_2'(2L + x) = p_0 \cdot 2L \qquad \text{(правая часть)}.$$

Так как $p_1' S_1 = p_2' S_2$, то $p_2' = 3p_1'/2$. Отсюда

$$\begin{cases} p_1'(L - x) = \frac{2}{15} p_0 L, \\ \frac{3}{2} p_1'(2L + x) = p_0 \cdot 2L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p_1'(L - x) = \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{2} p_1'(2L + x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 10(L - x) = 2L + x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8L}{11}.$$

Критерии:

1) Найдено давление в левом сосуде после первой утечки . . . . 1 балл
2) Найдено отношение площадей поршней . . . . 2 балла
3) Записан закон Бойля-Мариотта для правого сосуда (после второй утечки) . . . . 2 балла
4) Получено уравнение $p_1'(L - x) = 2/15 \cdot p_0 L$ или его аналог . . . . 3 балла
5) Найдено смещение поршня x . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 11 классе 50