

**Материалы для проведения II (муниципального)  
этапа  
XLVII Всероссийской олимпиады школьников по  
математике в Московской области.**

**28 ноября 2020 года**

**Долгопрудный 2020**

Сборник содержит материалы для проведения II (муниципального) этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задание подготовили к.ф.-м.н. Н.Х. Агаханов и к.ф.-м.н. О.К. Подлипский (Московский физико-технический институт).

Авторы задач – Н.Х. Агаханов и О.К. Подлипский.

Задача 10.5 предложена А.Д. Терёшиным.

Рецензенты: к.ф.-м.н. И.И. Богданов, к.ф.-м.н. Б.В. Трушин.

Муниципальный этап олимпиады проводится для учащихся **6-11 классов**.

Олимпиада проводится в единые сроки – **28 ноября 2020 года**.

Время выполнения работы: 6 класс – 3 часа, 7-11 класс – 4 часа.

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, при проверке работ оценивается:

- правильное решение в 7 баллов;
- решение с недочетами – в 5-6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – в 4 балла;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – в 2-3 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – в 1 балл.

Максимальное число баллов – 35.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

Внимание! Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равнобедренный, а решение начинается со слов «Пусть треугольник  $ABC$  – равнобедренный...»).

Текст любой длины, не содержащий существенных продвижений, оценивается в 0 баллов. Если задача сведена к более сложной, то ставится 0 баллов.

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

- 1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);
- 2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4-5 баллов, второй шаг – в 2-3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 6 и 7 классов, не умеют четко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 6-7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

Также не следует снимать баллы за несущественные пометки, описки.

Если в задаче используется теорема из школьной программы, но она явно не названа (например, если написано, какие стороны и углы треугольников равны, но не указан номер признака равенства, или написаны равенства из теоремы Виета, но теорема не названа), то баллы не снимать.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Желаем успешной работы!

**Условия, решения, комментарии**  
**6 класс**

**6.1.** Найдите самое большое шестизначное число, все цифры которого различны, и каждая из цифр, кроме крайних, равна либо сумме, либо разности соседних с ней цифр.

**Ответ.** 972538.

**Решение.** Пусть  $A$  – искомое число. Попробуем найти число  $A$  с первой цифрой 9. Переберем варианты второй цифры. Если вторая цифра – 8. Тогда получаем:  $A = 98176$  – не получается шестизначное число. Если вторая цифра – 7. Тогда получаем:  $A = 972538$  – шестизначное.

**Комментарий.** Просто правильный ответ, а попытки подбора максимального числа отсутствуют – 4 балла.

Любой неверный ответ – 0 баллов.

**6.2.** Два велосипедиста собрались доехать из пункта  $A$  в пункт  $B$ . Скорость первого из них равна 35 км/ч, второго – 25 км/ч. Известно, что каждый из них ехал только тогда, когда другой отдыхал (стоял на месте), а всего за 2 часа они проехали одинаковое расстояние. Могли ли они доехать за 2 часа до пункта  $B$ , расположенного на расстоянии 30 км от пункта  $A$ ?

**Ответ.** Не могли.

**Решение.** Будем считать, что велосипедисты одновременно не отдыхали. Раз они проехали одинаковое расстояние, а отношение их скоростей равно 7:5, то время движения первого велосипедиста – 5 частей, второго – 7 частей времени. Всего они ехали 2 часа = 120 минут. Значит, одна часть времени – 10 минут. Следовательно, второй ехал 70 минут = 1 час 10 минут. За час он проехал 25 км, за 10 минут –  $1/6$  от 25 км, что меньше  $1/6$  от 30 км, то есть меньше 5 км. Всего он проехал меньше 30 км.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

**6.3.** Найдите все решения ребуса:  $TUK + TUK + TUK + TUK + TUK = CTUK$ . Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры.

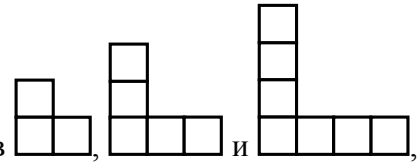
**Ответ.** Два решения ( $250 + \dots + 250 = 1250$  и  $750 + \dots + 750 = 3750$ ).


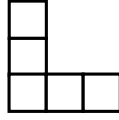
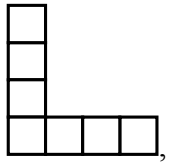
**Решение.** Вычтем из обеих частей равенства  $TUK$ . Получим:  $TUK + TUK + TUK + TUK = C000$ . То есть  $4 \cdot TUK = C \cdot 1000$ . Разделив на 4, получаем:  $TUK = C \cdot 250$ . Число  $TUK$  – трехзначное, поэтому  $C < 4$ . Проверка показывает, что цифры  $C = 1$ , тогда  $TUK = 250$  и  $C = 3$ , тогда  $TUK = 750$  подходят, а цифра  $C = 2$ , не подходит – тогда  $TUK = 500$  – имеет одинаковые цифры.

**Комментарий.** Просто правильный ответ – 3 балла;

Один из двух правильных ответов – 1 балл.

Присутствует догадка вычитания из обеих частей числа  $TUK$  – 2 балла.



**6.4.** Коля разрезал квадрат  $120 \times 120$  на уголки видов ,  и , а Вася разрезал такой же квадрат на уголки тех же видов, но другим способом. Мог ли Вася получить на 11 уголков больше, чем Коля? (Уголки можно поворачивать.)

**Ответ.** Не мог.

**Решение.** Заметим, что каждый уголок состоит из нечетного числа клеток. Поэтому при разрезании квадрата должно использоваться четное число уголков. Но разность двух четных чисел не может равняться 11.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

**6.5.** В замке 16 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат  $4 \times 4$ . В эти комнаты по одному человеку поселилось 16 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 16 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди этих 16 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**Ответ.** 8 лжецов.

**Решение.** Заметим, что в соседних комнатах не могут жить лжецы (иначе они говорили бы правду). Разобьем комнаты на 8 пар соседних. Тогда в каждой паре может жить не более одного лжеца. Поэтому всего лжецов не более 8. Рассмотрим шахматную раскраску комнат в черный и белый цвета. Если поселить 8 лжецов в «черные» комнаты, а 8 рыцарей в «белые», то условие задачи будет выполняться (все лжецы будут лгать, а все рыцари будут говорить правду).

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Пример расселения 8 лжецов и 8 рыцарей – 2 балла.

Доказано, что лжецов не более 8 – 5 баллов.

## 7 класс

**7.1.** Пальмовое масло подорожало на 10%. Из-за этого сыр одного из производителей подорожал на 3%. Какой процент пальмового масла в сыре этого производителя?

**Ответ.** 30%.

**Решение.** Будем считать, что сыр стоил 100 условных рублей за килограмм. Тогда он подорожал на 3 рубля. Так как это произошло из-за подорожания пальмового масла, то 3 рубля – это 10% от стоимости пальмового масла в сыре, то есть стоимость пальмового масла в килограмме сыра составляет 30 рублей. Значит, пальмовое масло составляет 30%.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

**7.2.** Три велосипедиста выезжают из города. Скорость первого из них равна 12 км/ч, второго – 16 км/ч, третьего – 24 км/ч. Известно, что первый из них ехал ровно тогда, когда второй и третий отдыхали (стояли на месте), и что ни в какой момент времени одновременно два велосипедиста не ехали. Также известно, что за 3 часа все трое проехали одинаковое расстояние. Найдите это расстояние.

**Ответ.** 16 км

**Решение.** Из условия следует, что каждый из велосипедистов ехал в то время, когда двое других стояли, и, кроме того, в каждый момент времени кто-то из велосипедистов ехал (первый ехал, когда второй и третий стояли). Раз они проехали одинаковое расстояние, а отношение их скоростей равно 3:4:6, то время движения первого велосипедиста – 24 части, второго – 18 частей, третьего – 12 частей времени. Всего они ехали 3 часа = 180 минут. Значит, одна часть времени – 10/3 минуты. Следовательно, первый ехал 80 минут, то есть 4/3 часа. За это время он проехал 16 км.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

**7.3.** Число  $B$  получается из числа  $A$  по следующему правилу: одновременно изменяются все цифры числа  $A$ . При этом если цифра больше 2, то из нее можно вычесть 2, а если цифра меньше 8, то к ней можно прибавить 2 (например, цифра 4 может быть заменена на 2, либо на 6, а цифра 9 должна быть заменена только на 7). Может ли сумма чисел  $A$  и  $B$  равняться 2345678?

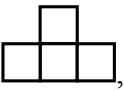

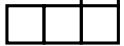
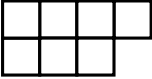
**Ответ.** Не может.

**Первое решение.** Заметим, что числа  $A$  и  $B$  могут состоять только из 6 или 7 цифр. Сумма чисел  $A$  и  $B$  равна сумме чисел  $C$  и  $D$ , где у числа  $C$  на каждой позиции записана меньшая из соответствующих цифр чисел  $A$  и  $B$ , а у числа  $D$  – большая из цифр. Таким образом,  $D = C + 22\dots 22$ , где количество  $N$  двоек равно количеству цифр числа  $C$ . По условию  $A + B = 2345678$ , то есть  $2C + 22\dots 22 = 2345678$ . Если  $N = 6$ , то 
$$C = \frac{2345678 - 222222}{2} = 1061728$$
 – семизначное число – противоречие. Если же  $N = 7$ , то 
$$C = \frac{2345678 - 2222222}{2} = 61728$$
 – пятизначное число – снова противоречие.

**Второе решение.** Если числа  $A$  и  $B$  состоят не более чем из 6 цифр, то их сумма меньше 2000000. Если же числа  $A$  и  $B$  состоят не менее чем из 7 цифр, то их сумма больше 3000000.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Разобран только один из случаев (6 или 7 цифр) – не более 3 баллов за задачу.

7.4. Коля разрезал квадрат  $120 \times 120$  на фигурки видов , ,  и , а Вася разрезал такой же квадрат на фигурки тех же видов, но другим способом. Мог ли Вася получить на 5 фигурок больше, чем Коля? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)

**Ответ.** Не мог.

**Решение.** Заметим, что разность количества клеток у любых двух фигурок делится на 3. Рассмотрим Васино разрезание квадрата и оставим в нем столько же фигурок, сколько использовал Коля. Тогда на оставшиеся 5 фигурок приходится клетки, количество которых делится на 3 (так как Васины и Колины фигурки сейчас можно разбить на пары, а в каждой паре разность количества клеток будет делиться на 3). Однако суммарное количество клеток в 5 фигурках не делится на 3.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

7.5. 16 путешественников, каждый из которых лжец или рыцарь (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду), поселились в 3 комнатах гостиницы. Когда все собрались в своих номерах, Василий, проживающий в первом номере, сказал: «В этом номере сейчас находится больше лжецов, чем рыцарей. Хотя нет – в этом номере сейчас находится больше рыцарей, чем лжецов». После чего Василий зашел во второй номер и сказал там те же два утверждения. А после этого он зашел в третий номер и там тоже сказал те же два утверждения. Какое количество рыцарей могло быть среди этих 16 путешественников?

**Ответ.** 9 рыцарей.

**Решение.** Поскольку утверждения Василия противоречат друг другу, то Василий – лжец. Значит, оба утверждения Василия (про каждую комнату) – ложь, и в каждой комнате (когда он там был) лжецов и рыцарей было поровну. Значит, в каждой комнате без Василия рыцарей на 1 больше чем лжецов. Поэтому среди 15 оставшихся путешественников рыцарей на 3 больше чем лжецов, то есть среди них 9 рыцарей и 6 лжецов.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Показано, что Василий – лжец – 1 балл.

Доказано, что в каждой комнате без Василия рыцарей на 1 больше чем лжецов – 4 балла.

## 8 класс

**8.1.** Если в произведении двух натуральных чисел один сомножитель увеличить на 2, а другой уменьшить на 2, то произведение чисел не изменится. Докажите, что если к этому произведению прибавить 1, то получится квадрат целого числа.

**Решение.** Обозначим данные натуральные числа  $x$  и  $y$ . Тогда  $xy = (x+2)(y-2)$ . Откуда  $y = x+2$ . Тогда  $xy+1 = x(x+2)+1 = (x+1)^2$ .

**Комментарий.** Доказано, что разность натуральных чисел равна 2 – 2 балла.

**8.2.** На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 3 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 2 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

**Ответ.** 3.

**Решение.** Заметим, что на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек, не может быть 4 синих точек. Действительно, в этом случае между крайними синими точками будет 2 синих, а, значит, еще хотя бы 2 красные. Поэтому на таком отрезке не более 3 синих точек.

Покажем, что 3 синие точки могут лежать на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек. Пусть точки расположены на прямой в следующем порядке: 2 красных – 3 синих – 2 красных – 3 синих – 2 красных. Тогда все условия выполняются, и есть отрезок с 3 синими точками.

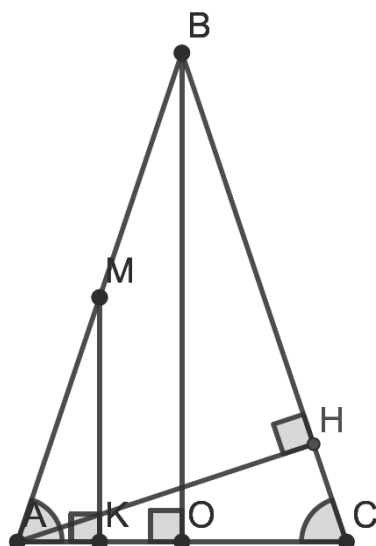
**Комментарий.** Доказано, что синих точек между соседними красными не больше 3 – 4 балла.

Приведен верный пример с 3 синими точками – 3 балла.

**8.3.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = BC$ ) проведена высота  $AH$ , а из середины  $M$  стороны  $AB$  опущен перпендикуляр  $MK$  на сторону  $AC$ . Оказалось, что  $AH = MK$ . Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если  $AK = a$ .

**Ответ.**  $20a$ .

**Решение.** Треугольник  $ABC$  – равнобедренный, значит,  $\angle MAK = \angle ACH$ . Тогда треугольники  $MAK$  и  $ACH$  равны (прямоугольные с равными катетами  $MK = AH$  и равными противолежащими острыми углами). Значит,  $AC = AM = \frac{1}{2}AB$ . Проведем высоту  $BO$  треугольника  $ABC$ . По теореме Фалеса  $AK : KO = AM : MB$ , значит  $AO = 2AK = 2a$ . Тогда  $AC = 2AO = 4a$ ,  $AB = 2AC = 8a$ . Значит, периметр равен  $8a + 8a + 4a = 20a$ .



**Комментарий.** Доказано равенство треугольников  $MAK$  и  $ACH$  – 2 балла.

**8.4.** В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат  $5 \times 5$ . В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**Ответ.** 13 лжецов.

**Решение.** Заметим, что в соседних комнатах не могут жить лжецы (иначе они говорили бы правду). Выделим одну угловую комнату, а оставшиеся комнаты разобьем на 12 пар соседних. Тогда в каждой паре комнат может жить не более одного лжеца. Поэтому всего лжецов не более  $12 + 1 = 13$ . Рассмотрим шахматную раскраску комнат в черный и белый цвета (угловые комнаты черные). Если поселить 13 лжецов в «черные» комнаты, а 12 рыцарей в «белые», то условие задачи будет выполняться (все лжецы будут лгать, а все рыцари будут говорить правду).

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Пример расселения 13 лжецов и 12 рыцарей – 2 балла.

Только утверждение про то, что лжецы не могут жить в соседних комнатах – 1 балл.

Доказано, что лжецов не более 13 – 5 баллов.

**8.5.** Есть 90 карточек – 10 с цифрой 1, 10 с цифрой 2, ..., 10 с цифрой 9. Из всех этих карточек составили два числа, одно из которых в три раза больше другого. Докажите, что одно из этих чисел можно разложить на четыре не обязательно различных натуральных множителя, больших единицы.

**Решение.** Обозначим эти числа  $A$  и  $B = 3A$ . Тогда сумма цифр числа  $B$  делится на 3. Но сумма цифр на всех карточках делится на 9 (а, значит, и на 3), поэтому сумма цифр числа  $A$  делится на 3. Значит, число  $A$  делится на 3. Но тогда число  $B = 3A$  делится на 9 и сумма его цифр делится на 9. А так как сумма цифр на всех карточках делится на 9, то тогда и сумма цифр числа  $A$  делится на 9. Значит, число  $A$  делится на 9. Поэтому число



$B = 3A$  делится на 27. Итак, число  $B$  делится на 27 и больше 27, поэтому оно раскладывается на 4 множителя 3, 3, 3 и  $\frac{B}{27} > 1$ .

**Комментарий.** Доказано, что большее из чисел делится на 9 – 3 балла.

## 9 класс

**9.1.** Дано выражение  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , где  $x$  и  $y$  – натуральные числа. Если число  $x$  увеличить на 2, а число  $y$  уменьшить на 2, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что  $xy + 1$  – квадрат целого числа.

**Решение.** По условию  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y-2}$ , откуда  $\frac{x+y}{xy} = \frac{x+y}{(x+2)(y-2)}$ . Так как  $x+y$  положительно, то  $xy = (x+2)(y-2)$ . Откуда  $y = x+2$ . Тогда  $xy + 1 = x(x+2) + 1 = (x+1)^2$ .

**Комментарий.** Доказано, что  $y = x + 2$  – 2 балла.

**9.2.** На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 4 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 3 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

**Ответ.** 4.

**Решение.** Заметим, что на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек, не может быть 5 синих точек. Действительно, в этом случае между крайними синими точками будет 3 синих, а, значит, еще хотя бы 2 красные. Поэтому на таком отрезке не более 4 синих точек.

Покажем, что 4 синие точки могут лежать на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек. Пусть точки расположены на прямой в следующем порядке: 2 красных – 4 синих – 2 красных – 4 синих – 2 красных. Тогда все условия выполняются, и есть отрезок с 4 синими точками.

**Комментарий.** Доказано, что синих точек между соседними красными не больше 4 – 4 балла.

Приведен верный пример с 4 синими точками – 3 балла.

**9.3.** Числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют неравенствам  $x^3 > y^2$  и  $y^3 > x^2$ . Докажите, что  $y > 1$ .

**Решение.** Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа  $x$  и  $y$  положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на положительное число  $(xy)^2$ , получим:  $xy > 1$ . Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел  $x$  и  $y$  больше 1. Если  $y > 1$ , то утверждение доказано. Пусть  $x > 1$ . Тогда из неравенства  $y^3 > x^2$  следует, что  $y^3 > 1$ , то есть  $y > 1$ .

**Комментарий.** Доказано, что  $xy > 1$  – 2 балла.

Доказано, что одно из чисел  $x$  и  $y$  больше 1 – еще 1 балл.

Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

**9.4.** В замке 9 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат  $3 \times 3$ . В эти комнаты по одному человеку поселилось 9 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 9 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 9 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**Ответ.** 6 рыцарей.

**Решение.** Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 3 (так мы покажем, что рыцарей не больше 6). Пусть лжецов не больше 2, тогда найдется «вертикальный ряд» комнат, в которых живут только рыцари. Но тогда у каждого из этих рыцарей должен быть сосед лжец (и эти соседи разные). Поэтому лжецов не меньше 3.

На рисунке показано, как могли поселиться 6 рыцарей и 3 лжеца.

Р	Л	Р
Р	Р	Л
Л	Р	Р

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Пример расселения 3 лжецов и 6 рыцарей – 2 балла.

Доказано, что рыцарей не более 6 – 5 баллов.

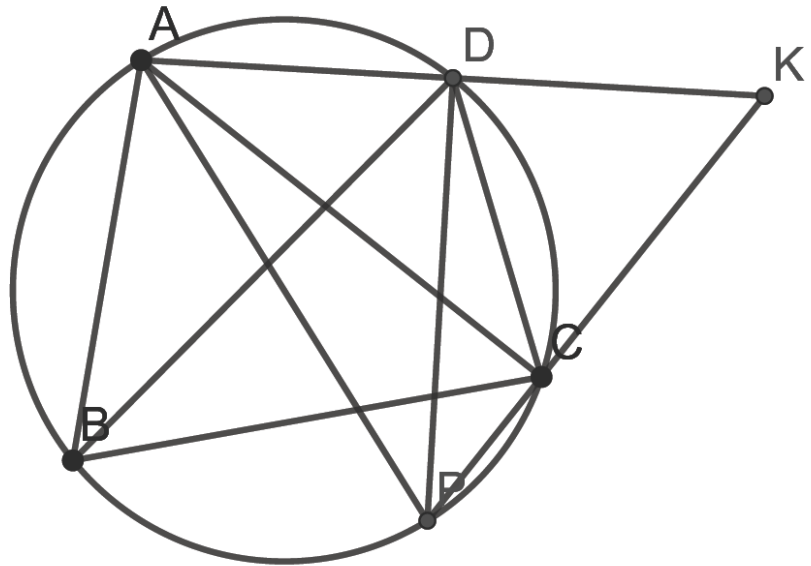
**Замечание 1.** В примере лжецы не должны быть соседями.

**Замечание 2.** Есть и другие примеры.

**9.5.** На данной окружности  $\omega$  выбрана фиксированная точка  $A$ . Выберем на окружности две произвольные точки  $B$  и  $C$ , и найдем точку  $D$  пересечения биссектрисы угла  $ABC$  с окружностью  $\omega$ . Пусть  $K$  – такая точка, что точка  $D$  – середина отрезка  $AK$ . Прямая  $KC$  вторично пересекает окружность в точке  $P$  ( $P \neq C$ ). Докажите, что точка  $P$  не зависит от выбора точек  $B$  и  $C$ .

**Первое решение.** Покажем, что точка  $P$  диаметрально противоположна точке  $A$ . Это и будет означать, что  $P$  не зависит от выбора точек  $B$  и  $C$ . Таким образом, нам нужно доказать, что  $PD$  – перпендикуляр к  $AK$ . Будем считать, что точка  $C$  лежит на отрезке  $KP$ . Другой случай разбирается аналогично.  $AD = DK$ , значит, нам нужно доказать, что  $\alpha = \angle APD = \beta = \angle KPD$ . Но  $\alpha = \angle APD = \angle ABD$  (вписанные, опираются на дугу  $AD$ ),  $\beta = \angle CPD = \angle CBD$  (вписанные, опираются на дугу  $CD$ ). Наконец,  $\angle ABD = \angle CBD$ , так как  $BD$  – биссектриса  $\angle ABC$ . Утверждение доказано.

**Второе решение.** Как и в первом решении, покажем, что точка  $P$  диаметрально противоположна точке  $A$ . Так как  $BD$  – биссектриса угла  $ABC$ , то дуги  $AD$  и  $DC$  равны, значит,  $AD = DC$ . Из того, что точка  $D$  – середина отрезка  $AK$ , следует  $AD = DK$ . Значит,  $AD = DC = DK$ . То есть в треугольнике  $ACK$  медиана  $CD$  равна половине стороны  $AK$ , к которой она проведена. Значит, треугольник  $ACK$  – прямоугольный, и  $\angle ACK = 90^\circ$ . Поэтому  $\angle ACP = 90^\circ$ , и  $AP$  – диаметр окружности  $\omega$ .



**Комментарий.** Указано условие, равносильное утверждению задачи (точка  $P$  диаметрально противоположна точке  $A$ ) – 2 балла.

Разобран только один случай расположения точки  $C$  – баллы не снимаются.

## 10 класс

**10.1.** Найдите сумму  $\sin x + \sin y + \sin z$ , если известно, что  $\sin x = \operatorname{tg} y$ ,  $\sin y = \operatorname{tg} z$ ,  $\sin z = \operatorname{tg} x$ .

**Ответ.** 0.

**Первое решение.** Из того, что  $\sin x = \operatorname{tg} y$ , получаем  $\sin x \cos y = \sin y$ . Отсюда  $|\sin x| \cdot |\cos y| = |\sin y|$ . Значит,  $|\sin x| \geq |\sin y|$ , причем неравенство обращается в равенство только если либо  $\sin y = \sin x = 0$ , либо когда  $|\cos y| = 1$  (а, значит, опять  $\sin y = \sin x = 0$ ). Аналогично, из оставшихся уравнений получаем неравенства  $|\sin y| \geq |\sin z|$  и  $|\sin z| \geq |\sin x|$ . Отсюда  $|\sin x| \geq |\sin y| \geq |\sin z| \geq |\sin x|$ . Поэтому  $|\sin x| = |\sin y| = |\sin z|$ . А так как все неравенства обратились в равенства, мы получаем, что  $\sin x = \sin y = \sin z = 0$ , и  $\sin x + \sin y + \sin z = 0$ .

**Второе решение.** Если один из синусов равен нулю, то равный ему тангенс равен нулю, значит, синус, стоящий в числителе тангенса, равен нулю. Последовательно получаем, что остальные синусы и тангенсы равны нулю. В этом случае  $\sin x + \sin y + \sin z = 0$ .

Пусть ни один из синусов не равен нулю. Перемножив все три равенства, получим  $\sin x \sin y \sin z = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x = \frac{\sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z}$ . Так как  $\sin x \sin y \sin z \neq 0$ , то  $\cos x \cos y \cos z = 1$ . Но это возможно только если  $|\cos x| = |\cos y| = |\cos z| = 1$ , то есть синусы равны нулю, и рассматриваемый случай невозможен.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Ответ получен рассмотрением примера – 1 балл.

Неверно рассмотрен (или пропущен) хотя бы один случай – не более 3 баллов.

**10.2.** Дано выражение  $A = xy + yz + zx$ , где  $x, y, z$  – целые числа. Если число  $x$  увеличить на 1, а числа  $y$  и  $z$  уменьшить на 2, то значение выражения  $A$  не изменится. Докажите, что число  $(-1) \cdot A$  – квадрат целого числа.

**Решение.** По условию  $xy + yz + zx = (x+1)(y-2) + (y-2)(z-2) + (z-2)(x+1)$ , откуда  $4x + y + z = 0$ , или  $x = -\frac{y+z}{4}$ . Тогда  $(-1) \cdot A = -(xy + yz + zx) = -yz - x(y+z) = -yz + \frac{y+z}{4}(y+z) = \frac{(y+z)^2 - 4yz}{4} = \frac{(y-z)^2}{4} = \left(\frac{y-z}{2}\right)^2$ . Так как  $y+z = -4x$ , то  $y$  и  $z$  одинаковой четности, поэтому число  $\frac{y-z}{2}$  – целое.

**Комментарий.** Доказано, что  $4x + y + z = 0$  – 2 балла.

Получено равенство  $(-1) \cdot A = \left(\frac{y-z}{2}\right)^2$ , но не доказано, что выражение в скобках – целое число – 4 балла.

**10.3.** Числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют неравенствам  $x^7 > y^6$  и  $y^7 > x^6$ . Докажите, что  $x + y > 2$ .

**Решение.** Докажем, что  $x > 1$  и  $y > 1$ , из чего и будет следовать доказываемое утверждение. Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа  $x$  и  $y$  положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на положительное число  $x^6 y^6$ , получим:  $xy > 1$ . Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел  $x$  и  $y$  больше 1. Пусть, например,  $x > 1$ . Тогда из неравенства  $y^7 > x^6$  следует, что  $y^7 > 1$ , то есть  $y > 1$ . Поэтому  $x + y > 2$ .

**Комментарий.** Доказано, что  $xy > 1$  – 2 балла.

Доказано, что одно из чисел  $x$  и  $y$  больше 1 – еще 1 балл.

Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

**Замечание.** Другое доказательство того, что  $x > 1$  и  $y > 1$  можно получить, переписав неравенства в виде  $x > y^{\frac{6}{7}}$  и  $y > x^{\frac{6}{7}}$ , и подставив  $x$  ( $y$ ) из одного неравенства в другое (при этом в решении должна использоваться положительность чисел  $x$  и  $y$ ).

**10.4.** В замке 16 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат  $4 \times 4$ . В эти комнаты по одному человеку поселилось 16 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 16 человек казал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 16 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**Ответ.** 12 рыцарей.

**Решение.** Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 4 (так мы покажем, что рыцарей не больше 12). Пусть лжецов не больше 3, тогда найдется «вертикальный ряд» комнат, в которых живут только рыцари. Но тогда у каждого из этих рыцарей должен быть сосед лжец (и эти соседи разные). Поэтому лжецов не меньше 4.

На рисунке показано, как могли поселиться 12 рыцарей и 4 лжеца.

Р	Л	Р	Р
Р	Р	Р	Л
Л	Р	Р	Р
Р	Р	Л	Р

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Пример расселения 4 лжецов и 12 рыцарей – 2 балла.

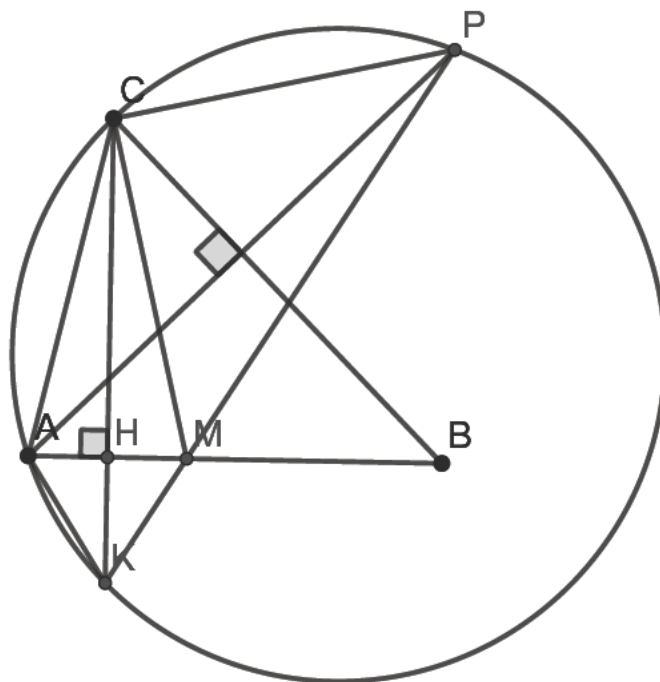
Доказано, что рыцарей не более 12 – 5 баллов.

**Замечание 1.** В примере лжецы не должны быть соседями.

**Замечание 2.** Оценку можно получить, заметив, что в трех комнатах – угловой и двух соседних к ней должен поселиться хотя бы один лжец.

**10.5.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $CH$ . Точка  $P$  симметрична точке  $A$  относительно прямой  $BC$ . Прямая  $CH$  вторично пересекает окружность, описанную около треугольника  $ACP$ , в точке  $K$ . Прямая  $KP$  пересекает отрезок  $AB$  в точке  $M$ . Докажите, что  $AC = CM$ .

**Решение.** В силу того, что  $CH$  – высота треугольника  $ACM$ , равенство  $AC = CM$  равносильно тому, что  $CH$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $AM$ , то есть тому, что  $KH$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $AM$ . А это равносильно тому, что  $AK = KM$ , то есть равенству  $\angle AKH = \angle MKH$ , то есть  $\angle AKC = \alpha = \angle CKP = \beta$ . Но  $\alpha = \angle CPA$  (вписанные, опираются на дугу  $AC$ ),  $\beta = \angle CAP$  (вписанные, опираются на дугу  $CP$ ). Наконец, по условию точки  $A$  и  $P$  симметричны относительно прямой  $CB$ , значит,  $AC = CP$ , и тогда  $\alpha = \angle CPA = \beta = \angle CAP$ . Утверждение доказано.



**Комментарий.** Записано геометрическое утверждение, равносильное симметричности точек  $P$  и  $A$  – 1 балл.

## 11 класс

**11.1.** Дано выражение  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ , где  $x$  и  $y$  – натуральные числа. Если число  $x$  увеличить на 4, а число  $y$  уменьшить на 4, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что  $xy + 4$  – квадрат целого числа.

**Решение.** По условию  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{y-4} + \frac{1}{(x+4)(y-4)}$ , откуда  $\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x+4)(y-4)}$ . Так как  $x+y+1$  положительно, то  $xy = (x+4)(y-4)$ . Откуда  $y = x+4$ . Тогда  $xy + 4 = x(x+4) + 4 = (x+2)^2$ .

**Комментарий.** Доказано, что  $y = x+4$  – 2 балла.

**11.2.** На доске написано 4 числа. Вася умножил первое из этих чисел на  $\sin \alpha$ , второе – на  $\cos \alpha$ , третье – на  $\operatorname{tg} \alpha$ , четвертое – на  $\operatorname{ctg} \alpha$  (для некоторого угла  $\alpha$ ) и получил набор из тех же 4 чисел (возможно записанных в другом порядке). Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано на доске?

**Ответ.** 3 числа.

**Решение.** Докажем сначала, что на доске был записан хотя бы один ноль. Действительно, пусть на доске были записаны ненулевые числа  $a, b, c, d$ , тогда их произведение  $abcd$  должно равняться произведению новых чисел  $abcd \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$ . Но из того что  $abcd \neq 0$  следует, что  $1 = \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ , что невозможно. Значит, среди чисел на доске есть 0. Заметим, что  $\sin \alpha \cos \alpha \neq 0$  (а, значит,  $|\sin \alpha| \neq 1, |\cos \alpha| \neq 1$ ), в противном случае  $\operatorname{tg} \alpha$  или  $\operatorname{ctg} \alpha$  был бы не определен. Если среди трех оставшихся чисел нет нуля, то аналогично предыдущему рассуждению, произведение трех тригонометрических функций равно 1. Но  $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha \neq 1$ ,  $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \sin \alpha \neq 1$ ,  $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \cos^2 \alpha \neq 1$ ,  $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha = \sin^2 \alpha \neq 1$ . Поэтому на доске не меньше двух нулей, то есть различных чисел не больше 3. Ровно три различных числа могли быть, например, в такой ситуации. На доске написаны числа 0, 0, 1 и 2, и они умножались на  $\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$  соответственно.

**Комментарий.** Доказано только, что на доске есть 0 – 1 балл.  
Доказано, что на доске не более 3 различных чисел – 5 баллов.  
Приведен пример с 3 различными числами – 2 балла.

**11.3.** Числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют неравенствам  $x^5 > y^4$  и  $y^5 > x^4$ . Докажите, что  $x^3 > y^2$ .

**Решение.** Докажем, что  $x > 1$  и  $y > 1$ . Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа  $x$  и  $y$  положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на



положительное число  $(xy)^4$ , получим:  $xy > 1$ . Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел  $x$  и  $y$  больше 1. Пусть, например,  $x > 1$ . Тогда из неравенства  $y^5 > x^4$  следует, что  $y^5 > 1$ , то есть  $y > 1$ .

Если  $x > y$ , то  $x^3 > x^2 > y^2$ .

Если  $1 < x \leq y$ , то  $x^5 > y^4 \geq x^2 y^2$ , откуда  $x^3 > y^2$ .

**Комментарий.** Доказано, что  $xy > 1$  – 2 балла.

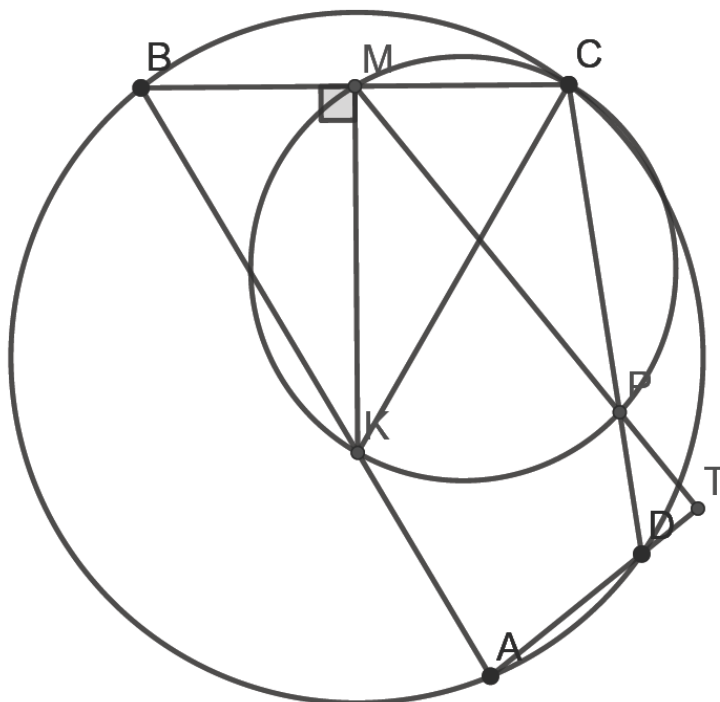
Доказано, что одно из чисел  $x$  и  $y$  больше 1 – еще 1 балл.

Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

**11.4.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Перпендикуляр к стороне  $BC$ , проведенный через ее середину – точку  $M$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$ . Окружность с диаметром  $KC$  пересекает отрезок  $CD$  в точке  $P$  ( $P \neq C$ ). Докажите, что прямые  $MP$  и  $AD$  перпендикулярны.

**Решение.** Пусть  $\omega$  – окружность, построенная на  $KC$  как на диаметре, тогда точка  $M$  лежит на  $\omega$ , так как угол  $CMK$  – прямой. Значит,  $\angle CPM = \angle CKM = \alpha$  (они опираются на дугу  $CM$  окружности  $\omega$ ). Пусть  $T$  – точка пересечения прямых  $AD$  и  $MP$ . Будем считать, что точка  $D$  лежит на отрезке  $AT$ . Другой случай разбирается аналогично. Тогда  $\angle TPD = \alpha$  (углы  $TPD$  и  $CPM$  – вертикальные). Значит, для того, чтобы доказать, что прямые  $AD$  и  $MP$  перпендикулярны, нам нужно доказать, что  $\angle PDT + \alpha = \frac{\pi}{2}$ , где  $T$  – точка пересечения прямых  $MP$  и  $AD$ .

Но если  $\angle PDT = \beta$ , то  $\angle PDA = \pi - \beta \Rightarrow \angle ABC = \beta$ , так как четырехугольник  $ABCD$  – вписанный. Наконец,  $BK = CK$ , так как  $MK$  – серединный перпендикуляр к  $BC$ . Следовательно,  $\angle KCM = \angle KBM = \beta$ . А из прямоугольного треугольника  $KMC$  получаем  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ . Утверждение доказано.



**Комментарий.** Разобран только один случай расположения точки  $D$  – баллы не снимаются.

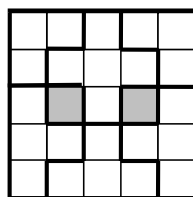
Доказано, что точка  $M$  лежит на  $\omega$  –1 балл.

**11.5.** В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат  $5 \times 5$ . В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

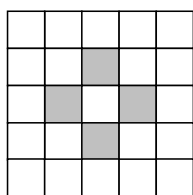
**Ответ.** 18 рыцарей.

**Решение.** Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 7 (так мы покажем, что рыцарей не больше 18).

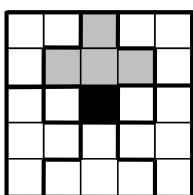
Сначала рассмотрим разбиение комнат на 6 групп (2 комнаты, отмеченные серым, не входят ни в одну из групп). В каждой группе должен быть хотя бы один лжец (иначе у одного из рыцарей группы не будет соседей лжецов). Таким образом, лжецов не меньше 6. Докажем, что их не может быть ровно 6. Предположим противное. Тогда в каждой из выделенных на рисунке групп будет ровно по 1 лжецу. А это значит, что в «серых комнатах» точно будут рыцари.



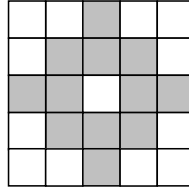
Но если сделать аналогичное разбиение, но повернутое на  $90^\circ$ , мы получим, что еще в двух комнатах должны жить рыцари. Эти 4 комнаты отмечены на рисунке серым. Отсюда следует, что в центральной комнате обязан жить лжец.



Так как в каждой из 6 групп разбиения должен быть ровно 1 лжец, то в комнатах, отмеченных на рисунке серым, должны жить рыцари.



Поворачивая картинку на  $90^\circ$ , мы получим, что рыцари должны жить в комнатах, отмеченных на рисунке серым.



Но тогда в каждой группе из 3 «угловых комнат» должно быть не меньше 2 лжецов. И всего лжецов будет не меньше 9. Получили противоречие. Значит, лжецов не меньше 7.

На рисунке показано, как могли поселиться 18 рыцарей и 7 лжецов.

Р	Р	Л	Р	Р
Л	Р	Р	Р	Л
Р	Р	Л	Р	Р
Л	Р	Р	Р	Л
Р	Р	Л	Р	Р

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.  
 Пример расселения 7 лжецов и 18 рыцарей – 2 балла.  
 Доказано, что рыцарей не более 18 – 5 баллов.

**Замечание.** В примере лжецы не должны быть соседями.