Материалы для проведения муниципального этапа Российской олимпиады школьников по математике
в республике Башкортостан
1 декабря 2020 года

Составитель заданий: Р. Г. Женодаров

Рецензенты: к.ф.-м.н. Н. Ф. Валеев, к.ф.-м.н. К. П. Исаев, к.ф.-м.н. В. И. Луценко

Общие указания по проверке решений олимпиадных заданий по математике.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	План решения верный и может стать полностью правильным после исправлений или дополнений
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Следует иметь в виду, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

При оценке решения задачи в первую очередь нужно исходить из общих критериев, но учитывать конкретные критерии по задачам.

Задачи, наброски решений, критерии по отдельным задачам.

5 класс

1. На восьми карточках записаны цифры 1, 2, 5, 7, 9, 0 и знаки “+” и “=”. Можно ли составить какой-нибудь верный пример на сложение, используя все указанные карточки?

Ответ: можно.

Пример: 95+7=102.

Критерии. Любое объяснение, что нельзя: 0 баллов.

Ответ «можно» без примера: 0 баллов.

2. В девяти клетках квадрата 3 × 3 стоят числа от 1 до 9. Арсений вычислил сумму чисел на одной диагонали, у него получилось 6. Алиса вычислила сумму чисел на другой диагонали, у нее получилось 20. Какое число стоит в центре квадрата?

Ответ: 3.

Набросок решения. Сумму 6 можно получить единственным способом: 1+2+3=6. Если в центре стоит 1, то на другой диагонали сумма двух чисел в угловых клетках должна быть равна 19, но самая большая сумма двух оставшихся чисел 9+8=17. Аналогично покажем, что в центре не может быть 2. Значит, в центре стоит 3.

Критерии. Только ответ: 0 баллов.

3. 9 рыцарей и лжецов встали в ряд. Каждый сказал, что рядом с ним стоит ровно один лжец. Сколько всего лжецов среди них, если рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут?

Ответ: 3 лжеца.

Набросок решения. Рассмотрим разбиение всех на группы стоящих подряд людей одного вида, причём в соседних группах - люди разных видов. В такой группе может быть только один лжец. Если их не менее двух, то крайние лжецы говорят правду. Рыцарей в группе не более двух. Если их не менее трёх, то средние рыцари лгут. Группа из двух рыцарей не может стоять с краю, иначе крайний рыцарь лжёт. Группа из одного рыцаря может стоять только с краю, иначе вокруг рыцаря - два лжеца, и он лжет.

На основе этих утверждений получаем, что возможны две расстановки: ЛРРЛРРЛРР и РЛРРЛРРЛР. Первая невозможна, так как с краю группа из двух рыцарей.

Критерии: Ответ без обоснования:1 балл.

4. Сможет ли Катя написать на доске десятизначное число, у которого все цифры различны и все разности между двумя соседними цифрами различны (при нахождении разности из большего вычитается меньшее)?

Ответ: сможет.

Пример: 9081726354.

Критерии. За любой правильный пример: 7 баллов.

5. В клетки доски 6×6 записаны числа 0 и 1 (см. рисунок справа). Можно ли разрезать доску на прямоугольники 1×2 так, чтобы в каждом прямоугольнике сумма записанных в её клетках чисел была равна 1?

0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1

Ответ: Нельзя.

Набросок решения. Прямоугольник 1×2 будем называть доминошкой. Предположим, что так разрезать можно. Рассмотрим клетку d3. Она может войти только в одну доминошку: d3, d2. Рассмотрим клетку e2. Она может войти только в доминошку e2, f2. Рассмотрим клетку f1. Нет доминошки с нужным свойством, её содержащим. И наше предположение неверно.

	a	b	c	d	e	f
6	0	1	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1	1
4	0	0	0	1	0	0
3	0	1	1	1	1	1
2	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1

Критерии. Рассуждение: «Так как сумма всех чисел равна 18, должно быть 18 доминошек, то можно»: 0 баллов.

6. Имеется бумажный прямоугольник 3×100, разбитый на 300 клеток 1×1. Какое наибольшее число пар из одного уголка и одного квадратика 2×2 из него можно выстричь по линиям сетки? (Уголок получается из квадрата 2×2 удалением одной из угловых клеток).

Ответ: 33.

Набросок решения. Квадратик в среднем ряду занимает две клетки, а уголок - минимум одну, значит, пара занимает минимум три клетки в среднем ряду. Если пар не менее 34, то они занимают в среднем ряду не менее 34×3=102 клеток, а их там только 100.

Пример: выстригаем 33 квадрата 3×3. Из каждого квадрата 3×3 выстригаем квадрат 2×2 и уголок.
Критерии. Только ответ: 0 баллов.

6 класс

1. Указать наибольшее возможное число, в десятичной записи которого все цифры различны, а сумма его цифр равна 37.

Ответ: 976543210.

Набросок решения. Сумма всех десяти цифр равна 45, поэтому для достижения максимума исключим только одну цифру. Это будет 8. Среди девятизначных чисел больше то, у которого старшие разряды больше. Отсюда ответ.

2. Существует ли натуральное число, в записи которого встречаются только цифры 7 и 5 в равном количестве, и которое делится на 7 и 5? Ответ обосновать.

Ответ: существует.

Набросок решения. Примеры основаны на том, что 1001 делится на 7. Отсюда следует, что число вида $\overline{abcabc}=\overline{abc}\times1001$ делится на 7. Из этого: 777777555555=777777×1000000+555555.
5775=5005+770.

Например, число: 777777555555 или 5775.

Критерии. Правильный пример, без проверки делимости на 7: 6 баллов.

3. На доске 4×4 расставьте 8 рыцарей и 8 лжецов так, чтобы каждый из них мог сказать: «Рядом со мной стоит ровно один рыцарь». Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Люди стоят рядом, если в занимаемых ими клетках есть общая сторона.

	P	P	
P			P
P			P
	P	P	

Ответ: см. рис.

Набросок решения. В клетках, помеченных буквой «Р», стоят рыцари, а в пустых - лжецы.

4. Имеется контур квадрата со стороной 20см, его разрезали на две группы равных отрезков из трёх и четырёх отрезков. Какую длину имеют эти отрезки? Найти все возможные ответы.

Ответ: 20см и 5см.
Набросок решения.
Если каждая сторона квадрата разрезана хотя бы на два отрезка, то отрезков будет 8, а их 4+3=7. Значит, один из отрезков равен стороне квадрата, и таких отрезков три длиной 20 см. Четыре отрезка получаются разрезанием стороны квадрата на четыре равных отрезка, длина которых 20:4=5(см).
Критерии. Правильный ответ, без обоснования: 1балл.

5. Имеется пять старинных монет, среди которых две поддельные. Эксперт может про любые две монеты за шоколадку указать, сколько среди них поддельных. У коллекционера Васи четыре шоколадки. Сможет ли Вася найти поддельные монеты, если эксперт требует указать ему сразу (до начала проверок) все пары монет, которые он должен проверить, и плату внести заранее?

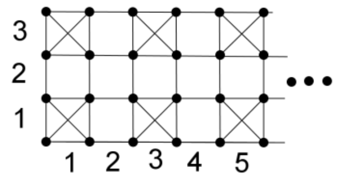
Ответ: сможет. Набросок решения. Пронумеруем монеты числами от 1 до 5. Эксперт должен проверить следующие четыре пары монет: 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5 за четыре шоколадки. Пусть ответы были a, b, c, d. Если a+c=2, то пятая монета настоящая, в противном случае фальшивая. Если a+d=2, то третья монета настоящая, в противном случае фальшивая. Если b+d=2, то первая монета настоящая, в противном случае фальшивая. Зная, какая третья монета и сколько поддельных среди 2 и 3, 3 и 4, узнаём про монеты 2 и 4.

Критерии. Правильный алгоритм, без пояснений: 3 балла.

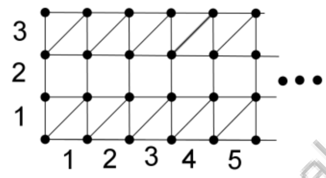
6. Прямоугольник 3×100 состоит из 300 квадратов 1×1. Какое наибольшее число диагоналей можно провести в квадратах так, чтобы никакие две диагонали не имели общих концов? (В одном квадрате можно провести две диагонали, у них не будет общих концов. Общие внутренние точки разрешены.)

Ответ: 200.

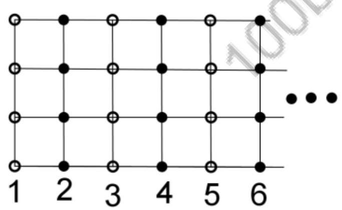
Пример. Пронумеруем строки и столбцы, содержащие квадраты. В каждом квадрате с обоими нечётными номерами проведём по две диагонали.



Другой пример. Во всех клетках первого и третьего ряда проведем параллельные диагонали.



Оценка. Раскрасим вершины в два цвета: вершины из нечётных столбцов - в белый цвет, а четных столбцов - в чёрный (см. рис.). Белых вершин будет 200, а чёрных вершин 204. У каждой диагонали концы разного цвета, и поэтому больше, чем 200 диагоналей провести нельзя.



Критерии. Оценка без примера: 4 балла. Пример без оценки: 2 балла.

7 класс

1. Найдите наименьшее число, в котором участвуют только цифры 2 и 3 в равном количестве, и кратное 2 и 3.

Ответ: 223332.

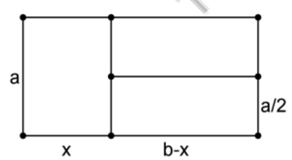
Набросок решения. Если число делится на 3, то сумма цифр делится на 3 и, значит, количество двоек кратно трём и, значит, их минимум три. Значит, искомое число шестизначное. Так как оно делится на 2, то оканчивается оно на 2. Число тем меньше, чем меньше старшие цифры, отсюда ответ.

Критерии. Правильный ответ без обоснования: 2 балла.

2. Прямоугольник со сторонами 6см и 3см разрезали на три прямоугольника равного периметра. Чему может равняться периметр этих прямоугольников? Найти все возможные ответы.

Ответ: 14см, 10 см, 10,5см.

Набросок решения.



Пусть мы режем прямоугольник со сторонами a и b. Случаи 1 и 2. Разрежем на три равных прямоугольника двумя разрезами параллельными стороне a. Периметр этих прямоугольников равен $P=2(a+b/3)$. 1) Если $a=3$см и $b=6$см, то $P=10$см. 2) Если $a=6$см и $b=3$см, то $P=14$см.

Случаи 3 и 4. Один прямоугольник отрежем параллельно стороне a, оставшийся разрежем на два равных параллельно стороне b (см. рис.). Если у прямоугольников равны периметры, то равны и полупериметры, поэтому $a+x=b–x+a/2$, откуда $2x=b–a/2$ при условии $b–a/2>0$. Периметр этих прямоугольников равен $P=2a+b–a/2=3a/2+b$. 1) Если $a=3$см и $b=6$см, то $P=10,5$см. 4) Если $a=6$см и $b=3$см, то $b–a/2=0$ и не выполняется условие существования прямоугольника.

Критерии. Правильный ответ, без пояснений: 2 балла.

3. Существуют ли четыре натуральных числа, сумма которых - сотая степень двойки, а произведение - сотая степень семнадцати?

Ответ: не существуют.

Набросок решения. Если произведение четырёх чисел - сотая степень 17, то по крайней мере у одного из них показатель степени не меньше 25. Но $17^{25}> 16^{25}=(2^4)^{25}=2^{100}$. Значит, их сумма больше 2^{100}. Таких чисел нет.

Критерии. Только ответ: 0 баллов.

4. Два шахматиста сыграли между собой 100 партий. За победу начислялось 11 очков, за ничью x очков, за поражение очков не начислялось. Найти все возможные значения x, если шахматисты в сумме набрали 800 очков, и x – натуральное число.

Ответ: 3 и 4.

Набросок решения. Пусть n партий закончились результативно, тогда ничейных партий $100–n$, и игроки набрали $11n+2x(100–n)$. Так как всего набрано 800 очков, получаем уравнение $11n+2x(100–n)=800$. $11n–2nx=800–200x$. $n(11–2x)=200(4–x)$ $3n=200(4–x)–2n(4–x)$. Откуда $3n=2(4–x)(100–n)$. Осталось найти n для возможных пяти значений x. Так как 800 не кратно 11, то случай $x=0$ невозможен.

Если $x=4$, то $n=0$ (были только ничьи).

Если $x=3$, то $n= 40$.

Если $x=2$, то $7n=400$, n не является целым.

Если $x=1$, то $3n=200$, n не является целым.

5. Имеется 50 деревьев 25 видов по два дерева каждого вида. Можно ли их посадить в ряд так, чтобы между любыми двумя деревьями одного вида росло одно или три дерева?

Ответ: нельзя.

Набросок решения. Пусть деревья посажены требуемым образом. Занумеруем деревья в порядке их расположения в ряд числами от 1 до 50. Заметим, что деревья, между которыми растёт одно дерево или три дерева, имеют в нумерации или оба чётных номера или оба нечётных номера. Поскольку каждой чётности по 25 деревьев, найдутся два дерева одного вида разной чётности, и между ними не может расти ровно одно дерево или три.

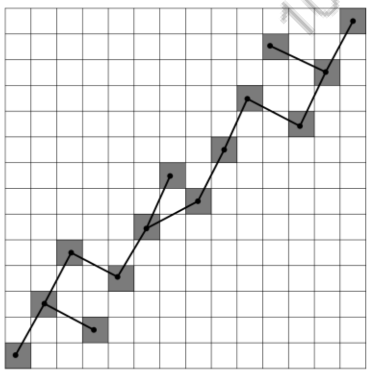
6. Несколько полей доски 14×14 отмечены. Известно, что никакие два из отмеченных полей не находятся в одном и том же столбце и одном и том же ряду, а также что конь может, начав с любого отмеченного поля, попасть на любое другое отмеченное поле по отмеченным полям. Каково наибольшее возможное количество отмеченных полей?

Ответ: 14.

Набросок решения.

Оценка. В каждом ряду не более одной отмеченной клетки (поля), и значит отмечено не более 14 клеток.

Пример на рисунке.



8 класс

1. Докажите, что число $2^6+2^5 19^3+2^4 19^3+2^3 19^6+2^2 19^6+19^9$ является составным?

Набросок решения.
$2^6+2^5 19^3+2^4 19^3+2^3 19^6+2^2 19^6+19^9=(2^2)^3+(1+2)2^4 19^3+(1+2)2^2 19^6+(19^3)^3$ $=(2^2+19^3)^3$ и, значит, данное число является составным, так как у него по крайней мере три делителя: 1, само число и 2^2+19^3.

2. Сколько существует натуральных чисел, больших единицы, произведение которых на свой наименьший простой делитель не больше 100?

Ответ: 33.

Набросок решения. Наименьший простой делитель может равняться 2. Это числа: 2, 4, …, 50 (25 чисел). Наименьший простой делитель может равняться 3. Это числа: 3, 9, 15, 21, 27, 33 (6 чисел). Наименьший простой делитель может равняться 5. Это число: 5 (1 число). Наименьший простой делитель может равняться 7. Это число: 7 (1 число). Так как $11\times11=121>100$, других простых делителей с таким свойством нет. Всего чисел: $25+5+1+1=33$.

Критерии. Только верный ответ: 1 балл.

3. Целые числа a и b таковы, что $a^3/(a+b)$- целое. Доказать, что $b^4/(a+b)$ тоже целое.

Набросок решения. Заметим, что $(a^3+b^3)/(a+b)=a^2-ab+b^2$ – целое как алгебраическая сумма произведений целых чисел. Разность целых чисел - число целое, поэтому $(a^3+b^3)/(a+b)-a^3/(a+b) = b^3/(a+b)$ – целое. Произведение целых чисел - число целое, поэтому $b \times b^3/(a+b) = b^4/(a+b)$ – целое.

Критерии. Имеются верные выкладки, но нет словесных пояснений, почему они приводят к нужному результату типа: произведение целых чисел число целое:4 балла.

4. Клетки квадрата $n\times n$ покрасили в n цветов, по n клеток в каждый цвет. При каких n можно так раскрасить квадрат, что в каждом ряду и каждом столбце будут клетки ровно двух цветов?

Ответ: 2, 3, 4. Набросок решения. Примеры для 2, 3 и 4 показаны на рисунке справа. Цвета занумерованы числами.

1	2
2	1

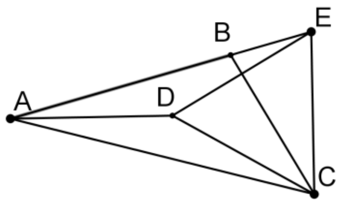
1	2	2
3	3	2
1	3	1

2	2	3	3
2	2	3	3
1	1	4	4
1	1	4	4

Оценка. Пусть $n\geq5$ и удалось раскрасить квадрат нужным образом. Составим список цветов, встречающихся в рядах, в каждом должно быть ровно два цвета. Всего в списке будет $2n$ цветов. Каждый цвет должен встречаться не менее чем в двух рядах, т.к. если он только в одном ряду, а всего закрашено n клеток, то все клетки этого ряда одного цвета. Значит, они займут не менее $2n$ мест. Из этого следует, что в каждый цвет раскрашены клетки двух рядов, поскольку мест для их записи в рядах ровно $2n$. Рассмотрим первый столбец, в нём два цвета, а так как клеток не менее пяти, в какой-то цвет окрашено не менее трёх клеток. А значит, этот цвет встречается в трёх рядах, что противоречит доказанному ранее утверждению. Значит, при $n\geq5$ раскраска невозможна. Случай $n=1$, очевидно, невозможен.

Критерии. Верный ответ с тремя примерами: 2 балла.

5. В треугольнике ABC $\angle A=30°$, $\angle B=105°$. На биссектрисе угла A взяли точку D так, что $\angle ADC=150°$. Доказать, что AD=BC.



Набросок решения. На продолжении стороны AB за точку B отметим точку E такую, что AC=AE. Так как AD – биссектриса угла, то $\angle DAE=\angle DAC=15°$. $\angle DCA=180°-\angle CAD-\angle ADC=180°-15°-150°=15°$. Следовательно ΔADC – равнобедренный (AD=DC). Треугольники ADC и ADE равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда CD=DE. $\angle CDE=360°-\angle ADC-\angle ADE=360°-150°-150°=60°$. Значит, треугольник CDE – равносторонний. Осталось заметить, что треугольник BCE – равнобедренный ($\angle CBE=\angle BEC=75°$). Имеем следующую цепочку равенств: AD=CD=CE=BC.

Критерии. Построена точка E: 1 балл.

Доказано, что треугольник CDE – равносторонний: 3 балла.

6. Каждую неделю по SMS-кам слушателей выбирают десять популярнейших песен. Известно, что 1) никогда не выбирают один и тот же набор песен в одном и том же порядке две недели подряд; 2) песня, однажды опустившаяся в рейтинге, в дальнейшем уже не поднимается. Какое наибольшее число недель могут продержаться в рейтинге одни и те же 10 песен?

Ответ: 46 недель.

Набросок решения. Пусть две недели подряд в списке был один и тот же набор из 10 песен. Так как порядок песен в них разный, то по крайней мере одна из песен в списке поднялась в рейтинге, и по крайней мере одна опустилась. Так как один раз опустившись, песня, в рейтинге не поднималась, подсчитаем суммарно возможное число подъёмов. Последняя песня в первоначальном списке могла подняться не более 9 раз, предпоследняя не более 8 раз и т.д. Значит, подъёмов не более 9+8+…+2+1=45. Значит, список может продержаться в рейтинге не более 46 недель.

Осталось привести нужный пример. Сначала песня, занимавшая первое место, опускается 9 недель до последнего места, затем вторая опускается 8 недель. Третья в начальном списке опускается 7 недель и т.д.

9 класс

1. Действительные числа a, b, c таковы, что $a+1/b=9$, $b+1/c=10$, $c+1/a=11$. Найти значение выражения $abc+1/(abc)$.

Ответ: 960.

Набросок решения. Перемножив уравнения, раскрыв скобки и сгруппировав, получим: $abc+1/(abc)+a+1/b+b+1/c+c+1/a=990$. Отсюда $abc+1/(abc)=990–9–10–11=960$.

2. В турнире по футболу участвуют 17 команд, причём, каждая играет с каждой ровно один раз. За победу команде начисляют 3 очка. За ничью -1 очко. Проигравшая команда очков не получает. Какое наибольшее число команд могут набрать ровно по 10 очков?

Ответ: 11.

Набросок решения. Оценка. Пусть n команд набрали ровно по 10 очков. В сумму очков входят все очки, набранные этими командами в играх между собой (минимум 2) и, возможно, в играх с другими командами: $10n\geq 2(n–1)n/2$. Откуда $n\leq 11$.

Пример: Все одиннадцать команд сыграли между собой вничью, а остальным проиграли.

Критерии. Только ответ, без обоснования: 1 балл.

3. Приведите пример трех различных целых чисел, одно из которых равно разности двух оставшихся, а другое – частному двух оставшихся.

Ответ: числа 2, –2, –4.

Числа подходят, так как 2= (–2)–(–4); –2=–4/2.

Замечание. Найти эти числа можно, найдя в целых числах одно из решений системы $\begin{cases} a = b - c \\ b = \frac{c}{a} \end{cases}$ или аналогичной.

Критерии. Правильная тройка без указания, как найдена: 7 баллов.

4. Даны три ненулевых действительных числа a, b, c такие, что уравнения: $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ имеют каждое два корня. Сколько отрицательных может быть среди корней этих уравнений?

Ответ: 2.

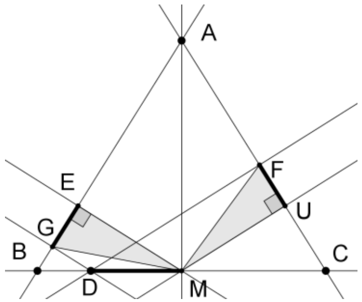
Набросок решения.

Если числа a, b, c заменить на противоположные, то «новые» уравнения будут иметь тот же набор корней, что и первоначальные. Возможны два случая: числа a, b, с одного знака; среди них есть положительные и отрицательные.

Первый случай. Ввиду первоначального замечания, можно считать, что они положительны. А ввиду циклической симметрии коэффициентов уравнений, можно считать, что $0<a\leq b$, $0<a\leq c$. Перемножив эти неравенства, получим $a^2\leq bc<4bc$. Из этого неравенства следует, что дискриминант уравнения $cx^2+ax+b=0$ отрицателен, и уравнение корней не имеет. Случай невозможен.

Второй случай. Ввиду первоначального замечания и циклической симметрии коэффициентов уравнений, можно считать, что $0<a$, $0<c$, $b<0$. Из этих неравенств следует, что в уравнениях $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ произведение корней отрицательно и, значит, ровно один корень отрицателен. В уравнении $ax^2+bx+c=0$ произведение корней положительно и сумма положительна, значит, оба корня положительны. В итоге имеем два отрицательных корня.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На прямой BC отметили точку D. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из точки D на боковые стороны, равноудалены от середины основания.



Набросок решения. Пусть M – середина основания BC. Проекции точек D и M на сторону AC обозначим F и U соответственно. Проекции точек D и M на сторону AB обозначим G и E соответственно. Так как в равнобедренном треугольнике медиана является биссектрисой, точка M равноудалена от боковых сторон: MF=MU. Поскольку основание наклонено к боковым сторонам под равными углами, то проекции отрезка DM на боковые стороны равны: GE=FU. Прямоугольные треугольники MEG и MUF равны по двум катетам. Значит равны и их гипотенузы: MF=MG.

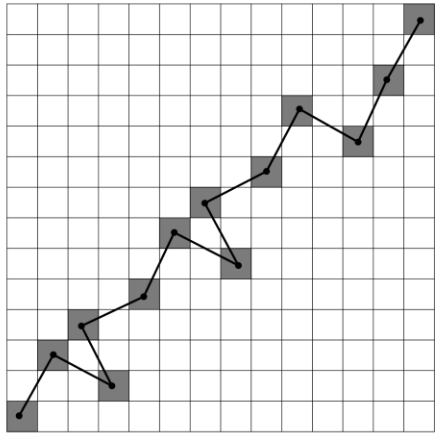
Критерии. Правильно рассмотрен только случай расположения точки D на основании BC: 3 балла.

6. Несколько полей доски 14×14 отмечены. Известно, что никакие два отмеченных поля не находятся в одном и том же столбце и одном и том же ряду, а также, что конь может, начав с некоторого отмеченного поля, обойти все отмеченные поля несколькими прыжками, побывав в каждом ровно один раз. Каково наибольшее возможное количество отмеченных полей?

Ответ: 13.

Поскольку в каждом ряду не более одной отмеченной клетки (поля), то отмеченных клеток не более 14. Пусть отмеченных клеток 14. Занумеруем строки и столбцы числами от 1 до 14 снизу вверх и слева направо и раскрасим клетки в черный и белый цвет в шахматном порядке, причём, для белых клеток сумма строки и столбца, в которых находится клетка, нечётна, а для черных - чётна. Пусть путь коня по отмеченным клеткам (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), …, (x_{14}, y_{14}). Рассмотрим сумму $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+\ldots+(x_{14}+y_{14})$. Поскольку конь меняет при каждом ходе цвет клетки, в сумме будет семь нечётных слагаемых и, значит, она нечётна. С другой стороны, в каждой строке и столбце конь побывал один раз, и сумма равна 2(1+2+3+…+14) и чётна. Противоречие.

Пример для 13 отмеченных клеток показан на рисунке справа.



Критерии. Приведён пример, но нет оценки: 2 балла.

Сделана оценка, но нет примера или он неверный: 4 балла.

10 класс

1. Решить систему $\begin{cases}\sqrt{2x^2+2}=y+1;\\ \sqrt{2y^2+2}=z+1;\\ \sqrt{2z^2+2}=x+1.\end{cases}$

Ответ: (1, 1, 1).

Набросок решения. Возведя каждое из уравнений в квадрат и сложив, перенесём все слагаемые левую часть и выделим полные квадраты. Получим $(x–1)^2+(y–1)^2+(z–1)^2=0$. Откуда $x=y=z=1$. Проверка показывает, что эта тройка подходит, так как левая и правая части равны 2.

Критерии. Получено, что тройка (1, 1, 1) – решение. Но не сделана проверка: 5 баллов.

Критерии: Ответ без обоснования: 1 балл.

2. В турнире по пляжному футболу участвуют 17 команд, причём каждая играет с каждой ровно один раз. За победу в основное время команде начисляют 3 очка. За победу в дополнительное время - 2 очка и за победу по пенальти - 1 очко. Проигравшая команда очков не получает. Какое наибольшее количество команд могут набрать ровно по 5 очков?

Ответ: 11.

Набросок решения. Оценка. Пусть n команд набрали ровно по 5 очков. В сумму очков входят все очки, набранные этими командами в играх между собой (минимум 1) и, возможно, в играх с другими командами: $5n\geq(n–1)n/2$. Откуда $n\leq11$.

Пример: поставим одиннадцать команд в круг, и пусть каждая выиграла у пяти следующих за ней по ходу часовой стрелки по пенальти. Остальные команды у них выиграли.

Критерии. Пример без оценки: 2 балла. Оценка без примера: 4 балла.

3. Найти все функции, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых x, y выполняется равенство $f(x+|y|)=f(|x|)+f(y)$.

Ответ: $f(x)=0$ для всех действительных x.

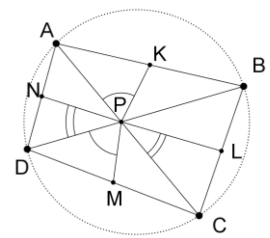
Набросок решения. Положим $x=0$, $y=0$, получим $f(0)=f(0)+f(0)$ и значит, $f(0)=0$. Если $y=0$, то $f(x)=f(|x|)$. Положим $x=–|y|$, $0=f(0)=f(|–|y||)+ f(y) = f(y)+f(y)=2f(y)$. Значит $f(y)=0$.

4. Пусть a и b – положительные числа такие, что $a\geq4b$. Доказать, что $a^2+b^2\geq4ab$.

Набросок решения. $a^2+b^2=3a^2/4+a^2/4+b^2\geq3a4b/4+ab=4ab$.

Второй способ. Разделим доказываемое неравенство на $b^2>0$. И введём новую переменную $x=a/b\geq4$. $x^2+1\geq4x\Leftrightarrow (x–2)^2–3\geq0$. При $x\geq2$ функция $f(x)=(x–2)^2–3$ возрастает и, значит, из $x\geq4\geq2$. $f(x)\geq f(4)=1>0$.

5. Диагонали вписанного четырёхугольника ABCD пересекаются в точке P. Пусть K, L, M, N середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что сумма углов KPL и NPM равна 180 градусам.



Набросок решения. Пусть K, L, M, N середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Треугольники BAP и CDP подобны по двум углам. Из этого следует, что подобны треугольники KAP и MDP (по углу и пропорциональности соответственных сторон). Значит, ∠APK=∠DPM. Аналогично доказывается ∠CPL=∠DPN. Используя эти равенства, имеем ∠KPL+∠NPM=∠KPL+∠NPD+∠DPM=∠KPL +∠APK +∠CPL=180°.

Критерии. Доказано подобие треугольников KAP и MDP: 2 балла.

6. Вася задумал натуральное число $n \leq 2020$. Петя пытается угадать его следующим образом: он называет некоторое натуральное число x и спрашивает, больше ли его задуманное число (верно ли, что $x<n$?), а Вася отвечает ему «да» или «нет». Петя выигрывает, если он узнает число, и проигрывает, если после получения ответа «нет» во второй раз он не может назвать задуманное число. Какого наименьшего числа вопросов достаточно Пете, чтобы он победил?

Ответ: 64.

Решение. Сначала заметим, что если Петя получит первый ответ «нет» в какой-то момент, это означает, что тогда он знает, что число n находится в некотором промежутке $[n_1, n_2]$. Если его следующая попытка-число $x > n_1$, и получен ответ «нет» - он проигрывает, потому что он не имеет права задавать больше вопросы, а он знает, что задумал Вася одно из чисел $n_1, n_1 + 1, \ldots, x$. Поэтому Петя должен последовательно спрашивать про числа $n_1, n_1 + 1, \ldots, n_2–1$, и это $n_2 - n_1$ вопросов.:

Теперь мы покажем, что Петя всегда может угадать число за 64 вопроса, спросив Васю про числа: 64, 64 + 63, 64 + 63 + 62, . . . , 64 + 63 + · · · +13 = 2008, пока он не получит ответ «нет» Если этого никогда не случится, то есть, всегда ответ Васи «да», это после 52-го вопроса, когда он устанавливает число Васи [2009, 2020] и за 11 вопросов угадает число.

Если он получит ответ ”нет " после вопроса с числом 63 + 62 + · · · + k, то задуманное число в промежутке [64 + 63 + · · · + (k + 1) + 1, 64 + 63 + · · · + (k + 1) + k] и из сказанного выше следует, что ему нужно всего не более (64-k + 1) + k − 1 = 64 вопросов.

Предположим, что у Пети есть стратегия нахождения задуманного числа не более, чем за 63 вопроса. Если на первом вопросе он получит ответ «нет», это означает, что Вася задумал число, которое не превышает 63. Если Петя получил ответ «да», и во втором вопросе он получит ответ «нет», то второе число не может превышать 63 + 62 = 125. Продолжая те же рассуждения, мы заключаем, что число после 63-го вопроса не превосходит 63 + 62 + · · · + 1 = 2016 <2020, и при ответе «да» на этот вопрос Петя не сможет определить число Васи, противоречие.

Критерии: Доказано, что 63 вопросов не хватит: 3 балла.

Показано , как найти задуманное число за 64 вопроса: 4 балла.

11класс

1. Решить систему $\begin{cases}\sqrt{2x^2+2}=y-1;\\ \sqrt{2y^2+2}=z-1;\\ \sqrt{2z^2+2}=x-1.\end{cases}$

Ответ: Система не имеет решений.

Набросок решения. Возведя каждое из уравнений в квадрат и сложив их, перенесём все слагаемые левую часть. Выделив полные квадраты, получим $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=0$. Откуда $x=y=z=-1$. Проверка показывает, что эта тройка не подходит, так как в этом случае левая часть каждого уравнения положительна, а правая отрицательна.

Критерии. Утверждается, что тройка (–1, –1, –1) – решение. Не сделана проверка: 3 балла.

2. Доказать, что если $\cos x+\cos y+\cos z=0$, то $\cos^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{y}{2}+\cos^4\frac{z}{2}=\sin^4\frac{x}{2}+\sin^4\frac{y}{2}+\sin^4\frac{z}{2}$.

Набросок решения.

$$\cos x+\cos y+\cos z=0\Rightarrow$$

$$\cos(2(x/2))+\cos(2(y/2))+\cos(2(z/2))=0\Rightarrow$$

$$\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{y}{2}-\sin^2\frac{y}{2}+\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}=0\Rightarrow$$

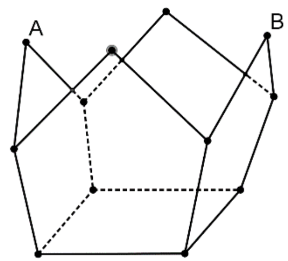
$$\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+\left(\cos^2\frac{y}{2}-\sin^2\frac{y}{2}\right)\left(\cos^2\frac{y}{2}+\sin^2\frac{y}{2}\right)+\left(\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}\right)\left(\cos^2\frac{z}{2}+\sin^2\frac{z}{2}\right)=0\Rightarrow$$

$$\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{y}{2}-\sin^4\frac{y}{2}+\cos^4\frac{z}{2}-\sin^4\frac{z}{2}=0\Rightarrow$$

$$\cos^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{y}{2}+\cos^4\frac{z}{2}=\sin^4\frac{x}{2}+\sin^4\frac{y}{2}+\sin^4\frac{z}{2}.$$

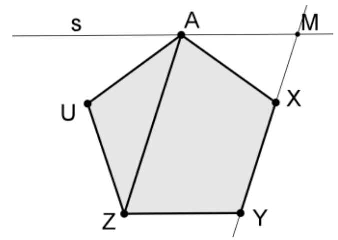
Критерии. Если доказательство начато с утверждения, которое надо доказать, и закончено условием без ссылки на равносильность утверждений: 4 балла.

3. Из четырёх правильных пятиугольников со стороной 1 и квадрата склеили коробку (см. рис.) Найти расстояние между точками A и B.



Ответ: 2.

Набросок решения. Через точку A проведём плоскость, параллельную плоскости квадрата. Из соображений симметрии понятно, что точка B будет лежать в этой плоскости. Рассмотрим пересечение проведённой плоскости с плоскостями, содержащими правильные пятиугольники. Точки пересечения полученных прямых являются вершинами квадрата, поскольку параллельные плоскости пересекаются с третьей по параллельным прямым. Точки A и B будут лежать на противоположных сторонах верхнего квадрата. Осталось заметить, что сторона этого квадрата равна 2, а точки A и B середины сторон этого квадрата. Это



следует из следующего свойства правильного пятиугольника. Пусть AXYZU – правильный пятиугольник, s – прямая, проходящая через точку A параллельно ZY. M - точка пересечения прямых s и XY. Имеет место равенство ZY=AM. Это следует из параллельности диагонали AZ и стороны XY, что доказывается счётом углов.

4. Найти наибольшее C такое, что для всех y≥4x>0 выполняется неравенство $x^2+y^2\geq Cxy$.

Ответ: 17/4.

Набросок решения. Положим $y=4$, $x=1$. $1+16\geq 4C$. $C\leq 17/4$.

Докажем, что при C=17/4 и всех $y\geq 4x>0$ выполняется неравенство $x^2+y^2\geq Cxy$. Разделим неравенство на $x^2>0$ и введём новую переменную $z=y/x\geq 4$. $z^2+1\geq Cz \Leftrightarrow (z-C/2)^2+1-C^2/4\geq 0$. При $z\geq C/2$ функция $f(z)=z^2-Cz+1=(z-C/2)^2+1-C^2/4$ возрастает, и значит, из $z\geq 4\geq C/2$ следует $f(z)\geq f(4)=0$, что равносильно доказываемому неравенству.

5. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = BC) точка D на стороне AC такова, что радиус вписанной окружности треугольника ABD равен радиусу вневписанной окружности треугольника CBD, касающейся стороны CD. Доказать, что длина этих радиусов составляет четверть длины высоты, опущенной из точки C в треугольнике ABC.

Набросок решения. Пусть M – середина основания AC. Тогда $AB^2-BD^2=(AM^2+BM^2)-(DM^2+BM^2)=AM^2-DM^2=(AM-DM)(AM+DM)=AD\cdot CD$. (1). Пусть h – высота, проведённая из вершины C к стороне AB, r – радиус вписанной в ABD окружности. Имеем $[ABC]=h\cdot AB/2$, $[BAD]=r(AB+BD+AD)/2$, $[BCD]=r(BC+BD-CD)/2=r(AB+BD-CD)/2$.
$AD/CD=[BAD]/[BCD]=(AB+BD+DA)/(AB+BD-CD)$ Отсюда с учётом (1) $AD-CD=2AD\cdot CD/(AB+BD)=2(AB-BD)$. Окончательно $h\cdot AB/2=[ABC]=[BAD]+[BCD]=r(2AB+2BD+AD-CD)/2=2rAB$, значит $r=h/4$.

6. Для натурального числа n G (n) обозначает количество натуральных чисел m, для которых $m+n$ делит mn. Найти $G(10^k)$.

Ответ: $G(10^k)=2k^2+2k$.

Набросок решения. Так как $mn = n(m + n) - n^2$, то если m + n делит mn, то m+n делит n^2. Поэтому G(n) равно количеству делителей n^2, которые больше n. Каждому делителю d >n числа n^2 сопоставим делитель $n^2/d<n$, что означает, что количество делителей n^2, больших чем n, равно количеству делителей n^2, меньших, чем n. Поэтому 2G (n)+1-это число делителей n^2. Натуральных делителей у числа 10^{2k} будет $(2k+1)^2$ и поэтому $G(10^k)=2k^2+2k$.