ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 201012

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	30
2	72
3	96
4	0,68
5	-0,75
6	12,5
7	7
8	6
9	0
10	368
11	7
12	2
13	а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$ б) $\frac{17\pi}{6};\ \frac{19\pi}{6}$
14	3
15	$[-4;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;4]$
16	7
17	680
18	$-\sqrt{1,4}$
19	а) 2592 б) нет в) все комбинации цифр 5568

©НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.RU.COM

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - 6\sin^2 x\right) = x$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

а) $\cancel{4^x} = \cancel{2^{2x}} - \sqrt{3}\cdot\cos x - 6\sin^2 x$

$6\sin^2 x + \sqrt{3}\cdot\cos x = 0$

$6\cdot(1-\cos^2 x) + \sqrt{3}\cdot\cos x = 0$

$-6\cos^2 x + \sqrt{3}\cdot\cos x + 6 = 0$

Пусть $\cos x = t$

$-6t^2 + \sqrt{3}\cdot t + 6 = 0$

$D = (\sqrt{3})^2 + 144 = 147 = (7\sqrt{3})^2$

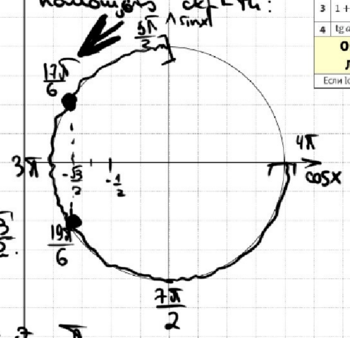
$t = \frac{-\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{-12}$

$t_1 = \frac{-8\sqrt{3}}{-12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad t_2 = \frac{6\sqrt{3}}{-12} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Нет решений $\quad x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окр-ти:



Получим число: $x = \frac{3\pi}{1} + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$

$x = 3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$

ОТВЕТ: а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$.

б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Источники:

Основная волна 2017

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ	
1	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2	$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
3	$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
4	$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

©НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.RU.COM

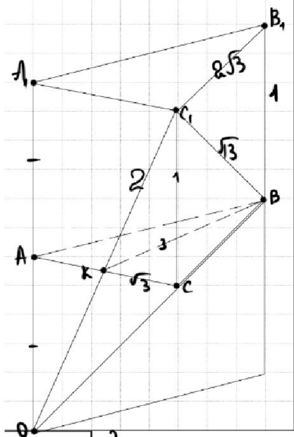
14 Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость α проходит через прямую BC_1 параллельно прямой AB_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра AC.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если призма правильная, сторона её основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 1.

Источники:

Гордин #14 2019



а) Пусть $AA_1 = AO$

$BO \parallel AB_1$

Построим OC_1

$OC_1 \cap AC = K$

Построим BK

$\Rightarrow BKC_1$ – сечение

Рассмотрим $\triangle A_1C_1O$.

A – середина A_1O

$A_1C_1 \parallel AK$

$\Rightarrow AK$ – ср. линия

$\Rightarrow AK = \frac{1}{2} A_1C_1 = \frac{1}{2} AC$

$\Rightarrow K$ – середина AC ■

б) $BC_1 = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$

$BK = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3$

$KC_1 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

Заметим, что в $\triangle BC_1K$ вып. т. Пифагора

$\sqrt{13}^2 = 2^2 + 3^2$

$\Rightarrow \triangle BC_1K$ – прямоугольный

$S_{\triangle BC_1K} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$

Ответ: 3

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$\log^2_{|x|} x^2 + \log_2 x^2 \le 8$

Источники:

Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018

Упростим

$(\log_{|x|} x^2)^2 + \log_2 x^2 \le 8$

$2^2 + \log_2 x^2 \le 8$

$\log_2 x^2 \le 4$

$\begin{cases} \log_2 x^2 \le \log_2 16 \\ |x| \ne 1 \\ |x| > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 \le 16 \\ x \ne \pm 1 \\ x \ne 0 \\ x \ne 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-4)(x+4) \le 0 \\ x \ne \pm 1 \\ x \ne 0 \end{cases}$ $\begin{cases} + \quad - \quad + \quad -4 \quad 4 \quad x \\ x \ne \pm 1 \\ x \ne 0 \end{cases}$

$\log_3 9 = 2$

$|x|^2 = x^2$

Найдём пересечение:

$-4 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad x$

Ответ: $[-4; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

©НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.RU.COM

16 В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность, CH — высота трапеции.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке BH.

б) Найдите диагональ AC, если средняя линия трапеции равна $2\sqrt{7}$, а $\angle AOD = 120°$, где O — центр окружности, вписанной в трапецию, а AD — большее основание.

а) ① BO – биссектриса ∠B (по св-ву кас)

② $BK = x = BP = CK$

$AP = y = AE = y$

$\Rightarrow \triangle ABH$ – равнобедр.

Пусть $\angle ABH = \alpha$

Тогда $\angle AHB = \alpha$ $\angle CBH = \alpha$ (накрест леж.) $\Rightarrow BH$ – бисс. угла B $\Rightarrow O \in BH$ ■

б) ① $AD + BC = AB + CD$

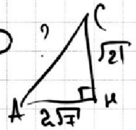
$AD + BC = 2CD \mid :2$

$\frac{AD+BC}{2} = CD$

Ср. линия $= CD$

② $AH = 2\sqrt{7} = AB$ (т.к. $\triangle ABH$ – равноб.)

③



$AC = 7$

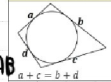
Источники:

Гордин #16 2019
Ященко 2018 (30 вар)

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

ПРИЗНАК ОПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА



Ответ: 7

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 6 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

D96BFF

Источники:

FIPI
osfipi
Ященко 2018
Шестаков 2017
Досрочная волна 2015

	часы	единицы товара
I	x^2	$3\cdot x$
II	y^2	$5\cdot y$

① $(x^2+y^2)\cdot 500 = 6\,800\,000$

$x^2 + y^2 = 13\,600$ (часов)

Выразим y:

$y^2 = 13600 - x^2$

$y = \sqrt{13600 - x^2}$

② Найдём $(3x+5y)_{наиб}$

$f(x) = 3x + 5\cdot\sqrt{13600 - x^2}$

Найдём наиб. знач. $f(x)$

$f'(x) = 3 + \frac{5\cdot(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{13600 - x^2}} = 0$

$3 - \frac{5x}{\sqrt{13600-x^2}} = 0$

$\frac{3}{1} = \frac{5x}{\sqrt{13600-x^2}}$

$3\sqrt{13600-x^2} = 5x \quad |^2$

$9\cdot(13600 - x^2) = 25x^2$

$9\cdot 13600 = 25x^2 + 9x^2$

$34\cdot x^2 = 9\cdot 13600$

$x^2 = \frac{9\cdot \overset{400}{\cancel{13600}}}{\cancel{34}}$

$x = 3\cdot 20 = 60$

$f'(x)$: + max −

$f(x)$: ↗ 60 ↘ x

$\Rightarrow f_{наиб} = f(60) =$

$= 3\cdot 60 + 5\cdot\sqrt{10000} = 680$

Ответ: 680

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

18 Найдите наименьшее значение параметра a, для которого существует хотя бы одна пара $(x; y)$ таких чисел x и y, что
$x^2 + 2y^2 - xy - ax + ay + a^2 \le 1.$

Источники:
Ященко 2018

$$x^2 - xy - ax + 2y^2 + ay + a^2 - 1 \le 0$$
$$x^2 - (a+y)\cdot x + 2y^2 + ay + a^2 - 1 \le 0$$
$$D_1 \ge 0$$
$$(a+y)^2 - 4\cdot(2y^2 + ay + a^2 - 1) \ge 0$$
$$a^2 + 2ay + y^2 - 8y^2 - 4ay - 4a^2 + 4 \ge 0$$
$$-7y^2 - 2ay - 3a^2 + 4 \ge 0$$
$$D_2 \ge 0$$
$$(-2a)^2 - 4\cdot(-7)\cdot(-3a^2 + 4) \ge 0$$
$$4a^2 - 84a^2 + 112 \ge 0$$
$$-80a^2 + 112 \ge 0 \quad | : 8$$
$$14 - 10a^2 \ge 0$$

$-\sqrt{1,4}$ $\sqrt{1,4}$ a

Ответ: $-\sqrt{1,4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Источники:
FIPI
osfipi
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018

а) $a\cdot b\cdot c\cdot d = 10\cdot(a+b+c+d)$
Среди цифр точно есть 5 и 2 или 4 или 6 или 8
Если $a=2$
$b=5$
$$2\cdot 5\cdot c\cdot d = 10\,(2+5+c+d)$$
$$cd = 7+c+d$$
$$cd - c = 7+d$$
$$c(d-1) = 7+d$$
$$c = \frac{7+d}{d-1}$$
$d=2$
$c=9$

б) $abcd = 175(a+b+c+d)$
Среди цифр точно есть 7 и 5 и 5
Если $a=7$
$b=5$
$c=5$
$$\cancel{7\cdot 5\cdot 5}\cdot d = \cancel{175}(7+5+5+d)$$
$$d = 17 + d$$
$$0\cdot d = 17$$
Нет решений

в) $a\cdot b\cdot c\cdot d = 50\cdot(a+b+c+d)$
Среди цифр точно есть 5 и 5 и 2/4/6/8
Если $a=5$
$b=5$
$c=2$
$$\cancel{5\cdot 5\cdot 2}\, d = \cancel{50}\cdot(12+d)$$
Нет реш.
При $a=5$
$b=5$
$c=6$
$$\cancel{150}^{3}d = \cancel{50}\cdot(16+d)$$
$$2d = 16$$
$$d = 8$$

5568
5586

5856
5865

5658
5685

6558
6585

6855

8655

8565
8556

Ответ:
а) 2592
б) Нет
в) 12 комбинаций цифр 5568

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

©НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.RU.COM

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

©НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.RU.COM