Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	42
2	0,4
3	5
4	0,5
5	8
6	31
7	-2
8	4,5
9	-8
10	0,72
11	15
12	14
13	а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$ б) $-\frac{7\pi}{6}$
14	$\arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)$
15	$[0;2]$
16	8
17	26
18	$(-\infty;-6]\cup[0;+\infty)$
19	а) да б) нет в) 72

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x + 4 = 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

C11709

Источники:

FIPI
osfipi
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2019
Основная волна 2016
Пробный ЕГЭ 2014
Основная волна (Резерв) 2012

а) $2\sin^2 x + 4 = -3\sqrt{3}\cos x$

$2\cdot(1-\cos^2 x) + 3\sqrt{3}\cos x + 4 = 0$

$-2\cos^2 x + 3\sqrt{3}\cos x + 6 = 0 \quad |:(-1)$

$2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x - 6 = 0$

Пусть $\cos x = t$

$2t^2 - 3\sqrt{3}t - 6 = 0$

$D = 27 + 48 = 75 = \sqrt{75}^2 = (\sqrt{25\cdot 3})^2 (5\sqrt{3})^2$

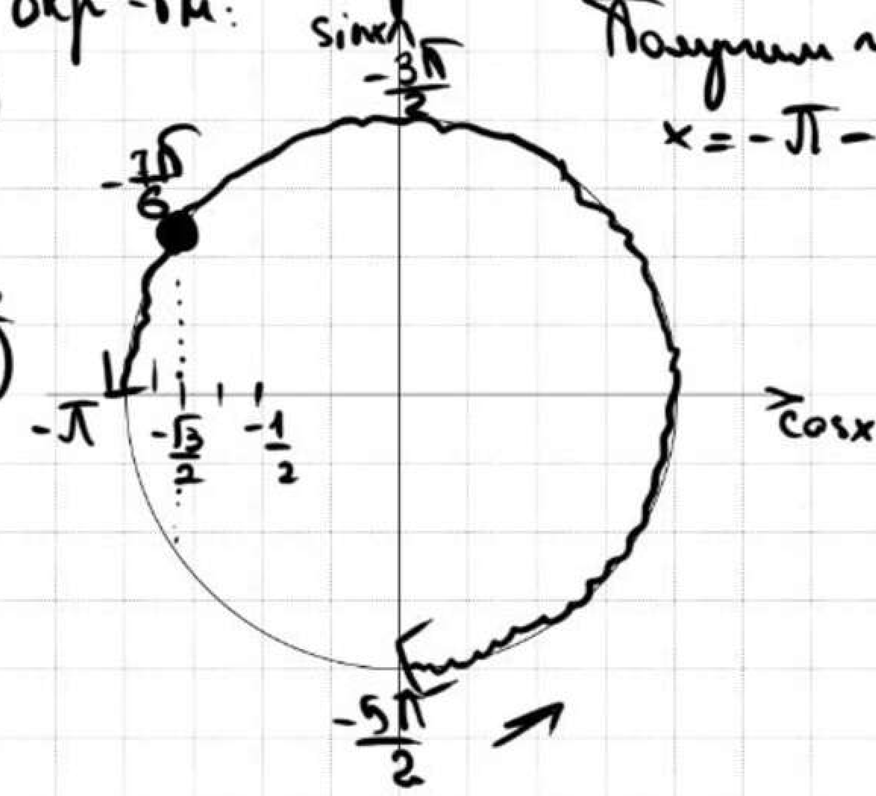
$t = \frac{3\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{4}$

$t_1 = 2\sqrt{3}$ $\qquad$ $t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $-\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{4}\,2}$

$\cos x = 2\sqrt{3}$ $\qquad$ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Нет решений $\qquad$ $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окр-ти:



Получим числа:

$x = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

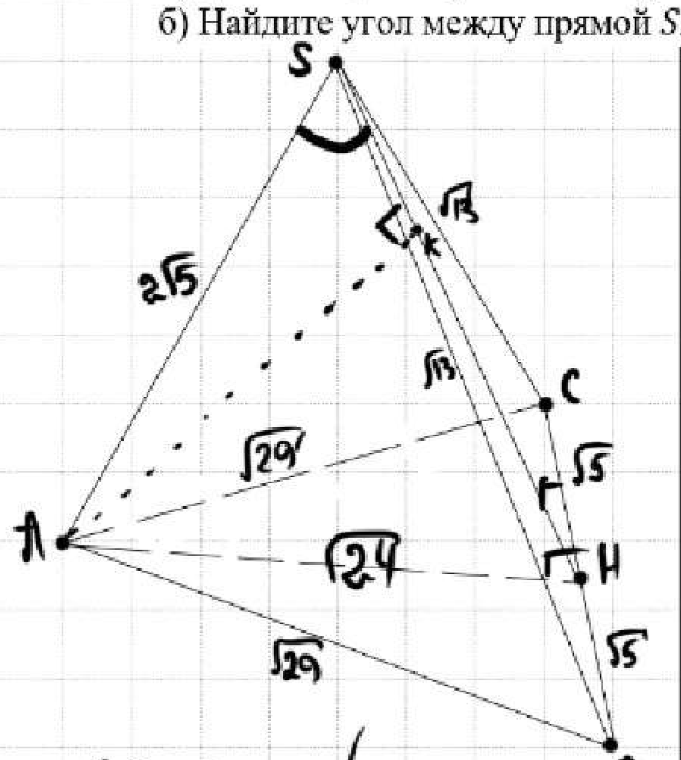
б) $-\frac{7\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 200921

14 В пирамиде $SABC$ известны длины рёбер: $AB = AC = \sqrt{29}$, $BC = SA = 2\sqrt{5}$, $SB = SC = \sqrt{13}$.

а) Докажите, что прямая SA перпендикулярна прямой BC.
б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC.

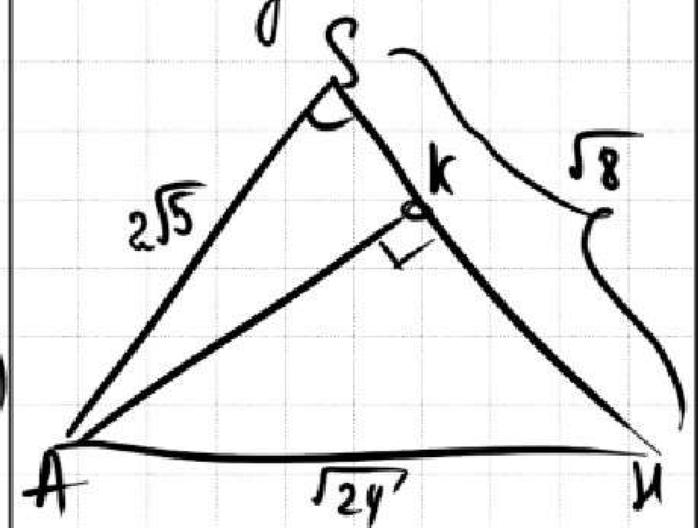


а) $BC \perp AH$ (т.к. AH и SH – высоты равноб. тр.-в)
$BC \perp SH$

$\Rightarrow BC \perp (ASH)$
$BC \perp SA$ ■

б) Пусть AK – перп-р к SH
SK – проекция прямой SA на пл. (SBC)

Рассмотрим $\triangle ASH$:



$$\cos\angle ASH = \frac{20+8-24}{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{10}}$$

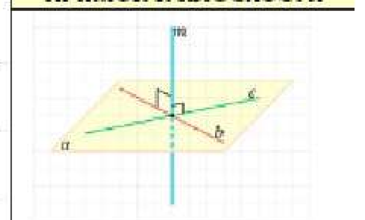
$$\angle ASH = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Источники:
Досрочная волна 2019

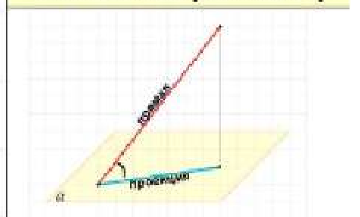
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

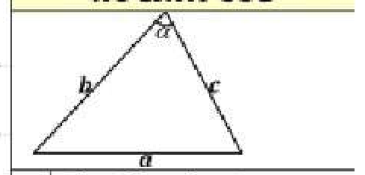
Если $\begin{cases} m \perp b \\ m \perp c \\ b \cap c \end{cases}$, то $m \perp \alpha$

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ (СПОСОБ #1)



Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



1	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
2	$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

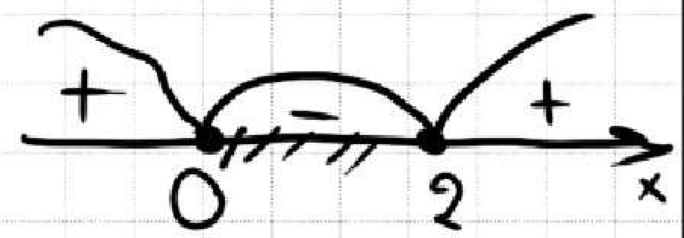
15 Решите неравенство
$15^x - 9 \cdot 5^x - 3^x + 9 \leq 0$

$5^x\cdot(3^x-9)-(3^x-9)\leq 0$

$(3^x-9)\cdot(5^x-1)\leq 0$

$3^x-9=0$
$3^x=3^2$
$x=2$

$5^x-1=0$
$5^x=1$
$5^x=5^0$
$x=0$



Ответ: $[0;2]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

Источники:
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

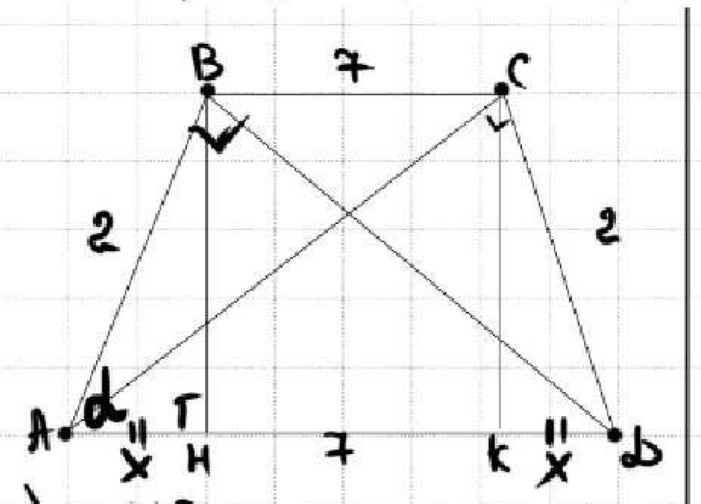
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 200921

16 В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

а) Докажите, что $AB = CD$.

б) Найдите AD, если $AB = 2$, $BC = 7$.

Источники:
Основная волна 2018
Основная волна (Резерв) 2018



а) $\angle ABD = 90^\circ$ – эти углы опир. на AD
$\angle ACD = 90^\circ$

=> Можно списать окр-ть около ABCD с диаметром AD

ABCD – трапеция, впис. в окр. т.е. равноб.

=> AB = CD

б) $\triangle ABH \sim \triangle ABD$ по 2 углам (α и 90°)

$$\frac{2^{\text{гип}}}{7+2x^{\text{гип}}} = \frac{x^{\text{прил}}}{2^{\text{прил}}}$$

$$7x + 2x^2 = 4$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0$$

$$D = 9^2$$

$$x = \frac{-7+9}{4} = 0{,}5$$

$$AD = 8$$

Ответ: 8

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2017 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 2 млн рублей.

Источники:
Основная волна 2016

Пусть март – месяц платежа

Дата		Сумма долга
и	17	S
я	18	$1{,}25 \cdot S$
м	18	=> была выплата $0{,}55 \cdot S$ — наиб.
и	18	$0{,}7 \cdot S$
я	19	$0{,}7 S \cdot 1{,}25 = 0{,}875 S$
м	19	=> б.в. $0{,}475 S$ — наим
и	19	$0{,}4 \cdot S$
я	20	$0{,}4 S \cdot 1{,}25 = 0{,}5 \cdot S$
м	20	=> б.в. $0{,}5 \cdot S$
и	20	0

$$0{,}55 S - 0{,}475 \cdot S < 2$$

$$0{,}075 \cdot S < 2$$

$$\frac{75}{1000} \cdot S < 2 \quad \Big| \cdot 1000 : 75$$

$$S < \frac{2 \cdot 1000}{75}$$

$$S < \frac{80}{3}$$

$$S < 26\frac{2}{3}$$

$$S_{\text{наиб. цел.}} = 26$$

Ответ: 26

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x - 3 - a)\cdot\cos x - 2{,}5\cos 2x + 1{,}5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

Источники:
FIPI
Досрочная волна 2013

$4\cos^2 x - 3\cos x - a\cdot\cos x - 2{,}5\underbrace{\cos 2x}_{(2\cos^2 x - 1)} + 1{,}5 = 0$

$4\cos^2 x - 3\cos x - a\cdot\cos x - 5\cos^2 x + 2{,}5 + 1{,}5 = 0$

$-\cos^2 x - 3\cdot\cos x - a\cdot\cos x + 4 = 0$

Пусть $\cos x = t$ $\quad -1 \le t \le 1$

$t^2 + 3t + a\cdot t - 4 = 0$

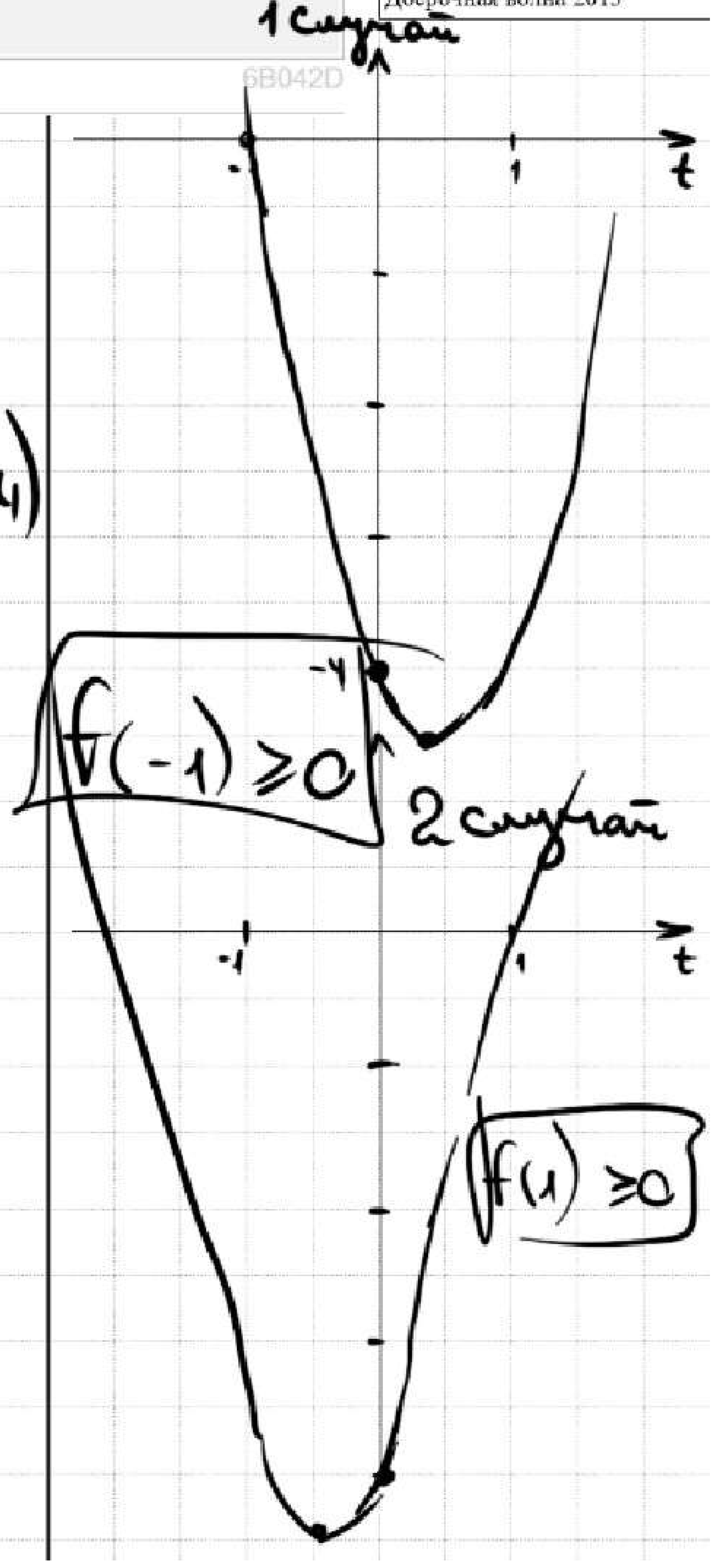
$t^2 + (3+a)\cdot t - 4 = 0$

График - парабола, ветви ↑, проходит через $(0;-4)$

$$\left[\begin{array}{l} f(-1) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 - (3+a) - 4 \ge 0 \\ 1 + (3+a) - 4 \ge 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -a \ge 6 \\ a \ge 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a \le -6 \\ a \ge 0 \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Готовясь к экзамену, Вася и Петя решали задачи из сборника, и каждый из них решил все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 5 дней?
б) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 10 дней?
в) Какое наименьшее число задач могло быть в сборнике, если известно, что каждый из них решал задачи более 6 дней, в первый день Вася решил больше задач, чем Петя, а за семь дней Петя решил больше задач, чем Вася.

Источники:
Досрочная волна 2019

а) Вася решил

$\underbrace{a_1 \quad a_1+1 \quad a_1+2 \quad a_1+3 \quad a_1+4}_{5a_1 + 10}$

Петя решил

$\underbrace{c_1 \quad c_1+2 \quad c_1+4 \quad c_1+6 \quad c_1+8}_{5c_1 + 20}$

$5a_1 + 10 = 5c_1 + 20$

$5a_1 = 5c_1 + 10 \quad |:5$

$a_1 = c_1 + 2$

Пусть $c_1 = 3$

$a_1 = 5$

Каждый решил 35 задач

б) Вася решил

$a_1\ a_1+1\ a_1+2 \ldots a_1+9$

Вася всего решил

$10\cdot a_1 + \frac{1+9}{2}\cdot 9$

$10\cdot a_1 + 45$

Петя решил

$c_1\ c_1+2 \ldots c_1+18$

Петя всего решил

$10c_1 + \frac{2+18}{2}\cdot 9$

$10c_1 + 90$

$10\cdot a_1 + 45 = 10c_1 + 90$

$10a_1 = 10c_1 + 45$

$a_1 = c_1 + 4{,}5$

нет решений в целых числах

Ответ:
а) Да
б) Нет
в)

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 200921

в) Какое наименьшее число задач могло быть в сборнике, если известно, что каждый из них решал задачи более 6 дней, в первый день Вася решил больше задач, чем Петя, а за семь дней Петя решил больше задач, чем Вася.

Вася решил за 7 дней $a_1 \quad a_1+1 \quad a_1+2 \quad a_1+3 \quad a_1+4 \quad a_1+5 \quad a_1+6$

$\Rightarrow$ Вася всего решил: $\frac{a_1+a_1+6}{2}\cdot 7 = \frac{2a_1+6}{2}\cdot 7 = 7a_1+21$

Петя решил за 7 дней $c_1 \quad c_1+2 \quad \dots \quad c_1+12$

$\Rightarrow$ Петя всего решил: $\frac{c_1+c_1+12}{2}\cdot 7 = \frac{2c_1+12}{2}\cdot 7 = 7c_1+42$

$$\begin{cases} a_1 > c_1 \\ 7c_1 + \cancel{42}^{21} > 7a_1 + \cancel{21} \end{cases} \quad \Big| -21$$

$$\begin{cases} a_1 > c_1 \\ c_1 + 3 > a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 > c_1 \\ a_1 < c_1 + 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Разница между первым числом числом Васи и Пети 1 или 2

Пусть Петя решал задачи 7 дней

Петя решил 1 3 5 7 9 11 13 $\Rightarrow$ Всего 49 задач

Если $a_1 - c_1 = 1$

Вася решил 2 3 4 5 6 7 8 9 (10) $\Rightarrow$ Всего 35 задач, 44 задач, 54 задач

Петя решил $c_1 \quad c_1+2 \quad \dots \quad c_1+12$ $\Rightarrow$ Всего $7c_1+42$

Вася решил $c_1+1 \quad c_1+2 \quad c_1+3 \quad c_1+4 \quad c_1+5 \quad c_1+6 \quad c_1+7 \quad \underbrace{c_1+8}_{=14}$ $\Rightarrow$ Всего $7c_1+28$

$\Rightarrow$ через 7 дней между ними дистанция 14 задач
За 2 и более шагов дистанция не ликвид.
за 1 шаг можно

$c_1 + 8 = 14$

$c_1 = 6$

$\Rightarrow 7c_1 + 42 = 7\cdot 6 + 42 = \boxed{84}$ задачи

Если $a_2 - c_1 = 2$

Петя решил $c_1 \quad c_1+2 \quad c_1+4 \quad c_1+6 \quad c_1+8 \quad c_1+10 \quad c_1+12$ $\Rightarrow$ Всего $7c_1+42$

Вася решил $c_1+2 \quad c_1+3 \quad c_1+4 \quad c_1+5 \quad c_1+6 \quad c_1+7 \quad c_1+8 \quad c_1+9$ $\Rightarrow$ Всего $7c_1+35$

$\Rightarrow$ через 7 дней между ними дистанция 7 задач
$\Rightarrow$ дистанцию 7 задач ликвидировать невозможно

Пусть Петя решал задачи 8 дней

Если $a_1 - c_1 = 1$

Петя решил $c_1 \quad c_1+2 \quad \dots \quad c_1+14$ Всего $8c_1+56$

Вася решил $c_1+1 \quad c_1+2 \quad c_1+3 \quad \dots \quad c_1+8 \quad c_1+9$ Всего $8c_1+36$

$\Rightarrow$ через 8 дней между ними 20 задач дистанция и её можно ликвидировать только за 1 день, т.е.

$c_1 + 9 = 20$

$c_1 = 11$

$\Rightarrow 8\cdot c_1 + 56 = \boxed{144}$ задачи

Если $a_1 - c_1 = 2$

Петя решил $c_1 \quad c_1+2 \quad \dots \quad c_1+14$ Всего $8\cdot c_1+56$

Вася решил $c_1+2 \quad c_1+3 \quad \dots \quad c_1+9 \quad c_1+10$ Всего $8\cdot c_1+44$

$\Rightarrow$ через 8 дней между ними 12 задач дистанция и её можно ликвидировать только за 1 день, т.е.

$c_1 + 10 = 12$

$c_1 = 2$

$\Rightarrow 8\cdot 2 + 56 = \boxed{72}$ задачи

Пусть Петя решал задачи 9 дней

Если $a_1 - c_1 = 1$

Петя решил $c_1 \quad c_1+2 \quad c_1+4 \quad c_1+6 \quad c_1+8 \quad \dots \quad c_1+16$

Всего $\boxed{9c_1 + 72}$

Заметим, что $9c_1 + 72 \geq 81$

Если Петя решал задачи 10 дней

$$\frac{c_1 + c_1+18}{2}\cdot 10 = 10c_1+90$$

$10c_1 + 90 \geq 100$

$\Rightarrow$ Увеличивать кол-во дней не имеет смысла при поиске наименьшего числа задач

Ответ: а) да б) нет в) 72.

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.