11 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

1. Разобьём ряд натуральных чисел на группы:

$$(1),\ (2,3),\ (4,5,6)\ (7,8,9,10),\ \ldots$$

Обозначим S_n сумму n-ой группы чисел. Найдите $S_{16}-S_4-S_1$.

Решение. Заметим, что в n-ой группе n членов и первый равен $\frac{n(n-1)}{2}+1$. Последний член n-ой группы $\frac{n(n-1)}{2}+1+(n-1)=\frac{n^2+n}{2}$. Значит, $S_n=\left(\frac{n(n-1)}{2}+1+\frac{n(n+1)}{2}\right)\cdot\frac{n}{2}=\frac{n(n^2+1)}{2}$. Следовательно, $S_{16}-S_4-S_1=2056-34-1=2021$.

2. Докажите, что если при любом значении x и постоянном c имеет место равенство $f(x+c)=\dfrac{2}{1+f(x)}-1$, то $f(x)$ — периодическая функция.

Решение. Из равенства $f(x+c)=\dfrac{2}{1+f(x)}-1$ легко получается равенство $f(x+c)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$. Значит, $f(x+2c)=\dfrac{1-f(x+c)}{1+f(x+c)}=$

$$\frac{1-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}=\frac{1+f(x)-1+f(x)}{1+f(x)+1-f(x)}=f(x).$$

3. Хорда AB окружности радиуса R продолжена на отрезок $BC = AB$, точка C соединена отрезком с центром окружности O, причем CO пересекает окружность в точке D. Доказать, что $CD = 4R\sin 18^\circ$, если известно, что на AB можно построить квадрат, вписанный в данную окружность.

Решение. Пусть продолжение CO пересекает окружность в точке E. Тогда по теореме о двух секущих $CA \cdot CB = CE \cdot CD$. Так как $AB = BC = R\sqrt{2}$, а $CE = 2R + CD$, то

$$2R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} = (2R + CD) \cdot CD,$$

$$CD^2 + 2R \cdot CD - 4R^2 = 0.$$

Значит, $CD = R(\sqrt{5} - 1)$.

Так как $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ$ и $\sin 72^\circ = 4\sin 18^\circ \cos 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ)$, то $8\sin^3 18^\circ - 4\sin 18^\circ - 1 = 0$. Получаем уравнение $8x^3 - 4x + 1 = 0$, где $x = \sin 18^\circ$. Подбором получаем $x = 1/2$. Т.е. $8x^3 - 4x + 1 = (x - 1/2) \cdot (8x^2 + 4x - 2)$. Решая квадратное уравнение, получаем

$$x = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Очевидно, удовлетворяет только $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Откуда и получаем то, что требуется.

4. Найдите все решения уравнения $x^2 - 12 \cdot [x] + 20 = 0$, где $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x.

Решение. Пусть $[x] = a$. Тогда $a \le x < a+1$. Следовательно, $a^2+20 \le x^2 + 20 < (a+1)^2 + 20$. Поэтому $a^2 + 20 \le 12 \cdot a < a^2 + 2a + 21$. Получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - 12a + 20 \le 0, \\ a^2 - 10a + 21 > 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (a-10)(a-2) \le 0, \\ (a-3)(a-7) > 0; \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \in [2; 10], \\ a \in (-\infty; 3) \cup (7; +\infty); \end{array} \right. \Rightarrow a \in \{2; 8; 9; 10\}.$$

Поскольку $x^2 + 20 = 12a$, то x принимает значения $2;\ 2\sqrt{19};\ 2\sqrt{22};\ 10.$

5. В каждую ячейку таблицы 6×6 поместили числа $+1$ или -1 так, что произведение всех чисел любой строки и любого столбца является положительным. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Заполним квадрат 5×5 числами $+1$ и -1 произвольно. Числа в последнем столбце выберем так, чтобы по первым 5 строкам произведение было положительным, аналогично числа в последней строке по первым 5 столбцам выберем так, чтобы произведение было положительным. Осталось выбрать последнее число.

Обозначим числа, стоящие в последнем столбце, кроме клетки с координатами $(6,6)$ $a_1, ..., a_5$. А числа в последней строке $b_1, ..., b_5$, кроме клетки с координатами $(6,6)$, а число в клетке с координатами $(6,6)$ — c.

Перемножим первые 5 строк и первые 5 столбцов, получим положительное число в силу выбора последней строчки и последнего стобца. С другой стороны, это произведение равно произведению $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_5 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_5$. Значит, это произведение положительно, т.е. $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_5$ и $b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_5$ одного знака. Если $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_5 > 0$, то $c = 1$, если $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_5 < 0$, то $c = -1$.

Значит, если квадрат 5×5 заполнен, то квадрат 6×6 определяется однозначно, а заполнить квадрат 5×5 чилами $+1$ и -1 можно 2^{25} способами.