ВЗЛЁТ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

7 класс

8 заданий по 5 баллов
(максимум 40 баллов)
продолжительность 80 минут

Задание №1. Произведение цифр

Вариант 1 задания №1

Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого разные, а их произведение равно числу 3240.

Решение:

В разложении 3240 на простые множители есть четыре тройки, пятерка и три двойки.

$$3240 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$$

У нас имеется 9 цифр, из которых может состоять число. Цифр, делящихся на 3 всего три (9, 6 и 3), и чтобы набрать четыре тройки в простых делителях, мы должны использовать их все. Цифру 5 мы должны использовать, чтобы обеспечить делимость на 5. Остается две двойки (одна из трех уже есть в цифре 6). Цифру 8 мы использовать не можем, так как тогда будет уже три двойки; значит, мы должны взять цифру 4. Таким образом, мы обязаны использовать 9,6,3,4,5. Цифры 7, 8 и 2 не возможны, так как тогда в разложении будет больше двоек или будет семерка. Цифру 1 можно взять один раз. Итак, максимальное число 965431.

Ответ: 965431

Вариант 2 задания №1

Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого разные, а их произведение равно числу 3780.

Решение:

В разложении 3780 на простые множители есть три тройки, семерка, пятерка и две двойки.

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

У нас имеется 9 цифр, из которых может состоять число. Цифр, делящихся на 3 всего три (9 6 и 3), и чтобы набрать три тройки в простых делителях, мы должны использовать 9 и 3 или 9 и 6. Цифры 5 и 7 мы должны использовать, чтобы обеспечить делимость на 5 и 7. Если мы берем 9 и 3, то остается две двойки, и мы вынуждены взять число 4. Если же мы берем 9 и 6, то остается одна двойка (одна из двух уже есть в цифре 6). Цифры 8 и 4 мы использовать не можем, так как тогда будет больше двоек, чем нужно. То есть мы можем взять 9, 6, 5, 7 и 2 или 9, 4, 5, 7 и 3. Цифру 1 можно взять один раз. Поскольку число с 6 и 2 будет больше, чем с 4 и 3, получаем, что максимальное число 976521.

Ответ: 976521

Вариант 3 задания №1

Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого разные, а их произведение равно числу 5670.

Решение:

В разложении 5670 на простые множители есть четыре тройки, пятерка, семерка и двойка.

$$5670 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

У нас имеется 9 цифр, из которых может состоять число. Цифр, делящихся на 3 всего три (9 6 и 3), и чтобы набрать четыре тройки в простых делителях, мы должны использовать их все. Цифры 5 и 7 мы должны использовать, чтобы обеспечить делимость на 5. Цифры 8 и 4 мы использовать не можем, так как тогда будет уже три или две двойки, значит мы должны взять цифру 2. Итак, мы обязаны использовать 963752. Цифру 1 можно взять один раз. Итак, максимальное число 976531.

Ответ: 976531

Задание №2. Таблица

Вариант 1 задания №2

В таблице 12 строк и несколько столбцов. Егор расставил в клетки таблицы числа так, что сумма чисел в каждой строке равна 9, а сумма чисел в каждом столбце равна 6. Сколько столбцов в таблице?

Решение:

Пусть:

X – количество строк в таблице,

Y – сумма чисел в каждой строке,

Z – сумма чисел в каждом столбце,

N – неизвестное число столбцов.

Посчитаем двумя способами сумму всех чисел в таблице. Если считать по строкам, она будет равна XY; если по столбцам – то NZ.

Значит, $NZ = XY$, откуда $N = XY/Z$.

Ответ: 18

Вариант 2 задания №2

В таблице 14 строк и несколько столбцов. Коля расставил в клетки таблицы числа так, что сумма чисел в каждой строке равна 12, а сумма чисел в каждом столбце равна 21. Сколько столбцов в таблице?

Решение:

Пусть:

X – количество строк в таблице,

Y – сумма чисел в каждой строке,

Z – сумма чисел в каждом столбце,

N – неизвестное число столбцов.

Посчитаем двумя способами сумму всех чисел в таблице. Если считать по строкам, она будет равна XY; если по столбцам – то NZ.

Значит, $NZ = XY$, откуда $N = XY/Z$.

Ответ: 8

Вариант 3 задания №2

В таблице 10 строк и несколько столбцов. Миша расставил в клетки таблицы числа так, что сумма чисел в каждой строке равна 8, а сумма чисел в каждом столбце равна 4. Сколько столбцов в таблице?

Решение:

Пусть:

X – количество строк в таблице,

Y – сумма чисел в каждой строке,

Z – сумма чисел в каждом столбце,

N – неизвестное число столбцов.

Посчитаем двумя способами сумму всех чисел в таблице. Если считать по строкам, она будет равна XY; если по столбцам – то NZ.

Значит, $NZ = XY$, откуда $N = XY/Z$.

Ответ: 20

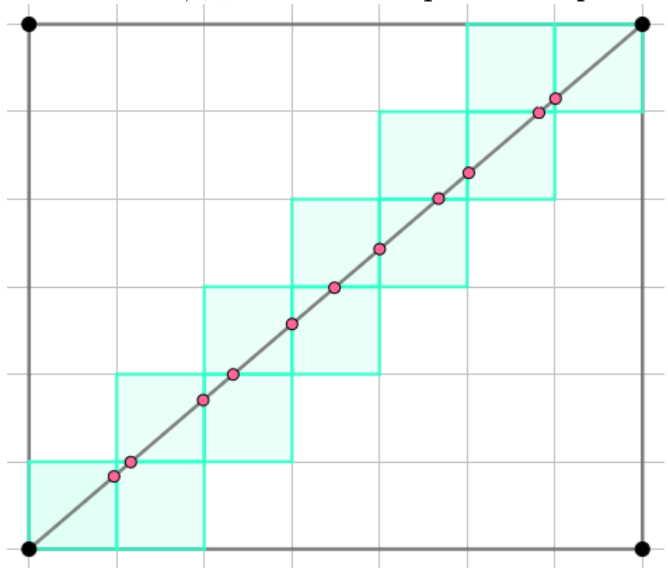
Задание №3. Диагональ в клеточном прямоугольнике

Вариант 1 задания №3

В клетчатом прямоугольнике 2020×2021 провели диагональ, соединив отрезком противоположные вершины. После этого закрасили в чёрный цвет все клеточки, которые этот отрезок пересекает (т.е. содержит точки внутри клеточки). Сколько клеточек оказалось закрашено?

Решение:

Докажем более общий факт: в клетчатом прямоугольнике $M \times N$, где M, N — взаимно простые натуральные числа, диагональ пересекает ровно $M + N - 1$ клеточек.



Предположим для удобства, что M — длина горизонтальной стороны, а N — длина вертикальной стороны. Тогда диагональ пересекается с $M-1$ *вертикальной* линией и с $N-1$ *горизонтальной* линией. Всего, таким образом, на диагонали ровно $M+N-2$ точек пересечения с линиями, и эти точки разбивают диагональ на $M+N-1$ отрезков. Каждый отрезок соответствует ровно одной из пересечённых клеточек.

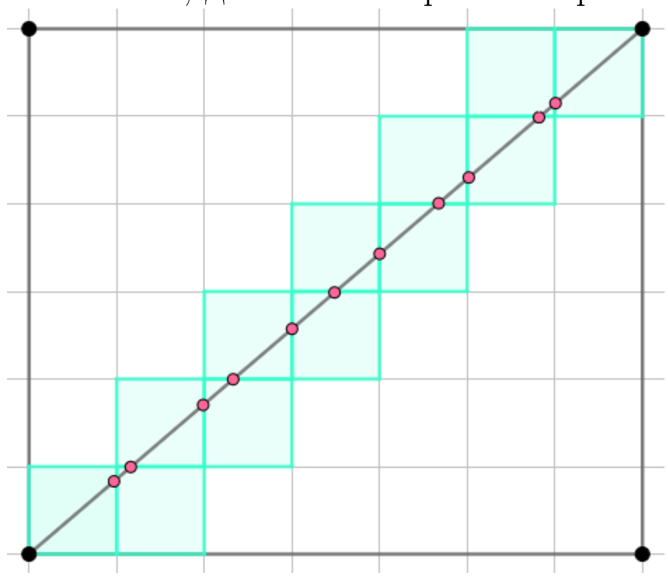
Ответ: 4040

Вариант 2 задания №3

В клетчатом прямоугольнике 2021×2022 провели диагональ, соединив противоположные вершины отрезком. После этого закрасили в чёрный цвет все клеточки, которые этот отрезок пересекает (т.е. содержит точки внутри клеточки). Сколько клеточек оказалось закрашено?

Решение:

Докажем более общий факт: в клетчатом прямоугольнике $M \times N$, где M, N — взаимно простые натуральные числа, диагональ пересекает ровно $M + N - 1$ клеточек.



Предположим для удобства, что M — длина горизонтальной стороны, а N — длина вертикальной стороны. Тогда диагональ пересекается с $M-1$ *вертикальной* линией и с $N-1$ *горизонтальной* линией. Всего, таким образом, на диагонали ровно $M+N-2$ точек пересечения с линиями, и эти точки разбивают диагональ на $M+N-1$ отрезков. Каждый отрезок соответствует ровно одной из пересечённых клеточек.

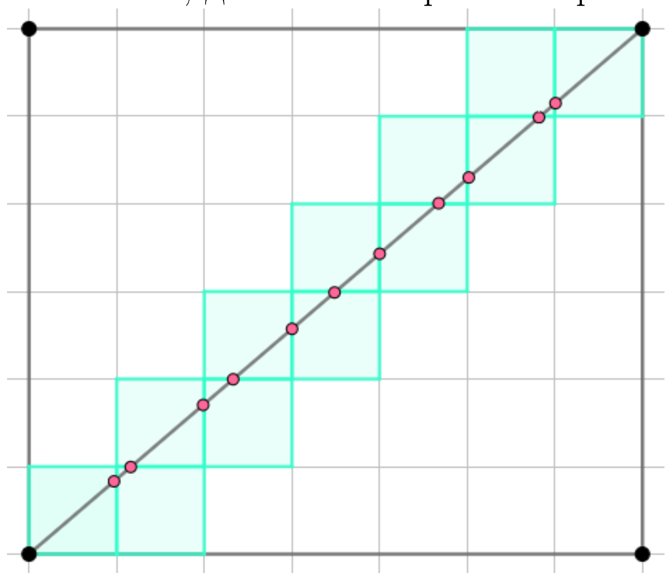
Ответ: 4042

Вариант 3 задания №3

В клетчатом прямоугольнике 2019×2020 провели диагональ, соединив противоположные вершины отрезком. После этого закрасили в чёрный цвет все клеточки, которые этот отрезок пересекает (т.е. содержит точки внутри клеточки). Сколько клеточек оказалось закрашено?

Решение:

Докажем более общий факт: в клетчатом прямоугольнике $M \times N$, где M, N — взаимно простые натуральные числа, диагональ пересекает ровно $M + N - 1$ клеточек.



Предположим для удобства, что M — длина горизонтальной стороны, а N — длина вертикальной стороны. Тогда диагональ пересекается с $M - 1$ *вертикальной* линией и с $N - 1$ *горизонтальной* линией. Всего, таким образом, на диагонали ровно $M + N - 2$ точек пересечения с линиями, и эти точки разбивают диагональ на $M + N - 1$ отрезков. Каждый отрезок соответствует ровно одной из пересечённых клеточек.

Ответ: 4038

Задание №4. Старая книга

Вариант 1 задания №4

Вы помните бумажные книги? Особенно старые... каковы они на ощупь, их запах, присутствие чего-то незримого, но вечного... Кстати, в бумажных книгах на каждом листе находятся две страницы.

Маша нашла на чердаке кусок из старой (бумажной!) книги, первая его страница имеет номер 187, а последняя записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько ЛИСТОВ в этом куске?

Решение:

Поскольку первая страница куска нечётная, последняя должна быть чётной и с бОльшим номером. Из тех же цифр можно составить только один номер, удовлетворяющий условиям: 718. Следовательно, число страниц равно $718 - 186 = 532$ (мы вычитаем только те страницы, которых не хватает – таковых 186), а число листов вдвое меньше: $532 : 2 = 266$.

Ответ: 266 листов

Вариант 2 задания №4

Вы помните бумажные книги? Особенно старые... каковы они на ощупь, их запах, присутствие чего-то незримого, но вечного... Кстати, в бумажных книгах на каждом листе находятся две страницы.

Юля нашла на чердаке кусок из старой (бумажной!) книги, первая его страница имеет номер 387, а последняя записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько ЛИСТОВ в этом куске?

Решение:

Поскольку первая страница куска нечётная, последняя должна быть чётной и с бОльшим номером. Из тех же цифр можно составить только один номер, удовлетворяющий условиям: 738. Следовательно, число страниц равно $738 - 386 = 352$ (мы вычитаем только те страницы, которых не хватает – таковых 386), а число листов вдвое меньше: $352 : 2 = 176$.

Ответ: 176 листов

Вариант 3 задания №4

Вы помните бумажные книги? Особенно старые... каковы они на ощупь, их запах, присутствие чего-то незримого, но вечного... Кстати, в бумажных книгах на каждом листе находятся две страницы.

Катя нашла на чердаке кусок из старой (бумажной!) книги, первая его страница имеет номер 365, а последняя записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько ЛИСТОВ в этом куске?

Решение:

Поскольку первая страница куска нечётная, последняя должна быть чётной и с бОльшим номером. Из тех же цифр можно составить только один номер, удовлетворяющий условиям: 536. Следовательно, число страниц равно $536 - 364 = 172$ (мы вычитаем только те страницы, которых не хватает – таковых 364), а число листов вдвое меньше: $172 : 2 = 86$.

Ответ: 86 листов

Задание №5. Группы с равными произведениями

Вариант 1 задания №5

На доске написаны последовательные натуральные числа от 3 до 14. Артём хочет разбить числа на две группы, произведения в которых равны, при этом часть чисел разрешается стереть. Какое минимальное количество чисел придётся стереть?

Решение:

Из чисел на доске ровно одно делится на 13 и ровно одно на 11, поэтому 13 и 11 придется стереть, иначе равенства произведений не получится. Кроме того, в произведение всех указанных чисел тройка входит 5 раз, поэтому тройки на два произведения разложить нельзя, одно из таких чисел придется вычеркнуть. Значит, вычеркнуть придется как минимум три числа.

Распределить на две группы можно так: 7, 5, 12, 6, 4 и 14, 10, 9, 8.

Ответ: 3

Вариант 2 задания №5

На доске написаны последовательные натуральные числа от 1 до 12. Наташа хочет разбить числа на две группы, произведения в которых равны, при этом часть чисел разрешается стереть. Какое минимальное количество чисел придётся стереть?

Решение:

Из чисел на доске ровно одно делится на 11 и ровно одно на 7, поэтому 7 и 11 придется стереть, иначе равенства произведений не получится. Кроме того, в произведение всех указанных чисел тройка входит 5 раз, поэтому тройки на два произведения разложить нельзя, одно из таких чисел придется вычеркнуть. Значит, вычеркнуть придется как минимум три числа.

Распределить на две группы можно так: 4, 5, 12, 6 и 10, 9, 8, 2.

Ответ: 3

Вариант 3 задания №5

На доске написаны последовательные натуральные числа от 5 до 17. Илья хочет разбить числа на две группы, произведения в которых равны, при этом часть чисел разрешается стереть. Какое минимальное количество чисел придётся стереть?

Решение:

Из чисел на доске ровно одно делится на 11, ровно одно на 13 и ровно одно на 17, поэтому 11, 13 и 17 придется стереть, иначе равенства произведений не получится. Кроме того, в произведение всех указанных чисел пятерка входит 3 раза, поэтому пятерки на два произведения разложить нельзя, одно из таких чисел придется вычеркнуть. Значит, вычеркнуть придется как минимум четыре числа.

Распределить на две группы можно так: 10, 14, 9, 16, и 5, 7, 6, 8, 12.

Ответ: 4

Задание №6. Метро

Вариант 1 задания №6

Король приказал построить в городе метро, причём в нем должно быть 101 линия и любые две линии должны пересекаться ровно в одной общей пересадочной станции. Кроме того, ровно в одной станции должны сходиться три линии, а больше таких станций быть не должно. Сколько пересадочных станций придётся построить?

Решение:

Если бы не было станций, через которые проходили бы более двух линий, то в городе должно было бы быть $\dfrac{101 \cdot 100}{2} = 5050$ станций (каждая из линий пересекается с остальными 100, каждое пересечение считается два раза (для одной линии и для другой), поэтому делим на 2).

Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно три линии, то эта пересадочная станция объединяет три двойных, и тогда ответ $5050 - 2 = 5048$.
Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно $k > 3$ линий, то эта пересадочная станция объединяет $\dfrac{k(k-1)}{2}$ двойных, и тогда ответ $5050 - \dfrac{k(k-1)}{2} + 1$. Засчитывались все ответы, получающиеся по этой формуле при $k \in \{3, 4, 5, ..., 101\}$. Не засчитывались ответы, при которых станций, через которые проходит три или более линий, более одной, т.к. если через станцию проходит $k > 3$ линий, то и 3 линии через неё проходят.

Ответ: 5048, 5045, 5041, 5036, 5030, 5023, 5015, 5006, 4996, 4985, 4973, 4960, 4946, 4931, 4915, 4898, 4880, 4861, 4841, 4820, 4798, 4775, 4751, 4726, 4700, 4673, 4645, 4616, 4586, 4555, 4523, 4490, 4456, 4421, 4385, 4348, 4310, 4271, 4231, 4190, 4148, 4105, 4061, 4016, 3970, 3923, 3875, 3826, 3776, 3725, 3673, 3620, 3566, 3511, 3455, 3398, 3340, 3281, 3221, 3160, 3098, 3035, 2971, 2906, 2840, 2773, 2705, 2636, 2566, 2495, 2423, 2350, 2276, 2201, 2125, 2048, 1970, 1891, 1811, 1730, 1648, 1565, 1481, 1396, 1310, 1223, 1135, 1046, 956, 865, 773, 680, 586, 491, 395, 298, 200, 101, 1

Вариант 2 задания №6

Король приказал построить в городе метро, причём в нем должно быть 102 линии и любые две линии должны пересекаться ровно в одной общей пересадочной станции. Кроме того, ровно в одной станции должны сходиться три линии, а больше таких станций быть не должно. Сколько пересадочных станций придётся построить?

Решение:

Если бы не было станций, через которые проходили бы более двух линий, то в городе должно было бы быть $\frac{102 \cdot 101}{2} = 5151$ станций (каждая из линий пересекается с остальными 101, каждое пересечение считается два раза (для одной линии и для другой), поэтому делим на 2).

Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно три линии, то эта пересадочная станция объединяет три двойных, и тогда ответ $5151 - 2 = 5149$.

Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно $k > 3$ линий, то эта пересадочная станция объединяет $\frac{k(k-1)}{2}$ двойных, и тогда ответ $5151 - \frac{k(k-1)}{2} + 1$.

Засчитывались все ответы, получающиеся по этой формуле при $k \in \{3, 4, 5, ..., 102\}$. Не засчитывались ответы, при которых станций, через которые проходит три или более линий, более одной, т.к. если через станцию проходит $k > 3$ линий, то и 3 линии через неё проходят.

Ответ: 5149, 5146, 5142, 5137, 5131, 5124, 5116, 5107, 5097, 5086, 5074, 5061, 5047, 5032, 5016, 4999, 4981, 4962, 4942, 4921, 4899, 4876, 4852, 4827, 4801, 4774, 4746, 4717, 4687, 4656, 4624, 4591, 4557, 4522, 4486, 4449, 4411, 4372, 4332, 4291, 4249, 4206, 4162, 4117, 4071, 4024, 3976, 3927, 3877, 3826, 3774, 3721, 3667, 3612, 3556, 3499, 3441, 3382, 3322, 3261, 3199, 3136, 3072, 3007, 2941, 2874, 2806, 2737, 2667, 2596, 2524, 2451, 2377, 2302, 2226, 2149, 2071, 1992, 1912, 1831, 1749, 1666, 1582, 1497, 1411, 1324, 1236, 1147, 1057, 966, 874, 781, 687, 592, 496, 399, 301, 202, 102, 1

Вариант 3 задания №6

Король приказал построить в городе метро, причём в нем должно быть 100 линий и любые две линии должны пересекаться ровно в одной общей пересадочной станции.

Кроме того, ровно в одной станции должны сходиться три линии, а больше таких станций быть не должно.

Сколько пересадочных станций придётся построить?

Решение:

Если бы не было станций, через которые проходили бы более двух линий, то в городе должно было бы быть $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$ станций (каждая из линий пересекается с остальными 99, каждое пересечение считается два раза (для одной линии и для другой), поэтому делим на 2).

Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно три линии, то эта пересадочная станция объединяет три двойных, и тогда ответ $4950 - 2 = 4948$.

Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно $k > 3$ линий, то эта пересадочная станция объединяет $\frac{k(k-1)}{2}$ двойных, и тогда ответ $4950 - \frac{k(k-1)}{2} + 1$. Засчитывались все ответы, получающиеся по этой формуле при $k \in \{3, 4, 5, ..., 100\}$. Не засчитывались ответы, при которых станций, через которые проходит три или более линий, более одной, т.к. если через станцию проходит $k > 3$ линий, то и 3 линии через неё проходят.

Ответ: 4948, 4945, 4941, 4936, 4930, 4923, 4915, 4906, 4896, 4885, 4873, 4860, 4846, 4831, 4815, 4798, 4780, 4761, 4741, 4720, 4698, 4675, 4651, 4626, 4600, 4573, 4545, 4516, 4486, 4455, 4423, 4390, 4356, 4321, 4285, 4248, 4210, 4171, 4131, 4090, 4048, 4005, 3961, 3916, 3870, 3823, 3775, 3726, 3676, 3625, 3573, 3520, 3466, 3411, 3355, 3298, 3240, 3181, 3121, 3060, 2998, 2935, 2871, 2806, 2740, 2673, 2605, 2536, 2466, 2395, 2323, 2250, 2176, 2101, 2025, 1948, 1870, 1791, 1711, 1630, 1548, 1465, 1381, 1296, 1210, 1123, 1035, 946, 856, 765, 673, 580, 486, 391, 295, 198, 100, 1

Задание №7. Змей Горыныч

Вариант 1 задания №7

Змей Горыныч поймал Ивана Царевича и сказал ему: "Просто так тебя съедать неинтересно, да и я сейчас не голоден. Лучше я сначала тебя подержу в заточении. Загадай-ка какое-нибудь натуральное число, не превосходящее 3000. Каждый день ты будешь делить оставшееся у тебя число на какое-нибудь натуральное, большее 1, и чтобы результат деления был целым. Делить на одно и то же число два дня подряд нельзя. Как только у тебя получится 1, я тебя съем."
Какое число нужно загадать Ивану Царевичу, чтобы как можно дольше продержаться?

Решение:

Посмотрим на количество простых делителей (не обязательно различных) в числе, которое называет Иван. Тогда каждый день это количество простых делителей будет уменьшаться хотя бы на 1. Кроме того, каждый раз число уменьшается как минимум вдвое, а за два дня как минимум вшестеро, так как делить на 2 два дня подряд нельзя.

Таким образом, чтобы продержаться дольше, нужно взять число с максимальным числом простых делителей. Число $2592 = 32 \cdot 81$ позволяет продержаться 9 дней (делим на 2 и на 3, чередуясь). Заметим, что за 8 дней наше число придется разделить как минимум на 6 в четвертой степени (так как за два дня мы делим как минимум на 6). То есть наше число уменьшается в 1296 раз. Тогда после этого мы сможем продержаться только 1 день, и только если будем делить на 2, потому что $3 \cdot 1296$ уже больше 3000. Значит, единственный способ продержаться не менее 9 дней – это взять число $1296 \cdot 2 = 2592$.

Ответ: 2592

Вариант 2 задания №7

Змей Горыныч поймал Ивана Царевича и сказал ему: "Просто так тебя съедать неинтересно, да и я сейчас не голоден. Лучше я сначала тебя подержу в заточении.

Загадай-ка какое-нибудь натуральное число, не превосходящее 16000. Каждый день ты будешь делить оставшееся у тебя число на какое-нибудь натуральное, большее 1, и чтобы результат деления был целым. Делить на одно и то же число два дня подряд нельзя. Как только у тебя получится 1, я тебя съем."
Какое число нужно загадать Ивану Царевичу, чтобы как можно дольше продержаться?

Решение:

Посмотрим на количество простых делителей (не обязательно различных) в числе, которое называет Иван. Тогда каждый день количество простых делителей будет уменьшаться хотя бы на 1. Кроме того, каждый раз число уменьшается как минимум вдвое, а за два дня как минимум вшестеро, так как делить на 2 два дня подряд нельзя.

Таким образом, чтобы продержаться дольше, нужно взять число с максимальным числом простых делителей. Число $15552 = 64 \cdot 243$ позволяет продержаться 11 дней (делим на 2 и на 3, чередуясь). Заметим, что за 10 дней наше число придется разделить как минимум на 6 в пятой степени (так как за два дня мы делим как минимум на 6). То есть наше число уменьшается в 7776 раз. Тогда после этого мы сможем продержаться только 1 день, и только если будем делить на 2, потому что $3 \cdot 7776$ уже больше 16000. Значит, единственный способ продержаться не менее 11 дней – это взять число $7776 \cdot 2 = 15552$.

Ответ: 15552

Вариант 3 задания №7

Змей Горыныч поймал Ивана Царевича и сказал ему: "Просто так тебя съедать неинтересно, да и я сейчас не голоден. Лучше я сначала тебя подержу в заточении. Загадай-ка какое-нибудь натуральное число, не превосходящее 500. Каждый день ты будешь делить оставшееся у тебя число на какое-нибудь натуральное, большее 1, и чтобы результат деления был целым. Делить на одно и то же число два дня подряд нельзя. Как только у тебя получится 1, я тебя съем."
Какое число нужно загадать Ивану Царевичу, чтобы как можно дольше продержаться?

Решение:

Посмотрим на количество простых делителей (не обязательно различных) в числе, которое называет Иван. Тогда каждый день количество простых делителей будет уменьшаться хотя бы на 1. Кроме того, каждый раз число уменьшается как минимум вдвое, а за два дня как минимум вшестеро, так как делить на 2 два дня подряд нельзя.

Таким образом, чтобы продержаться дольше, нужно взять число с максимальным числом простых делителей. Число $432 = 16 \cdot 27$ позволяет продержаться 7 дней (делим на 2 и на 3, чередуясь). Заметим, что за 6 дней наше число придется разделить как минимум на 6 в третьей степени (так как за два дня мы делим как минимум на 6). То есть наше число уменьшается в 216 раз. Тогда после этого мы сможем продержаться только 1 день, и только если будем делить на 2, потому что $3 \cdot 216$ уже больше 500. Значит, единственный способ продержаться не менее 7 дней – это взять число $216 \cdot 2 = 432$.

Ответ: 432

Задание №8. Клеточные уголки

Вариант 1 задания №8

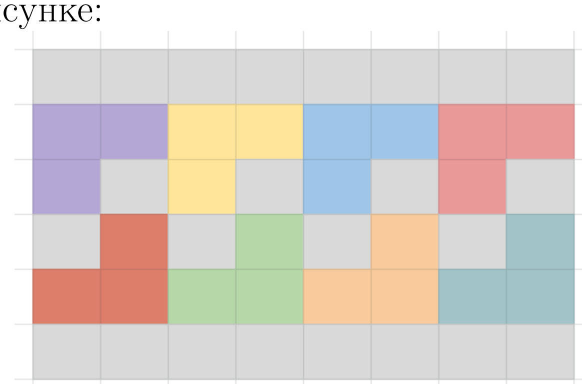
Учительница велела Васе вырезать несколько трёхклеточных уголков из бумажного прямоугольника так, чтобы больше ни одного такого уголка вырезать было нельзя. Вася очень ленивый и хочет вырезать как можно меньше таких уголков.

А вот, кстати, как выглядят трёхклеточные уголки:

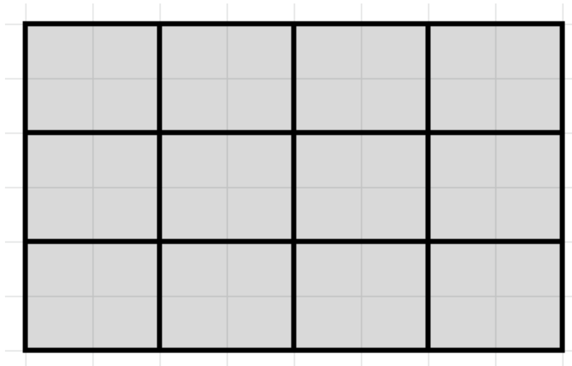
Изначально Васе был дан прямоугольник 6×8 клеточек. Какое минимальное число уголков ему придётся вырезать?

Решение:

Один из вариантов вырезания 8 уголков так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного, показан на рисунке:



Теперь докажем, что если в прямоугольнике размещены 7 уголков, то еще один уголок можно разместить. 7 уголков занимают 21 клетку. Разобьем весь прямоугольник на 12 квадратов 2×2.



Заметим, что в каждом квадрате 2×2 должны находиться как минимум две клетки размещенных уголков, иначе можно было бы разместить еще один уголок. Тогда всего в уголках как минимум $12 \cdot 2 = 24$ клетки, что больше чем 21. Значит, размещенных уголков больше 7.

Ответ: 8 уголков

Вариант 2 задания №8

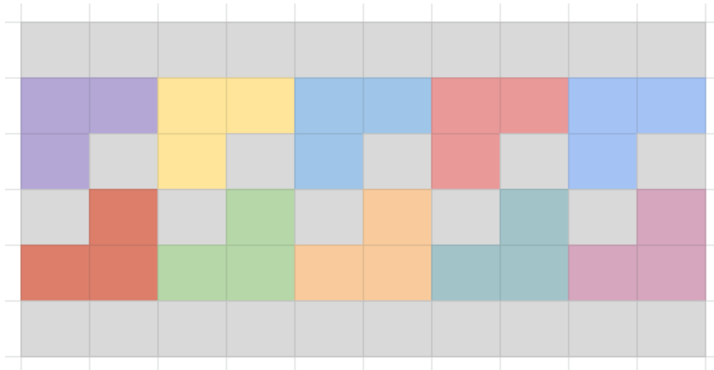
Учительница велела Васе вырезать несколько трёхклеточных уголков из бумажного прямоугольника так, чтобы больше ни одного такого уголка вырезать было нельзя. Вася очень ленивый и хочет вырезать как можно меньше таких уголков.

А вот, кстати, как выглядят трёхклеточные уголки:

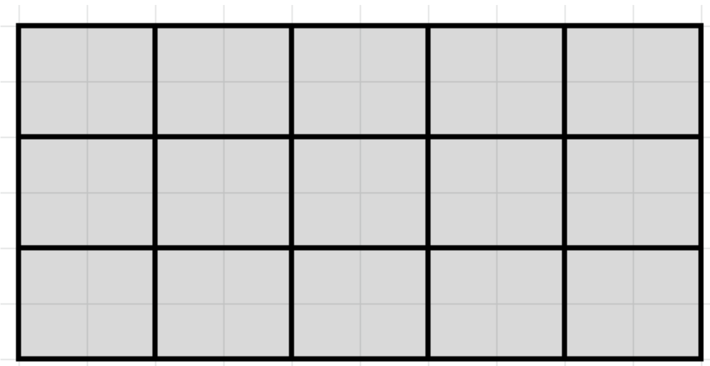
Изначально Васе был дан прямоугольник 6×10 клеточек. Какое минимальное число уголков ему придётся вырезать?

Решение:

Один из вариантов вырезания 10 уголков так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного, показан на рисунке:



Теперь докажем, что если в прямоугольнике размещены 9 уголков, то еще один уголок можно разместить. 9 уголков занимают 27 клеток. Разобьем весь прямоугольник на 15 квадратов 2×2.



Заметим, что в каждом квадрате 2×2 должны находиться как минимум две клетки размещенных уголков, иначе можно было бы разместить еще один уголок. Тогда всего в уголках как минимум $15 \cdot 2 = 30$ клеток, что больше чем 27. Значит, размещенных уголков больше 9.

Ответ: 10 уголков

Вариант 3 задания №8

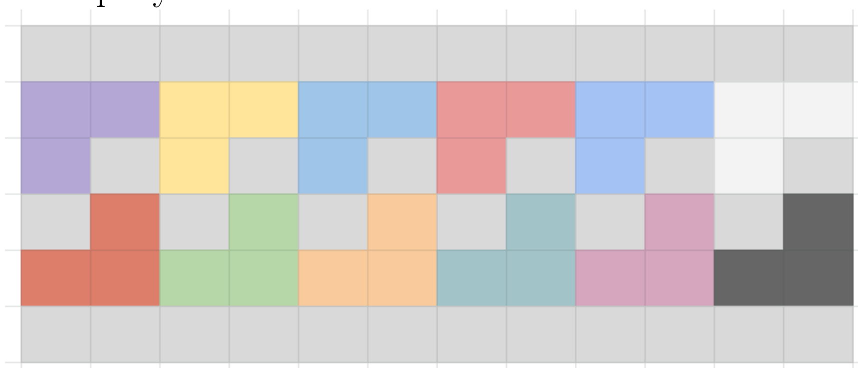
Учительница велела Васе вырезать несколько трёхклеточных уголков из бумажного прямоугольника так, чтобы больше ни одного такого уголка вырезать было нельзя. Вася очень ленивый и хочет вырезать как можно меньше таких уголков.

А вот, кстати, как выглядят трёхклеточные уголки:

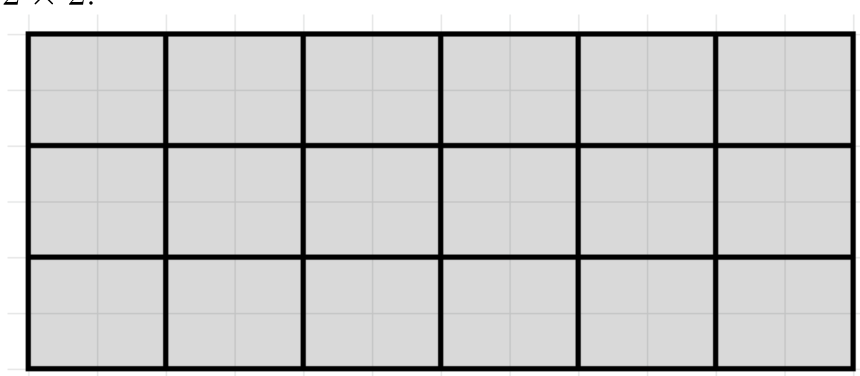
Изначально Васе был дан прямоугольник 6×12 клеточек. Какое минимальное число уголков ему придётся вырезать?

Решение:

Один из вариантов вырезания 12 уголков так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного, показан на рисунке:



Теперь докажем, что если в прямоугольнике размещены 11 уголков, то еще один уголок можно разместить. 11 уголков занимают 33 клеток. Разобьем весь прямоугольник на 18 квадратов 2×2.



Заметим, что в каждом квадрате 2×2 должны находиться как минимум две клетки размещенных уголков, иначе можно было бы разместить еще один уголок. Тогда всего в уголках как минимум $18 \cdot 2 = 36$ клеток, что больше чем 33. Значит, размещенных уголков больше 11.

Ответ: 12 уголков